10.20378/irb-59253

Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?!

von Kathrin Akinwunmi und Miriam Lüken

Kein Inhaltsbereich wird in der Curriculumsentwicklung so kontrovers diskutiert wie der Bereich Muster *und* Strukturen *und kein Inhaltsbereich wirft für Forschung und Praxis so viele Fragen auf. Um ihn besser fassen zu können, konkretisieren wir zunächst die schillernden Begriffe Muster und Struktur, um darauf aufbauend grundlegende empirische Studien vorzustellen. Wir schließen mit einem Ausblick auf bestehende Forschungsdesiderate und notwendige Weiterarbeit bezüglich dieses Inhaltsbereichs.*

Schlüsselwörter: Muster, Struktur, Bildungsstandards, kindliche Kompetenzentwicklung

1 Einleitung & Problemaufriss

Es entbehrt nicht einer gewissen Ironie, die empirische Fundierung eines Inhaltsbereichs vorzustellen, der in den Lehrplänen von zwei Dritteln (11 von 16) aller Bundesländer als Inhaltsbereich fehlt. Muster und Strukturen befinden sich als Inhaltsbereich in einem Spannungsfeld, das Steinweg (2014) treffend als „zwischen überall und nirgends" beschreibt. Einerseits stellen Muster und Strukturen ein fachliches Grundkonzept des Mathematikunterrichts dar (Wittmann & Müller, 2007) und das Wesen der Mathematik selbst kann als Wissenschaft der Muster beschrieben werden (Devlin, 1998; Sawyer, 1964). Aus dieser Perspektive sind Muster und Strukturen ein integrativer Bestandteil aller Inhaltsbereiche und müssen nicht als eigenständiger Inhaltsbereich ausgewiesen werden. Eine zu starke Forcierung dieser Sicht birgt jedoch Gefahren der „Generalisierung", denn Muster und Strukturen wirken

> *so unerschöpflich, aber auch unüberschaubar, dass Aktivitäten gar nicht mehr genauer analysiert werden müssen, da Muster überall sind. Unterrichtsinhalte werden willkürlich und das Label Muster […] verschwimmt* (Steinweg, 2014, S. 62).

Als Gegenpol beschreibt Steinweg andererseits die Gefahr einer „Exemplifizierung" von Mustern und Strukturen, wenn isoliert prototypische Musteraktivitäten zur vereinzelten Thematisierung genutzt werden. Dies wird wiederum nicht der fachlichen Bandbreite und der Bedeutung von Mustern und Strukturen gerecht. Dieses bislang nicht aufgelöste Spannungsfeld hat zur Folge, dass der Inhaltsbereich bezüglich der Ausformulierung von Schwerpunkten und Kompetenzen kontrovers diskutiert wird. Muster und Strukturen sind weiterhin schillernde Begriffe, die sich aufgrund ihrer breiten Nutzung klarer Definitionen entziehen. Dies wiederum erschwert sowohl empirische Erforschung als auch die Weiterentwicklung von Unterrichtsangeboten zu Mustern und Strukturen.

In diesem Beitrag möchten wir in Abschnitt 2 zunächst eine Begriffsschärfung vornehmen, auf deren Grundlage in den Abschnitten 3 und 4 dann empirische Forschungen vorgestellt werden. Abschließend greifen wir erneut die aktuelle Diskussion um das Thema Muster und Strukturen in den Curricula auf und schließen mit einem Ausblick auf notwendige Weiterarbeit.

2 Muster und Struktur – eine Begriffsschärfung

Ein definitorisches Unterscheiden auf Basis der verschiedenen nationalen und internationalen Perspektiven auf die Begriffe *Muster* und *Struktur* scheint uns ein erster notwendiger Schritt und gleichzeitig aber auch ein schwieriges Unterfangen zu sein. Die Beschreibung ist an dieser Stelle als Vorschlag zur Weiterarbeit zu verstehen und kann aufgrund der häufigen und vielfältigen Nutzung der Begriffe mit ihren unterschiedlich tradierten Konnotationen sicherlich nicht allen existierenden Vorschlägen in der Literatur gerecht werden. Wir differenzieren zwischen diesen beiden Begriffen in Einklang mit Lüken (2012) und Steinweg (2020).

Muster verstehen wir in einem weiten Sinne, als jegliche Art von wahrnehmbaren Regelmäßigkeiten (Devlin, 1998; Sawyer, 1964). Dabei entstehen Muster durch regelmäßige Wiederholungen (sich wiederholende Muster: symmetrische Figuren, dekadisch strukturierte Anschauungsmittel, periodische Dezimalbruchentwicklungen etc.) oder auch regelmäßige Veränderungen (wachsende Muster: regelmäßige Folgen ähnlicher Figuren, figurierte Zahlen, schöne Päckchen etc.) von (mathematischen) Objekten (Lüken, 2012).

Im Gegensatz dazu bilden *Strukturen* eine nicht direkt als Phänomen wahrnehmbare Basis für die Bildung von Mustern. Struktur verstehen wir als mathematisch festgelegte Eigenschaften und Relationen (Steinweg 2020), die so die Architektur des Musters darstellen (Venkat, Askew, Watson, & Mason, 2019).

Bildlich gesprochen lässt sich jedes Muster entlang seiner Regelmäßigkeiten „zusammenfalten" und auf die es erzeugende Struktur zurückführen. Steinweg (2020) beschreibt Muster in einem Lernkontext allegorisch als Tür-Öffner zu mathematischen Strukturen. In dem das phänomenologisch zugängliche Muster beschrieben, fortgesetzt, gebildet und insbesondere begründet wird, kann die Tür zu der dahinterliegenden Struktur geöffnet und ein Blick auf die Grundlage für die Entstehung des Musters geworfen werden.

Muster und Strukturen stehen entsprechend in einer unauflöslichen, wechselseitigen Beziehung (vgl. Abb. 1).

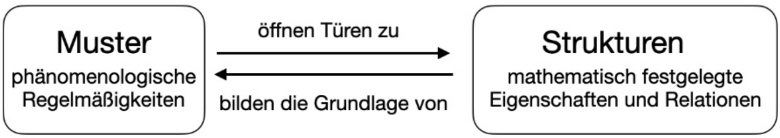

Abb. 1 Muster und Strukturen (nach Akinwunmi & Steinweg, 2022)

Mit Blick auf den Inhaltsbereich lässt sich nun natürlich nach den Strukturen fragen, die für den Mathematikunterricht der Grundschule wesentlich sind. Besonders gewinnbringend scheint hier die Ordnung von Steinweg (2020, S. 42) zu sein, die strukturelle Eigenschaften von „Objekten und Ordnungen", „Operationen und Äquivalenzen" sowie „Funktionen" unterscheidet. Diese Klassifizierung schafft Bewusstheit darüber, welche oft ineinandergreifenden Strukturen als Basis eines Musters bedeutsam sind und sie wird exemplarisch in den Abschnitten 3 und 4 aufgegriffen, wenn die dortigen Strukturen eingeordnet werden.

3 Musterkompetenzen von Kitakindern und Erstklässler*innen

Beginnend bei jungen Kindern des Elementarbereichs erfolgt nun ein Blick auf die Studienlage zu kindlichen Muster- und Strukturkompetenzen. Wir nähern uns diesen von der Phänomenebene, also den Mustern aus und schauen, wenn möglich, inwiefern auch die jeweils zugrundeliegenden Strukturen berührt werden.

3.1 Kindergartenkinder bilden geometrische Muster

In den Bildungsgrundsätzen für Kinder von 0-10 Jahren in Kita und Schule in NRW wird auf ein „intuitives Gespür für Muster und Regelmäßigkeiten“ von Kindern verwiesen (Ministerien NRW, 2018, S. 114). Dass bereits junge Kinder von sich aus – also ohne gezielte Aufforderung von außen – Muster bilden, zeigt eine Studie mit Kitakindern (n=51; 2;2 Jahre – 6;9 Jahre; Lüken, 2021), die während Freispielphasen beobachtet und deren Bauwerke (unter Bauwerken werden in dieser Studie alle mit Gegenständen gebildeten Objekte, Bilder und Figuren verstanden) fotografiert wurden. Die Hälfte aller Bauwerke waren Muster. Diese Kategorie enthielt sowohl durch Kongruenzabbildungen entstandene sich wiederholende Musterfolgen und Parkette, als auch achsen- und drehsymmetrische Figuren und Körper sowie aus Ähnlichkeitsabbildungen entstandene wachsende Muster. Die jüngsten Kinder, die Muster bildeten, waren 2;5 Jahre alt. Drehsymmetrische und wachsende Muster wurden von den ältesten Kindern des Samples gebildet. 38 % der Bauwerke lag keine mathematische Regelmäßigkeit zugrunde. Darüber hinaus waren 12 % der gebildeten Objekte Klassifikationen, bei denen die Kinder zwar eine Regel wiederholt anwendeten, die Gegenstände jedoch nicht mathematisch regelmäßig anordneten (z. B. alle blauen Knöpfe auf einen Haufen).

Auch in der Studie von Wijns, De Smedt, Verschaffel und Torbeyns (2020) zum Konzept des „Spontaneous focus on pattern“, in der 4- bis 5-jährige Kindergartenkinder (n=378) gebeten wurden, einen Turm aus Lego-Duplo-Steinen in drei Farben zu bauen, entstanden neben zufälliger Anordnung der Farben im Turm auch Muster und eine Klassifikation nach Farben. Wijns et al. (2020) wiesen außerdem nach, dass Kinder, die spontan ein Muster bildeten, signifikant besser in einem Test zur Zahlbegriffsentwicklung abschnitten als die Kinder, die nach Farbe sortierten oder kein Muster bildeten.

Beide Studien zeigen: Viele, aber nicht alle jungen Kinder bilden Muster. Außerdem ist nicht ersichtlich, ob ein Muster zufällig entstanden ist oder bewusst gebildet wurde und inwiefern sich die Kinder der zugrundeliegenden *Struktur* bewusst sind.

3.2 Strategien bei sich wiederholenden Musterfolgeaufgaben

Inzwischen gibt es eine breite empirische Basis zu Kompetenzen von 3- bis 7-Jährigen bezüglich sich wiederholender Musterfolgen (Lüken & Sauzet, 2021; Rittle-Johnson, Fyfe, McLean, & McEldoon, 2013; Wijns, Torbeyns, Bakker, De Smedt, & Verschaffel, 2019). Diese Art Muster entsteht aus einer Grundfigur (z. B. drei Würfel in den Farben grün, lila und orange), die durch die geometrische Operation der Translation wiederholt aneinander gereiht wird. Die durchschnittlichen Lösungsraten beispielsweise beim Fortsetzen einer Musterfolge mit einer Grundfigur aus drei Elementen steigen von 7 % bei den Dreijährigen auf 93 % bei Kindern am Ende des ersten Schuljahres (Lüken, 2020; Lüken & Sauzet, 2021). Psychologische Studien zu dieser Thematik zeigen, dass Kompetenzen im Umgang mit Musterfolgeaufgaben mit einer Reihe von kognitiven Fähigkeiten, insbesondere mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen (räumliche Beziehungen) und mit dem visuell-räumlichen Arbeitsgedächtnis korrelieren, Musterfolgekompetenzen insgesamt jedoch einen eigenständigen Faktor darstellen, der nicht in den anderen Fähigkeitsbereichen aufgeht (Rittle-Johnson, Zippert, & Boice, 2019; Wijns et al., 2019).

Auch wenn wir viel darüber wissen, wie gut junge Kinder mit Musterfolgen umgehen können, gibt es weniger empirische Forschung zu der Frage, inwiefern junge Kinder dabei einen Blick hinter die Tür werfen, d. h. inwiefern sie die *Struktur* von sich wiederholenden Musterfolgen bei Musterfolgeaktivitäten fokussieren und nutzen. Hierzu befragte Lüken (2020; Lüken & Sauzet, 2021) n=254 3- bis 7-Jährige nach ihren Strategien bei acht unterschiedlichen Musterfolgeaktivitäten (z.B. Nachbauen, Reparieren, Fortsetzen, Übersetzen). Vier grundlegend verschiedene Herangehensweisen lassen sich unterscheiden:

1) Strategien, die sich weder auf die Struktur der Musterfolge noch auf irgendeine Regelmäßigkeit innerhalb der Musterfolge beziehen (z. B. Raten, zufällige Auswahl, Auswahl aufgrund von Vorlieben).
2) Strategien, bei denen die Kinder Einzelelemente der Musterfolge bewusst unterscheiden und klassifizierend sowie vergleichend vorgehen (z. B. Elemente in Eins-zu-eins-Zuordnung anlegen).

3) Strategien, bei denen die Reihenfolge der Elemente fokussiert und eine stark rekursive Herangehensweise gezeigt wird (z. B. die Elemente rhythmisch nacheinander „aufsagen“).
4) Strategien, die sich auf die Grundfigur und ihre Wiederholung beziehen (z. B. *„Ich seh‘ einen Grünen, einen Lilanen und einen Orangen. Die sind immer drei und dann fängt es wieder so an.“*).

In den Kategorien 2 und 3 werden Kompetenzen sichtbar, die sich auf das Erkennen und Ausdrücken von Regelmäßigkeiten der Musterfolge beziehen, während sich in Kategorie 4 sogar schon eine erste Strukturfokussierung erkennen lässt. In einer sich wiederholenden Musterfolge entstehen die Regelmäßigkeiten durch eine Translation der Grundfigur. Es sind die Eigenschaften der Translation, welche den Charakter der Musterfolge prägen (bei einer wiederholten Spiegelung z. B. würde ein ganz anderes Muster entstehen). Lernende des untersuchten Alters können diese Struktur mit ihren sprachlichen Mitteln allenfalls andeuten *„Die sind immer drei und dann fängt es wieder so an“*.

Dreijährige zeigen hauptsächlich Strategien aus Kategorie 1 (92 %), Ende Klasse 1 sind rekursive Strategien die häufigsten (Kategorie 3, 48 %). Mit Blick auf eine Strukturnutzung (Kategorie 4) ist auch ohne gezielte Instruktion eine Entwicklung von 1 % aller Strategien aus Kategorie 4 bei den Dreijährigen, zu 8 % vor der Einschulung, bis auf 17 % Ende des ersten Schuljahres zu sehen. Angesichts der Tatsache, dass sich wiederholende Musterfolgen in den meisten Mathematikbüchern als Thema im ersten Schuljahr vorgesehen sind, scheint der Anteil der Erstklässler*innen, die die zugrundeliegenden Strukturen beschreiben und nutzen, jedoch eher gering zu sein.

3.3 Erstklässler*innen bilden arithmetische Muster

Im Rahmen ihres Dissertationsprojekts zur individuellen mathematischen Kreativität stellte Bruhn (2020) Erstklässler*innen (n=18) offene Aufgaben mit arithmetischem Inhalt (z. B. Finde Aufgaben mit der Zahl 4.) und befragte die Kinder nach ihren Ideen für den jeweils produzierten Zahlensatz. Neben „frei-assoziierten Ideen“, die unzusammenhängende, schöpferische Einfälle wiederspiegeln, konnte Bruhn drei weitere Ideentypen beobachten, bei denen die Kinder die produzierten Zahlensätze über Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen miteinander in Verbindung brachten – die Kinder bildeten unterschiedliche Arten von Mustern. Bei den „klassifizierenden Ideen" besteht eine Verbindung zwischen den Zahlensätzen in dem Sinn, dass sie aufgrund eines Merkmals sortiert wurden (*„Immer die 4 vorne."* *„Ich mach immer Plusaufgaben."*). Oft brachten die Erstklässler*innen Zahlensätze miteinander in Verbindung, indem sie wachsende Musterfolgen aufgrund einer im Zahlensatz enthaltenen Zahl bildeten (*„3+**1**=4, **2**+2=4, **3**+4=7, 14-**4**=10"*). Bei diesen „muster-bildenden Ideen" handelt es sich um Muster auf Zahlenebene. Im Gegensatz dazu entstehen aus „struktur-nutzenden Ideen" arithmetische Muster, bei denen die Kinder strukturelle Eigenschaften der Addition und Subtraktion (wie Kommutativität, Reversibilität, Konstanz des Ergebnisses) nutzen, um von einem Zahlensatz auf den nächsten zu schließen. So erklären die Kinder die Verbindung von Zahlensätzen über z. B. Tauschaufgaben, Umkehraufgaben oder Nachbaraufgaben.

Bruhn konnte zeigen, dass Kinder mit hohen Werten in einem standardisierten Mathematiktest sowie einem Intelligenztest keine musterbildenden und häufiger struktur-nutzende Ideen generierten als das restliche Sample. Kinder mit niedrigen Werten im Mathematiktest zeigten hingegen fast keine struktur-nutzenden Ideen.

3.4 Zwischenfazit

Objekte der Lebenswelt zu ordnen und daraus Muster zu bilden, scheint ein menschliches Verhalten zu sein, das sich auch ohne Instruktion bei vielen jungen Kindern entwickelt. Aus der Zusammenschau der Studien zu kindlichen Musterkompetenzen lassen sich inhaltsunabhängige (Teil-)Kompetenzen für das Wahrnehmen und Bilden von Mustern ableiten. Als bedeutsam erscheinen die vergleichende Suche nach Ähnlichkeiten und Unterschieden, das Klassifizieren nach qualitativen und quantitativen Merkmalen, das räumliche (An-)Ordnen sowie die Bildung von Teilmengen (groupitizing) (siehe hierzu Sprenger & Benz, 2020) und Bündelungen (unitizing). Eine systematische Erforschung der Entwicklung und des Zusammenspiels dieser Kompetenzen steht noch aus. Die referierten Studien zeigen aber auch: Trotz teilweise hoher Musterkompetenzen scheinen verhältnismäßig wenige Kinder im Elementarbereich einen Blick hinter die Kulissen des Musters auf die zugrundeliegende Struktur zu werfen. Dies könnte auf eine natürliche Entwicklung in diesem Bereich oder auf noch fehlende Möglichkeiten der Versprachlichung hindeuten. Beides wäre in weiteren Studien zu belegen, wobei neuere Forschungsmethoden einbezogen werden sollten (siehe auch hier Sprenger & Benz, 2020).

4 Dritt- und Viertklässler*innen verallgemeinern Muster und Strukturen

Nach dem Blick auf den Elementarbereich und die Schuleingangsphase betrachten wir in diesem Abschnitt ältere Kinder am Ende der Grundschulzeit und somit vermehrt auch die Ebene der Strukturen. Eine besondere Bedeutung kommt dabei dem Prozess des Verallgemeinerns von Mustern und Strukturen zu.

4.1 Ein erster Blick auf Verallgemeinerungsprozesse

In einer früheren Untersuchung zum algebraischen Denken rekonstruiert Akinwunmi (2012) kindliche Verallgemeinerungen von mathematischen Mustern. Sie stellt dabei unter anderem heraus, welche linguistischen Mittel die Lernenden beim Beschreiben und Begründen von Mustern nutzen. Die folgende Auflistung gibt eine Übersicht über verschiedene Verallgemeinerungsweisen, die nicht als Niveaustufen, sondern lediglich als Möglichkeiten zur Kommunikation über Muster verstanden werden dürfen. Sie werden von den Lernenden ebenso in Mischformen in der Interaktion aufgabenübergreifend genutzt.

- **Angabe eines Beispiels**: Lernende geben ein Beispiel an und kennzeichnen dieses dabei explizit als solches („*Das ist zum Beispiel drei mal drei*“).
- **Aufzählung mehrerer Beispiele**: Lernende zählen mehrere Beispiele auf und verweisen ggf. auf einen Fortlauf („*Das ist ein mal eins, zwei mal zwei, drei mal drei und so weiter*“).
- **Quasi-Variablen:** Lernende verwenden konkrete Zahlen und verbinden diese mit sprachlich verallgemeinernden Elementen („*Ich rechne immer drei mal drei*“).

- **Bedingungssätze:** Lernende verwenden Bedingungssätze. („*Wenn da drei steht, dann rechne ich drei mal drei*“).
- **Variablen:** Lernende verwenden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter („*Man muss die Zahl mal die gleiche Zahl rechnen.*“ oder „*? · ?*“).

Zwar weisen die ersten vier Verallgemeinerungsweisen Grenzen der Allgemeingültigkeit auf, dennoch verdeutlichen sie jeweils den allgemeinen Charakter des Musters und schaffen Bezüge zu den wahrnehmbaren Regelmäßigkeiten. Auch internationale Studien bestätigen, dass Lernende in der Primarstufe bereits vor der Einführung der algebraischen Formelsprache mit Hilfe ihrer eigenen sprachlichen Mittel in der Lage sind, Muster zu verallgemeinern (u. a. Radford, 2018).

Gleichzeitig zeigte sich in der Studie von Akinwunmi (2012) jedoch auch, dass die kindlichen Verallgemeinerungen kein hinreichender Indikator für das strukturelle Verständnis innerhalb von Argumentationen der Lernenden sind. In der qualitativen Analyse von Argumentationsprozessen konnte gezeigt werden, dass ein Verständnis von strukturellen Zusammenhängen nicht auf der Basis der verwendeten Verallgemeinerungen identifizierbar ist.

4.2 Verallgemeinern mit Fokus auf Muster oder auf Struktur

Die in Abschnitt 2 dargelegte Unterscheidung von *Muster* und *Struktur* gibt deshalb Anlass zu einer erneuten vertieften Analyse von Verallgemeinerungsprozessen. In einem Projekt zum algebraischen Denken untersuchen Akinwunmi und Steinweg (2022) Verallgemeinerungsprozesse von Grundschulkindern mit dem Ziel, ein strukturelles Verständnis in den Begründungsprozessen zu Operationseigenschaften zu rekonstruieren. Vorgestellt werden in diesem Beitrag Ergebnisse einer Teilstudie, in der 45 Lernende der dritten bis vierten Jahrgangsstufe zu Konstanzeigenschaften der Summe und der Differenz befragt werden, wobei in diesem Beitrag direkt auf die Konstanz der Differenz fokussiert wird.

Der Aufbau der Interviews beinhaltet zwei Teile: Zunächst werden die Lernenden mit einer symbolischen Darstellung in Form eines „schönen Päckchens“ mit einem Muster konfrontiert (u. a. Abb. 2, links).

Anschließend werden sie mit ikonischen Impulsen zu Darstellungswechseln angeregt (u. a. Abb. 2, rechte Seite).

Abb. 2 Zwei Aufgabenausschnitte aus dem Interview zur Konstanz der Differenz (rechts aus Zahlenbuch 1: Nührenbörger et al., 2017, S. 89 , ©Ernst Klett Verlag GmbH)

Als phänomenologische Regelmäßigkeiten sind in diesem Aufgabenbeispiel die simultane gleichsinnige Veränderung von Minuend und Subtrahend sowie die Konstanz der Differenz erfassbar. Die dem Muster zugrunde liegende Struktur basiert auf Eigenschaften von *Operationen* (siehe Abschnitt 2). Die Konstanz der Differenz ergibt sich mathematisch aufgrund der Reversibilität der Operation, also auf der Grundlage, dass zwischen Addition und Subtraktion eine Beziehung als Umkehroperationen besteht, welche folglich bei simultaner gleichsinniger Veränderung von Minuend und Subtrahend zum neutralen Element führt und so keine Veränderung in der Differenz herbeiführt.

Studien (z. B. Häsel-Weide, 2016; Link, 2012) zeigen, dass Lernende bei der Thematisierung solcher Aufgabenserien jedoch oftmals auf der phänomenologischen Muster-Ebene stehen bleiben, die Aufmerksamkeit bei solchen Aufgabenserien stark auf die Veränderungen zwischen Zahlen richten und dabei der zum Verständnis wichtige Fokus auf die Operationen und Aufgabenbeziehungen verloren geht.

Die in den videografierten Interviews entstandenen Transkripte werden mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks von Steinbring (2005) analysiert, wodurch an die epistemologisch orientierte Analyse von Verallgemeinerungsprozessen aus der Studie von Akinwunmi (2012) angeknüpft wird.

Es zeigt sich, dass sich der im Theorierahmen dargestellte Unterschied zwischen Mustern und Strukturen auch empirisch in den Verallgemeinerungsprozessen als unterschiedliche Fokussierungen wiederfinden lässt. Dies wird im Folgenden zunächst anhand einer Beispielszene erläutert, bevor weitere Ergebnisse zusammenfassend dargestellt werden.

Vorgestellt werden hier zwei kurze Ausschnitte aus dem Interview mit dem Viertklässler Nils. Bei diesem lassen sich zu Beginn des Interviews bei der Konfrontation mit den symbolisch vorgelegten schönen Päckchen ausschließlich Verallgemeinerungen finden, die sich auf oberflächliche Regelmäßigkeiten beziehen. Auf die veränderlichen Zahlen des Päckchens verweist er zunächst bei der Beschreibung mit Hilfe der Wortvariablen links und rechts und begründet dann auf Nachfrage das Gleichbleiben des Ergebnisses wie folgt:

Nils: Weil, wenn man beides minus eins nimmt, das ist ja nicht so wie bei Plus. Also bei beiden minus eins, kommt das gleiche Ergebnis raus, weil – ja, wie soll ich das jetzt erklären.

Nils bleibt nicht beim isolierten Beschreiben der einzelnen Zahlenfolgen stehen, sondern bringt die erkannten Regelmäßigkeiten auch in einen kausalen Zusammenhang. Das Gleichbleiben des Ergebnisses erläutert er als eine ihm bekannte Wirkung der gleichzeitigen Verringerung von Minuend und Subtrahend. Dennoch kann in seiner Erläuterung an dieser Stelle kein strukturelles Verständnis identifiziert (natürlich aber auch nicht abgesprochen) werden. Möglicherweise bezieht er sich in der Aussage und der darin enthaltenen Kontrastierung zu Additionsaufgaben auf empirische Erfahrungen oder herausgearbeitete Regeln aus dem Unterricht.

Als Nils im zweiten Teil des Interviews mit der Schulbuchabbildung (aus Abb. 2) konfrontiert wird, verändert sich seine Argumentation grundlegend. Nils stellt die Handlung des Kindes auf dem Bild enaktiv mit Plättchen nach und wird dann erneut von der Interviewerin zu einer Begründung aufgefordert.

I.: Können dir die Plättchen helfen zu erklären, warum das Ergebnis immer gleich bleibt?

Nils: Also wenn bei beiden was dazukommt, ist einer mehr (*legt ein weiteres zehntes Plättchen*), dafür muss man aber auch dafür einen mehr abziehen. Also kann man eigentlich diesen hier gleich wieder wegnehmen (*nimmt das zehnte Plättchen weg*) und die anderen 4 dazu auch noch (*nimmt die weiteren 4 Plättchen heraus*). Das wären dann 5 Plättchen.

Durch den Darstellungswechsel entsteht eine neue Deutungsanforderung, die Nils dazu veranlasst, die Auswirkungen der gleichsinnigen Erhöhung zu betrachten und zu verallgemeinern. Dabei bezieht er sich in seiner Argumentation auf die Reversibilität von Addition und Subtraktion („*dafür muss man aber auch dafür einen mehr abziehen. Also kann man eigentlich diesen hier gleich wieder wegnehmen*") und somit auf strukturelle Eigenschaften der Operationen, welche die Basis für die Entstehung der Konstanz bilden. Im Vergleich der beiden Szenen fällt auf, dass sich die Verallgemeinerungen von Nils in der ersten Szene auf sichtbare Regelmäßigkeiten und empirisches Wissen beziehen, während er in der zweiten Szene die strukturellen Eigenschaften der Operationen verallgemeinert.

Die hier beschriebenen Erkenntnisse passen sehr gut zu der von Schwarzkopf (2003) herausgestellten Unterscheidung zwischen „empirischen" und „strukturellen" Argumenten, die er in Begründungsprozessen in der Unterrichtsinteraktion rekonstruiert. Während erstere Wissen durch die Überprüfung von Fällen auf der Phänomenebene empirisch absichern, nutzen letztere die zugrunde liegenden Strukturen als Erklärung zur Erzeugung des Phänomens (Schwarzkopf 2003). Die hier beschriebene Studie macht solche strukturellen Argumentationen als Fokussierungen auf die inhaltsspezifischen Eigenschaften von mathematischen Objekten greifbar.

Die Unterscheidung zwischen *Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf Muster* und *Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf Strukturen* erweist sich in dem Algebra-Projekt (Akinwunmi & Steinweg, 2022) auch über die hier beschriebene Teilstudie hinaus als gewinnbringende Perspektive für die empirische Analyse von Begründungsprozessen. Darstellungswechsel auf die ikonische oder enaktive Ebene zeigen sich dabei als potentiell gewinnbringend, um Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf Strukturen anzuregen, gleichwohl aber nicht als hinreichend, denn es lassen sich weiterhin Verallgemeinerungen rekonstruieren, die auf der Musterebene verharren. Ohne strukturellen Fokus nutzen die Lernenden zur Begründung der Entstehung von Regelmäßigkeiten (wie z. B. die Konstanz des Ergebnisses) dann weitere Regelmäßigkeiten an anderer Stelle (z. B. in den Zahlen der Aufgaben) und verbleiben so an der sichtbaren Oberfläche des Musters.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Unser Auftrag erschien zunächst paradox: empirische Forschung zu einem Inhaltsbereich vorzustellen, der selbst noch so kontrovers diskutiert wird und in dem zu Beginn beschriebenen Spannungsfeld steckt. Vielleicht ist unser Anliegen aber gerade deshalb umso wichtiger.

Wir starteten diesen Beitrag in Abschnitt 2 mit einer Charakterisierung der Begriffe *Muster* und *Struktur*. Diese Explizierung ist wichtig, weil sie einen ersten Weg aus der Diffusität zwischen Generalisierung und Exemplifizierung schafft. Sie dient dazu, den Blick auf die wesentlichen Strukturen zu lenken, um diese in den verschiedenen Inhaltsbereichen identifizieren und geeignete Mustertüren schaffen zu können.

Die Ergebnisse der empirischen Studien in Abschnitt 3 stützen die stoffdidaktisch seit langem betonte Bedeutsamkeit eines Verständnisses mathematischer Muster und Strukturen. Durchgängig zeigen bereits junge Kinder hohe Musterkompetenzen im Sinne des Erkennens und Bildens von Regelmäßigkeiten und es konnten hierzu übergeordnete (Teil-)Kompetenzen identifiziert werden (Abs. 3.4). Es wurde jedoch auch deutlich, dass nur wenige junge Kinder einen Fokus auf die Strukturen einnehmen. In Abschnitt 4 wurden Verallgemeinerungsprozesse von älteren Kindern des dritten und vierten Schuljahres betrachtet und bezüglich der Fokussierungen auf Muster oder Strukturen unterschieden. Die Studien zeigen Möglichkeiten auf, wie strukturelles Verständnis auch empirisch gefasst werden kann und liefern damit erste allgemeine Ansätze zur empirischen Untersuchung von Strategien und Prozessen rund um Muster und Strukturen – auch wenn sie sich notwendiger Weise auf ausgewählte Themenfelder beziehen. Sie geben daher Anlass für die weitere Erforschung von Muster- und Strukturkompetenzen innerhalb der verschiedenen Inhaltsbereiche.

Schließen möchten wir diesen Beitrag mit einem Rückbezug auf die Kontroverse bezüglich des Inhaltsbereichs in den Curricula. Dieser Beitrag zeigt die Dualität des Themas Muster und Strukturen auf, die wünschenswerter Weise nicht nur in weiterer Forschung, sondern ebenso in der Entwicklung von Curricula als auch von Lehrerfort- und Weiterbildungen zu berücksichtigen ist. Es erscheint sinnvoll, die charakteristischen Strategien und Prozesse rund um Muster und Strukturen eigenständig auszuweisen, um den Fokus nicht im Spannungsfeld zwischen Generalisierung und Exemplifizierung zu verlieren. Die ausgewiesenen Kompetenzerwartungen dürfen unter keinen Umständen nur auf Musterebene, also beim Erkennen, Beschreiben und Fortsetzen von Regelmäßigkeiten auf Phänomenebene stehen bleiben, sondern müssen den Fokus ebenso auf die Erforschung der dahinterliegenden Strukturen legen. Zusätzlich ist ebenso innerhalb der einzelnen Inhaltsbereiche herauszuarbeiten, was die zentralen strukturellen Eigenschaften der inhaltsspezifischen Gegenstände sind und dafür geeignete Mustertüren auszuwählen bzw. zu entwickeln. Insgesamt ist weitere empirische Forschung und inhaltliche Ausgestaltung des Inhaltsbereichs erforderlich, damit Mustern und Strukturen die Aufmerksamkeit zukommt, die ihrer Bedeutung gerecht wird.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022 / eingereicht). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

Bruhn, S. (2020). Kreativität von Kindern im Umgang mit offenen Aufgaben – eine Analyse arithmetischer Ideen. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 185–188). Münster: WTM.

Devlin, K. (1998). *Muster der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum.

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Strukturfokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern.* Münster: Waxmann.

Lüken, M. (2020, April 17–21). *Broadening the View on Patterning: First Graders' Patterning Skills and Strategies* [Symposium]. AERA Annual Meeting San Francisco, CA. http://tinyurl.com/v4lk86s

Lüken, M. (2021, August 23–27). *Patterning during free play – different materials prompt different mathematical structures* [Symposium]. EARLI 2021 Conference, Gothenburg, Sweden.

Lüken, M. & Sauzet, O. (2021). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 28–48.

Ministerien NRW (2018). *Bildungsgrundsätze für Kinder von 0 bis 10 Jahren in Kindertagesbetreuung und Schulen im Primarbereich in Nordrhein-Westfalen.* Freiburg: Herder.

Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D. & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 1.* Ausgabe 2017. Leipzig: Klett.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (S. 3–25). New York: Springer.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. & McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396.

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L. & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly, 46*, 166–178.

Sawyer, W. W. (1964). *Vision in Elementary Mathematics.* Harmondsworth: Penguin Books.

Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Didaktik der Mathematik*, 3/4, 211–235.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective.* New York: Springer.

Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends – Eine Spurensuche. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *10 Jahre Bildungsstandards: Tagungsband des AK Grundschule in der GDM. Bamberg* (S. 51–66). Bamberg: University Press.

Steinweg, A. S. (2020). Muster und Strukturen: Anschlussfähige Mathematik von Anfang an. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 39–46). Münster: WTM.

Sprenger, P. & Benz, C. (2020). Children's perception of structures when determining cardinality of sets – results of an eye-tracking study with 5-year-old children. *ZDM, 52,* 753–765.

Venkat, H., Askew, M., Watson, A. & Mason, J. (2019). Architecture of mathematical structure. *For the Learning of mathematics 39*(1), 13–17.

Wijns, N., De Smedt, B., Verschaffel, L. & Torbeyns, J. (2020). Are preschoolers who spontaneously create patterns better in mathematics? *British Journal of Educational Psychology, 90*(3), 753–769.

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B. & Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly, 49,* 152–163.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. v. d. Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Dr. Kathrin Akinwunmi
TU Dortmund
Vogelpothsweg 87
44221 Dortmund
kathrin.akinwunmi@tu-dortmund.de

Prof. Dr. Miriam Lüken
Universität Bielefeld
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld
miriam.lueken@uni-bielefeld.de