



Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer und Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-bs.de simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beitrag: Bernd Wollring und Simone Reinhold
wollring@mathematik.uni-kassel.de simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beiträge zur empirischen Fundierung des Geometrieunterrichts in der Grundschule: Freudenthals Fundament, Blitzlichter aus den Jahren 2006 bis 2021 und (notwendige) Perspektiven

1 Fundamentales aus der Feder Freudenthals: Auftakt

Die *Mathematik als pädagogische Aufgabe* zu verstehen, bezieht aus der Perspektive Freudenthals (1973) sowohl fachliche als auch fachdidaktische Aspekte ein, die von Überlegungen um das Wesen der Geometrie als Fachdisziplin ausgehen. Fachliches wird dabei von Freudenthal um eine besondere pädagogisch-psychologische Perspektive ergänzt, so dass sich markante Positionen mit prägnanten Dichotomien ergeben. Für den vorliegenden Beitrag wählen wir dazu exemplarisch Betrachtungen zum Raum bzw. zum Verhältnis von Lebenswelt zur Mathematik aus.

1.1 Raum – Lebenswelt versus Mathematik

Wir erinnern uns zunächst an eine Grundthese des Empirismus: Mit der These „Alle Erkenntnis beruht auf Erfahrung“ ist angesprochen, dass die Ausgangsannahmen einer angewandten Theorie durch experimentelle Erfahrungen gerechtfertigt werden. Treffen dann in der Folge daraus gezogene Schlüsse in der Realität nicht zu, so ist man entweder mit unkorrekten Beobachtungen als Annahmen gestartet oder man hat die Bildungsgesetze der Sachlage unzutreffend mathematisch modelliert. Kennzeichnend für aus Erfahrung gewonnene Erkenntnis ist, dass ihr Fortschreiten nicht nur Neues bringt, sondern auch Altes einordnend revidiert. „Konservative Revolutionen“ kennzeichnen die Naturwissenschaften: Neue Erkenntnisse grenzen Alte ein und integrieren sie in neue Konzepte. Der entscheidende Unterschied von Mathematik und Naturwissenschaft besteht darin, dass man in den letzteren stets bereit sein muss Erkenntnisse aufgrund

neuer Erfahrungen zu revidieren oder zu erweitern, in der ersteren dagegen Revisionen nicht benötigt, wohl aber Erweiterungen.

1.2 Positionierung Freudenthals und Einordnung

Was kann dies für die Begegnung von Kindern mit ihrem Lebensraum und einer darauf ausgerichteten geometrischen Auseinandersetzung bedeuten? Freudenthal (1973, S. 376–377) merkt dazu an:

Und da wir von Erziehung des Kindes sprechen, ist es die Erfassung des Raumes, in dem das Kind lebt, atmet, sich bewegt, den es kennen lernen muss, den es erforschen und erobern muss, um besser in ihm leben, atmen und sich bewegen zu können. (...)

Ach ja, er [der Raum] möge ja wichtig sein – wird man [Mathematiker] mir entgegnen –, aber nicht für die Geometrie; Geometrie ist ja Mathematik, und die verlangt solidere Grundlagen als einen Lebensraum, der – als Interessenobjekt der Physiker – dem wahren Mathematiker schon überhaupt verdächtig ist.

Freudenthal formuliert eine Position von Mathematikern hier sehr überspitzt, wohl mit der Intention, die zu kritisieren, die im Sinne eines Hilbert'schen Formalismus denken und für eine von ihnen akzeptierte Geometrie „solidere Grundlagen“ verlangen. Dahinter steht die Position, das logische Gefüge einer solchen Mathematik müsse konsistent sein, ganz unabhängig davon, ob den Begriffen und Aussagen eine materiale Bedeutung zu kommt.

Im Unterricht zur Geometrie in der Schule kann man sich von Erfahrungen zu geometrischen Phänomenen zunächst nicht freimachen. Und von der Prüfung geometrischer Konstruktionen daraufhin, ob sie für die Lebensraum Erklärungskraft besitzen auch nicht: Grundschul-Geometrie ist zum großen Teil „Erfahrungs-Geometrie“. Mathematikdidaktisches Ziel ist ein zunehmendes Anreichern und Durchdringen mit Argumenten.

Die Bedeutung der Geometrie für Grundschul Kinder beruht darauf, dass sie eine Sprache zum Erschließen ihres Lebensraumes bietet und einen Vorrat von Strukturen, die man zum Modellieren dieses Lebensraumes und seiner Phänomene nutzen kann. Ähnlich wie „subjektive Erfahrungsbereiche“ bilden sich zur Geometrie „subjektive Argumen-

tationsbereiche“, Wissensfelder, die zunehmend durch Argumentieren an geometrischen Objekten strukturiert sind. Dabei gibt es durchaus Bereiche, die nur „teilexakt sind“, noch nicht ganz, sondern nur teilweise von Argumenten durchstrukturiert.

2 Forschung zur Geometriedidaktik (2006 bis 2021)

Inwiefern bieten diese Positionen Freudenthals auch heute noch Anhaltspunkte für die (Reflexion) geometriedidaktische(r) Forschung?

2.1 Auswahl von Blitzlichtern

Eine vollständige Übersicht zur geometriedidaktischen Forschung zu räumlich-visuellen Fähigkeiten bzw. zur Begriffsbildung von Vor- und Grundschulkindern im deutschsprachigen Raum maßen wir uns nicht an. Dennoch lassen sich Tendenzen in den Jahren 2006 bis 2021 identifizieren, die sich durch unsere bewusst stark begrenzten Recherchen auf folgende Publikationswege erstrecken:

- *Tagungsbände des AK Grundschule* (2011 bis 2019)
- *Journal für Mathematik-Didaktik* (2006 bis 2021)
- *Beiträge zum Mathematikunterricht* (2006 bis 2020)

2.2 Tendenzen

In der Forschung zu räumlich-visuellen Fähigkeiten bzw. zur Begriffsbildung von Vor- und Grundschulkindern berühren einschlägige Studien einerseits *individuelle Bearbeitungsprozesse in der Begegnung mit geometrischen, zumeist non-verbalen räumlichen Settings*, die andererseits ohne Einbettung in den sozialen Kontext, das verbale Kommunizieren mit einem Partner, das adressatenbezogene Darstellen usw. im Unterricht undenkbar sind. Hier rücken folglich *Prozesse* der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten in den Mittelpunkt. Die „Gelegenheit, Entdeckungen zu machen (...) Entdeckungen, die man mit Augen und Händen macht“ (Freudenthal, 1973, S. 380) wird aufgegriffen, indem Kinder mit herausfordernden räumlichen Anforderungen aus ihrer Lebenswelt konfrontiert werden und untersucht wird, welche Strategien Kinder entwickeln, um diesen Anforderungen zu begegnen. Neben dem (handelnden) Umgang mit räumlichen Repräsentanten bzw. zweidimensionalen Darstellungen werden körperlich-motorische

bzw. sprachliche Artikulationen oder digitale Darstellungen im Ausdruck von Raumvorstellung berücksichtigt. „Denkendes Handeln“ (Freudenthal, 1973, S. 381) steht dabei im Fokus, womit sich gleichzeitig auch eine bedeutsame Grundlage für Studien zur Entwicklung geometrischer Begriffe ableiten lässt: Definitionen, die „angeben, wie man das zu Definierende verfertigt“ (ebenda), sind nicht erst zu einem späteren Zeitpunkt im Begriffserwerb der Sekundarstufe bedeutsam. Vielmehr ermöglichen Einblicke in Verfertigungsprozesse bzw. die Analyse von Eigenproduktionen wertvolle Interpretationsgrundlagen für Studien zum kindlichen Begriffsverständnis.

Prägend für den Forschungshabitus, der in derlei Studien eingenommen wird und die geometriedidaktische Forschung in den vergangenen 15 Jahren u. E. maßgeblich vorangetragen hat, ist u. a. eine von Freudenthal eingeforderte, von Neugier, Entdeckungs- und Dokumentationsfreude geprägte „Strategie der Beobachtung“ („a strategy of observing“ (Freudenthal, 1978, S. 2)).

3 Perspektiven für den Geometrieunterricht in der GS

Auf der Basis dieser Einblicke liegt es nahe, kritisch zu hinterfragen, welchen Impact diese Forschung hat. Bedeutsam ist es daher u. E., curriculare Rahmungen und konkrete unterrichtspraktische Aspekte zu diskutieren, die den Geometrieunterricht der Grundschule künftig (stärker) prägen. Gleichzeitig werden dabei neue Desiderata resp. Forschungsfelder sichtbar:

- Wohin entwickeln sich die curricularen Vorgaben aktuell?
- In welcher Hinsicht sind Diskrepanzen zur aktuellen Forschungslage erkennbar?
- Wo sehen wir besondere Entwicklungsbedarfe/Forderungen?

Literatur

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 2, Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1978). Address to the First Conference of I.G.P.M.E. (International Group for the Psychology of Mathematical Education), at Utrecht 29 August 1977. *Educational Studies in Mathematics*, 9(1), 1–5. <http://www.jstor.org/stable/3482138>.