



Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Charlotte Rechtsteiner
rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de

Beitrag I: Solveig Jensen und Hedwig Gasteiger
solveig.jensen@uos.de hgasteiger@uni-osnabrueck.de

Warum geht das so? Verständnis der Subtraktionsverfahren „Entbündeln“ und „Erweitern“ erfassen

Verständnisorientierter Unterricht bei der Thematisierung schriftlicher Rechenverfahren wird von mathematikdidaktischer (Padberg & Benz, 2021) wie auch curricularer Seite (KMK, 2005) gefordert. Dabei ist allerdings nicht ausreichend geklärt, was Kinder konkret leisten sollen, um ihnen Verständnis attestieren zu können. Im Rahmen einer explorativen Studie (Jensen & Gasteiger, 2019a) sowie in Vorstudien zur Eignung verschiedener Erhebungsmethoden befassten wir uns mit dem Verständnis der beiden Subtraktionsverfahren *Entbündeln* und *Erweitern* (z. B. Jensen & Gasteiger, 2020). Die Überlegungen fließen in die vergleichende Studie im Schuljahr 2021/22 unter Kontrolle des Unterrichts ein, in der auch das Verständnis der Verfahren für ihren Vergleich herangezogen werden soll. Im Rahmen der Arbeitsgruppe Arithmetik soll anhand konkreter Schülerbearbeitungen diskutiert werden, wie das Verständnis der zwei Verfahren gefördert und erfasst werden kann.

1 Mathematische Gründe für das Funktionieren der Verfahren

Beim schriftlichen Subtrahieren werden Minuend und Subtrahend stellengerecht untereinander geschrieben und stellenweise wird von den Einern ausgehend die Differenz bestimmt. Dabei gibt es verschiedene Verfahren für die Differenzbildung und für den Umgang mit der Situation, dass an einer Stelle der Ziffernwert im Minuenden kleiner ist als der im Subtrahenden. Beim *Entbündeln* wird in diesem Fall das Bündelungsprinzip angewendet: Eine der Bündelungseinheiten in der nächst größeren Stelle wird entbündelt. Ist z. B. in der Zehnerspalte der Ziffernwert im Minuenden kleiner als der im Subtrahenden, wird im Minuenden ein Hunderter zu zehn Zehnern entbündelt. Die Differenz der zwei Zahlen wird dadurch nicht verändert, weil ein Hunderter

genauso viel wert ist wie zehn Zehner und somit der Wert des Minuenden gleichbleibt. Beim *Erweitern* wird auf Basis des Gesetzes der Konstanz der Differenz gearbeitet, indem im beschriebenen Fall im Minuenden zehn Zehner und im Subtrahenden gleichzeitig ein Hunderter ergänzt werden. Beide Zahlen werden also um die gleiche Anzahl erhöht und somit ändert sich ihre Differenz nicht.

2 Erklärungen-WARUM als Zugang zum Verständnis der Subtraktionsverfahren

Versteht man Erklärungen von Kindern als Möglichkeit, Einblicke in ihr Verständnis mathematischer Inhalte zu erhalten (Wittmann, 2009), muss jeweils passend herausgearbeitet werden, welche Erklärung für ein Attestieren von Verständnis erwartet wird. Klein (2009) unterscheidet verschiedene Erklärtypen: Beim Erklären-WIE geht es um die Modalität von Prozessen, während ein Erklären-WARUM die Frage nach Ursachen/Gründen beantwortet. Verständnis von Verfahren zeichnet sich laut Vollrath & Roth (2012) u. a. aus durch „wissen, warum es funktioniert“ (S. 49). Von den Kindern wird also im Zusammenhang mit dem Erfassen des Verständnisses der Subtraktionsverfahren ein Erklären-WARUM erwartet, das die in Abschnitt 1 beschriebenen mathematischen Gründe für das Funktionieren der Verfahren darlegt. Wie diese Erklärungen konkret aussehen können, ist aus didaktischer Perspektive zu klären (Klein, 2009) und im Unterricht zu beachten, der die fachlichen Grundlagen für die Erklärungen anbieten muss.

3 Konsequenzen für den Unterricht

Soll Verständnis der Verfahren erreicht werden, muss Hiebert & Carpenter (1992) folgend die Möglichkeit für den Aufbau und die Vernetzung mentaler Repräsentationen geschaffen werden. Anknüpfungspunkte an vorhandenes Wissen, z. B. über das Bündelungsprinzip, können durch Handeln mit passendem Material wie den Zehnerblöcken explizit gemacht werden (ebd.). Weil Erklären ein Sprachhandeln darstellt, ist der Unterricht zudem sprachsensibel zu gestalten (Tiedemann, 2015). Sprachliche und fachliche Lehrziele hängen hier eng zusammen und die Beurteilung von Aussagen muss „sowohl auf sprachlicher als auch auf mathematischer Ebene getroffen werden“ (S. 12).

Zur Unterstützung auf sprachlicher Ebene müssen u. a. die notwendigen Fachbegriffe für ein Erklären-WARUM des jeweiligen Verfahrens angeboten werden. Zu beachten ist überdies, dass beim Erklären-WARUM je nach Kontext unterschiedliche Arten von Gründen herangezogen werden können (Klein, 2009). In unserer explorativen Studie zeigten einige Kinder in Übertragung der Erkenntnisse von Klein (2009) eher ein Alltagsverständnis von Erklären-WARUM (Jensen & Gasteiger, 2019b). In einer der Aufgaben wurde eine Bearbeitung einer schriftlichen Subtraktion abgebildet. Durch eine WARUM-Frage war ein Erklären-WARUM intendiert (Frage beim Entbündeln: „Warum wurde die Sieben durchgestrichen und darüber eine Sechs geschrieben?“; beim Erweitern analog: „Warum wurde die kleine Eins hingeschrieben?“). Einige Kinder bezogen sich in ihren Begründungen auf die Ausgangssituation, dass der Ziffernwert im Minuenden kleiner ist als im Subtrahenden, und gaben sie als Grund für das *Anwenden* der Technik an („Weil 4-8 ja nicht geht“). Im Kontext der schriftlichen Subtraktion erscheint es aber vielmehr sinnvoll, von den Kindern zu fordern, dass sie als Begründung die mathematischen Gesetze heranziehen können, die die jeweilige *Vorgehensweise* erlauben (vgl. Abschnitt 1, Jensen & Gasteiger, 2020). Aufgabe der Lehrkraft ist es also auch, in Unterrichtsgesprächen Impulse in Richtung mathematischer Gründe für das Funktionieren der Verfahren zu geben.

Insgesamt braucht es somit eine Klärung aus normativer Perspektive, welche mathematischen Grundlagen von den Kindern in welcher Form formuliert werden sollen, aber auch, welche Formulierungen erwartet werden können. Im Workshop werden konkrete Schülerbearbeitungen dahingehend diskutiert.

Literatur

- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992): Learning and Teaching with Understanding. In: D. A. Grouws (Hrsg), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 65–97). New York: Macmillan Publishing Co.
- Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019a). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative Studie zu spezifischen Fehlern und zum Verständnis des Algorithmus. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(2), 135–167.

Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019b). Bewertung von Begründungen zu schriftlichen Subtraktionsverfahren. In A. Frank, S. Krauss, & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 1143–1146). Münster: WTM-Verlag.

Jensen, S. & Gasteiger, H. (2020). Das Verständnis von schriftlichen Subtraktionsverfahren durch Erklärungen erfassen. In H.-S. Siller, W. Weigel, & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 465–468). Münster: WTM-Verlag.

Klein, J. (2009). ERKLÄREN-WAS, ERKLÄREN-WIE, ERKLÄREN-WARUM. Typologie und Komplexität zentraler Akte der Welterschließung. In R. Vogt (Hrsg.), *Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven* (S. 25–36). Tübingen: Stauffenberg.

KMK: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005) (Hrsg.). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich* (Jahrgangsstufe 4). München & Neuwied: Luchterhand.

Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik*. 5. Auflage. Berlin: Springer Spektrum.

Tiedemann, K. (2015). Erklären braucht Sprache. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 64(57), 10–12.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wittmann, G. (2009). Erklärsituationen als Schlüssel zu individuellen Konzepten mathematischer Begriffe und Verfahren. Ein Überblick über mathematikdidaktische Forschungsansätze. In J. Spreckels (Hrsg.), *Erklären im Kontext. Neue Perspektiven aus der Gesprächs- und Unterrichtsforschung* (S. 94–118). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.