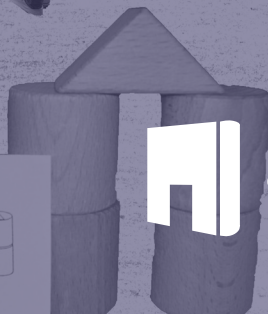
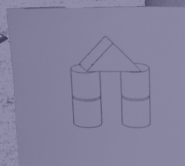
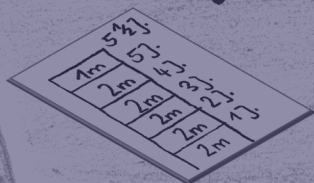


Darstellen und Kommunizieren

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2019

hg. von Anna Susanne Steinweg



University
of Bamberg
Press

9 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

hg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 9

Darstellen und Kommunizieren

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2019

hg. von Anna Susanne Steinweg



Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk ist als freie Onlineversion über das Forschungsinformationssystem (FIS; <https://fis.uni-bamberg.de>) der Universität Bamberg erreichbar. Das Werk – ausgenommen Cover, Zitate und Abbildungen – steht unter der CC-Lizenz CC-BY.



Lizenzvertrag: Creative Commons Namensnennung 4.0
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>.

Herstellung und Druck: docupoint Magdeburg
Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press
Umschlagfoto: © A. Steinweg

University of Bamberg Press Bamberg, 2019
<http://www.uni-bamberg.de/ubp/>

ISSN: 2193-2905
ISBN: 978-3-86309-688-5 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-86309-689-2 (Online-Ausgabe)
URN: urn:nbn:de:bvb:473-irb-466755
DOI: <http://dx.doi.org/10.20378/irb-46675>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort der Sprecherinnen und Sprecher des Arbeitskreises Grundschule in der GDM	7
---	---

Hauptvorträge

Birgit Brandt

Mathematiklernen zwischen actio und interactio: Darstellen und Kommunizieren aus interaktionistisch-konstruktiver Perspektive	9
---	---

Willibald Dörfler

Peirce und Wittgenstein: Ideen für die Grundschule	23
--	----

Axel Schulz & Daniel Walter

Darstellungen im Mathematikunterricht – real, mental, digital	39
---	----

Ralph Schwarzkopf

Produktive Kommunikationsanlässe im Mathematikunterricht der Grundschule: Zur lerntheoretischen Funktion des Argumentierens	55
---	----

... aus den Arbeitsgruppen

Arithmetik

Entwicklungen von Grundvorstellungen zur Division	69
Flexibles Rechnen im Zahlenraum bis 1000	73
Schulbucheffekte auf das Arithmetiklernen von Grundschulkindern	77

Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Vergleich von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimente	81
---	----

Geometrie

Grundschul Kinder bauen Würfelgebäude nach Seitenansichten und Schatten: Eine Interviewstudie	85
--	----

Kommunikation & Kooperation

Wie können lernwirksame Kommunikationsprozesse aussehen? Den Blick schärfen für die Prozessqualität mathematischer Unterrichtsgespräche	89
---	----

Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien (PriMaMedien)

Frühe mathematische Bildung in einer digitalisierten Welt	93
---	----

Sachrechnen

Das Experimentieren als Zugang zum Aufbau von Größenvorstellungen	97
--	----

Frühe mathematische Bildung

Mathematische Aktivitäten von Kindergartenkindern beim Spielen mathematischer Spiele	101
Wie Kindergartenkinder eine digitale Lernbegleitung für die Bearbeitung von Tangram- Aufgaben nutzen	105

Vorwort

In dem hier vorliegenden neunten Band der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ sind die Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM zusammengefasst. Die Tagung fand vom 15. bis 17. November 2019 in Bad Salzdetfurth (Niedersachsen) statt. Das diesjährige Tagungsthema „Darstellen und Kommunizieren“ wurde mit großem Interesse unter verschiedenen Blickwinkeln diskutiert.

Das Thema der Sicherung einer mathematischen Grundbildung in der Grundschule ist in der wissenschaftlichen, bildungspolitischen und praxisorientierten Diskussion allgegenwärtig. Mathematische Bildung von Schülerinnen und Schülern in der Grundschule basiert im Kern auf der Entwicklung und Nutzung prozessbezogener mathematischer Kompetenzen, um mathematische Frage- und Problemstellungen zu bewältigen. Im Gegensatz zu einem eher mechanischen Verständnis von Mathematik trägt die Förderung prozessbezogener mathematischer Kompetenzen bei Kindern dazu bei, aktiv inhaltliche Vorstellungen aufzubauen und kreativ mathematische Beziehungen zu nutzen. Hierzu ist es relevant, dass die Lehrperson einerseits adäquate Aufgabenformate anbietet, andererseits die Lern- und Lösungsprozesse der Schülerinnen und Schüler bei der Entwicklung von Strategien kompetenzorientiert begleitet.

Vor diesem Hintergrund ist es interessant, verschiedene prozessbezogene mathematische Kompetenzen in der Grundschule zu betrachten und Wege für eine aktive Auseinandersetzung mit Mathematik zu beleuchten. Auf der Tagung wurde insbesondere die Bedeutung von *Darstellen* und *Kommunizieren* thematisiert und die Beziehung dieser Kompetenzbereiche zueinander in den Blick genommen. Die Tagung leistete einen Beitrag dazu, aktuelle Forschung vorzustellen, Ergebnisse zu diskutieren und Anregungen weiterzugeben.


In den Hauptvorträgen wurden verschiedene Aspekte zur Entwicklung und Nutzung dieser prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen in den Blick genommen. So stellte Willibald Dörfler (Klagenfurt/Österreich) in seinem Vortrag die semiotischen Sichtweisen von Peirce und Wittgenstein vor und zur Diskussion.

Ralph Schwarzkopf (Oldenburg) beleuchtete produktive Kommunikationsanlässe im Mathematikunterricht der Grundschule und widmete sich konkret der lerntheoretischen Funktion des Argumentierens.

Axel Schulz (Bielefeld) und Daniel Walter (Münster) betrachteten die Vielfalt und die Besonderheiten von realen, mentalen und digitale Darstellungen im Mathematikunterricht.

Zur Beziehung von actio und interactio stellte Birgit Brandt (Chemnitz) theoretische Überlegungen und praktische Ansätze für das Mathematiklernen in der Grundschule vor und zur Diskussion.

Auch in diesem Jahr haben wieder viele Kolleginnen und Kollegen ihre Arbeiten aus der aktuellen mathematikdidaktischen Grundschulforschung im Rahmen der Arbeitsgruppen vorgestellt und somit neue Denkanstöße geboten. Der Sprecherrat bedankt sich dafür herzlich bei allen Vortragenden. Unser Dank gilt auch den Koordinatorinnen und Koordinatoren der Arbeitsgruppen. Durch ihr kontinuierliches Engagement ist es möglich, dass u. a. auch Nachwuchsforscherinnen und -forscher Gelegenheit zur Präsentation und Diskussion ihrer Projekte bekommen.



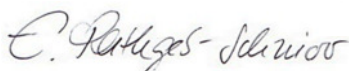
Elke Binner



Prof. Dr. Marcus Nührenbörger



Prof. Dr. Barbara Ott



Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer

Mathematik lernen zwischen actio und interactio: Darstellen und Kommunizieren aus interaktionistisch-konstruktiver Perspektive

von Birgit Brandt

In den Bildungsstandards für die Grundschule 2004 werden Kommunizieren und Darstellen den allgemeinen mathematischen Kompetenzen zugeordnet. Sie gehören somit zu den in der Grundschulzeit zu erwerbenden Grundlagen für das Mathematiklernen an weiterführenden Schulen und sind zugleich Ausgangspunkt für inhaltliche Auseinandersetzungen für die in der Grundschule zu erwerbenden inhaltlichen Kompetenzen. In diesem Beitrag werden das Kommunizieren und das Darstellen aus interaktionistisch-konstruktiver Sicht in ihrer Bedeutung für das Mathematiklernen betrachtet und dabei an Beispielen der interpretativen Forschung auf das Wechselspiel zwischen der Interaktion als soziale Bedingung der Lernermöglichkeit und dem handelnden Subjekt als Lerninstanz eingegangen.

Schlüsselwörter: Darstellen, Kommunizieren, Interaktion, interaktionistischer Konstruktivismus, sprachliche Aneignungsprozesse

1 Kommunizieren und Darstellen als Grundlage für mathematisches Lernen

Kommunizieren und Darstellen gehören gemäß den Bildungsstandards für die Grundschule 2004 zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen und somit zu den in der Grundschulzeit zu erwerbenden Grundlagen für das Mathematiklernen an weiterführenden Schulen (2005, p. 6). Den allgemeinen Kompetenzen wird dabei eine ganz grundlegende Bedeutung für die Aneignung (und die Nutzung) von Mathematik zugewiesen, die insbesondere auf einen verständnisorientierten Mathematikunterricht ausgerichtet ist:

Das Mathematiklernen in der Grundschule darf nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten reduziert werden. Das Ziel ist die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathematischer Inhalte. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen verdeutlichen, dass die Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen ein wesentlicher Teil der Entwicklung mathematischer Grundbildung ist. (KMK, 2005, p. 6)

Kommunizieren geht auf das lateinische Verb *communicare* (teilen, mitteilen) zurück und ist eng verwandt mit *communis* (gemeinsam). Kommunizieren als allgemeine Kompetenz weist also unmittelbar darauf hin, dass Mathematiklernen als sozialer Prozess im Austausch mit

anderen zu sehen ist. Auch wenn die Lautsprache als komplexes Zeichensystem eine hervorgehobene Rolle in diesen Austauschprozessen spielt, bedient sich die soziale Handlung Kommunikation unterschiedlicher Modalitäten und ist (gerade in der Face-to-Face-Interaktion) multimodal angelegt.

Hermann Maier und Fritz Schweiger (1999) haben schon vor nunmehr 20 Jahren darauf aufmerksam gemacht, wie sich beim fachlichen (mathematischen) Lernen die kommunikative Funktion der Sprache verstärkend auf die kognitive Funktion Sprache auswirkt, somit also durch Kommunikation der Erkenntnisgewinn vorangetrieben wird (p. 18). Anna Sfard und Carolyn Kieran (2001) haben dargelegt, wie bedeutsam es ist, dass Lernende ihre individuellen Ideen kommunizieren und dabei hervorgehoben, dass mathematisches Denken durch die Partizipation an Diskursen über mathematische Ideen maßgeblich unterstützt wird (s.a. Sfard, 2008). Max Miller (2006) betont in seiner soziologisch geprägten Lerntheorie die Bedeutung kollektiver Argumentationsprozesse für (inhaltliche) Lernprozesse. Dabei kann der diskursive Austausch über konzeptuelle Ideen oder über unterschiedliche Lösungswege als zentrales Element gesehen werden, um zu neuen (fundamentalen) Wissenskonstruktionen zu gelangen (Brandt & Nührenbörger, 2009, p. 30).

Mit dem Begriff Darstellen bzw. Darstellung wird, in Abgrenzung zu mentalen Repräsentationen, auf Veräußerlichungen verwiesen: Mit Hilfe unterschiedlicher Repräsentationsmodi wird etwas öffentlich gemacht. In der Mathematikdidaktik wird dabei insbesondere das "Phänomen (...) der multiplen Repräsentationen sogenannter mathematischer Objekte" diskutiert (Brunner, 2015, p. 205).¹ Ähnlich wie dem Kommunizieren wird auch dem Darstellen als eine Veräußerlichung (des eigenen Denkens) eine erkenntnisgewinnende Funktion zugeschrieben. Mit Rückgriff auf Jerome Bruner (1974) wird dabei gerade der Wechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen als lern-

¹ Gerade die semiotische Perspektive beschäftigt sich sehr intensiv mit dem Verhältnis des Mathematiktreibens, ihrer "Objekte" und der Verwendung von Darstellungen bzw. Insriptionen; auf diese Diskussion wird hier nicht näher eingegangen.

und entwicklungsfördernd angesehen und so auch in den Bildungsstandards verankert (KMK, 2005, S.8).

Zunächst können (grafische) Darstellungen bzw. Inskriptionen zur Lösung mathematischer Probleme und zur Vertiefung und Verarbeitung vorhandener Wissens Elemente durchaus für individuelle Be- und Verarbeitungsprozesse genutzt werden (z.B. Ott, 2016, p. 17). In diesen individuellen Arbeitsprozessen können auch ideosynkratische Inskriptionen zum Einsatz kommen, die zur Organisation und Strukturierung eigener Denkprozesse dienen und keine weiteren Adressaten mitdenken. Allerdings ist auch diese individuelle Verwendung von Darstellungen in den interaktionalen Austausch eingebunden, in dem "über und mit Diagrammen kommuniziert wird" (Dörfler, 2006, p. 215). Kommunizieren und Darstellen weisen somit eine sehr enge Wechselbeziehung auf und sind kaum als trennscharfe Prozesse des Mathematiktreibens und -lernens zu sehen²:

Es wird ganz wesentlich in der mündlichen Unterrichtsinteraktion dargestellt und ausgehandelt, wie mathematische Darstellungen üblicherweise zu deuten sind und wie Begriffe im Sinne von Grundvorstellungen mental repräsentiert werden sollten. Was es an einem zu "Zahlenstrahl" sehen gibt oder welche Vorstellungen mit der mathematischen Operation Addition gemäß mathematischen Konventionen verbunden sind, sind keine Fragen der optischen Wahrnehmung oder der kindlichen Fantasie, sondern Fragen, deren Antworten Kinder nur dem sozialen Austausch mit (mindestens) einem kompetenten Gegenüber entnehmen können. (Meyer & Tiedemann, 2017, p. 50)

Diese enge Verknüpfung wird auch in dem von Susanne Prediger und Lena Wessel (2012) vorgestellten Modell zur integrierten Fach- und Sprachförderung deutlich. Die Autorinnen sehen in Anlehnung an Bruner den Wechsel zwischen gegenständlichen, graphischen, symbolischen und verschiedenen Arten der verbal-sprachlichen Darstellungsformen nicht nur als Kommunikationsanlass, sondern beschreiben

² Eine enge Beziehung besteht auch zur allgemeinen Kompetenz des Argumentierens, die entsprechende Grundlagen des Kommunizierens und des Darstellens nutzt, um zu erklären beziehungsweise zu überzeugen (Brandt & Nührenbörger, 2009, p. 30f).

das Zusammenspiel dieser Darstellungsformen als Chance, um auch mit eingeschränkten verbal fachsprachlichen Ausdrucksmitteln "über die mathematischen Konzepte präzise und verständlich kommunizieren" zu können (Prediger & Wessel, 2012, p. 29) – sie heben damit die kommunikative Funktion aller Darstellungsformen hervor.

Mit dem Fokus auf verbalsprachliche Darstellungsformen werden in diesem Beitrag Beziehungen zwischen Kommunizieren und Darstellen unter interaktionistisch-konstruktiver Perspektive näher betrachtet.

2 Mathematiklernen unter interaktionistisch-konstruktiver Perspektive

Während kognitivistische oder individual-konstruktivistische Ansätze die Rolle des Individuums für individuelle Lernprozesse in den Mittelpunkt stellen, betont die interaktionistische Perspektive soziale Prozesse für individuelle Lernprozesse. Die interaktionistische Perspektive in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung beruft sich dabei auf den symbolischen Interaktionismus, insbesondere auf die drei von Herbert Blumer (1973) formulierten Prämissen zur Bedeutung von "Dingen"³ und den sich daraus ergebenden Handlungszusammenhängen. Gemäß dieser Prämissen handeln Menschen mit Dingen auf der Grundlage von Bedeutungen (P1); diese Bedeutungen entstehen in sozialer Interaktion oder lassen sich aus dieser ableiten (P2); und schließlich können sie in einem interpretativen Prozess auch verändert werden (P3) (p. 81). Götz Krummheuer (1992) weist daher dem symbolischen Interaktionismus eine unmittelbar lerntheoretische Perspektive zu: "Die generelle lerntheoretische These des Interaktionismus lautet, daß Lernen als situationsüberdauernde Bedeutungszuschreibung seinen Ursprung in der sozialen Interaktion hat." (p. 5)

³ "Dinge" fasst Blumer dabei sehr weit, ausgehend von physischen Gegenständen bis hin zu Kategorien und Handlungen von Menschen, Institutionen und Wünschen. Blumer setzt in seinem Text "Dinge" an dieser Stelle in Anführungszeichen (1973, p. 81).

Die situationsüberdauernden Bedeutungszuschreibungen als individuelle Konstruktionsleistungen erhalten dabei in den interaktionalen Aushandlungsprozessen ihre kulturelle Prägung: "Die in den sozialen Interaktionen ‚erzeugten‘ subjektiven Konstruktionen werden durch die sozialen, historisch-kulturell entstandenen ‚Außenbedingungen‘ ausgerichtet – jedoch nicht determiniert." (Brandt & Höck, 2011, p. 249).

Der von Tillmann Sutter (1994) und Kersten Reich (2001) geprägte Begriff des interaktionistischen Konstruktivismus betont diese bi-direktionale Verortung der Verstehensprozesse. Systemisch beschreibt Sutter dieses Wechselspiel zwischen actio und interactio über den "Ort der sozialen Lernbedingungen und der möglichen Lerngegenstände", den er in den Sinnstrukturen und Handlungsmöglichkeiten des Interaktionssystems verortet und dem "Ort der Konstruktion von Selektionen und Reflexionen, d.h. der Realisierungen und kognitiven Verarbeitung von Handlungsentscheidungen", der entsprechend dem handelnden Subjekten zugeschrieben wird (Sutter, 1994, p. 92f). Durch das Teilsein des Subjektes an der sozialen Lernbedingung Interaktion wirkt die/der Lernende somit gleichsam an den eigenen Lernermöglichkeiten, aber auch an den Lernermöglichkeiten anderer Beteiligter mit (s.a. Brandt, 2004).

Unter dieser interaktionistisch-konstruktiven Perspektive spielen also Aushandlungsprozesse eine zentrale Rolle für (individuelle) Lern- und Entwicklungsprozesse und damit sind das Kommunizieren und das Darstellen genuin eingeschlossen. (Laut-)Sprache als ein zentrales Mittel des interaktionalen Austausches stand zunächst im Fokus der interpretativen Forschung. Inzwischen hat sich das Spektrum auf andere Repräsentationsmodi des Kommunizierens und des Darstellens erweitert und es werden z.B. Inskriptionen (Schreiber, 2010), Materialien (Fetzer, 2017) oder Gestik (Huth, 2018) mit einbezogen und entsprechende Beziehungen zum Beispiel zwischen Inskription und Gestik (Huth & Schreiber, 2017) bzw. zur Sprache (Fetzer & Tiedemann, 2018) beleuchtet.⁴

⁴ Für einen Überblick in die aktuellen Forschungsarbeiten der interpretativen Forschung siehe Brandt and Tiedemann (2019).

Im Folgenden werden Interaktionsprozesse aus Studien der interpretativen Forschung zu sprachlichen Aneignungsprozessen näher vorgestellt.

3 Fachsprachliche Aneignungsprozesse

Fachsprachliche Aneignungsprozesse finden unter interaktionistisch-konstruktiver Perspektive ebenfalls in der beschriebenen Wechselbeziehung zwischen *actio* und *interactio* statt: Die in der Unterrichtsinteraktion von den Beteiligten verwendete Sprache ist demnach kein von außen eingebrachtes, normatives Konstrukt, "sondern ein Produkt, das Lernende und Lehrende samt der zugehörigen Gebrauchsregeln im Prozess der sozialen Interaktion aushandeln. Sie legen fest, wie sie als Lerngruppe über Mathematik sprechen" (Tiedemann, 2015, p. 38). Kerstin Tiedemann spricht daher von der "Unterrichtsfachsprache", in der unterschiedliche Sprachregister zum Einsatz kommen und deren Zusammenspiel in den jeweiligen Situationen immer wieder neu ausgehandelt wird. Sie unterscheidet dabei Sfard (2008) folgend zwischen Regeln und Normen. Normen weisen ein höheres Maß an Verbindlichkeit auf und führen bei Verstoß entsprechend verstärkt zu Korrekturen, insbesondere durch die Lehrperson bzw. durch die in der Interaktion als 'kompetent' markierten Gesprächsteilnehmer*innen. Sprachliche Normen legen den (sprachlichen) Partizipationsspielraum (Brandt, 2004) fest und bestimmen somit die fachlichen Zugangsmöglichkeiten und Aushandlungsprozesse in besonderer Weise. Dies wird an zwei Beispielen mit Blick auf die (sprachlichen) Korrekturen der Lehrperson bzw. der pädagogischen Fachkraft näher erläutert.

3.1 Unterrichtsfachsprachliche Normen und der Blick auf Darstellungen

Die Hundertertafel kann als eine gängige Darstellung für den Zahlenraum bis Hundert gesehen werden, in der über die Anordnung der Zahlen bestimmte Zahlbeziehungen betont hervorgehoben werden, wenn man denn entsprechend auf diese Darstellung 'blickt'. Dieser Blick auf die Hundertertafel wird im zweiten Schuljahr in sehr unterschiedlichen Aufgabenformaten 'eingeübt'. In einer von Tiedemann

beobachteten zweiten Klasse werden dazu z.B. Zahlen auf der Hundertertafel als Zahlenrätseln über ihre Position beschrieben.⁵ Im folgenden Ausschnitt aus einem von Tiedemann ausführlicher analysierten Klassengespräch werden unterrichtsfachsprachliche Normen in der von ihr beobachteten Klasse in Bezug auf die Hundertertafel deutlich, also verbindliche sprachliche Vorgabe für das Sprechen über die Hundertertafel. Ozan beschreibt seine Zahl wie folgt (Beispiel und Transkriptausschnitt aus: Tiedemann, 2015, p. 49):

Ozan die Zahl steht in der 4. Spalte und ... in der 3. Zei- #

Lehrerin # nein\ , erst die **Zeile**\

Ozan äh- .. die Zahl steht in der 3. Zeile und in der 4. Spalte\

Obwohl die erste Beschreibung – zu Ende geführt – grammatikalisch korrekt wäre und auch mathematisch eindeutig die Zahl 24 als Lösungszahl identifiziert werden könnte, somit also keinerlei Korrekturbedarf zu bestehen scheint, wird Ozan von der Lehrerin unterbrochen. Die Lehrerin erinnert Ozan hier an eine spezifisch für diese Klasse geltende Norm. Dieser unterrichtsfachsprachlichen Norm der Klasse folgend muss zunächst die Zeile benannt werden und erst in einem zweiten Schritt die Spalte. Ozan verstößt in seinem Zahlenrätsel zunächst gegen diese Norm, die durch die Korrektur der Lehrerin explizit wird. Er kann sie aber anschließend korrekt umsetzen und somit der Norm entsprechend weiter sprachlich-produktiv mit einem eigenen Zahlenrätsel an der Unterrichtsinteraktion teilnehmen. Dabei mögen didaktische Überlegungen die Lehrerin zur strikten Einforderung der Reihenfolge veranlassen⁶ und diese somit zu einer unterrichtsfachsprachlichen Norm erheben. Mit dieser Normierung für die sprachlich-produktive Partizipation am Klassengespräch *über der Hundertertafel* wird der Blick *auf die Hundertertafel* in dieser Klasse in bestimmter Weise

⁵ Die in dieser Situation eingesetzte Hundertertafel besteht aus einzelnen Zahlenkarten, die auf einem quadratischen Holzrahmen der üblichen Anordnung entsprechend ausgelegt sind.

⁶ Denkbar ist etwa die Entsprechung der Schreibrichtung der Ziffern in der numerisch-symbolischen Zahldarstellung: erst Zehner, dann Einer. Die von Ozan zunächst gewählte Reihenfolge entspricht hingegen der verbal-sprachlichen Zahldarstellung "Dreiundzwanzig".

'normiert': So ist es auch möglich, sich bei der Rezeption der Zahlenrätsel auf die Reihenfolge der genannten Ziffern zu konzentrieren – die Begriffe Zeile und Spalte werden zum 'Enträtseln' nicht benötigt. Es werden somit (niedrigschwellige) Partizipationsmöglichkeiten am aktuellen Unterrichtsgespräch eröffnet. Zugleich werden aber eventuell auch Lerngelegenheiten verstellt, die ein Sprechen über die Hundertertafel außerhalb der Klassengemeinschaft oder einen Transfer auf ähnliche, in Zeilen und Spalten organisierte, Diagramme ermöglichen würden.

3.2 Sprachliche Korrekturstrategien und der Fokus auf (Mess-)Objekte

Wie eben dargelegt, hebt Tiedemann die Bedeutung der (expliziten) Korrekturen der Lehrperson für die unterrichtsfachsprachliche Normierung im Unterrichtsgespräch hervor. Auch im Elementarbereich lassen sich Strategien der pädagogischen Fachkräfte beschreiben, die über die Korrektur sprachlicher Äußerungen die mathematischen Lernermöglichkeiten prägen (Brandt & Keuch, 2019; Keuch & Brandt, 2018). In den von uns analysierten Spiel- und Erkundungssituationen im Elementarbereich⁷ legen die pädagogischen Fachkräfte mit ihren sprachbezogenen Korrekturstrategien mehrheitlich einen Schwerpunkt auf Fachbegriffe und eher selten auf komplexe sprachliche Strukturen, wenn es darum geht, Sprache in mathematischen Situationen anzuwenden. Im folgenden Beispiel, das dem Inhaltsbereich Messen von Längen zuzuordnen ist, legt die pädagogische Fachkraft (Berna) zum Beispiel einen Fokus auf die korrekte Bezeichnung der verwendeten Messgeräte. Zu Beginn der Situation werden verschiedene Messgeräte vorgestellt und auch die Fachbegriffe (Lineal, Zollstock, Maßband) von Berna benannt. Nach ersten Messvorgängen mit dem Zollstock hält sie ein Lineal in der Hand und fragt nach der korrekten Bezeichnung. Friedel versucht durch passende Lexeme, die alle

⁷ Die Datenbasis für diese Analysen besteht aus mathematischen Erkundungssituationen aus dem Projekt erStMaL (Brandt & Vogel, 2017), die von Erzieherinnen geplant und umgesetzt wurden (Brandt, 2013).

mit dem Wort *messen* in Verbindung stehen, eine Antwort zu finden (Beispiel und Transkriptausschnitt aus Brandt & Keuch, 2019, p. 248):

Berna	wie heißt des
Friedel	Maß\ Meß\ Metermaß\
Berna	nein/
Deny	Lineaal\
Berna	Lineal dankeschön Deny\ merk es dir/
Can	Lineaal
Berna	ein Linnneaal\ (.) super\ [seufzt]

Bernas Reaktion auf die aus ihrer Sicht falsche Bezeichnung wirkt ungeduldig. Sie scheint zu erwarten, dass die Kinder in der Situation die Fachbegriffe schnell erfassen und in ihren aktiven Wortschatz übernehmen, was durch <merk dir das> eine bestimmte Verbindlichkeit erhält. Insgesamt macht sie damit deutlich, dass sie bezogen auf die Messgeräte die richtige Verwendung der Fachbegriffe für wichtig erachtet, was Can dazu veranlassen könnte, das für Vorschulkinder eher nicht zum aktiven Sprachgebrauch gehörende Wort zu wiederholen⁸. Dies wird besonders deutlich im Kontrast zum folgenden Ausschnitt. Alle Kinder haben verschiedene Messgeräte in der Hand, die jeweils die typische Markierung für Millimeter und Zentimeter aufweisen: Volle Zentimeter werden mit einem langen Strich und einer Maßzahl gekennzeichnet, Millimeter werden durch kurze Striche markiert. Diese kulturell geprägten Markierungen der Maßeinheiten auf den Messgeräten thematisiert Berna und richtet dabei die Aufmerksamkeit auf die Einheit *Zentimeter*; es geht also um die Deutung graphischer Zeichen auf den Objekten, die dadurch zu Messgeräten werden. Berna zeigt auf einem Maßband den Abschnitt zwischen zwei <langen Strichen> (Beispiel und Transkriptausschnitt aus Brandt & Keuch, 2019, p. 249):

⁸ Damit entspricht sein Beitrag einem Interaktionsmuster aus dem Zweitspracherwerb, in dem einzelne Vokabeln durch Nachsprechen eingeübt werden.

Berna von einem langen / bis zu dem anderen langen Strich ist (.) ein
Friedel Meter
Berna nee / ein Zentimeter aber du warst schon richtig nah dran Friedel
 \ sehr gut \

Aus mathematisch-inhaltlicher Perspektive irritiert dieses Lob in Verbindung mit der Aussage <nah dran>, da der Zentimeter eine Verfeinerung der Einheit Meter um den Faktor 100 entspricht und somit der Unterschied immerhin 99 Zentimeter beträgt. Für Berna könnte zu diesem Zeitpunkt der konzeptionelle Unterschied zwischen einem Meter und einem Zentimeter somit untergeordnet sein. Denkbar ist aber auch, dass sie so positiv reagiert, weil sie den Fehler lexikalisch bzw. morphologisch als ausgelassenes Präfix deutet und Friedel den richtigen Begriff unterstellt. Sie könnte vermuten, dass er ein Problem mit der richtigen Verwendung hat und ihn daher gesichtswahrend nach der expliziten sprachlichen Korrektur loben (und so implizit zu weiteren Sprachproduktionen ermutigen). Allerdings wird gerade im Kontrast zu der ebenfalls expliziten, aber wohl eher gesichtsverletzenden Korrektur der falschen Bezeichnung eines Messgerätes deutlich, dass ihr (sprachlicher) Fokus auf einer anderen Ebene liegt. Metermaß ist durchaus eine korrekte Bezeichnung für ein Messgerät, dennoch wird dies nicht entsprechend gewürdigt. Durch diese Korrekturstrategie wird der Fokus der Situation deutlich: Es geht ihr um die Messgeräte und deren korrekte Bezeichnung, weniger um die Maßeinheiten und deren Beziehung zueinander. Zugleich wird hier aus sprachdidaktischer Perspektive eine Lerngelegenheit zur Bedeutsamkeit von Präfixen übergangen, also einem sprachlich oft unauffälligem Phänomen, das jedoch auf semantischer Ebene sehr bedeutsam ist (s.a. Keuch & Brandt, 2018).

Grundsätzlich sind die mathematischen Gespräche in den von uns untersuchten Situationen im Elementarbereich immer in konkrete Handlungsprozesse eingebunden und mit konkreten Objekten verbunden (Brandt, Beck, & Keuch, im Druck); in der hier betrachteten Situation in Messprozesse mit unterschiedlichen Messobjekten und -instrumenten. Für die Partizipation der Kinder als Sprach- und Fachlernende an diesem (handlungsbegleitenden) Gespräch bedeutet die oben dargelegte Korrekturstrategie: Der Spielraum für eigene Sprachhandlungen

ist mit Bezug auf Messinstrumente auf die korrekten Bezeichnungen eingeschränkt. In Bezug auf Maßeinheiten (und auch auf Messergebnisse) besteht mehr Freiraum, sich aktiv-produktiv einzubringen und kreativ Sprachproduktionen zu erproben. Somit wird die rezeptive Partizipation eventuell auf die Bezeichnung der Messobjekte fokussiert (z.B. bei Deny, der korrigierend einspringt) oder die aktiv-produktive Partizipation wird in diesem Bereich im Laufe der Interaktion zunehmend eingestellt (Friedel) bzw. durch Wortwiederholungen in Vokaltraining überführt (Can).

4 Zusammenfassung

Dem Kommunizieren und dem Darstellen als allgemeine Kompetenzen der Bildungsstandards kommen in den letzten Jahren vermehrt Aufmerksamkeit in der mathematikdidaktischen Forschung zu. In dem Beitrag wurde aufgezeigt, dass diesen beiden 'Kompetenzen' unter einer interaktionistisch-konstruktiven Perspektive auf mathematische Lern- und Entwicklungsprozesse seit jeher genuin bedeutsam sind. Es wurden Beispiele der interpretativen Forschung vorgestellt, die sich mit fachsprachlichen Aneignungsprozessen beschäftigen und dabei Darstellungen in den Blick nehmen. Auch wenn gerade in Hinblick auf fachsprachliche Normierungen der Lehrperson bzw. der pädagogischen Fachkraft eine besondere Rolle zukommt, so werden die geltenden Normen in der Situation gemeinsam und immer wieder neu ausgehandelt. Dabei wurde aufgezeigt, wie durch sprachliche Korrekturen der Blick auf Darstellungen bzw. Objekte eine Orientierung erhält und so inhaltliche Lerngelegenheiten eröffnet bzw. verstellt werden können: Die individuellen (sprachlichen) Partizipationsspielräume für die eigene actio werden in der und durch die gemeinsam hervorgebrachte(n) interactio abgesteckt – die individuellen Konstruktionen damit vororientiert, aber nicht determiniert.

Literatur

Blumer, H. (1973). Der methodische Standpunkt des symbolischen Interaktionismus. In Arbeitsgruppe Bielefelder Soziologen (Ed.), *Alltagswissen, Interaktion und gesellschaftliche Wirklichkeit 1* (pp. 80–146). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Brandt, B. (2004). *Kinder als Lernende: Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer; eine mikrosoziologische Studie zur Partizipation im Klassenzimmer*. Frankfurt am Main: Lang.

Brandt, B. (2013). Everyday pedagogical practices in mathematical play situations in German "Kindergarten". *Educational Studies in Mathematics*, 84(Early Years), 227–248.

Brandt, B., Beck, T. & Keuch, S. (im Druck). Bauklotz und Lineal: Messobjekte und Messinstrumente im Kindergarten. Zur alltäglichen didaktisch-methodischen Gestaltung von Situationen zum Inhaltsbereich Messen und Größen im Projekt erStMaL. In M. Beck & A.-M. Vogler (Eds.), *Ein multiperspektivischer Blick auf Lehr-Lernprozesse – Konzeptionelle, multimodale und digitale Analysen im elementaren und hochschuldidaktischen Kontext*. Münster: Waxmann.

Brandt, B. & Höck, G. (2011). Ko-Konstruktion in mathematischen Problemlöseprozessen - partizipationstheoretische Überlegungen. In B. Brandt, R. Vogel, & G. Krummheuer (Eds.), *Die Projekte erStMal und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education" (IDeA)* (pp. 245–284). Münster: Waxmann.

Brandt, B. & Keuch, S. (2019). Korrekturstrategien und Sprachbewusstheit im Sprachgebrauch in frühmathematischen Erkundungssituationen – eine interpretative Perspektive. In B. Brandt & K. Tiedemann (Eds.), *Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive I* (pp. 225-262). Münster: Waxmann.

Brandt, B., & Nührenböger, M. (2009). Kinder im Gespräch über Mathematik. *Die Grundschulzeitschrift*, 222.223(1), 28–33.

Brandt, B., & Tiedemann, K. (Eds.). (2019). *Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive I. Aktuelle Themen, Arbeiten und Fragen*. (Vol. 34). Münster: Waxmann.

Brandt, B., & Vogel, R. (2017). Frühe mathematische Denkentwicklung. In U. Hartmann, M. Hasselhorn, & A. Gold (Eds.), *Entwicklungsverläufe verstehen - Kinder mit Bildungsrisiken wirksam fördern. Forschungsergebnisse des Frankfurter IDeA-Zentrums* (pp. 207–225). Stuttgart: Kohlhammer.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.

Brunner, M. (2015). Bedeutungsherstellung als Lehr- und Lerninhalt. *mathematica didactica*, 38, 205–239.

Dörfler, W. (2006). Diagramme im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, 27(3/4), 200–219.

Fetzer, M. (2017). Auf Objekte bauen - Interaktionstheorie auf den Spuren von Objekten. In M. Beck & R. Vogel (Eds.), *Geometrische Aktivitäten und Gespräche*

von Kindern im Blick qualitativen Forschens - Mehrperspektivische Ergebnisse aus den Projekten erStMal und MaKreKi (pp. 41–60). Münster: Waxmann.

Fetzer, M., & Tiedemann, K. (2018). The Interplay of Objects and Language in the Process of Abstracting. In J. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, M. Rodrigues, & M. Schütte (Eds.), *Language and communication in mathematics education: International perspectives* (pp. 91–105). Dordrecht: Springer.

Huth, M. (2018). Die Bedeutung von Gestik bei der Konstruktion von Fachlichkeit in mathematischen Gesprächen junger Lernender. In M. Martens, K. Rabenstein, K. Bräu, M. Fetzer, H. Gresch, I. Hardy, & C. Schelle (Eds.), *Konstruktionen von Fachlichkeit - Ansätze, Erträge und Diskussionen in der empirischen Unterrichtsforschung* (pp. 219–231). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Huth, M., & Schreiber, C. (2017). Semiotische Analyse. Mathematische Zeichenprozesse in Gestik und Lautsprache. In M. Beck & R. Vogel (Eds.), *Geometrische Aktivitäten und Gespräche von Kindern im Blick qualitativen Forschens*. (pp. 77–106). Münster: Waxmann.

Keuch, S., & Brandt, B. (2018). Language hurdles on the way to an understanding of length in early mathematics education. In N. Planas & M. Schütte (Eds.), *Proceedings of the Fourth ERME Topic Conference 'Classroom-based research on mathematics and language'* (pp. 89–95). Dresden: Technical University of Dresden/ERME.

KMK. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. München, Neuwied: Luchterhand

Krummheuer, G. (1992). *Lernen mit Format: Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Wien: öbv.

Meyer, M., & Tiedemann, K. (2017). *Sprache im Fach Mathematik*. Berlin: Springer Spektrum.

Miller, M. (2006). *Dissens: Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens*. Bielefeld: Transcript-Verl.

Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen*. Münster: Waxmann Verlag.

Prediger, S., & Wessel, L. (2012). Darstellungen vernetzen. Ansatz zur integrierten Entwicklung von Konzepten und Sprachmitteln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 45, 28–33.

Reich, K. (2001). Konstruktivismen aus kultureller Sicht - Zur Position des "Interaktionistischen Konstruktivismus". In F. Wallner & B. Agnese (Eds.), *Konstruktivismen* (pp. 49–68). Wien: Braumüller.

Birgit Brandt

Schreiber, C. (2010). *Semiotische Prozess-Karten – Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen*. Münster: Waxmann.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), 42–79.

Sutter, T. (1994). Entwicklung durch Handeln in Sinnstrukturen. Die sozial-kognitive Entwicklung aus der Perspektive eines interaktionistischen Konstruktivismus. In T. Sutter & M. Chalton (Eds.), *Soziale Kognition und Sinnstruktur*. (pp. 23–112). Oldenburg: Bibliotheks- und Informationssystem der Universität Oldenburg (bis).

Tiedemann, K. (2015). Unterrichtsfachsprache. Zur interaktionalen Normierung von Sprache im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica*, 38, 37–62.

Prof. Dr. Birgit Brandt
Technische Universität Chemnitz
Zentrum für Lehrerbildung, Grundschuldidaktik Mathematik
Carolastraße 4 - 6
09111 Chemnitz
birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de

Peirce und Wittgenstein: Ideen für die Grundschule

von Willi Dörfler

Ein kurzer Blick in jedes (Schul-)Buch über Mathematik macht klar, dass die Mathematik verschiedenste Zeichen verwendet: Symbole, Figuren, Formeln, Graphiken, etc. Jedoch die Form und Funktion dieser Zeichenverwendung bedarf genauer Untersuchung. Die Logiker und Philosophen Peirce und Wittgenstein haben die zentrale Rolle der Zeichen nicht nur für die Kommunikation in der Mathematik sondern auch für deren Konstruktion und Entwicklung analysiert. Diese semiotischen Sichtweisen auf mathematische Tätigkeiten auf allen Stufen werden skizziert und interpretiert.

Schlüsselwörter: Zeichen, Diagramme, diagrammatisches Denken, Zeichenspiele, Regeln und Normen, Peirce, Wittgenstein

1 Einleitung

In diesem Beitrag möchte ich versuchen, Grundthesen und Grundideen von zwei bedeutenden Philosophen vorzustellen, die im Allgemeinen sowohl in der Philosophie wie auch in der Didaktik der Mathematik bisher wenig Beachtung finden. Es handelt sich um den amerikanischen Mathematiker, Logiker und Philosophen Charles Sanders Peirce (1839-1914) und um den österreichischen Philosophen Ludwig Wittgenstein (1889-1951). Trotz unterschiedlicher Positionen etwa zur Ontologie der Mathematik kann man interpretativ Gemeinsamkeiten in ihrem Werk feststellen. Dazu gehören unter anderem: Reflexion auf die konkrete Praxis mathematischer Aktivitäten auf jedem Niveau; Betonung der Rolle mathematischer Zeichen, Symbole und Notationen; Beachtung des denkenden und lernenden Subjekts; Verzicht auf metaphysische Spekulationen und Begründungen; Einbeziehung sozialer und kommunikativer Aspekte. Im Gegensatz zu großen Teilen der Philosophie der Mathematik geht es also bei beiden Autoren nicht um die Frage, was ist die Mathematik oder was sind die mathematischen Objekte, sondern um die Frage, was machen Menschen, wenn sie Mathematik betreiben. Man könnte nun der Meinung sein, dass hochgestochene Philosophien wenig mit dem Lernen von Mathematik in der Grundschule zu tun haben. Jedoch beide Philosophen haben einen expliziten Bezug zur Grundschule. Peirce verfolgte einige Zeit das Projekt eines Schulbuches für die elementare Arithmetik, in dem er seine Ideen umsetzen wollte. Leider gelangte der Entwurf nie zum druckreifen Stadium, aber aus ihm lassen sich einige wichtige Aspekte der

Sichtweisen von Peirce herauslesen. Siehe dazu die Arbeit von Radu (2003). Wittgenstein hat 1921-23 nach einer Ausbildung zum Grundschullehrer kurze Zeit in mehreren Volksschulen in Niederösterreich (südlich von Wien) als Lehrer unterrichtet, allerdings ohne großen Erfolg. In dieser Zeit verfasste er auch ein Wörterbuch für Volksschulen. In seinen philosophischen Texten befasst sich Wittgenstein öfters mit Lernen, besonders von Sprache aber auch von Arithmetik, oft in Form artifizierlicher Situationen zur Verdeutlichung seiner Sichtweise auf Sprache und Mathematik. Von Wittgenstein gibt es keinen zusammenhängenden Text zur Mathematik, sondern seine Thesen und Vorschläge sind von Schülern und Kollegen posthum teilweise sehr selektiv veröffentlicht worden unter dem Titel „Bemerkungen zu den Grundlagen der Mathematik“, wobei schon dieser Titel in die Irre führt (siehe dazu Mühlhölzer, 2010). Auch schon in seinem ersten und wahrscheinlich bekanntesten Werk „Tractatus logico-philosophicus“ sowie in den „Philosophischen Untersuchungen“ finden sich Anmerkungen zur Mathematik, so dass insgesamt Wittgenstein zu den Philosophen gehört, die sich am breitesten mit Mathematik auseinandersetzen. Für unser Thema hier ist nicht unwichtig, dass viele der von ihm verwendeten Beispiele elementare Mathematik betreffen.

Bei beiden Philosophen habe ich (zwangsweise) jeweils ein meines Erachtens zentrales und wichtiges Thema ausgewählt, das auch und besonders didaktische Aspekte aufweist. Bei Peirce sind dies die Konzepte des Diagramms und des diagrammatischen Denkens. Bei Wittgenstein konzentriere ich mich auf die Idee des Zeichenspieles (allgemeiner des Sprachspieles) als dem Kontext, in dem Zeichen durch ihre Verwendung lokale Bedeutungen erhalten. Dabei werde ich meine Interpretation dieser Konzepte darlegen spezifiziert auf das Lernen elementarer Mathematik, allerdings gestützt durch wichtige Zitate der Autoren selbst. Dennoch könnte es durchaus sein, dass mein Text bei ihnen nicht auf Zustimmung stoßen würde.

2 Diagramme und diagrammatisches Denken

Am besten wendet man sich natürlich an Peirce selbst, um eine Orientierung betreffend die Konzepte „Diagramm“ und „diagrammatisches Denken oder Schließen“ zu gewinnen (Zitate nach Hoffmann, 2005, S. 129, S. 137 bzw. S. 158):

Mit diagrammatischem Schließen meine ich Schließen, welches gemäß einer in allgemeinen Begriffen formulierten Vorschrift ein Diagramm konstruiert, Experimente an diesem Diagramm durchführt, deren Resultate notiert, sich Gewissheit verschafft, dass ähnliche Experimente, die an irgendeinem gemäß der selben Vorschrift konstruierten Diagramm durchgeführt werden, die selben Resultate haben würden, und dies in allgemeinen Begriffen zum Ausdruck bringt.

(Peirce, 1902, *The New Elements of Mathematics IV*, S. 47)

Der Geometer zeichnet ein Diagramm, und das ist – wenn nicht dasselbe wie eine Fiktion – doch eine Schöpfung; und mit Hilfe von Beobachtungen an diesem Diagramm ist er in der Lage, zu synthetisieren und Relationen von Elementen aufzuzeigen, die vorher keine zwingende Verbindung zu haben schienen. Die Realität zwingt uns, einige Dinge sehr eng mit einander zu verbinden, andere weniger, und das auf höchst komplizierte und für die Sinne selbst unverständliche Weise.

(Peirce, *Collected Papers* 1.383)

In der Logik sind Diagramme seit Aristoteles Zeiten ständig verwendet worden; und keine schwierige Schlussfolgerung kann ohne sie gezogen werden. Die Algebra hat ihre Formeln, die eine Art von Diagramm sind. Und wozu sind diese Diagramme gut? Um Experimente mit ihnen anzustellen. Die Ergebnisse dieser Experimente sind oft ganz überraschend. Würde hätte vorher vermutet, dass das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich der Summe der Quadrate über den Schenkeln wäre? Obwohl in den Axiomen der Geometrie und im Gesetz des Geistes enthalten, ist diese Eigenschaft ebenso geheimnisvoll wie die des Magneten.

(Peirce, 1890/1991)

In der Semiotik von Peirce sind also Diagramme eine spezielle Klasse von Zeichen. Jedes solche Zeichen hat eine materielle und sinnlich wahrnehmbare Basis. In der Mathematik sind das meistens Inskriptionen, also „Geschriebenes“, sei es auf Papier, am Computerschirm, im Sand oder sonst wo. Aber es können auch Steinchen sein (Zählsteine, Cuisenaire Stäbe). Wegen dieser Vielfalt entzieht sich das Konzept von Diagramm einer einheitlichen Definition. Jedenfalls muss man sich klar sein, dass einerseits vieles unter den Peirceschen Begriff fällt, was üblicherweise nicht als Diagramm bezeichnet wird, aber auch so manche „Veranschaulichung“ in der Mathematik sich nicht als Diagramm

nach Peirce qualifiziert. Als wichtigste Charakteristikum muss festgehalten werden, dass auf Diagramme Handlungen angewandt werden können, dass sie transformiert, kombiniert, erweitert werden können, dass man mit ihnen „Versuche“ durchführen kann. Dabei machen die möglichen oder besser die zulässigen Handlungen genau genommen erst aus der jeweiligen Inskription das Diagramm. Ich liste einige Punkte auf, die wichtig sind für die Verwendung des Konzeptes von Diagramm (ausführlich dazu in Dörfler, 2006):

- Diagramme werden in Systemen verwendet, die wiederum durch Regeln für das Schreiben, Lesen, Bilden, Transformieren, etc. der jeweiligen Inskriptionen erkennbar sind. Diese Regeln bilden aber nur einen Rahmen für das Handeln an und mit den Diagrammen. Auch Beziehungen zwischen verschiedenen Diagrammsystemen machen Sinn und sind regelbasiert. Die Schreib- und Leseregeln machen Diagramme visuell erkennbar und vor allem beobachtbar und müssen innerhalb eines gewissen Spielraumes strikt eingehalten werden.
- Diagramme haben (im Sinne von Peirce) ikonischen Charakter und sind meist aus Indizes, Symbolen und Teildiagrammen aufgebaut.
- Als diagrammatisches Denken wird das Manipulieren von Diagrammen innerhalb des jeweiligen Systems verstanden. Dieses kann nun mehr oder weniger durch die Regeln fixiert sein, erfordert aber im Allgemeinen Kreativität und Flexibilität, etwa bei der Konstruktion neuer Diagramme oder der Transformation vorliegender zu bestimmten Zielen und Zwecken.
- Es geht also nicht bloß um algorithmisches Arbeiten. Diagrammatisches Denken ist somit eine Art von Experimentieren mit Diagrammen, wobei durch Beobachten der Diagramme neue Beziehungen entdeckt werden können.
- Diagrammatisches Denken erfordert Vertrautheit und Erfahrung mit den Diagrammen und mit den verschiedenen Transformationen. Mit anderen Worten: diagrammatisches Denken muss geübt werden.

- Diagramme werden für verschiedene Zwecke konstruiert und erfunden, zum Teil etwa als Modelle für Situationen und Prozesse, aber auch für Beweise und Begründungen.

Peirce selbst sagt dazu u.a. das Folgende:

...The truth, however, appears to be that all deductive reasoning, even simple syllogism, involves an element of observation; namely deduction consists in constructing an icon or diagram the relations of whose parts shall present a complete analogy with those of the parts of the object of reasoning, of experimenting upon this image in the imagination, and of observing the result so as to discover unnoticed and hidden relations among the parts. ... As for algebra, the very idea of the art is that it presents formulae, which can be manipulated and that by observing the effects of such manipulation to find properties not to be otherwise discerned. In such manipulation, we are guided by previous discoveries, which are embodied in general formulae. These are patterns, which we have the right to imitate in our procedure, and are the icons par excellence of algebra.

(Collected Papers 3.363)

Als Beispiele für Diagrammsysteme in der Mathematik kann man etwa anführen: Dezimalzahlen mit ihren Rechenregeln, allgemeiner jedes System von Zahldarstellungen, die Terme der elementaren Algebra inklusive Gleichungen, die Figuren der elementaren Geometrie, Bruchzahlen, Dezimalbrüche. Oder etwas ferner von der Grundschule: Matrizen, Funktionsterme, Funktionsgraphen, die Zeichen für komplexe Zahlen. Man kann unschwer in allen diesen Beispielen die Relevanz der angeführten Aspekte nachvollziehen. Immer gibt es „mechanische“ Operationen, also das einfache „Rechnen“, jedoch auch Argumentationen anhand der Diagramme. Bei Peirce sind die wichtigsten Beispiele für diagrammatisches Denken Beweise, wie etwa der Winkelsummensatz für das Dreieck oder der Satz des Pythagoras, die ganz eindeutig auf der kreativen Manipulation von Diagrammen beruhen. Für Peirce ist ganz wichtig, dass dabei eine Beobachtung „materieller“, sozusagen handwerklicher Handlungen und ihrer Auswirkungen entscheidend ist, womit mathematisches Tun neben einer mentalen eine ganz zentrale sinnliche Komponente erhält. Dadurch werden mathematisches Tun und Denken sozial, beobachtbar und nachmachbar und

damit auch lernbar: Diagrammatisches Denken erfolgt quasi am Papier und ist somit vorzeigbar (im Gegensatz zu verborgenen geistigen Prozessen). Ich möchte auch betonen, dass durch das Konzept der Diagramme keine neuen Inhalte in die Mathematik kommen, dass aber die Sichtweise, der Fokus der Aufmerksamkeit und damit wohl auch die Art der Tätigkeiten sich wesentlich ändern. Wichtig ist mir besonders, dass die Diagramme selbst der Gegenstand mathematischer Tätigkeiten sind und nicht bloß Hilfsmittel zum Erlernen abstrakter also unsinnlicher „Objekte“. Nach Peirce ist mathematische Tätigkeit diagrammatische Tätigkeit. Dafür möchte ich nun noch Beispiele aus der Grundschulmathematik anführen.

Die Zählreihe in welcher Form auch immer kann als Diagramm angesehen werden, eventuell auch bloß akustisch. Handlungen daran sind vielfältig: Vorwärts- und Rückwärtszählen mit verschiedenen „Schrittlängen“, Addieren und Subtrahieren, Vielfache und Teiler, einfache Gleichungen, etc. Interessant können auch die Beziehungen zwischen verschiedenen Zählreihen sein, das „Übersetzen“ zwischen ihnen. Eine besondere Rolle werden das Diagramm „Zahlenstrahl“ und später die Zahlengerade spielen. Wichtig ist, dass diese einfachen Formen eines diagrammatischen Denkens selbst als bedeutungsvoll und „mathematisch“ aufgefasst werden und nicht als bloße „Veranschaulichungen“ der Zahlen und ihrer Beziehungen. Denn genau besehen haben wir nur die Diagramme und die Handlungen mit ihnen. Wir rechnen nie mit (abstrakten) Zahlen sondern nur mit Diagrammen, also mit Zeichen.

Schöne Beispiele für diagrammatisches Denken sind das Arbeiten mit Zahlenmauern oder Zahlendreiecken, siehe Wittmann/Müller (2018) oder auch die vielen operativen Beweise. Die bekannten Beweise über Eigenschaften gerader/ungerader Zahlen haben diagrammatischen Charakter wie auch die einfachen Summenformeln für Dreieckszahlen oder ungerade Zahlen. Beziehungen bestehen auch zum Operativen Prinzip, das Wittmann (1985, S. 9) wie folgt formuliert:

Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen,...) ausgeübt werden. Daher muss man ... (1) untersuchen, wel-

che Operationen ausführbar sind ... ; (2) herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten ... aufgeprägt werden; beobachten, welche Wirkungen Operationen ... haben.

Zum Stellenwertsystem der Dezimalzahlen gibt es vielfältige Diagramme wie die verschiedenen Formen des Abakus und seiner didaktischen Varianten. Da kann man das Rechnen mit Zählsteinen einerseits als eigenständiges Diagrammsystem werten oder als „Begründung“ für die Rechenregeln mit Dezimalzahlen verwenden, siehe dazu wieder Wittmann/ Müller (2018).

3 Zeichenspiele und Regeln

Am Anfang und als Motto für das Folgende ein Zitat von Wittgenstein:

Es ist sehr oft behauptet worden, die Mathematik sei ein Spiel, dem Schach vergleichbar. In einem Sinne ist diese Behauptung offensichtlich falsch: die Mathematik ist kein Spiel in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes. In einem anderen Sinn ist sie offensichtlich wahr: es gibt eine gewisse Ähnlichkeit. Nun sollte man nicht Partei ergreifen, sondern vielmehr eine Untersuchung anstellen. Manchmal ist es eben nützlich, die Mathematik mit einem Spiel zu vergleichen, und manchmal ist es irreführend.

(VGM, S. 171)

In diesem Teil werde ich einige zentrale Konzepte aus der Philosophie von Wittgenstein vorstellen, die ich als besonders relevant auch für die Didaktik der Mathematik erachte. Ausführlicher habe ich das in Dörfler (2014) dargelegt. Ich wähle als Ausgangspunkt die Idee des Sprachspieles oder Zeichenspieles, mit der Wittgenstein seine Vorstellungen über Sprache und Bedeutung von Zeichen strukturiert. Bedeutung von Zeichen ganz allgemein ist darnach nicht verstehbar als eine universelle und konstante Referenz auf Gegenstände oder Vorstellungen, sondern ist lokal und temporär durch die Art der Verwendung der Zeichen bzw. der Wörter in sogenannten Sprachspielen/Zeichenspielen aufzufassen. Dies ist ein Begriff von „Bedeutung“, der sich radikal vom klassisch-traditionellen unterscheidet, oft verkürzt formuliert als Schlagwort: Bedeutung als Gebrauch. Wittgenstein formuliert dies etwa so:

Man kann für eine große Klasse von Fällen der Benützung des Wortes Bedeutung – wenn auch nicht für alle Fälle seiner Benutzung – dieses

Wort so erklären: Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache.

(PU § 43)

Was ist das Kriterium dafür, wie die Formel gemeint ist? Doch wohl die Art und Weise, wie wir sie ständig gebrauchen, wie uns gelehrt wurde, sie zu gebrauchen.

(BGM I.2. S. 36)

Entscheidend ist in dieser Sicht, was man mit den Zeichen und Wörtern macht, und nicht was sie bezeichnen. Auch das Bezeichnen ist in voller Konsequenz eine Funktion des Gebrauchs. Der Gebrauch von Zeichen, etwa von Wörtern einer Sprache oder von Symbolen in der Mathematik, ist aber in zahllosen Zeichenspielen organisiert, die wiederum nach Wittgenstein in eine jeweilige „Lebenspraxis“ eingebettet sind. Für solche Zeichenspiele gibt Wittgenstein viele Beispiele, zu denen auch immer wieder das Rechnen gehört. Nach seinem Verständnis haben also Zahlzeichen jeder Art nicht Bedeutung dadurch, dass sie von ihnen unabhängige Gegenstände, nämlich die Zahlen, bezeichnen und aus dieser Referenz sich dann erst die diversen Rechenregeln ableiten. Die Zahlzeichen haben danach auch keine globale und absolute Bedeutung, sondern teilweise wesentlich verschiedene Verwendungsformen und damit auch „Bedeutungen“. Das erinnert an die subjektiven Erfahrungsbereiche bei Bauersfeld (1983), wo man auch empirische Belege für diese Abhängigkeit der Bedeutung von den Sprachspielen findet.

Für die elementare Arithmetik könnte man daraus einige Folgerungen ziehen. Kinder erlernen den Zahlbegriff danach in verschiedenen Zeichenspielen, die zwar in Form einer „Familienähnlichkeit“ vernetzt sind, aber sich dennoch im Gebrauch der jeweiligen Zeichen unterscheiden. Zu diesen Zeichenspielen gehören etwa das Manipulieren von Plättchen oder ähnlichen Materialien, die Verwendung des Zahlenstrahles, Operationen mit kleinen Mengen, Dienes-Blöcke, Stellen tafeln (Wittmann/Müller, 2018) u.v.a.m. Wichtig erscheint mir dabei, dass man eben nicht davon ausgeht, dass in allen diesen Fällen „bloß“ Darstellungen oder Veranschaulichungen eines einheitlichen Zahlbegriffs vorliegen. Jedes dieser Zeichenspiele hat lokale Regeln, die auch

gelernt werden müssen: wir lernen in der Mathematik auf jedem Niveau Zeichenspiele. Wittgenstein bringt dadurch seine strikt antimetaphysische Grundhaltung zum Ausdruck: durch das „Spielen“ der Zeichenspiele lernen wir nicht etwas über abstrakte Gegenstände sondern das Spielen des Zeichenspieles. Die Zeichenspiele sind daher nicht bloß ein Mittel des Lernens über etwas von ihnen strikt Verschiedenes. Beim Lernen einer Sprache sieht man dies vielleicht besser: wir lernen den Gebrauch der Wörter und Sätze, das Sprechen und Schreiben. Begriffe wie etwa Hoffnung, Treue, Gott, das Heilige, etc. erschöpfen sich einfach darin wie diese Wörter verwendet werden. Dass sie auch dazu verwendet werden, abstrakte Entitäten zu bezeichnen, gehört zu ihrer Verwendung, belegt aber nicht die „Existenz“ dieser Entitäten. Dass es sich hier um Sprachspiele handelt, sieht man gut daran, dass diese Begriffe ganz unterschiedlich in verschiedenen Sprachspielen verwendet werden.

Mathematik tritt demgegenüber sehr monolithisch auf. Aber schon ein Blick in die Geschichte zeigt, welche unterschiedliche Zeichenspiele allein schon in der Arithmetik gespielt wurden. Babylonier, Ägypter, Römer, Inder, Araber spielten sehr verschiedene „Zahlenspiele“, und so kann man mit Recht sagen, dass deswegen die Zahlen als der Gebrauch der jeweiligen Zeichen in diesen Kulturen auch jeweils andere waren. Diese hatten nicht bloß verschiedene „Darstellungen“ derselben Zahlen, wie man das heute gerne interpretiert. Das Dargestellte entsteht erst im Gebrauch der Zeichen und ist wesentlich von diesem abhängig. Dieser historische Vergleich sollte uns sensibel machen für die Rolle, die verschiedene „Darstellungen“ beim Lernen von Mathematik spielen und spielen können. Fasst man ein solches Darstellungssystem als ein Zeichenspiel auf, so ist dieses dann zunächst einmal in gewisser Weise autonom und stellt für den Lernenden auch nichts dar, was außerhalb des Zeichenspieles liegen würde. Die Lernenden müssen lernen, wie sie mit den Zeichen des Spieles, also etwa den Stäbchen oder Plättchen, handeln und operieren sollen/ müssen, sie müssen eine Spielpraxis erwerben. Erst in dieser gewinnen die Zeichen Bedeutung, aber immer nur im Kontext des Spieles. Die Zeichen beginnen innerhalb des Zeichenspieles eine gewisse „Rolle“ zu spielen, die durch ihre Verwendung im Spiel festgelegt wird.

Für das Spielen von Spielen jeder Art sind die jeweiligen Regeln fundamental. Man kann an einem Spiel nur teilnehmen, wenn man die Regeln und ihre Anwendungen kennt und sich auch strikt darnach verhält. Für die Mathematik verwendet Wittgenstein gerne die Analogie zum Schachspiel:

Man hat mich in Cambridge gefragt, ob ich denn glaube, dass es die Mathematik mit den Tintenstrichen auf dem Papier zu tun habe. Darauf antworte ich: In genau demselben Sinn, wie es das Schachspiel mit den Holzfiguren zu tun hat. Das Schachspiel besteht nämlich nicht darin, dass ich Holzfiguren auf dem Brett herumschiebe. ... Es ist egal, wie ein Bauer aussieht. Es ist vielmehr so, dass die Gesamtheit der Spielregeln den logischen Ort des Bauern ergibt.

(Zitiert nach Epple, 1994)

Es ist nun nicht so, dass Wittgenstein meint, die Mathematik **ist** ein Spiel. So kann man in der Mathematik nicht gewinnen oder verlieren. Aber er sieht hier „Familienähnlichkeiten“, insbesondere was den Regelcharakter anbelangt und die Konstitution von Bedeutung durch die Spielregeln/ Rechenregeln. So wie Regeln und Spiele im Allgemeinen keine Sachverhalte beschreiben und somit nicht „wahr“ oder „falsch“ sein können, so gilt dies auch für die Zeichenspiele der Mathematik. Arithmetische Beziehungen und Formeln sind in dieser Sicht nicht Beschreibungen oder Ausdrücke von arithmetischen Sachverhalten, sondern Regeln im arithmetischen Spiel, Regeln, die sich auf das Operieren mit den jeweiligen Zahlzeichen beziehen, also die Rechenregeln. Extrem formuliert:

Ist schon das die mathematische Alchemie, dass die mathematischen Sätze als Aussagen über mathematische Gegenstände betrachtet werden, also die Mathematik als die Erforschung dieser Gegenstände?

(BGM V.16b. S. 274)

Wittgenstein nennt das regelkonforme Rechnen als den relevanten Indikator dafür, dass man die Arithmetik „verstanden“ hat. Etwa so, wie man Schach verstanden hat, wenn man gut Schach spielt. Wobei das Verstehen einer Regel auch immer die Komponente ihrer Akzeptanz hat: man muss sich für die Einhaltung der Regel entscheiden. Das Befolgen einer Regel erfordert neben der Zustimmung aber auch Aufmerksamkeit, Konsequenz, Übung, Gedächtnis, etc., was ja schon bei Verkehrsregeln einsichtig ist. Wie auch beim Schach einsichtig wird,

ist das Handeln nach Regeln nur sehr teilweise automatisierbar, und das gilt umso mehr für die Mathematik. Die Entscheidung, nach welcher Regel gehandelt werden soll/ muss, ist oft schwierig und erfordert Kreativität und Erfahrung im jeweiligen Zeichenspiel. Aus diesem Regelcharakter der Mathematik und ihrer „Sätze“ ergibt sich auch der oft zitierte „Zwang“: Mathematik wird als unerbittlich erfahren. Aber diesen „Zwang“ gibt es auch beim Schachspielen und die Unerbittlichkeit ist eher ein Aspekt im Verhalten der anderen Spieler, die ein Abweichen von den Regeln nicht tolerieren, und das zu Recht. Im Mathematikunterricht spielt der Lehrer diese unerbittliche Rolle. Jedoch, wenn man die Regeln akzeptiert hat, liegt ihre Befolgung in der eigenen Verantwortung der Lernenden. Wichtig ist mir in diesem Zusammenhang die Einsicht, dass mich nicht ein abstrakter Gegenstandsbereich (etwa die natürlichen Zahlen) durch seine Eigenschaften zwingt, mich an gewisse Regeln zu halten. Durch die Befolgung der Regeln gewinnt man auch Vertrauen in deren Sinnhaftigkeit. In der Mathematik bilden hier ganz sicher die verschiedenen Anwendungen „vertrauensbildende Maßnahmen“, worauf auch Wittgenstein hinweist:

Ich will sagen: Es ist der Mathematik wesentlich, dass ihre Zeichen auch im Zivil gebraucht werden. Es ist der Gebrauch außerhalb der Mathematik, also die Bedeutung der Zeichen, was das Zeichenspiel zur Mathematik macht.

(BGM V.2c. S. 257)

Ich denke, es ist besonders für die Grundschule wichtig, Wittgensteins Hinweis auf die Einbettung von Sprach- und Zeichenspielen der Mathematik in weitere Kontexte sehr ernst zu nehmen. Er spricht dabei von „Lebensformen“, innerhalb derer die Sprachspiele erst Sinn bekommen. Das wäre auch wieder ein entscheidender Unterschied zu Schach, das ja weitgehend isoliert und für sich selbst gespielt werden kann (etwas, das sehr wohl auch in der Mathematik beobachtet werden kann). Es muss aber betont werden, dass die Zeichen der Mathematik (also etwa die Zahlzeichen) ihre mathematische Bedeutung nicht aus diesen „Lebensformen“ beziehen, also nicht aus den Anwendungen abgeleitet werden können. Arithmetische Formeln sind keine Aussagen über endliche Mengen, sondern können auf diese angewendet werden. Diesem Verhältnis von mathematischer Regel (Formel, Satz,

etc.) und außermathematischer Realität widmet Wittgenstein differenzierte Überlegungen. Dabei betont er einerseits die Autonomie der Mathematik in dem Sinne, dass ihre Regeln und Sätze nicht durch die Empirie und die Anwendungen begründet werden können und auch durch diese nicht widerlegt werden können. Aber andererseits betont er die Brauchbarkeit außerhalb der Mathematik, etwa im folgenden Zitat:

So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man lässt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus, ..., so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleiche aber mit Stäben, Fingern, Strichen und den meisten Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende. „Aber wäre dann nicht doch noch $2+2=4$?“ – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden.

(BGM I.37. S. 51)

Im Prinzip könnte man das Zeichenspiel der Arithmetik (etwa in der Form mit Dezimalzahlen) einfach zur „Unterhaltung“ nach den geltenden Regeln spielen, also einfach „rechnen“, und in gewissem Umfang macht das auch Sinn, muss aber durch die Anwendungen Relevanz bekommen. Worauf uns Wittgenstein hinweist, ist, dass das Zeichenspiel durch seine Regeln den Zeichen Bedeutung verleiht, wie das Schachspiel seinen Figuren Bedeutung verleiht:

Für Frege stand die Alternative so: Entweder wir haben es mit Tintenstrichen auf dem Papier zu tun, oder diese Tintenstriche sind Zeichen von Etwas, und das, was sie vertreten, ist ihre Bedeutung. Dass diese Alternative nicht richtig ist, zeigt gerade das Schachspiel. Hier haben wir es nicht mit den Holzfiguren zu tun, und dennoch vertreten die Figuren nichts, sie haben in Freges Sinn keine Bedeutung. Es gibt eben noch etwas Drittes, die Zeichen können verwendet werden wie im Spiel.

(Zitiert nach Kienzler (1997), S. 201)

Als ein Beispiel möchte ich auf die Rolle der Null hinweisen. Da gibt es ganz eigenartige „Spekulationen“ darüber, wofür die Null als Zeichen stehen könnte, also was im traditionellen Sinne ihre Bedeutung sein könnte. Ohne Mystik jedoch geht es einfach um die Rolle, die das Zeichen „0“ in der Arithmetik spielt, und diese Rolle ist durch Rechenregeln festgelegt wie $0+n=n$, $0 \cdot n=0$, $n-0=n$ usw. Diese Regeln kann man schon veranschaulichen, aber sie sind im Prinzip „nur“ Regeln für den

Umgang mit Zeichen, und mehr braucht man auch nicht für sinnvolles Rechnen. Ähnliches gilt für die negativen Zahlen und ihre Rechenregeln, die nur sehr teilweise über Anwendungen motivierbar sind, was ja auch für die Null gilt, die nur „innermathematisch“ gebraucht wird. Aber das würde uns zu weit über die Grundstufe hinausführen. Da Kinder an das Spielen von Spielen gewöhnt sind, denke ich, kann die Betonung des Spielcharakters beim Lernen auch der Arithmetik positive Auswirkungen haben. So fürchtet man sich doch nicht vor Spielen und es passiert nichts, solange man sich an die Regeln hält.

4 Zeichenspiele auf Diagrammen

Eine Kombination aus den beiden Konzepten von Diagramm und Zeichenspiel erscheint mir für die Mathematik besonders ergiebig, auch für den Entwurf von Lernumgebungen. Dabei haben dann die Diagramme in Analogie zum Schachspiel die Rolle des Schachbrettes und der Figuren und die Mathematik wird auf den Diagrammen „gespielt“. Dabei sind die Regeln des Zeichenspieles als Regeln für die Manipulation der Diagramme von zentraler Bedeutung: Sie muss man lernen und sich strikt an sie halten. Ein einfaches Beispiel sind etwa die positiven ganzen Dezimalzahlen und die Umformungen und Transformationen, die sich durch „Verschieben“ von Einsen um eine Stelle nach links oder rechts ergeben. Dafür gelten dann die üblichen „Wechselregeln“. Etwa: nach rechts werden aus einem Einser zehn oder ein Zehner. Damit kann das Borgen auch über mehrere Nullen hinweg nachgespielt und geübt werden durch Umschreiben der Diagramme. Natürlich kann das auch mit Plättchen oder einer Stellenwerttafel gemacht werden. Aber letztlich sind die Dezimalzahlen ja das Ziel, und es ist durchaus fraglich, ob die genannten Materialien oder Veranschaulichungen den Zugang erleichtern. Es sind diese genau genommen eigene Zeichenspiele, die gelernt werden müssen, und dann muss auch noch der Modellcharakter für die Dezimalzahlen begriffen werden. Dieser liegt nicht einer Bildbeziehung begründet, sondern in einer „Isomorphie“ der diagrammatischen Spielregeln. Auch der strukturelle Aufbau der Dezimalzahlen kann so in Spielform erfolgen: als regelkonformes Zählen mit entsprechenden Wechselregeln. Ganz wichtig dabei ist die Grundidee, dass der „Wert“ einer Ziffer von ihrem Platz abhängt. Zum tieferen Verständnis kann man verschiedene

„Wechselregeln“ vereinbaren, die sogar je nach Stelle unterschiedlich sein können. So entsteht ein komplexes „Stellenwertspiel“.

5 Normen und Begriffe

Wittgenstein weist somit auf die zentrale Rolle der Zeichen für das mathematische Tun hin, und auch darauf, dass dieses Tun in Zeichenspielen organisiert ist, die wiederum auf Regeln für das Manipulieren der Zeichen beruhen. Er meint damit, dass wir Formeln und Sätze als Regeln in Zeichenspielen gebrauchen, die erst in diesen Zeichenspielen Bedeutung erhalten. Das sieht man zum Beispiel daran, dass man arithmetische Formeln als Rechenregeln in weiteren Rechnungen verwendet. Der Regelcharakter zeigt sich nach Wittgenstein noch in einer anderen wichtigen Rolle: Formeln und Sätze werden gebraucht als Normen, als Paradigmen, als Standards, als Vorbilder, als Muster (im Gegensatz zum Gebrauch als Beschreibung eines mathematischen Sachverhaltes – eine Idee die Wittgenstein radikal ablehnt.) Siehe dazu Kroß (2008). Eine Formel wie $25 \times 25 = 625$ dient etwa zur Überprüfung der Korrektheit einer Rechnung, der Fairness einer Verteilung von Geld, einer Anordnung von Dingen, etc. Wir orientieren uns an der Formel, die nicht mehr weiter hinterfragt wird: so muss es gemacht werden. Es geht auch um die Bewertung und Beurteilung von außer-mathematischen Sachverhalten, etwa im Vergleich mit einem idealen Zustand. Hier besteht eine Analogie zur Verwendung von Begriffen, die auch eher zur Beurteilung von (empirischen) Sachverhalten dienen als bloß zu deren Beschreibung. Begriffe ermöglichen damit, „Urteile“ zu fällen, indem wir etwa aus dem Gebrauch (also der Bedeutung) von Wörtern wie Strom, Fluss, Bach unsere Erfahrungen, Beobachtungen entsprechend beurteilen und einteilen. Begriffe legen damit Paradigmen oder Normen fest. Wittgenstein meint nun, dass die Rolle mathematischer Begriffe (zu denen er auch Formeln und Sätze zählt) analog dazu ist. Als ein Beispiel verwende ich den Begriff der mathematischen Kugel. Diese ist in diesem Gebrauch kein Gegenstand sondern eine Norm oder ein Standard zur Überprüfung auf Kugelform. Das kann man für viele geometrische Konzepte ähnlich sehen, womit sich dann etwa die Frage nach der Existenz der idealen geometrischen Figuren und Körper auflöst. Sie sind einfach von den Menschen erfundene ideale Regeln, Normen, eine Art von Maßstäben. Aus diesen Regeln leiten

die Mathematiker dann vielfältige andere Regeln ab, etwa die über das Volumen, die Fläche, den Umfang, etc., die dann natürlich den Status der Regel „erben“. In diesem Sinne **hat** dann die mathematische Kugel kein Volumen und auch keine Oberfläche. Wie sollte man sich denn das auch für ein „abstraktes“ Objekt vorstellen, welches es in Raum und Zeit gar nicht geben kann? Wittgenstein befreit uns auf diese Weise auch von metaphysischen Qualen, indem er uns immer wieder darauf hinweist, auf den tatsächlichen Gebrauch der Zeichen zu achten und nicht auf das Narrativ, das diesen Gebrauch begleitet. Mathematik jeder Art kommt dadurch zum Menschen zurück, wo sie ja eigentlich auch immer war. Es geht nicht um die „Erkenntnis“ geheimnisvoller Dinge wie der Zahlen, sondern um die Einübung in eine Praxis des regelgeleiteten Gebrauchs von Zeichen in Zeichenspielen. Und das ist schwierig genug!

6 Zum Schluss

Das Ziel dieses Beitrages ist es nicht, konkrete didaktische Vorschläge zu machen, sondern durch die Skizzierung von semiotischen Konzepten eine eher alternative Sichtweise auf Mathematik anzuregen. Diese besteht im Wesentlichen im Fokus auf Zeichentätigkeiten, die als konstitutiv für Mathematik gesehen werden. Dadurch zeigt sich Mathematik als eine soziale, beobachtbare, an Regeln orientierte Tätigkeit, bei der metaphysische Spekulationen über abstrakte Objekte überflüssig sind. Mathematik wird „humanisiert“.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld u.a. (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6* (S. 1-56). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, 27(3/4), 200-219.

Dörfler, W. (2014). Didaktische Konsequenzen aus Wittgensteins Philosophie der Mathematik. In Heike Hahn (Hrsg.), *Anregungen für den Mathematikunterricht unter der Perspektive von Tradition, Moderne und Lehrerprofessionalität. Festschrift für Regina Dorothea Möller* (S. 68-80). Hildesheim: Franzbecker.

Epple, M. (1994). Das bunte Geflecht der mathematischen Spiele. *Mathematische Semesterberichte* 41, 113 – 133.

Hoffmann, M.H.G. (2005). *Erkenntnisentwicklung. Philosophische Abhandlungen Bd. 90*. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

Kienzler, W. (1997). *Wittgensteins Wende zu seiner Spätphilosophie 1930 – 1932*. Frankfurt: Suhrkamp.

Kroß, M. (Hrsg.) (2008). *Ein Netz von Normen. Wittgenstein und die Mathematik*. Berlin: Parerga.

Mühlhölzer, F. (2010). *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Frankfurt: Vittorio Klostermann.

Peirce, Ch. S. (1931-1935). *Collected Papers I-VI*. Cambridge: Harvard University Press.

Peirce, Ch. S. (1991). *Naturordnung und Zeichenprozess*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Radu, M. (2003). Peirces Didaktik der Arithmetik: Möglichkeiten ihrer semiotischen Grundlegung. In M. H. G. Hoffman (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven* (S. 160 – 194). Hildesheim: Franzbecker.

Wittgenstein, L. (1978). *Wittgensteins Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik, Cambridge 1939 (Hrsg. C. Diamond) (VGM)*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (1984). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik (BGM)*. suhrkamp taschenbuch wissenschaft 508. Frankfurt: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (2013). *Philosophische Untersuchungen (PU)*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren* 11, 7-11.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G. N. (2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. II: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen*. Stuttgart: Klett/ Kallmeyer.

Em. Univ. Prof. Dr. Willibald Dörfler
Universität Klagenfurt
Institut für Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 65
9020 Klagenfurt
willi.doerfler@aau.at

Darstellungen im Mathematikunterricht – real, mental, digital

von Axel Schulz und Daniel Walter

Mathematikunterricht ohne Darstellungen ist nicht denk- und nicht durchführbar. Diese Darstellungen können sehr konkret sein, aber auch sehr flüchtig. Sie können vorgestellt sein oder auf der Oberfläche eines Tablets erscheinen oder in noch anderer Form vorliegen. Der Beitrag versucht Impulse für das gemeinsame Nachdenken über Darstellungen zu geben: darüber, in welcher Form sie vorliegen und wahrgenommen werden können, und darüber, wie sie gedeutet und genutzt werden können.

Schlüsselwörter: Darstellungen, Deutung gemeinsam aushandeln, Kommunikation, Mehrdeutigkeit, Darstellungsformen, Darstellungen wahrnehmen

1 Ziel des Beitrags und Vorgehen

Wenn man einen sehr klugen Gedanken von Bauersfeld auf Darstellungen (und nicht wie im Original auf Aufgaben) bezieht, könnte man vielleicht Folgendes formulieren (angelehnt an Bauersfeld, 2003, 15):

Mal abgesehen davon, dass es den Universaltreffer 'gute [...] [Darstellung]' nicht geben kann, weil das Sich-Einlassen und der Lösungsgang von der Situation und der Wahrnehmung der beteiligten Personen abhängen, so gibt es doch Unterschiede in der Qualität des Ausgangsmaterials.

Ausgehend von diesem frei interpretierten Gedanken möchten wir einige Impulse in die Diskussion über den Einsatz von Darstellungen im Mathematikunterricht einbringen und zum Nachdenken über die folgenden Fragen anregen:

- Was sind Darstellungen?
- Was wissen wir über das Wahrnehmen und vor allem über das individuelle Deuten von Darstellungen?
- Wie können Darstellungen gemeinsam genutzt werden?
- Welche Unterschiede kann es in der ‚Qualität des Ausgangsmaterials‘ geben?

Dabei fokussieren die Beispiele des vorliegenden Beitrags vor allem den Inhaltsbereich Arithmetik.

Vorab eine Bemerkung zur *Benennung* von Darstellungen im Mathematikunterricht: Immer wieder wird festgestellt – so auch hier von

uns –, dass es keine eindeutige und einheitliche begriffliche Nutzung gibt, sobald es um Veranschaulichungen, Arbeitsmittel, Anschauungsmittel, Lernmittel, Materialien etc. geht. Jeder dieser Begriffe legt scheinbar implizit eine Schwerpunktsetzung nahe (vgl. z. B. Krauthausen, 2018, 333 f.; Schulz, 2014, 52). Im vorliegenden Beitrag versuchen wir, den Begriff Darstellungen möglichst ‚unscharf‘ zu nutzen (Bauersfeld, 2002, 14) und die begriffliche Schärfung stattdessen durch das Vorstellen von Beispielen vorzunehmen.

2 Was sind Darstellungen? Beispiele und Überlegungen

Beispiel 1: Vivien streckt nacheinander sieben Finger aus: fünf an der linken Hand und zwei an der rechten.

Beispiel 2: Simon nutzt die Tablet-App *Touch Times* (vgl. Chorney et al., i. Dr.). Simon legt zunächst fünf Finger auf die linke Seite der Oberfläche, dann zwei Finger auf die rechte Seite (vgl. Abb. 1).

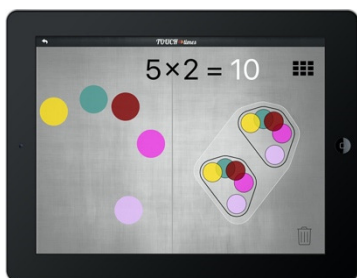


Abb. 1 Fünf und zwei Finger aufgelegt – bei der Tablet-App *Touch Times*

Beispiel 3: Ismahel zeichnet Folgendes (Abb. 2).

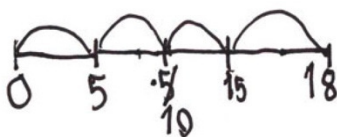


Abb. 2 Ismahels Darstellung am Rechenstrich (aus Kuhnke, 2013, 253)

Anhand dieser Beispiele können Impulsfragen entwickelt werden: Worum kann es bei diesen Darstellungen gehen? Was kann aus den Darstellungen ‚herausgelesen‘ werden? In welchen Situationen könnten

diese Darstellungen entstanden sein? Gibt es Adressaten, oder mit anderen Worten: Stellen Vivien, Simon, Ismahel etwas für jemanden dar oder sind sie selbst ‚Adressaten‘ ihrer eigenen Darstellungen? Was wollen die drei darstellen: Zahlen, Operationen oder Rechenwege?

Diese Fragen und deren mögliche Antworten können zu einigen Überlegungen zum Wesen von Darstellungen anregen, die wir im Folgenden stichwortartig zusammenstellen wollen:

Darstellungen sind Mittel des *Denkens und Verstehens* einerseits und Mittel der *Verständigung* andererseits (vgl. z. B. Verboom, 2014, 41); manchmal sind sie beides gleichzeitig – und im besten Fall dienen sie der Kommunikation mit dem wechselseitigen Bemühen um ein „Verstehen und Verstanden werden“ (Bauersfeld, 2002, 12). So können alle drei Einstiegsbeispiele Beispiele dafür sein, dass *sich jemand etwas selbst* zeigen, notieren, etwas ausprobieren will, oder dass *jemand jemandem etwas* zeigen oder erklären will.

Darstellungen können in unterschiedlicher Form *vorliegen*: zum Beispiel als konkreter Gegenstand, als Handlung (selbst ausgeführt oder zugeschaut), auch als Gesten, als Bild (ausgedruckt oder auf einem Bildschirm), als Braille-Schrift oder -Ziffern, als Zahlwort oder Term (geschrieben oder gesprochen), als Geschichte (geschrieben oder gesprochen), als Tabelle, als Diagramm etc. (vgl. z. B. Kuhnke, 2013). Dabei gibt es verschiedene Kriterien, nach denen die vorliegenden Darstellungen kategorisiert werden können, zum Beispiel: mit oder ohne Text, mit oder ohne mathematische Symbole, gegenständlich oder schematisch, bildlich oder nicht, zwei- oder dreidimensional, dynamisch oder statisch¹, durch eigenes Eingreifen zu verändern oder nicht, etc.

Darstellungen können auditiv, visuell und/oder haptisch *wahrgenommen* werden: So kann z. B. eine Rechengeschichte gehört, gelesen, beobachtet, in einem Film oder als Animation auf einem Tablet gesehen

¹ Wir möchten unterscheiden zwischen Darstellungen, die in ihrer *Form* statisch oder dynamisch sind (also zum Beispiel ein Bild oder ein Film), oder in ihrem *Inhalt* (also zum Beispiel Rechengeschichten, die einen Zustand beschreiben oder eine Handlung, vgl. z. B. Schipper, 2009, 99 ff.). Selbstverständlich ist eine gedruckte Rechengeschichte in ihrer Form statisch, die in ihr beschriebene Situation kann dennoch dynamisch sein.

werden. Eine Menge von vier ‚Objekten‘ kann angefasst oder gesehen oder gehört werden (zum Beispiel, wenn vier Mal geklatscht wird oder ein akustisches Signal vier Mal zu hören ist); derjenige, der klatscht, fühlt vier Schläge. Auch hier ergeben sich somit verschiedene Möglichkeiten einer Sortierung bzw. Kategorisierung der Wahrnehmung.

Diese Unterscheidung in ‚Formen des Vorliegens‘ und ‚Formen des Wahrnehmens‘ kann zum Nachdenken anregen über die klassischen drei Repräsentationsebenen von Wissen nach Bruner (1974): Welcher dieser Ebenen würde das bewegte Bild zugeordnet? Welcher das ‚enaktive‘ Zeigen eines Rechenwegs am Rechenstrich? Welcher das Zusehen bei einer Handlung?).

3 Zur Wahrnehmung von Darstellungen

Darstellungen beim Mathematiklernen sind immer ‚gemeinsam‘ und ‚einsam‘ zugleich (vgl. Abb. 3). Der gemeinsame Anteil ist zunächst einmal der, der objektiv immer gleich bleibt – auditiv, haptisch, visuell (vgl. aber auch Ende Abschnitt 3). Nun wissen wir aber, dass jede sinnliche Wahrnehmung selektiv ist und meist auch kognitiv gesteuert wird – bewusst und/oder unbewusst – und dass somit eine objektive Wahrnehmung von Darstellungen nicht möglich ist (vgl. z. B. Söbbeke, 2005, 33 ff.; Leuders, 2012, 20 ff.). Somit ist jede Deutung von Darstellungen zunächst ‚einsam‘: Verschiedene Personen sehen in Ismahels Zeichnung (Beispiel 3) Unterschiedliches.

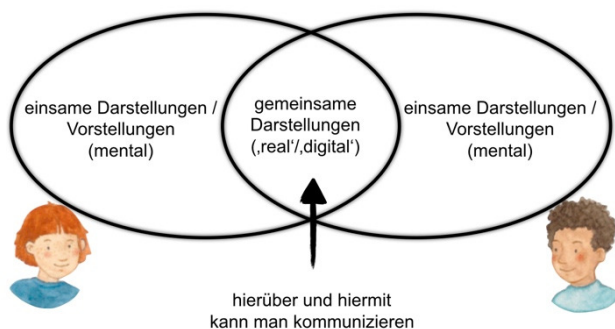


Abb. 3 Gemeinsame und einsame Darstellungen

Die Deutungen von Darstellungen sind immer *kontext- und personenabhängig*. Sie unterliegen dem Verständnis, den Vorkenntnissen, der

Intention, den Annahmen, den mentalen Modellen des *Darstellenden* sowie dem Verständnis, den Vorkenntnissen, der Intention, den Annahmen, den mentalen Modellen des *Auffassenden* – *Deutende sind also beide*.

Somit können gleiche Darstellungen – abhängig von Kontext und Vorwissen – sehr *unterschiedlich gedeutet werden*; dies ist in vielen Veröffentlichungen und Befunden dokumentiert (vgl. z. B. Söbbeke, 2005). Ergänzend möchten wir dies an drei weiteren Beispielen verdeutlichen:

(1) Kerstin bewegt ihre Hand auf Augenhöhe von rechts nach links, Sinan macht das auch. Erst der Kontext der jeweiligen Situationen macht deutlich: Kerstin stellt sich vor, wie sie fünf Kugeln auf dem Rechenrahmen verschiebt; Sinan stellt sich vor, dass er zehn Einerwürfel zu einer Zehnerstange bündelt und diese an einer vorgestellten Stellenwerttafel von der Einer- in die Zehnerspalte zieht – beide begleiten ihre jeweilige Vorstellung mit derselben „ikonischen Geste“ (vgl. auch Abschnitt 4.6).

(2) Vivien (Einstiegsbeispiel 1) streckt nacheinander sieben Finger aus. Ohne Kontext wissen wir nicht, ob Vivien dies tut, um eine Menge von sieben Objekten darzustellen, ob sie eine Additions- oder Subtraktionsaufgabe über das Weiter- oder Rückwärtszählen lösen will oder ob sie die Aufgabe $7 \cdot 3$ über das Durchgehen der Dreierreihe lösen möchte.

(3) Beim *Rechentablett* (Urff, o.J.) wird das Auflegen von fünf Fingern in der linken und zwei Fingern in der rechten Bildschirmhälfte additiv als $5 + 2$ dargestellt. Dieselbe Positionierung der Finger bei der App *Touch Times* (Chorney, Gunes & Sinclair, i. Dr.) erzeugt eine Darstellung, die multiplikativ gedeutet werden kann: $2 \cdot 5$ (bzw. $5 \cdot 2$ im nordamerikanischen Sprachraum, in dem die Versprachlichung der Darstellung als „five multiplied by two“ durchaus gebräuchlich ist (vgl. Watanabe, 2003)). Eine wiederum andere Darstellung wird bei der App *Stellenwerttafel* (Ladel & Kortenkamp, 2015) erzeugt, nämlich 5 Plättchen in der Zehner- sowie zwei Plättchen in der Einerspalte – übersetzt: $5 \cdot 10 + 2 \cdot 1$. Die jeweiligen Handlungen und die jeweilige Anzahl der Finger sind in allen drei Fällen gleich, und doch bedeutet die Fingerdarstellung „fünf links und zwei rechts“ bei verschiedenen virtuellen Arbeitsmitteln Unterschiedliches (vgl. Abb. 4).

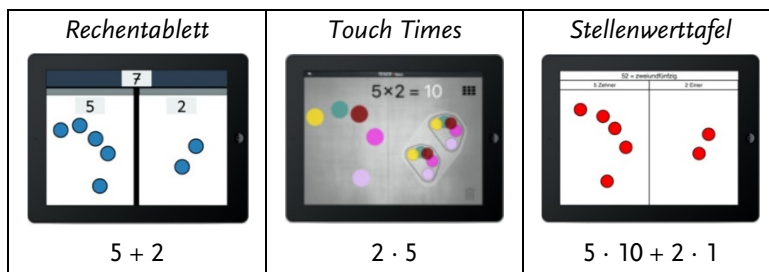


Abb. 4 Unterschiedliche Bedeutungen von Darstellungen bei verschiedenen Tablet-Apps nach dem Auflegen von fünf und zwei Fingern

Die Beispiele können erneut dafür sensibilisieren, dass mit gleichen Darstellungen je nach Kontext sehr Unterschiedliches gemeint sein kann – und dass der Kontext deshalb im besten Fall expliziert wird.

Erfahrenen Deutenden kann es sogar gelingen, in gegebenen Darstellungen Verschiedenes zu sehen, ihre eigene ‚einsame‘ Deutung zu variieren und den Deutungen anderer zu folgen. Dies kann vor allem gelingen, wenn eine reflektierte Grundhaltung zum *eigenen* Vorgehen und zur *eigenen* Deutung angestrebt wird (vgl. Korten, i. Dr.; Bauersfeld, 2002, 13; Schülke, 2013).

Die sog. ‚einsamen‘ Darstellungen können sich weiterentwickeln zu *Vorstellungen*, zu „subjektiven Vorstellungsbildern“ (Lorenz, 1991, 65), nämlich dann, wenn es dem oder der Einzelnen gelingt, die sinnlich und selektiv wahrgenommene und kognitiv gedeutete Darstellung mental zu nutzen, zu verdichten, weiterzuentwickeln und mit anderen Vorstellungsbildern zu verknüpfen. Kennzeichnend für diese mentalen Modelle ist – wenn sie tragfähig sein sollen – unter anderem, dass sie nicht mehr den Beschränkungen des Konkreten unterworfen sind (Lorenz, 1992). Zudem sind es nicht nur die sinnlich wahrnehmbaren Bestandteile der Darstellung, die bestenfalls mental verfügbar sind, sondern vor allem die Beziehungen zwischen diesen Bestandteilen (zu diesen Beziehungen später mehr).

Diese mentalen Modelle ihrerseits sind wieder leitend für die Deutung weiterer – ähnlicher oder eher unähnlicher – Darstellungen. Ziel von Mathematikunterricht sollte daher sein, dass die individuellen Vorstel-

lungen, die subjektiven mentalen Modelle nicht ‚vereinsamen‘, sondern dass sie anschlussfähig bleiben – sowohl bezogen auf das erfolgreiche Weiterlernen als auch bezogen auf den Austausch mit anderen.

Und so kommen wir zurück zu den gemeinsamen Darstellungen: Gemeinsame Darstellungen sind selbstverständlich mehr als das sinnlich wahrnehmbare ‚Objekt‘ – egal, ob es visuell, haptisch oder/und auditiv wahrgenommen werden kann. *Gemeinsame Darstellungen* sind im besten Fall Medien, die uns den Austausch und die Kommunikation erst ermöglichen und an denen wir unsere ‚einsamen‘ Darstellungen abgleichen können, um so zu einer (annäherungsweise) geteilten Deutung zu kommen (Abb. 3; vgl. auch Tiedemann, 2019).

4 Kann man Deutungen steuern? Bemerkungen zur Aufmerksamkeitsfokussierung

Damit es nicht zur Vereinsamung von Darstellungen kommt – damit also Vorstellungen sich nicht komplett losgelöst von den Vorstellungen anderer (weiter-) entwickeln, kann und sollte die Aufmerksamkeit der Beteiligten beim Interagieren und Kommunizieren fokussiert werden. Doch worauf? Offenbar sind es gerade nicht nur die empirischen Gegebenheiten, auf die wir unsere Aufmerksamkeit richten. Vielmehr sind es die Zusammenhänge, die Beziehungen, die Strukturen, die in den Blick genommen werden sollten (vgl. z. B. Söbbeke, 2005). Lorenz (1991, 61) fasst diesbezüglich zusammen: „Mathematiklernen ist [...] in weiten Bereichen das Erfassen von Beziehungen.“ (vgl. auch Dörfler, 1988). Das ‚Sichtbarmachen‘ dieser eigentlich unsichtbaren Beziehungen ist somit die Herausforderung jeder Interaktion und Kommunikation, die die Mathematik zum Thema haben. Im Folgenden stellen wir verschiedene ausgewählte Möglichkeiten vor, wie Aufmerksamkeit fokussiert und Kommunikation u. E. unterstützt werden kann.

4.1 Gemeinsamkeiten und Unterschiede

Um Beziehungen in den Blick nehmen zu können, scheint es sinnvoll, Darstellungen zu *vergleichen* (Lorenz, 1991, 68, mit Verweis auf Steiner, 1973). Durch das Vergleichen konkreter Darstellungen kann die kognitive Aktivität von den Gestaltmerkmalen und Wahrnehmungsdaten

weg und auf die Relationen gerichtet werden (ebd.). Leitimpulse können hier sein: Was ist/bleibt gleich? Was ist/wird anders? Erkläre. Begründe. Verglichen werden können zum Beispiel:

- Zahldarstellungen der 57 mit Plättchen, am Rechenrahmen, mit dem Zehnersystem-Material, am Punktefeld, an der Hundertertafel, am Zahlenstrahl, etc.
- Verschiedene Rechengeschichten mit dem gleichen Zahlenmaterial, der gleichen zugrundeliegenden Operation, aber unterschiedlichen Kontexten.
- Die automatische Veränderung der verschiedenen Darstellungen der Tablet-App *Zahlen bis 100* beim Hinzufügen eines Zehners (vgl. Abschnitt 4.5, vgl. hierzu auch Duval, 2006, 125).

4.2 Überspringen und Innehalten

Viele Darstellungen des gemeinsamen Kommunizierens über mathematische Inhalte sind *prozesshaft* – zum Beispiel Handlungen, aber auch Erklärungen, das Bedienen von Schieberegler entsprechender Software. Um Beziehungen herauszustellen, kann die Aufmerksamkeit der Beteiligten durch das Überspringen oder Innehalten im Rahmen dieser Prozesse auf besondere „Punkte der Aufmerksamkeit“ gelenkt werden (Tiedemann, i. V. mit Verweis auf Dörfler, 1988): Irrelevantes kann übersprungen werden, bei Relevantem kann innegehalten werden. Ein Beispiel für das Innehalten ist das Besprechen des Rechenwegs ‚schrittweise über den Zehner‘ am Rechenrahmen (vgl. ebd.). Bei der Arbeit am Rechenrahmen wird eine Entschleunigung des Rechenwegs qua Medium mitgeliefert. Ist ein Kind aufgefordert $28 + 7$ zeilenfüllend darzustellen, muss der zweite Summand zerlegt werden und es ergibt sich automatisch eine Zäsur in der Handlung, nämlich beim vollen Zehner: Beides – das passende Zerlegen des zweiten Summanden und das Innehalten beim vollen Zehner – kann durch sprachliche Begleitung bzw. Intervention und durch Interpunktion der Handlung deutlich fokussiert werden (vgl. ebd.).

4.3 Wiederholen und Umkehren

Neben dem Überspringen und Innehalten besteht auch die Möglichkeit, bestimmte Prozesse gezielt zu wiederholen bzw. rückgängig zu

machen. Auch hierbei geht es darum, durch das wiederholte Ausführen und Umkehren bestimmter (Handlungs-) Prozesse den Fokus auf interessierende Aspekte mathematischen Tuns und somit auf deren Beziehungen zu lenken. Huhmann (2013) bemerkt hierzu (im Rahmen von Aktivitäten zur Entwicklung von Raumvorstellung), dass das computergestützte und selbstgesteuerte Wiederholen und Umkehren von Prozessen der Flüchtigkeit von (animierten) Darstellungen entgegenwirken kann. Zudem können vor allem leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler durch das Nachverfolgen dynamischer Visualisierungen ihre Aufmerksamkeit besser auf diese „Ideeengeber“ konzentrieren (vgl. ebd.).

Ein arithmetisches Beispiel, bei dem das Wiederholen und Rückgängigmachen besonders relevant sein kann, ist das Bündeln und Entbündeln von Einern, Zehnern, Hundertern etc.. Diese Prozesse können ‚händisch‘ durchgeführt werden. Den Befunden Huhmanns folgend, können diese *konkreten* Bündelungs- und Entbündelungsprozesse jedoch eine kognitive Überforderung und Ablenkung vom eigentlich Relevanten darstellen (vgl. Huhmann, 2013, 157 ff.) – in diesem Fall dem fortgesetzten Bündeln und Entbündeln als grundlegendem Konzept (und nicht als Handlung).

4.4 Rein- und Rauszoomen

Eine weitere Möglichkeit der Aufmerksamkeitsfokussierung kann das *Zoomen* sein, besonders beim gemeinsamen Sprechen über sehr große oder sehr kleine Zahlen – zum Beispiel am Zahlenstrahl. Tatsächlich ist das Betrachten ausgewählter Ausschnitte am Zahlenstrahl bereits eine etablierte unterrichtspraktische Umsetzung in Printmedien (vgl. z. B. Krauthausen, 2018, 323). Durch das Verfeinern oder Vergrößern der Skalierung bzw. von Zahlenstrahlausschnitten können Beziehungen zwischen Zahlen besonders in den Blick genommen, Analogien konstruiert und Zusammenhänge hergestellt werden. Digitale Medien könnten dieses Zoomen möglicherweise nachvollziehbarer und vielleicht auch ‚intuitiver‘ machen, als dies bei gedruckten Zahlenstrahlausschnitten der Fall ist, doch dies ist u. W. noch nicht hinreichend empirisch überprüft.

4.5 Synchronität von Darstellungen

Eine weitere und vielleicht die am häufigsten genutzte und wichtigste Möglichkeit der Aufmerksamkeitsfokussierung ist das gleichzeitige Nutzen von Darstellungen: z. B. wenn Vivien im Einstiegsbeispiel nicht nur ihre Finger ausstreckt, sondern dabei hörbar die Dreierreihe aufsagt; wenn Simon sieben Finger auf das Tablet legt und dabei sagt: „Hier unter meinen rechten beiden Fingern, da sind dann immer die Fünf, also zwei Mal die Fünf von hier“ und dabei wiederholt die Finger der linken Hand auf dem Bildschirm auftippt: Dann nutzen sie verschiedene Darstellungen synchron.

Eine Möglichkeit, die vor allem digitale Medien bereitstellen, ist das *automatische* Synchronisieren von Darstellungen – von Rauh (2015, 15) als „Alleinstellungsmerkmal“ dieser Medien bezeichnet. Entsprechende Programmierungen machen es möglich, dass sich verschiedene Darstellungen (zum Beispiel Abbildungen, Zahlzeichen, Zahlworte, etc.) gleichzeitig und automatisch verändern, wenn an nur einer Darstellung vom Nutzer, von der Nutzerin Veränderungen vorgenommen werden. Ein Beispiel hierfür ist die Tablet-App *Zahlen bis 100* (Urff, o. J.). Werden zum Beispiel zehn Plättchen virtuell hinzugefügt, so ändert sich nicht nur die bildliche Darstellung, sondern gleichzeitig erfolgt auch eine Veränderung der nonverbal-symbolischen Darstellung; in diesem Fall erhöht sich die Zehnerziffer um Eins. Umgekehrt kann eine Veränderung des Zahlsymbols durch eine Touchbedienung der entsprechenden Schaltfläche ‚+10‘ vorgenommen werden. Nicht nur das Zahlsymbol wird daraufhin verändert – synchron erscheinen zudem zehn Plättchen (vgl. Abb. 5).

Ob und wie das *selbstständige* Übersetzen zwischen Darstellungen – als eine der wichtigsten Kompetenzen beim Mathematiklernen – durch dieses automatische Synchronisieren unterstützt werden kann, gilt es noch zu untersuchen (vgl. u. a. Walter, 2018).

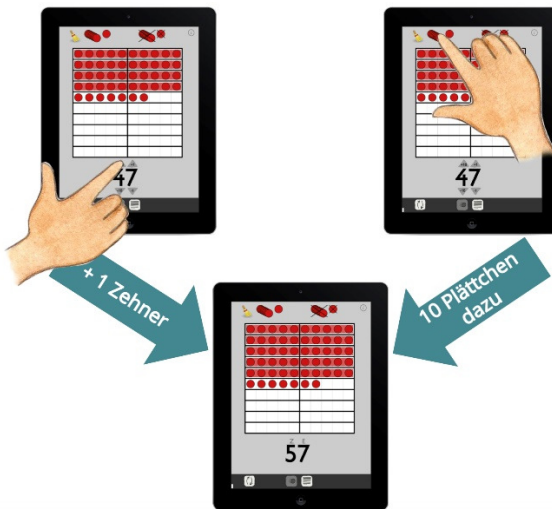


Abb. 5 Automatische Synchronität von Darstellungen in Zahlen bis 100

4.6 Hervorhebungen

Hervorhebungen können in besonderer Weise die Aufmerksamkeit auf Beziehungen lenken. Eine Art dieser Aufmerksamkeitsfokussierung können *grafische* Hervorhebungen sein wie z. B. Pfeile, Einkreisungen, farblichen Markierungen, Unterstreichungen (vgl. hierzu auch die sog. „Forschermittel“, pikas.dzlm.de/227). Tatsächlich gibt es in der mathematikdidaktischen Forschung bisher kaum gezielte Untersuchungen zum Einsatz, zur Verwendung sowie zur Deutung dieser Hervorhebungen (vgl. aber z. B. Link, 2012). Eine weitere Art der Aufmerksamkeitsfokussierung können *Gesten* sein (Huth, 2010). Diese können – ähnlich wie die grafischen Hervorhebungen – auf bestimmte Ausschnitte einer visuell vorliegenden Darstellung verweisen (deiktische Gesten). Als *ikonische Gesten* können sie die Form oder Bewegung einer vorgestellten Handlung oder eines subjektiven Vorstellungsbildes widerspiegeln (vgl. ebd.): z. B. eine Handbewegung zum Auffüllen des Zehners oder zum Springen am mentalen Zahlenstrahl. Dabei sind Gesten häufig sprachbegleitend und somit synchron zu (mindestens) einer weiteren Darstellung (siehe Abschnitt 4.5).

5 Zur ‚Qualität des Ausgangsmaterials‘

Es gibt verschiedene ‚Kriterienkataloge‘ für konkret-gegenständliche Darstellungen, die Orientierung bei der Auswahl von Materialien für den Unterricht, aber auch Orientierung bei der didaktischen Analyse dieser Materialien bieten können (vgl. z. B. Krauthausen, 2018, 334 f.; Schipper, 2009, 294; pikas.dzlm.de/252). Die dort genannten Kriterien sind teilweise sehr speziell, teilweise sehr allgemein und teilweise widersprechen sie einander (vgl. z. B. Schulz, 2014, 79 f.). Das bedeutet, dass auch die dort angeführten Kriterien notwendigerweise schwerpunktsetzend gedeutet werden müssen: Der Schwerpunkt unserer Deutung liegt im Folgenden auf der Passung zwischen der Struktur der Darstellung und der Struktur des Inhalts, zu dem subjektive Vorstellungsbilder entstehen sollen (hier beispielhaft erläutert an den Inhalten Stellenwerte und Multiplikation).

5.1 Stellenwerte

Das von uns genutzte Stellenwertsystem gründet auf der fortgesetzten Bündelung zur Basis 10. Diese Bündelung ist ein Grund für die Strukturierung vieler Darstellungen in Zehner, Hunderter, Tausender (aber auch in Hälften dieser Zahlen). All diese Darstellungen transportieren implizit oder explizit die besondere Bedeutung der Zehn bzw. der Zehnerpotenzen. Würden wir Zahlen zum Beispiel in einem Stellenwertsystem zur Basis 6 oder 12 darstellen (und denken), sähen diese Darstellungen anders aus – und auch unsere Zahlwörter würden anders lauten. Doch gerade die Zahlwortbildung im Deutschen kann ein Beispiel dafür sein, dass eine Darstellung – die sogar von allen gemeinsam und auch einsam genutzt wird – nicht immer besonders gut ‚passen‘ muss. Empirische Befunde können sogar zeigen, dass die Zahlwortbildung im Deutschen zahlverarbeitende Prozesse negativ beeinflussen kann (vgl. z. B. Fromme, 2017, 36 ff.).

5.2 Multiplikation

Es gibt eine Vielzahl an Darstellungen zur Thematisierung der Multiplikation: Manche betonen das räumlich-simultane Zusammenfassen, andere das zeitlich-sukzessive Hinzufügen gleichmächtiger Mengen. Manche sind linear angeordnet, manche im Rechteck, manche eher

unstrukturiert. Theoretische Überlegungen legen nahe, dass vor allem statische Rechtecksanordnungen geeignet scheinen, um ein fortsetzbares und tragfähiges mentales Modell zur Operation Multiplikation zu entwickeln (vgl. Padberg & Wartha, 2017, 233) – wobei mit diesen die Idee des Streckens und Stauchens gerade nicht gut geklärt werden kann. Empirisch kann jedoch gezeigt werden, dass diese theoretisch sehr gut nachvollziehbaren Überlegungen für das Nutzen von Rechtecksdarstellungen im Denken und Deuten der Kinder nicht immer wiederzufinden sind: So kann gezeigt werden, dass Rechtecksanordnungen gerade nicht immer so gedeutet werden, wie dies theoretisch günstig wäre (Kuhnke, 2013), und dass selbst das günstige Deuten von Rechtecksanordnungen nicht zwangsläufig zu einem tragfähigen Modell der Multiplikation beim Rechnen führen muss (Bayer, i. V.).

Theoretische Überlegungen *und* empirische Befunde können uns Hinweise darauf geben, welche Darstellungen für das Lernen von Mathematik besonders tragfähig sein können – und welche es tatsächlich sind.

6 Abschließende Überlegungen

Die Annahme, dass Darstellungen immer einen gemeinsamen und einen einsamen Anteil haben, war leitend für die Überlegungen in diesem Beitrag. Mit anderen Worten: Wenn über Darstellungen geschrieben und gesprochen wird, sollten u. E. alle *Deutenden* immer mitgedacht werden – gerne explizit. Damit sind Schülerinnen und Schüler gemeint, Lehrerinnen und Lehrer, Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker, Entwickler und Hersteller von didaktisch orientierten Darstellungen, die Autorinnen und Autoren von Diagnose- und Vergleichstests, vielleicht auch Eltern etc. All diese Personen haben ihre jeweils eigenen ‚einsamen‘ Darstellungen und diese individuellen Deutungen beeinflussen die gemeinsame Kommunikation über den ‚mathematischen Gehalt‘ der Darstellungen.

Die unterschiedlichen Deutungsweisen verschiedener Personen oder Personengruppen sollten u. E. in Theorie und vor allem Forschung immer wieder mit bedacht werden. Dies gilt u. E. vor allem dann, wenn neue Darstellungen entwickelt und genutzt werden. Dies bedeutet aber auch, theoretische Überlegungen zur erfolgreichen Deutung und zur

Fehldeutung bereits existierender Darstellungen immer wieder zu prüfen. Ein Beispiel hierzu: Ist die Kraft der 5 wirklich so stark? Wem hilft sie, wem nicht? Warum, warum nicht? Wie wird sie tatsächlich genutzt? (vgl. z. B. Rottmann & Schipper, 2002).

Ebenso sollte dieser Aspekt charakteristischer Bestandteil in der Unterrichtspraxis sein, denn erst das Reflektieren eigener und das Kennenlernen anderer Deutungen ermöglicht eine Kommunikation, in der *alle* kognitiv beteiligt werden können (vgl. z. B. Schülke, 2013; Korten, i. Dr.).

Literatur

Bauersfeld, H. (2002). Interaktion und Kommunikation – Verstehen und Verständigung. *Die Grundschule*, 34 (3), 10–14.

Bauersfeld, H. (2003). Gute Aufgaben. In S. Ruwisch (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 15–24). Offenburg: Mildenerger.

Bayer, S. (i. V.). *Analyse der Vorgehensweisen beim Zahlenrechnen im großen Einmaleins*.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin-Verlag.

Chorney, S., Gunes, C., & Sinclair, N. (i. Dr.). Multiplicative reasoning through two-handed gestures. In Jankvist U. T., van den Heuvel-Panhuizen M, Veldhuis M (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Dörfler, W. (1988). Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion. In W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung* (S. 55–125). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103–131.

Fromme, M. (2016). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100: Theoretische und empirische Analysen*. Wiesbaden: Springer.

Huhmann, T. (2013). *Einfluss von Computeranimationen auf die Raumvorstellungsentwicklung*. Wiesbaden: Springer.

Huth, M. (2010). Gestik und Lautsprache in mathematischen Gesprächen – multimodale Ausdrucksweisen mathematischer Ideen von Kindern. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 433–436). Münster: WTM Verlag.

Korten, L. (i. Dr.). *Gemeinsame Lernsituationen im inklusiven Mathematikunterricht – Zieldifferentes Lernen am gemeinsamen Lerngegenstand des flexiblen Rechnens (in der Grundschule)*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel: Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (4. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2015). Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten – Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory. In S. Ladel & Chr. Schreiber (Hrsg.), *Von Audiopodcast bis Zahlensinn* (S. 151–175). Münster: WTM-Verlag.

Leuders, J. (2012) *Förderung der Zahlbegriffsentwicklung bei sehenden und blinden Kindern – Empirische Grundlagen und didaktische Konzepte*. Wiesbaden: Springer.

Link, M. (2012). *Grundschul Kinder beschreiben operative Zahlenmuster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Lorenz, J. H. (1991). Materialhandlungen und Aufmerksamkeitsfokussierung zum Aufbau interner arithmetischer Vorstellungsbilder. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen – Schüler, Stoff und Unterricht* (S. 53–73). Köln: Aulis.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschaung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Rauh, B. (2012). Höheres Lernen mit digitalen Medien - auch im Bereich der Arithmetik? In S. Ladel & Chr. Schreiber (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe* (S. 37–58). Hildesheim: Franzbecker.

Rottmann T. & Schipper W. (2002). Das Hunderter-Feld – Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? *Journal für Mathematik-Didaktik*. 23(1), 51–74.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schülke, C. (2013). *Mathematische Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern – Theoretische Grundlegung und empirisch-interpretative Evaluation*. Münster: Waxmann.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern—Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.

Tiedemann, K. (i. V.). Praktiken des Beschreibens – Zu Funktionen der Sprache bei der Erarbeitung des Teilschrittverfahrens. Erscheint in *JMD*, 41 (1).

Tiedemann, K. (2019). Mit Sprache kann man rechnen! *Mathematik differenziert* 10 (3), 6–9.

Urff, Ch. (o. J.). *Digitale Lernmedien für die Grundschulstufe*. Abgerufen von <http://www.lernsoftwaremathematik.de>

Verboom, L. (2014). Darstellen – eine vernachlässigte Kompetenz. *Grundschule Mathematik* 41 (2), 40–43.

Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Watanabe, T. (2003). Teaching Multiplication: An Analysis of Elementary School Mathematics Teachers' Manuals from Japan and the United States. *The Elementary School Journal*, 104 (2), 111–125.

Dr. Axel Schulz
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld
axel.schulz@uni-bielefeld.de

Dr. Daniel Walter
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik
Fliednerstraße 21
48149 Münster
d.walter@uni-muenster.de

Produktive Kommunikationsanlässe im Mathematikunterricht der Grundschule: Zur lerntheoretischen Funktion des Argumentierens

von Ralph Schwarzkopf

In diesem Beitrag werden Argumentationen aus einer lerntheoretischen Perspektive beleuchtet: Es wird davon ausgegangen, dass substantielle mathematische Lernprozesse nur dann realisiert werden können, wenn sich die Kinder mit mathematischen Zusammenhängen in kollektiven Argumentationen auseinandersetzen. Hierzu werden theoretische Grundlagen entwickelt und an einem Beispiel aus dem Mathematikunterricht der Grundschule illustriert.

Schlüsselwörter: Argumentation, Interaktion, produktive Irritation, substantielle Lernchance

0 Einleitung: Zur Beziehung zwischen Prozessen und Inhalten

In der konstruktiven Mathematikdidaktik versteht man unter dem Darstellen und dem Kommunizieren bekanntlich zwei unterschiedliche Kompetenzen, von denen bereits Winter (1975) betont hat, dass sie im Sinne von allgemeinen Lernzielen eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht spielen sollten. Entsprechend werden sie unter den heute als „prozessbezogene Kompetenzen“ bezeichneten Fähigkeiten gegenüber den inhaltsbezogenen Kompetenzen abgegrenzt und in den Lehrplänen in ihrer Wichtigkeit betont – und das ist natürlich gut so.

In der Praxis des Mathematikunterrichts, so erscheint es zumindest dem Autor des vorliegenden Beitrags, führt diese Unterscheidung zwischen inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen allerdings oftmals zu der Vorstellung, man könne das eine ohne das andere unterrichten, man könne also die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen in extra dafür vorgesehenen Lehreinheiten isolieren und notfalls weglassen – zumindest für diejenigen Kinder, denen schon die Entwicklung der inhaltsbezogenen Kompetenzen große Schwierigkeiten bereitet. Diese Vorstellung ist nicht nur aus pädagogischer Perspektive problematisch, weil man den vermeintlich schwächeren Kindern hier eine Chance zur Ausprägung ihrer Mündigkeit verwehrt. Sie ist auch aus der in diesem Beitrag vertretenen interaktionstheoretischen Perspektive auf die Funktionsweise von Lernprozessen hinderlich für die Entwicklung des mathematischen Wissens der Kinder. Das liegt daran,

dass in dieser Theorie das individuelle Verstehen von fachlichen Inhalten nur in Verbindung mit dem interaktiven Verständigen über die Lerngegenstände stattfinden kann. Beim Verständigen über Mathematik ist das Darstellen mathematischer Objekte und Operationen aber grundlegender Bedeutung: Da sich die mathematischen Gegenstände selbst einer konkreten Handhabung entziehen, kann man sich ihnen nur vermittelt über der Interaktion zugängliche Darstellungen nähern (Steinbring, 2000; Wittmann, 2014). Es ist also notwendig für das inhaltliche Lernen, dass sich die Kinder mit dem Darstellen mathematischer Objekte und Operationen auseinandersetzen.

In diesem Beitrag soll aber nicht das Darstellen im Vordergrund stehen, sondern das Argumentieren, dem man im obigen Sinne sicher auch unterstellen kann, dass seine Bedeutung im alltäglichen Mathematikunterricht verstärkt werden könnte. Hierzu wird im Folgenden diskutiert, welche Rolle dem Argumentieren für das inhaltliche Mathematiklernen zugeschrieben werden kann. Anschließend wird ein Beispiel aus dem Mathematikunterricht vorgestellt, in dem eine substantielle Lernchance durch eine argumentative Auseinandersetzung eröffnet wird.

1 Lerntheoretische Grundlagen

Die lerntheoretischen Grundlagen dieses Beitrags schließen an die epistemologischen Ansätze von Steinbring (z.B. 2000; 2005) an. Im Wesentlichen geht es dabei darum, dass sich substantielle Lernchancen in einer Spanne zwischen zwei Polen entwickelt, zwischen der „empirischen Situiertheit“ und der „relationalen Allgemeinheit“. Dabei ist die Entwicklung von neuem Faktenwissen im Sinne der empirischen Situiertheit recht problemlos: Im Mathematikunterricht wird etwa ein standardisierter Rechenweg übernommen, das kleine Einmal-eins wird automatisiert, eine Rechenvorschrift für ein neues Aufgabenformat wird gelernt o.Ä. So wichtig solche Lernprozesse sind, sie reichen nicht aus, um die Mathematik strukturell zu durchdringen, da die mathematischen Objekte zu eng mit ihren lebensweltlichen, konkreten Repräsentanten verbunden und voneinander isolierten Wissensinseln verhaftet bleiben.

Die relationale Allgemeinheit, der andere Pol dieser epistemologischen Spanne, besteht dagegen nur noch aus Strukturen zwischen Objekten, die losgelöst von ihren fassbaren Repräsentanten in ihrem eigenen theoretischen System dargestellt und verstanden werden. Eine Thematisierung von mathematischen Strukturen in diesem Sinne wäre nicht zugänglich für Kinder der (Grund)Schule, so dass Lernprozesse hier sicher gar nicht angesiedelt werden können. So macht es bekanntlich wenig Sinn, Erstklässlern zunächst der abstrakten Mengentheorie auszusetzen, um erst nach der Durchdringung ihrer abstrakten Strukturen darauf aufbauend ein Zahlverständnis zu entwickeln oder den Begriff der Halbgruppe zu thematisieren, bevor das Addieren in den natürlichen Zahlen eingeführt werden könnte.

Offenbar können sich also *substantielle* Lernchancen – also solche, in denen das vorhandene mathematische Verständnis durch neue strukturelle Beziehungen vertieft werden kann – nicht an diesen epistemologischen Polen der Wissenskonstruktion realisieren. In einem produktiven Mathematikunterricht müssen stattdessen mathematische Sachverhalte in einer *Balance* zwischen einer „empirischen Faktenanreicherung“ und einer „relationalen Strukturierung“ thematisiert werden, damit die Kinder einen Zugang zu mathematischen Mustern und Strukturen erlangen können (vgl. Schwarzkopf, 2003).

Die Herstellung einer solchen Balance ist naturgemäß schwierig und wird in der sozialen Lerntheorie von Miller (1986) sogar als Paradoxon verstanden: „Das neue Wissen muss das alte Wissen systematisch überschreiten, darf vom alten aber auch nicht völlig losgelöst sein“ (Miller, 1986). Entsprechende Lernprozesse sind gleichwohl oder gerade deswegen in der Mathematikdidaktik von großem Interesse, sie werden in unterschiedlichen theoretischen Zugängen unter verschiedenen Bezeichnungen diskutiert. So spricht Hefendehl-Hebeker (1998) von einem „shift of view“ von der Arithmetik zur Algebra, Krummheuer (1995) analysiert das Zustandekommen von „Rahmungsmodulationen“, van den Heuvel-Panhuizen (2003) spricht gar von einem „miracle of learning“ usw. Der vorliegende Beitrag hält sich allerdings an die lerntheoretischen Grundlagen von Miller (1985), der hierbei von „fundamentalen Lernprozessen“ spricht.

In der konstruktiven Mathematikdidaktik versucht man, diese Balance u.A. dadurch herzustellen, dass man die mathematischen Objekte und Operationen zugleich strukturell reichhaltig und konkret zugänglich darstellt. Mit Steinbring (1994) formuliert versucht man, in bewusster Weise die prinzipiell vorhandene theoretische Mehrdeutigkeit strukturierter Diagramme so zu berücksichtigen, dass die Spanne zwischen empirischem Faktenwissen und relational allgemeinem Wissen ein Stück weit überbrückt werden kann.

Prominente Beispiele dafür werden durch das große und fruchtbare Feld der figurierten Zahlen geliefert, in dem sich die Kinder angekoppelt an ihre arithmetischen Kenntnisse durchaus mit algebraischen Strukturen auseinandersetzen können, die ihnen bei einer Thematisierung der „reinen Struktur“ sicher versperrt blieben. In Abbildung 1 wird aus diesem Themenbereich zur Illustration dieser Vorgehensweise der bekannte Zusammenhang zwischen den Dreieckszahlen (der Summe der ersten natürlichen Zahlen) und den Rechteckzahlen (dem Produkt aus zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen) dargestellt.

Dabei bedient man sich der konkreten Zahlsymbole und ihrer figurierten Repräsentanten, um die Beziehungen zwischen den Objekten darstellen zu können: Da man zwei Versionen der vierten Dreieckszahl als rechteckiges Punktefeld mit $4 \cdot (4 + 1)$ Plättchen legen kann, kann man durch einfache Halbierung eines Produkts die umständliche Berechnung der Summe umgehen (Hintergrund der Überlegung sind natürlich operative Beweise, s. Wittmann 2014).

Im Grunde genommen wird hierbei thematisiert, dass die bislang als Rechenoperationen verstandenen Additionen ebenso wie die ausgerechneten Multiplikationen im algebraischen Sinne gleich sind, dass sie also verschiedene Darstellungen derselben mathematischen Objekte sind (vgl. Winter, 1982). Dabei werden die Rechenoperationen also selbst zu mathematischen Objekten des Denkens (s. Steinweg, 2013, S. 123) – zwei zentrale Merkmale dafür, dass die arithmetischen Kenntnisse durch algebraische Perspektiven bereichert werden, dass hier also fundamentale Lernprozesse in Gang gesetzt werden können.

Substantielle Lernchancen, in denen fundamentale Lernprozesse begünstigt werden können, müssen also die Möglichkeit bieten, dass die Kinder bestehende Wissensnetze umzustrukturieren können, ohne dass sie von deren Grundlagen gänzlich abgekoppelt werden könnten, so dass sie besonders schwierig zu initiieren sind.

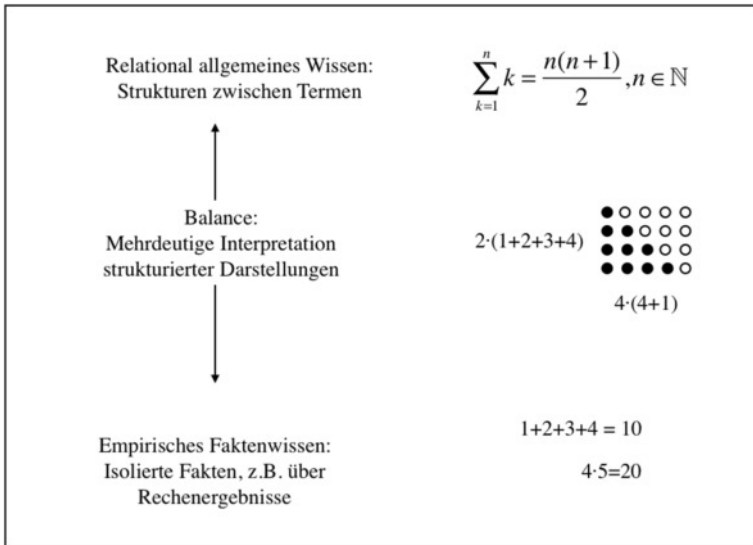


Abb. 1 Darstellungen für substantielle Lernchancen am Bsp. der Dreieckszahlen

Das Zustandekommen solcher Umstrukturierungen setzt voraus, dass ein Individuum Widersprüche in den bestehenden Denkstrukturen aufdecken und dadurch den Bedarf zu einem Umdenken einsehen kann – eine Fähigkeit, die nach Miller (1986; 2006) bei Kindern der Grundschule noch nicht ausgeprägt ist, wenn sie sich nur individuell und losgekoppelt von der sozialen Gruppe des Unterrichts mit einem Lerngegenstand auseinandersetzen. Nach Miller ist aus diesem Grunde für Grundschul Kinder ein sozialer Anreiz zur Aufdeckung von widersprüchlichen Wissensstrukturen notwendig (natürlich nicht hinreichend), um bei ihnen fundamentale Lernprozesse zu initiieren:

Nur in der sozialen Gruppe und aufgrund der sozialen Interaktionsprozesse zwischen den Mitgliedern einer Gruppe kann das einzelne Individuum jene Erfahrungen machen, die fundamentale

Lernschritte ermöglichen. (Miller, 1986, S. 20; vgl. Steinbring, 2005, S. 193)

Natürlich können nicht durch alle Arten von Interaktionen solche Erfahrungen entstehen. Aus interaktionstheoretischer Perspektive kann man etwa sagen, dass hochgradig routinierte Interaktionsprozesse potenzielle Lernchancen geradezu verdecken (vgl. Voigt, 1984): Die Kinder können an solchen Interaktionen durch das Befolgen von sozial ausgehandelten Regeln besonders erfolgreich teilnehmen, indem sie gerade nicht alt bekannte Fakten und Strukturen hinterfragen.

Vielmehr braucht es zur Ermöglichung von fundamentalen Lernschritten eine Interaktion, in der die Beteiligten ein bestimmtes Ziel verfolgen, das über die Aufrechterhaltung einer routinierten Bedeutungsaushandlung hinausgeht:

Nur von solchen sozialen bzw. kommunikativen Handlungen, deren primäres Handlungsziel und deren Funktionsweise genau darin besteht, kollektive Lösungen für interindividuelle Koordinationsprobleme zu entwickeln, kann (wenn überhaupt) sinnvollerweise angenommen werden, dass durch sie grundlegende Lernprozesse ausgelöst werden können. Nur ein sozialer bzw. kommunikativer Handlungstyp scheint diese Bedingung zu erfüllen, und dies ist der kollektive Diskurs oder, um einen etwas genaueren Terminus zu verwenden, die kollektive Argumentation. (Miller, 1986, S. 23)

In diesem Beitrag werden Interaktionen nicht schon dann als kollektive Argumentationen bezeichnet, wenn sich die Beteiligten die Rationalität ihrer Handlungen im Zuge der interaktiven Herstellung und Aushandlung von Bedeutungen gegenseitig anzeigen (wie in einer *reflexiven Rationalisierungspraxis*, vgl. Krummheuer & Fetzer 2004, S. 29ff). Unter kollektiven Argumentationen werden vielmehr diskursive Prozesse verstanden, in denen die Beteiligten explizit einen Begründungsbedarf anzeigen und gemeinsam zu befriedigen versuchen (Schwarzkopf, 2003). Diese Prozesse spielen in der eingenommenen Perspektive eine zentrale Rolle, wenn man die interaktiven Bedingungen für die Realisierung substantieller Lernchancen verstehen will. Sie sollen im folgenden Abschnitt genauer beleuchtet werden.

2 Argumentationen und substantielle Lernchancen

In diesem Beitrag werden für die argumentationstheoretischen Grundlagen u.A. Perspektiven aus der Pragmalinguistik eingenommen (insbesondere Klein, 1980), in denen man Argumentationen verbreitet als spezielle sozial-interaktive Prozesse versteht. Ihr Charakteristikum gegenüber anderen Interaktionsprozessen besteht darin, dass sie nur bei einer massiven Störung von routinierten Kooperationen in einer sozialen Gruppe entsteht: Es tritt eine Strittigkeit, eine ungeklärte Frage in der Gruppe auf, so dass die Beteiligten sich nicht mehr dazu in der Lage sehen, die Kooperation fortzusetzen. Solche Störungen können auf unterschiedliche Weisen bereinigt werden, nicht zuletzt dadurch, dass das gemeinsame Handeln (implizit oder explizit) für unmöglich erklärt wird und die Kooperation zerbricht. Im günstigen Fall aber entsteht das, was man nach Klein (1980) als „*kollektive Argumentation*“ bezeichnet: Die Beteiligten suchen gemeinsam nach einer Antwort auf die strittige Frage und können sich nach einiger Zeit und nach dem Austausch und der Diskussion unterschiedlicher inhaltlicher Argumente auf eine allgemein akzeptable Antwort einigen.

Wenn etwa eine Gruppe von Teenagern einen neuen Film mit ihrem Lieblingsstar sehen will, dann handeln die Beteiligten kooperativ und treffen sich gemäß ihrer Gewohnheiten routiniert vor dem Kino. Eine Störung dieser Routine tritt zum Beispiel dann ein, wenn es nicht mehr genug Eintrittskarten für den gewählten Film gibt – eine weitere routinierte Kooperation ist versperrt und es muss zunächst die strittige Frage geklärt werden, wie denn nun gehandelt werden könnte. Wenn die Kooperation daraufhin nicht zusammenbricht, suchen die Teenager in kooperativer Weise nach einer Antwort auf diese Frage, die allgemein akzeptiert werden kann. Man könnte etwa einen anderen Film wählen, die Gruppe könnte sich auch spalten und einen Teil ihrer Mitglieder nach Hause schicken, so dass die Karten für den Rest ausreichen oder aber Karten für die nächste Vorstellung des gewählten Films kaufen.

Im gelingenden Fall schaffen es die Beteiligten beim Auftreten einer Strittigkeit, die Kooperation nach der Entwicklung überzeugender Argumente fortzuführen.

Für die Initiierung substantieller Lernchancen in der Primarstufe sind also solche Interaktionsprozesse notwendig, in denen Kinder (ggf. gemeinsam mit der Lehrkraft) Strittigkeiten durch eine kollektive Argumentation versuchen auszuräumen. Diese Grundbedingung zur Initiierung fundamentaler Lernprozesse wird oftmals nicht hergestellt (für ein Beispiel s. Nührenbörger & Schwarzkopf, 2019). Ein Grund dafür liegt in der Macht der Routine im sozialen Interaktionsprozess: Es ist eine implizite Grundregel von Interaktionen, dass die daran Beteiligten ein möglichst reibungsloses Miteinander pflegen, indem sie in den stabilen Routinen des Unterrichtsalltags verharren und sich entsprechend der implizit bleibenden Regeln von Interaktionsmustern verhalten, wobei die Interaktionslogik über der Sachlogik stehen kann (s. Voigt, 1984). Aus der Perspektive Millers ergibt sich eine ganz ähnliche Beobachtung auf soziale Prozesse außerhalb des Unterrichts:

Das argumentative [...] Austragen zwischenmenschlicher Konflikte gleich welcher Art erzeugt für die meisten der daran Beteiligten einen erheblichen Stress, dem sich offenbar niemand ohne wirklich zwingende Gründe unterwerfen mag (Miller 1986, 152).

Millers Beobachtung passt durchaus zu Erkenntnissen aus empirischen Untersuchungen in der Mathematikdidaktik. Zum Beispiel stellt Krummheuer bei der Beobachtung von Schülerinnen und Schülern beim Aufgabenlösen fest, dass „auf der kommunikativen Oberfläche derartiger Bearbeitungsprozesse im Grunde nur über Rechnungen gesprochen wird.“ (Krummheuer, 1997, S. 29) – eine Hinterfragung von mathematischen Strukturen zwischen den Rechnungen oder den Ergebnissen bleibt dagegen ebenso wie eine Diskussion verschiedener Rechenwege aus.

Der Fokus auf mathematische Inhalte reicht allein offenbar nicht aus, um kollektive Argumentationen und mit ihnen substantielle Lernchancen für fundamentale Lernprozesse zu initiieren. Wesentlich ist es dagegen, dass die sozialen Bedingungen im Interaktionsprozess das Aufkommen einer Strittigkeit unter den Kindern fördern und ins Bewusstsein rücken, dass diese Störung der Kooperation durch eine Argumentation beigelegt werden muss.

Im Projekt PEnDEL M (Nührenböcker & Schwarzkopf, 2016, Schwarzkopf 2016) versuchen wir aus konstruktiver Perspektive, solche Bedingungen durch „produktive Irritationen“ herzustellen. Im Grunde geht es bei produktiven Irritationen darum, dass Abweichungen von eingenommenen Erwartungen als klärungsbedürftig thematisiert werden und dass die Beteiligten dann – im gelingenden Fall – zur Klärung neue strukturelle Zusammenhänge zwischen mathematischen Objekten generieren müssen. Diese Idee ist natürlich nicht neu, zum Beispiel fordert schon Winter (1976) dazu auf, den Kindern Situationen anzubieten, die „zum Fragen, Beobachten, Nachdenken anreizen, also eine Lücke, eine Störung, eben etwas Fragwürdiges enthalten.“ (Winter, 1976, S. 349) und nach Piaget (z.B. 1985) kann man Lernprozesse generell als Ausräumen kognitiver Widersprüche verstehen. Anders als bei Piagets Konzept der kognitiven Widersprüche wird allerdings hier angenommen, dass die Strittigkeiten nicht zwingend individuell wahrgenommen, sondern zunächst einmal zwischenmenschlich konstatiert werden müssen, insbesondere bedarf es u.U. der Lehrperson, die im Interaktionsprozess auftretenden Widersprüche – die oft nur aus der fachlichen Sicht des Experten und nicht immer aus Sicht der Kinder deutlich sind – explizit zu machen und darauf zu bestehen, dass sie ausgeräumt werden müssen. Gleichwohl gibt es auch Situationen, in denen die Kinder von sich aus die Argumentation suchen, etwa wenn für eine Rechenaufgabe unterschiedliche Ergebnisse produziert werden. Zu substantiellen Lernchancen können solche Anlässe vor allem dann führen, wenn die im Unterricht behandelten Lerngegenstände ausreichend komplex sind, so dass den Kindern nicht sofort und selbstverständlich klar ist, welches der Ergebnisse korrekt sein muss. Hierfür wird im folgenden Abschnitt ein Beispiel vorgestellt.

3 Ein Beispiel aus dem Unterricht einer vierten Klasse

Im Unterricht einer vierten Klasse geht es um Dreieckszahlen. Längerfristiges Ziel der Lehrerin war es, dass die Kinder durch einen Vergleich von figurierten Darstellungen der Dreiecks- und zugehörigen Rechteckzahlen (vgl. Abb. 1) auf die bekannte Formel zur verkürzten Berechnung der Summe aus den ersten natürlichen Zahlen kommen

(ein genauer Bericht zum Unterrichtsvorhaben findet sich in Nührenbörger & Schwarzkopf, 2010). In der hier beschriebenen anfänglichen Unterrichtssequenz sollten sich die Kinder mit dem rekursiven Bildungsgesetz der Dreieckszahlen vertraut machen, wobei ihnen bewusst werden sollte, dass deren konventionelle Berechnung recht mühsam ist. Hierdurch sollten sie dazu motiviert werden, nach verkürzten Berechnungsmöglichkeiten zu suchen.

Dazu wurden zunächst gemeinsam die ersten zehn Dreieckszahlen berechnet. Anschließend haben sich die Kinder in Einzelarbeit damit beschäftigt, die zwanzigste Summe auszurechnen. Schließlich werden die Ergebnisse und die Rechenwege vorgestellt, wobei David mit der Darstellung seiner Rechnung startet:

David also ähm ich hab einfach ähm weitergerechnet, hier unten in der Tabelle hab ich einfach plus sieben plus acht plus erstmal plus zehn, dann war's da 55 und dann hatte ich da weitergerechnet und dann bin ich irgendwann dann bei zwanzig gewesen bei 210.

David hat genauso gehandelt, wie es die Lehrerin geplant hatte: Er hat aus einer Dreieckszahl die jeweils folgende berechnet und dabei gleichermaßen die rekursive Bildungsvorschrift durchblickt, wie er vermutlich festgestellt hat, dass hier ein recht hoher Rechenaufwand betrieben werden muss. Letzteres wurde von anderen Schülern offenbar schon vorher bemerkt. So hat Malte zum Beispiel den Versuch gestartet, die Rechnungen abzukürzen. Er stellt seinen Lösungsweg folgendermaßen dar:

Malte [...] Hab ich mir im Kopf gemacht, ich hab zwar nich aufgemalt, aber ich hab im Kopf gemacht. Und da hab ich ja das Doppelte rausgekriegt. Weil von ähm von zehn das Doppelte is ja das Doppelte is zwanzig, also muss ja das Ergebnis auch das Doppelte ergeben – von zwanzig, von zehn.

Anders als von der Lehrerin geplant sieht Malte offenbar das Zeichnen der Dreieckszahl nicht als Erkenntnismittel, sondern als lästiges Beiwerk für die Rechnungen – jedenfalls betont er, dass er das zwanzigste Muster nicht gezeichnet, sondern nur berechnet hat. In dieser Phase

des Unterrichts hat er auch nicht Unrecht – für die bloße Bestimmung der Summe ist das Zeichnen der Plättchen nur dann wesentlich, wenn die Rechnungen nicht bewerkstelligt werden können und alle Plättchen einzeln gezählt werden müssten, was hier sicher nicht der Fall ist. Zusätzlich stellt Malte klar, dass auch die Rechnungen zu umständlich sind, weil strukturelle Zusammenhänge zwischen den gewählten Beispielen ausgenutzt werden können – vermutlich aufgrund seiner Erfahrungen mit proportionalen Zusammenhängen im Mathematikunterricht stellt er die Hypothese auf, dass das Muster mit dem doppelten Index auch aus doppelt so vielen Plättchen bestehen müsste: $2 \cdot 10 = 20$, also besteht die zwanzigste Dreieckszahl auch aus $2 \cdot 55 = 110$ Plättchen.

An dieser Stelle ist den Kindern schon klar, dass nicht beide Ergebnisse zugleich stimmen können. Da aber beide Herangehensweisen stimmig erscheinen und die Aufgabe hinreichend komplex ist, können sie nicht spontan klären, welches Ergebnis stimmt. Hier schaltet sich Michael ein:

Michael ich glaub 210 ist richtig weil wie der Malte gerade schon
 gesagt hat

Michael wird durch Zwischenrufe seiner Mitschülerinnen und Mitschüler unterbrochen – schließlich scheint er sich hier selbst zu widersprechen, indem er zunächst die Lösung von David bestätigt und dann Malte Recht zu geben scheint, der ja aber ein anderes Ergebnis vorgeschlagen hatte. Im Klassenlärm werden die Lösungen 110 und 210 wild durcheinander gerufen.

Zur Beendigung des Streits schaltet sich die Lehrerin ein und berechnet gemeinsam mit den Kindern der Klasse die zwanzigste Dreieckszahl noch einmal rekursiv, wie es David bereits vorgeschlagen hatte. Hiermit wird das Argument von Malte weniger strukturell, sondern vielmehr ergebnisorientiert widerlegt. Mit Miller und Steinbring gesprochen entschließt sich die Lehrerin dazu, den Stress einer strukturellen Auseinandersetzung mit Maltes Argument hier zu umgehen, um auf empirisch situierter Ebene mit einer einfachen Ergebnisermittlung die Richtigkeit von Maltes Vorschlag zu sichern.

Gleichwohl meldet sich der Schüler Michael noch einmal zu Wort – zu einem Zeitpunkt an dem die Strittigkeit eigentlich bereits beigelegt wurde:

Michael Also ich hab erst von 55 das Doppelte genommen, weil die Elf hat ja ne Eins, die Zwölf ne Zwei, die Dreizehn auch ne Drei und dann war das ja logischerweise, dass das dann genauso is, bis auf die Zehner. Und dann, weil ´s zehn davon sind, kann man das dann mal Zehn nehmen, Zehn mal Zehn sind 100 und dann weiß man auch dass es 210 sind.

Hierbei kann Michael klären, dass er zunächst einmal der Verdoppelung von Malte zustimmt – in der zwanzigsten Dreieckszahl ist die zehnte tatsächlich zweimal enthalten. Allerdings fehlt zur kompletten Summe noch gewissermaßen der Unterbau, d.h. unter zur zweiten Version der zehnten Dreieckszahl müssen noch die zugehörigen Zehner addiert werden:

$$1 + 2 + \dots + 20 = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 10) + 10 \cdot 10$$

Michael entwickelt hier ein Argument in der Balance zwischen empirischer Situiertheit und relationaler Allgemeinheit: Mit den Darstellungen der konkreten Rechnung drückt er die strukturellen Zusammenhänge zwischen den arithmetischen Objekten aus – ein operativer Beweis für den Zusammenhang zwischen einer Dreieckszahl und der Dreieckszahl mit dem doppelten Index, exemplarisch an der 20-ten Dreieckszahl: $D_{2n} = 2 \cdot D_n + n^2$.

4 Schlussbemerkung

In diesem Beitrag wurde versucht, die lerntheoretische Dimension des Argumentierens aus einer grundlegenden Perspektive zu beleuchten. Wesentliches Anliegen war dabei, die Untrennbarkeit zwischen der Entwicklung inhaltlichen Wissens und Könnens und der Aktivierung prozessbezogener Kompetenzen speziell am Beispiel der Argumentation zu betonen. Dabei sind natürlich Anlässe für eine Argumentation, wie sie im obigen Beispiel beschrieben wurde, eher selten im alltäglichen

chen Unterricht – wann streiten sich die Kinder schon über das richtige Ergebnis. Umso wichtiger scheint es zu sein, Argumentationsanlässe zu initiieren, also Strittigkeiten gewissermaßen künstlich und regelmäßig herbeizuführen. Eine solche Künstlichkeit ist keine Schwäche, sondern eine Stärke des Mathematikunterrichts, in dem die Kinder gemeinsam mit der Lehrkraft im geschützten Raum die Möglichkeiten kennenlernen können, sich argumentativ mit einem Lerngegenstand auseinander zu setzen.

Literatur

Hefendehl–Hebeker, L. (1998). The practice of teaching mathematics: Experimental conditions of change. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of Mathematics Classrooms* (pp. 104–126). Cambridge: University Press.

Klein, W. (1980). Argumentation und Argument. *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik*, 38/39, 9–57.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229–270). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Krummheuer, G., & Fetzer, M. (2004). *Der Alltag im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Spektrum.

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse*. Frankfurt: Suhrkamp.

Miller, M. (2006). *Dissens. Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens*. Wetzlar: transkript.

Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2010). Diskurse über mathematische Zusammenhänge. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbeke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 169–215). Seelze: Klett-Kallmeyer.

Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2016). Processes of Mathematical Reasoning of Equations in Primary Mathematics Lessons. In N. Vondrová (Ed.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 316–323). Prag, ERME.

Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2019). Argumentierendes Rechnen: Algebraische Lernchancen im Arithmetikunterricht der Grundschule. In B. Brandt & K. Tiedemann (Eds.), *Interpretative Unterrichtsforschung* (S. 15–35). Münster: Waxmann.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structure: the central problem of intellectual development*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Mathematikdidaktik*, 24(3/4), 211–234.

Schwarzkopf, R. (2016). Design Science Between Normative and Descriptive Approaches. In M. Nührenbörger, B. Rösken-Winter, Ch. Ip Fung, R. Schwarzkopf & E. Wittmann (2016). *Design Science and Its Importance in the German Mathematics Educational Discussion*. (ICME-13 Topical Surveys) (pp. 10–18). Rotterdam: Springer.

Steinbring, H. (1994). Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule: Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen. *Mathematische Unterrichtspraxis*, (4), 7–19.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik–Didaktik*, 21(1), 28–49.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. Berlin: Springer.

Steinweg, A.S. (2013). *Algebra in der Grundschule*. Berlin: Springer.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Weinheim: Beltz.

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica*, 5, 185–211.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 7(3), 106–116.

Wittmann, E.C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica*, 37, 213–232.

Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf
Carl-von-Ossietzky Universität
Ammerländer Heerstraße 114-118
26129 Oldenburg
ralph.schwarzkopf@uni-oldenburg.de

Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Charlotte Rechtsteiner
rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de

Beitrag I: Myriam Burtscher
myriam.burtscher@phsalzburg.at

Entwicklungen von Grundvorstellungen zur Division

1 Das Divisionsverständnis– viele offene Fragen

Studien zur Division aus der Schweiz und aus Deutschland (Royar, 2013; Bönig, 1995) zeigen bei Schülerinnen und Schülern der Grundstufe deutliche Defizite auf. Diese sind bedenklich, ist doch ein tragfähiges Operationsverständnis (Gerster & Schultz, 2004) der Division weit über die Grundschule hinaus für den weiterführenden Mathematikunterricht von grundlegender Bedeutung.

Die Division erweist sich für Lernende vor allem deshalb als schwierig, weil für einen verständigen Umgang mit Divisionen zwei unterschiedliche, in der traditionellen Rechendidaktik als *Verteilen* (Teilen) und *Aufteilen* (Messen) bezeichnete Aspekte entwickelt und dauerhaft abgesichert werden müssen. Es ist, damit zusammenhängen notwendig, dass Kinder die Division als Umkehroperation der Multiplikation verstehen und anwenden. Auf Grund dieser Komplexität ergeben sich für die Erarbeitung und die Absicherung tragfähiger Grundvorstellungen zur Division im Unterricht zahlreiche Fragen:

In welchem zeitlichen Verhältnis zur Multiplikation soll die Division erarbeitet werden? Sollen „Verteilen“ und „Aufteilen“ zeitlich getrennt unterrichtet werden? Wenn ja, in welcher Reihenfolge soll dies geschehen? Ist es a) grundsätzlich sinnvoll und b) aussichtsreich, anzustreben, dass Kinder bewusst und dauerhaft zwischen den beiden Aspekten Verteilen und Aufteilen unterscheiden können? In der aktuellen fachdidaktischen Literatur zum Mathematikunterricht an Grundschulen fallen Antworten auf diese Fragen, teils einander widersprechend, teils wenig differenziert aus oder werden erst gar nicht gegeben. Empirische Forschung zu diesem Thema ist, auch international betrachtet, nur spärlich vorhanden.

2 Studie zur Entwicklung des Divisionsverständnisses

Aus den oben dargelegten Fragen ergab sich die Notwendigkeit, zunächst mehr über mögliche Entwicklungsverläufe des Divisionsverständnisses zu erfahren. Dafür wurde, ausgehend von bereits veröffentlichten Arbeiten (Huinker, 1993, Bönig, 1995; Gerster & Schultz, 2004), ein Leitfaden für ein qualitatives Interview entwickelt und pilotiert. Anschließend wurden die Entwicklungsverläufe des Divisionsverständnisses bei elf Kindern aus zwei verschiedenen Klassen vom Ende des 1. bis zum Ende des 3. Schuljahres erhoben und analysiert. Die Interviews wurden videografiert und transkribiert. Die Kategorienbildung erfolgte deduktiv auf Basis des Modells von Gerster & Schulz (2004, S.387-389). Untersucht wurde, ob und wie den Kindern „Übersetzungen“ zwischen folgenden „Repräsentationsebenen“ gelingen:

- Sachsituation (Textaufgabe) → Symbolische Darstellung (Term)
- Symbol. Darstellung (Term) → Sachsituation (Rechengeschichte)
- Symbol. Darstellung (Term) → Handlung mit Material
- Bildhafte Darstellung (Bild) → Symbol. Darstellung (Term)

Für die Rekonstruktion der Vorstellungen und Denkweisen der Kinder erwiesen sich einige dieser Übersetzungen als wenig ergiebig. Darüber hinaus zeigte sich die Notwendigkeit, zwischen formalen und inhaltlichen Argumentationen der Kinder zu unterscheiden, insbesondere mit Blick auf die Frage, welche Bedeutung die beiden Aspekte Aufteilen und Verteilen einnehmen. Für die Gesamtauswertung der Ergebnisse waren drei Fragestellungen handlungsleitend:

- Wie stellt sich der Entwicklungsverlauf des Divisionsverständnisses jedes einzelnen Kindes über den gesamten Erhebungszeitraum dar?
- Zeigen sich in den untersuchten Übersetzungen besondere Auffälligkeiten, Schwierigkeiten oder Präferenzen mit Blick auf die beiden Divisionsaspekte?
- Lassen sich hinsichtlich der Vorgehensweisen der Kinder, ihrer Schwierigkeiten und jeweiligen Präferenzen mit Blick auf die beiden Aspekte der Division empirisch begründete Typenbildungen vornehmen?

3 Empirische Beispiele

Eine erste Analyse der Ergebnisse zeigt, dass die beiden Aspekte der Division besonders bei den vom Term ausgehenden Übersetzungen eine Rolle spielen und zu ganz unterschiedlichen Schwierigkeiten führen können. Hierzu werden zwei typische Beispiele herausgegriffen für Kinder, bei denen es zu Überlagerungen der beiden Aspekte der Division kommt. Im ersten Beispiel (Ende 2. Klasse) wurde der Term $12:3$ vorgelegt mit der Bitte, die Rechnung mit Klötzchen darzustellen und zu erklären.

Petra: Man hat 12 Würfel [*zählt in 2er Schritten 12 Würfel heraus*]. Jetzt habe ich 10 Würfel, und die musst du immer auf 3 Kinder zum Beispiel aufteilen. Dann gibst du jedem Kind 3 Würfel, der kriegt 3 Würfel, der 3 Würfel, der 3 Würfel [*gibt an 3 Plätze je 3 Würfel*] und der 3 Würfel [*gibt an einen 4. Platz 3 Würfel*]. Und jetzt siehst du – weil, dividiert heißt: Das sollst du aufteilen auf so viele Kin..., also auf Kinder oder halt auf Erwachsene auch, und dann, also jetzt haben wir da, 4 Kinder bekommen 3 Steine.

Bevor Petra die Handlung zum Term vollzieht, versprachlicht sie eine *Verteilhandlung* (Divisor = Anzahl der Teile): „Jetzt habe ich 10 Würfel, und die musst du immer auf 3 Kinder zum Beispiel aufteilen“. Die unmittelbar anschließende Handlung entspricht allerdings dem *Aufteilen*: Petra nimmt jeweils 3 Objekte und ordnet diese reihum vier Plätzen zu. Für sie kommt es dabei zu keiner sichtbaren Irritation. Aufgefordert, einen Term mit Material darzustellen, gehen die interviewten Kinder überwiegend im Sinne des Aufteilens vor. Von 37 zuordenbaren Lösungen entsprechen 31 dem Aufteilen und nur 6 dem Verteilen.

Im zweiten Beispiel (Ende 3.Klasse) soll zum vorgelegten Term $21:3$ eine Rechengeschichte erzählt werden. Marcus formuliert: „Ich habe 21 Äpfel, und dann mache ich immer 3 in ein Sackerl.“ Auf Aufforderung hin kann er eine dazu passende Frage formulieren, diese allerdings rechnerisch nicht lösen. Deshalb zeichnet er 21 Punkte, dazu 3 Quasi-Ellipsen („Sackerl“), denen er reihum die 21 Punkte zuzuordnen versucht (Abb. 1). In der zeichnerischen Lösung kommt Marcus von seiner ursprünglichen Idee des Aufteilens in Dreiergruppen ab und landet beim Verteilen in drei gleich große Gruppen.

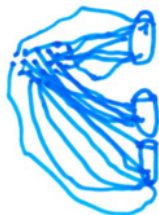


Abb. 1 Zeichnung von Marcus zu 21:3

Dabei verliert er den Überblick, sodass er letztlich meint, dass es zwei Gruppen zu je 7 und eine Gruppe zu 6 Äpfel sein müssten. Die Aufgabe, zu einem vorgegebenen Term eine passende Sachsituation zu erzählen, erweist sich insgesamt als besonders schwierig: Nur zweien der elf Kinder gelingt dies über den ganzen Erhebungszeitraum ohne Probleme.

Die vielfältigen Schwierigkeiten der Kinder werfen die Frage auf, ob für ein solides Operationsverständnis nicht doch eine gründlichere Behandlung der beiden Divisionsaspekte im Unterricht zielführend wäre, als es viele Schulbücher, aber auch verbreitete Didaktik-Handbücher nahezu legen scheinen (vgl. etwa Schipper, Dröge & Ebeling, 2015, 108-109). Auch darüber sollte nach Ansicht der Autorin im Arbeitskreis diskutiert werden.

Literatur

Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern*. Münster/New York: Waxmann.

Gerster, H.-D., & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. PH, Inst. für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken Freiburg im Breisgau.

Huinker, D. M. (1993). Interviews: A Window to Students' Conceptual Knowledge of the Operation. In: Norman Webb und Arthur F. Coxford (Hrsg.), *Assessment in the mathematics classroom. 1993 Yearbook*, S. 80-86.

Royar, T. (2013). *Handlung - Vorstellung - Formalisierung. Entwicklung und Evaluation einer Aufgabenreihe zur Überprüfung des Operationsverständnisses in Regel- und Förderklassen*. Hamburg: Kovac.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel.

Beitrag II: Anna Körner
anna.koerner@uni-bremen.de

Flexibles Rechnen im Zahlenraum bis 1000

Die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen ist ein zentrales Ziel des Arithmetikunterrichts der Grundschule; empirischen Ergebnissen zufolge zeigen Grundschüler*innen ohne gezielte Förderung aber kaum aufgabenadäquate Vorgehensweisen (z. B. Selter, 2000). Im Rahmen einer qualitativen Längsschnittuntersuchung soll deshalb der Frage nachgegangen werden, wie sich die Rechenkompetenzen von Schüler*innen im Verlauf der Grundschulzeit auf der Basis einer kontinuierlichen Zahlenblickschulung (z. B. Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018) entwickeln. In diesem Beitrag werden erste Ergebnisse von drei schriftlichen Erhebungen zu Vorgehensweisen bei der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000 vorgestellt.

1 Theoretische und empirische Anknüpfungspunkte

Maßnahmen zur Entwicklung und Förderung flexiblen Rechnens lassen sich idealtypisch zwei verschiedenen theoretischen Ansätzen (*Strategiewahl- und Emergenzansatz*) und darauf aufbauenden Unterrichtskonzeptionen (*explizierender und problemlöseorientierter Unterricht*) zuordnen (Heinze, Arend, Grüßing & Lipowsky, 2018; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018). Während im explizierenden Unterricht verschiedene Strategien erarbeitet und die adaptive Strategiewahl thematisiert werden, liegt der Fokus im problemlöseorientierten Unterricht auf individuell entwickelten Vorgehensweisen, die durch Aktivitäten zur Zahlenblickschulung (weiter-)entwickelt werden (ebd.). Qualitative Untersuchungen in den ersten beiden Schuljahren belegen den positiven Einfluss der Zahlenblickschulung auf die Entwicklung der Flexibilität der Schüler*innen (Rathgeb-Schnierer, 2006; Rechtsteiner-Merz, 2013), bislang fehlen jedoch längsschnittliche Untersuchungen im Verlauf der gesamten Grundschulzeit.

2 Untersuchung zum flexiblen Rechnen

Vor dem Hintergrund der positiven empirischen Ergebnisse zur Zahlenblickschulung wurde in einer Projektklasse eine qualitative Längsschnittuntersuchung durchgeführt, in der kontinuierlich vom 1. bis

zum 4. Schuljahr Aktivitäten zur Zahlenblickschulung in den Arithmetikunterricht eingebunden worden sind. Um die Entwicklung der Schüler*innen zu erfassen, wurden regelmäßig (jeweils in der Mitte und am Ende des Schuljahres) leitfadengestützte Einzelinterviews durchgeführt.

Zudem wurden den Schüler*innen in der Mitte und am Ende des 3. Schuljahres sowie zu Beginn des 4. Schuljahres die Aufgaben aus der Untersuchung von Selter (2000) vorgelegt (vgl. Tab. 1).

199+198	119+120+121	250+279+250	527+399	345+634	286+437
701-698	610-590	845-399	649-347	758-515	836-567

Tab. 1 Aufgaben der schriftlichen Erhebung (Selter, 2000)

Zentrale Ergebnisse von Selter (2000) sollen als Referenz dienen: Insbesondere zum zweiten und dritten Untersuchungszeitpunkt (t_2 und t_3) wurde kaum halbschriftlich gerechnet, während die schriftlichen Verfahren nach deren Einführung stark präferiert wurden. Insgesamt zeigte sich sowohl beim halbschriftlichen Rechnen (zu t_1) als auch bei der Verwendung schriftlicher Verfahren (zu t_2 und t_3) kaum aufgabenadäquates Handeln, da die Schüler*innen bevorzugt eine Vorgehensweise (v.a. Strategien Stellenweise bzw. Schrittweise oder die schriftlichen Verfahren) zur Lösung *aller* Aufgaben verwendeten. Dies lässt vermuten, dass diese halbschriftlich und schriftlich rechnenden Kinder die besonderen Merkmale einiger Aufgaben (graue Markierung in Tab. 1) nicht erkannt bzw. nicht genutzt haben (Selter, 2000).

3 Erste Ergebnisse

Die nachfolgenden Darstellungen beziehen sich auf die Vorgehensweisen von 22 Kindern der Projektklasse mit kontinuierlicher Zahlenblickschulung.

3.1 Rechenmethoden und Strategien

Anders als bei Selter (2000) dominiert in der Projektklasse das halbschriftliche Rechnen zu allen drei Untersuchungszeitpunkten. Das schriftliche Rechnen wird nur sehr selten verwendet. Bezüglich der verwendeten Strategien lassen sich schon zum ersten, vor allem aber zum zweiten und dritten Untersuchungszeitpunkt operations- und

aufgabenbezogene Unterschiede beobachten: Beispielsweise wird die Strategie Stellenweise zu t_3 bevorzugt für die drei Aufgaben ohne Überträge verwendet, während für die Aufgaben mit besonderen Merkmalen (graue Markierung in Tab. 1) vermehrt Strategien wie Vereinfachen und Ergänzen genutzt werden.

Bezüglich der Lösungsquoten lässt sich ein positiver Trend im Untersuchungsverlauf beobachten, wobei zu t_1 und t_2 noch operationsbezogene Unterschiede (zugunsten der Addition) zu beobachten sind, während dies zu t_3 nicht mehr gilt.

3.2 Flexibilität und Adaptivität

Der in der englischsprachigen Literatur üblichen Unterscheidung zwischen Flexibilität (im Sinne der Verwendung verschiedener Strategien) und Adaptivität (im Sinne der Verwendung passender Strategien) folgend (Verschaffel, Torbeyns & van Dooren, 2009), sollen die Vorgehensweisen mit Blick auf diese Aspekte genauer analysiert werden.

Wie auch bei Selter (2000) gibt es in der Projektklasse Kinder, die bevorzugt eine Strategie zum Lösen aller Aufgaben nutzen. Es kristallisiert sich aber auch eine – im Untersuchungsverlauf immer größer werdende – Gruppe von Kindern heraus, die (bis zu 6) verschiedene Strategien zur Lösung der 12 Aufgaben verwenden.

Bezüglich der Adaptivität sind nur vorsichtige Aussagen möglich, da aufgrund der Form der Datenerhebung keine Angaben zum Referenzrahmen gemacht werden können (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018, S. 41ff). Für die sieben Aufgaben mit besonderen Merkmalen (graue Markierung in Tab. 1) werden aufgabenadäquate Strategien bestimmt (z. B. Ergänzen bei 701-698) und die Vorgehensweisen der Kinder entsprechend gruppiert (die Aufgabe 649-347 wird aufgrund der besonderen Merkmale, für die prinzipiell alle Strategien adäquat sind, nicht berücksichtigt). Es zeigt sich, dass bereits zu t_1 aufgabenadäquate Strategien verwendet werden und dass der Anteil solcher Strategien im Untersuchungsverlauf steigt, sodass zu t_3 die Hälfte der Schüler*innen für sechs oder alle sieben Aufgaben adäquate Strategien verwendet.

Aufgrund erster explorativer Clusteranalysen bezüglich der Flexibilität, der Adaptivität und des Erfolgs lassen sich verschiedene Gruppen bilden: z. B. Kinder, die verschiedene, adäquate Strategien nutzen und damit häufig richtige Lösungen erzielen, aber auch solche, die mit der Verwendung einer dominanten Vorgehensweise sehr erfolgreich sind.

4 Ausblick

Die ersten Ergebnisse der schriftlichen Erhebungen sollen die noch andauernden Analysen der Interviewergebnisse anreichern, um typische Entwicklungsverläufe im Verlauf der Grundschulzeit rekonstruieren zu können.

Literatur

Heinze, A., Arend, J., Grüßing, M., & Lipowsky, F. (2018). Instructional approaches to foster third graders' adaptive use of strategies: an experimental study on the effects of two learning environments on multi-digit addition and subtraction. *Instructional Science*, 46 (6), 869-891.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*. Hildesheim: Franzbecker.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Berlin: Springer Spektrum.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Münster: Waxmann.

Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *JMD*, 21 (2), 227-258.

Verschaffel, L., Torbeyns, J., & van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24 (3), 335-359.

Beitrag III: Henning Sievert, Ann-Katrin van den Ham,
Aiso Heinze
sievert@leibniz-ipn.de

Schulbucheffekte auf das Arithmetiklernen von Grundschulkindern

Das Schulbuch stellt die wichtigste Lernressource für Mathematiklehrkräfte und deren Unterricht dar (Mullis et al., 2012). Trotz eines wachsenden Forschungsinteresses an Schulbüchern und deren Nutzung ist der Forschungsstand zur Wirkung dieser auf das Lernen von SuS noch begrenzt (Fan, 2013). Existierende Studien zu Schulbucheffekten sind zum einen überwiegend auf kleine und querschnittliche Stichproben beschränkt, zum anderen sind sie inkonsistent in ihren Ergebnissen (van den Ham & Heinze, 2018).

In zwei Untersuchungen, die auf Sekundäranalysen eines größeren Längsschnittdatensatzes aus Schleswig-Holstein beruhen, konnten wir Effekte der Schulbuchqualität auf das Strategielernen der SuS für die Nutzung operativer Grundaufgaben in Klasse 1 sowie die adaptive Strategienutzung bei der Addition und Subtraktion in Klasse 3 zeigen (Sievert et al., 2019; Sievert et al., eing.). In einer weiteren geplanten Studie ist die Untersuchung von Schulbucheffekten auf das Operationsverständnis der SuS geplant, Ideen dafür sollen im Rahmen der Arbeitsgruppe Arithmetik diskutiert werden.

1 Operative Grundaufgaben

Das Ablösen vom zählenden Rechnen zugunsten von Rechenstrategien und Faktenwissen der Zahlensätze des kleinen Einspluseins ist zum einen ein zentrales Lernziel der ersten Schuljahre, zum anderen ein meist langwieriger und durch Beziehungsorientierung bedingter Prozess (Rechtsteiner-Merz, 2013). Obwohl eine Verfestigung von Zählstrategien problematisch für den weiteren Lernprozess ist, stellen diese den Hauptlösungsweg vieler SuS über die erste Klasse hinaus dar. In unserer ersten Studie fokussieren wir die Nutzung operativer Grundaufgaben nach Schipper (2009) in Klasse 1, welche die Aufgabenfamilie und die Nachbaraufgaben umfassen.

2 Adaptive Strategienutzung bei Addition und Subtraktion

Die Bedeutung der adaptiven Strategienutzung – und damit die Betonung halbschriftlicher Rechenwege – im Zahlenraum bis 1000 hat in

den letzten zwei Jahrzehnten breite Zustimmung erlangt (Verschaffel et al., 2007). Adaptivität beschreibt in diesem Zusammenhang die bewusste oder unbewusste Wahl bzw. die Entwicklung einer adäquaten Lösungsstrategie (Selter, 2009). Adäquatheit kann sich dabei auf das zu lösende Problem, das lösende Individuum oder den soziomathematischen Kontext beziehen. Trotz des Konsens' über Relevanz und Vorteile haben empirische Studien wiederholt gezeigt, dass die Strategienutzung der meisten SuS wenig adaptiv erfolgt (Torbeyns & Verschaffel, 2016).

3 Methode

Zur Untersuchung der Effekte der Schulbuchqualität auf die Lernentwicklung der SuS wurden die Längsschnittdaten von 1664 SuS von Klasse 1–3 reanalysiert. Basierend auf dem Siegler-Modell zur Entwicklung von Strategiekompetenz (Lemaire & Siegler, 1995) wurden Kriterien zur Bewertung der Lerngelegenheiten in den vier genutzten Schulbüchern für die Bereiche operative Grundaufgaben und adaptive Strategienutzung abgeleitet, um bereichsspezifisch die Schulbuchqualität zu bestimmen. Mithilfe von Mehrebenenmodellen wurden die Effekte dieser Qualität auf die Strategienutzung der SuS am Ende der ersten bzw. dritten Klasse unter Kontrolle unterrichtlicher sowie individueller Kovariaten untersucht.

4 Ergebnisse

Sowohl für den Bereich der operativen Beziehungen als auch für den Bereich des adaptiven Rechnens zeigten die Analysen der Schulbücher deutliche Unterschiede in der Qualität der Lerngelegenheiten. Während beim ersteren ein Schulbuch eine relativ schwache und die übrigen drei eine deutlich höhere Qualität auf einem ähnlichen Niveau aufweisen, zeigte sich beim zweiten Bereich jeweils eine Schulbuchreihe mit durchweg relativ hoher bzw. relativ niedriger Qualität der Lerngelegenheiten. Die anderen beiden Schulbuchreihen wurden im Vergleich dazu mit einer mittleren Qualität bewertet.

In beiden Studien zeigten die Analysen signifikante Effekte der jeweiligen Schulbuchqualität auf das Lernen der Kinder. Die Effektstärken entsprechen sowohl für die Nutzung operativer Strategien als auch für das adaptive Rechnen 0.3–0.4 Standardabweichungen zwischen den Klassen, welche auf die Nutzung des Schulbuchs zurückzuführen sind. Auch der Anteil der aufgeklärten Varianz der Unterschiede zwischen Schulklassen steigt substantiell ($\Delta R^2 = 11.7\text{--}23.3\%$), durch die

Aufnahme der Schulbuchqualität ins Modell. Für den Bereich des adaptiven Rechnens ist zudem die Interaktion zwischen arithmetischem Vorwissen und Schulbuchqualität signifikant. Das heißt leistungsstarke SuS profitieren besonders von Schulbüchern mit hoher Qualität, während leistungsschwache SuS besonders unter Schulbüchern mit geringer Qualität leiden.

5 Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der beiden Studien unterstreichen die Bedeutung von Schulbuchqualität gemäß fachdidaktischer Kriterien für das Lernen der SuS sowie die Bedeutung von Studien zu Effekten der Schulbuchqualität. Die Ergebnisse liefern zum einen Argumente für eine Regulierung der Schulbuchzulassung anhand von theoriebasierten und empirisch gestützten Qualitätskriterien. Zum anderen lässt sich daraus schließen, dass auch Lehrkräfte im Umgang mit Schulbüchern geschult und für Qualitätsunterschiede sensibilisiert sein sollten. Entsprechend sollten sie in der Lage sein, ungeeignete Lerngelegenheiten in den Schulbüchern zu kompensieren.

Für ein breiteres Verständnis der Zusammenhänge zwischen Schulbuchqualität und dem Lernen der SuS soll in einer weiteren Studie der Bereich des Operationsverständnis‘ u.a. mit Fokus auf die Grundvorstellung des statischen Vergleichens untersucht werden. Dafür sollen im Anschluss an den Vortrag Ideen für die Bewertung der Lerngelegenheiten in den Schulbüchern diskutiert werden, welche aus der Literatur sowie in einer Befragung von Studienleitenden und Lehrkräftefortbildenden gesammelt worden sind.

Literatur

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research. Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 765–777.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four Aspects of Strategic Change. Contributions to Children's Learning of Multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124(1), 83–96.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, Mass.: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung: Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Münster: Waxmann.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 41(5), 619–625.

Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences* 74, 101716, 1–13.

Sievert, H., van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (eingereicht). Does Textbook Quality matter? Mathematics Textbooks and First Graders' Use of Arithmetic Principles.

Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2016). Mental computation or standard algorithm? Children's strategy choices on multi-digit subtractions. *European journal of psychology of education*, 31(2), 99-116.

van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 59, 133–140.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 557–628). (2nd edition). New York: MacMillan.

Arbeitsgruppe Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Koordination: Grit Kurtzmann
kurtzmann@schule-franzburg.de

Beitrag: Nina Sturm & Tobias Rolfes
nina.sturm@ph-ludwigsburg.de rolfes@leibniz-ipn.de

Vergleich von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten

Gemäß den Bildungsstandards sollen Kinder am Ende der Primarstufe Eintrittswahrscheinlichkeiten von Ereignissen einschätzen und miteinander vergleichen können (KMK, 2005). Zentral ist dabei, dass der Prozess des Abwägens und des Vergleichens auf objektiven und nicht auf subjektiven oder intuitiven Kriterien basiert. Häufig finden Wahrscheinlichkeitsvergleiche anhand von Urnen- und Glücksradaufgaben statt. Die Kinder wählen aus zwei Zufallsgeneratoren denjenigen aus, der die größere Gewinnchance hat bzw. identifizieren, dass beide Zufallsgeneratoren die gleiche Gewinnchance besitzen.

1 Strategien beim Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten

Empirischen Befunden zufolge verwenden Grundschul Kinder häufig einfache Lösungsstrategien, indem sie sich für den Zufallsgenerator, mit 1) mehr günstigen Ergebnissen, 2) mit weniger ungünstigen Ergebnissen oder 3) einer größeren Differenz von günstigen und ungünstigen Ergebnissen entscheiden (Watson, Collis, & Moritz, 1997).

In Folgestudien konnten diese Befunde jedoch nicht repliziert werden (Sturm & Rolfes, 2019). Schülerinnen und Schüler der dritten und vierten Jahrgangsstufe folgten weder bei den Urnen- noch bei den Glücksradvergleichen konsistent einer der drei Lösungsstrategien. Dieses Ergebnis lässt vermuten, dass den Entscheidungen für oder gegen einen Zufallsgenerator andere oder komplexere Gedankengänge zugrunde liegen wie beispielsweise:

- Farbpräferenzen wie die Lieblingsfarbe (Jones, Long, & Finlay, 2007; Neubert, 2016)

- geometrische Interpretationen der Anordnung wie die Lage der gefärbten Flächen (zusammenhängend versus nicht zusammenhängend) bzw. der Kugeln (Sturm & Rolfes, 2018)
- Vergleich der Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse (Sturm & Rolfes, 2018)
- Bilden von Chancenverhältnissen (Odds) (Sturm & Rolfes, 2018)

Offen bleibt, welche Strategien die Grundschul Kinder unter welchen Bedingungen für ihre Entscheidung heranziehen. Um sich einer Antwort dieser Frage anzunähern, wurde empirisch mittels Dimensions- und Clusteranalysen untersucht, inwiefern Ähnlichkeiten zwischen den Aufgaben zum Wahrscheinlichkeitsvergleich bestehen und ob sich Aufgaben zu homogenen Gruppen zusammenfassen lassen.

1.1 Methode

An der Untersuchung nahmen 149 Viertklässlerinnen und Viertklässler (74 Mädchen und 75 Jungen) aus rheinland-pfälzischen Grundschulen teil. Ihre Vorkenntnisse zum Wahrscheinlichkeitsbegriff waren gering. Alle Kinder bearbeiteten 16 Items zum Wahrscheinlichkeitsvergleich, davon verwendete ein Drittel aller Items Urnen und zwei Drittel Glücksräder. Bei der Itemkonstruktion wurden jedem Urnenitem strukturgleiche Glücksraditems zugeordnet.

Die psychometrische Dimensionalität der dichotom kodierten Test-Items wurde mithilfe einer konfirmatorischen Faktorenanalyse überprüft. Dazu wurden auf der Grundlage der Item-Response-Theorie ein- und mehrdimensionale Modelle (Adams, Wilson, & Wu, 1997) geschätzt. Ausgangspunkt war ein eindimensionales Modell, bei dem angenommen wird, dass alle Items ein latentes Konstrukt messen. Verglichen wurde das eindimensionale Modell mit einem zweidimensionalen Modell, das Urnen-Items und Glücksrad-Items als zwei unterschiedliche, aber korrelierte Faktoren postuliert. Außerdem wurde ein zweidimensionales Modell, bei dem Items, in denen die beiden Zufallsgeneratoren gleiche Gewinnwahrscheinlichkeiten darstellten, von den Items, bei denen die Zufallszahlengeneratoren unterschiedliche Gewinnwahrscheinlichkeiten repräsentieren, in zwei psychometrische Dimensionen getrennt. Die Passung der Modellgüte wurde mit Hilfe der Informationskriterien (AIC, BIC) beurteilt. Je niedriger der Wert

eines Informationskriteriums, desto besser entsprechen die empirischen Daten dem theoretisch angenommenen Modell. Differenzen in den Informationskriterien von mehr als 10 werden im Allgemeinen als ein starkes Indiz für den besseren Fit des Modells mit dem kleineren Wert angesehen (Burnham & Anderson, 2010). Zusätzlich wurde mit allen 16 Items eine hierarchische Clusteranalyse (Average Linkage, Jaccard) gerechnet. Die Bestimmung der Clusterzahl erfolgte mittels des inversen Scree-Tests. Zur Stabilitätsprüfung wurden für die ausgewählte Clusterzahl noch zwei weitere Analysen mit dem Complete- und Single-Linkage gerechnet.

1.2 Ergebnisse

Die Prüfung der psychometrischen Dimensionen ergab, dass das ein-dimensionale Modell (AIC: 3123; BIC: 3180) den schlechtesten Modellfit aufwies. Die Trennung in die beiden Dimensionen Urnen-Items und Glücksrad-Items erhöhte den Modellfit (AIC: 3103; BIC: 3166). Die latente Korrelation zwischen den Urnen-Items und den Glücksrad-Items betrug .89 und war damit als hoch anzusehen. Den besten Fit zeigte aber das zweidimensionale Modell, bei dem unterschieden wurde, ob die Zufallsgeneratoren der Items beide die gleichen Erfolgswahrscheinlichkeiten darstellten oder nicht. In diesem zweidimensionalen Modell (AIC: 2914; BIC: 2977) wiesen die Informationskriterien deutlich geringere Werte auf als bei den anderen beiden Modellen. Die latente Korrelation zwischen den beiden Dimensionen (gleichwahrscheinlich versus nicht gleichwahrscheinlich) betrug .04 und war somit sehr gering.

Die Ergebnisse der hierarchischen Clusteranalyse bestätigen dieses zweidimensionale Modell. Alle Items, bei denen die Erfolgswahrscheinlichkeit beider Zufallsgeneratoren gleich ist, bildeten ein Cluster, alle anderen Items, das zweite Cluster.

1.3 Diskussion

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass sich Items, bei denen die Zufallsgeneratoren unterschiedliche Gewinnwahrscheinlichkeiten repräsentieren von Items, bei denen die Zufallsgeneratoren gleiche Gewinnwahrscheinlichkeiten repräsentieren, unterscheiden. Dies geht konform mit dem Befund, dass sich die Itemgruppen signifikant in

ihrer Schwierigkeit unterscheiden zugunsten der Items mit unterschiedlichen Gewinnwahrscheinlichkeiten (Sturm & Rolfes, 2018). Es ist daher zu prüfen, ob Schülerinnen und Schüler bei beiden Itemgruppen unterschiedliche Strategien anwenden und wenn ja, welche sich identifizieren lassen.

Literatur

Adams, R. J., Wilson, M., & Wu, M. (1997). Multilevel item response models: An approach to errors in variables regression. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 22, 47-76.

Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2010). Model selection and multi-model inference: A practical information-theoretic approach (2nd ed.). New York, NY: Springer.

Jones, F. W., Long, K., & Finlay, W. M. L. (2007). Symbols can improve the reading comprehension of adults with learning disabilities. *Journal of Intellectual Disability Research: JIDR*, 51(Pt 7), 545–550. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2788.2006.00926.x>

KMK: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.). (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München: Luchterhand.

Neubert, B. (2016). *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit: Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule* (2. Auflage). Offenburg: Mildenerger.

Sturm, N., & Rolfes, T. (2018). Fähigkeiten und Schwierigkeiten von Grundschülerinnen und Grundschulern im Umgang mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff. In G. Greefrath & F. Käpnick (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1779–1782). Münster: WTM.

Sturm, N., & Rolfes, T. (2019). Urne versus Glücksrad - (Fehl-)Strategien beim Lösen von Aufgaben zum Wahrscheinlichkeitsvergleich. In Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019*. Münster: WTM.

Watson, J. M., Collis, K. F., & Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 60–82. <https://doi.org/10.1007/BF03217302>

Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer & Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-bs.de simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beitrag: Daniela Aßmus & Torsten Fritzlar
daniela.assmus@paedagogik.uni-halle.de
torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de

GrundschulKinder bauen Würfelgebäude nach Seitenansichten und Schatten – eine Interviewstudie

Räumliche Fähigkeiten und deren Entwicklung im Vorschul- und Schulalter sind ein wichtiger mathematikdidaktischer Forschungsgegenstand, der gerade in letzter Zeit auch international verstärkt Beachtung findet (z. B. Sinclair, Bartolini Bussi, Villiers, & Jones, 2016 mit vielen Literaturhinweisen). Dies scheint gut begründet, unter anderem weil in zahlreichen Studien ein enger Zusammenhang zwischen schulischen bzw. akademischen Leistungen im mathematischen und naturwissenschaftlich-technischen Bereich und räumlichen Fähigkeiten nachgewiesen werden konnte (z. B. Wai, Lubinski, & Benbow, 2009). Darüber hinaus kommt diesen eine große lebenspraktische Bedeutung zu. Dies gilt wohl insbesondere für das Verstehen von und den Umgang mit zweidimensionalen Darstellungen dreidimensionaler Objekte oder Konfigurationen. Im Folgenden werden Teilergebnisse einer Interviewstudie vorgestellt, mit der dieser Inhaltsbereich handlungs- und unterrichtsorientiert in den Blick genommen wird.

1 Die Interviewstudie

Im Rahmen der Studie wurden bislang 26 Zweit- und Viertklässler in jeweils zwei halbstandardisierten Interviews gebeten, Würfelgebäude aus Einheitswürfeln nach jeweils zwei vorgegebenen Schatten oder zwei Seitenansichten nachzubauen. Die Projektionen wurden dabei in aufrecht stehenden Ständern, auf einzelnen Karten oder auf einer Doppelkarte je Aufgabe präsentiert. Wir interessieren uns insbesondere dafür, wie GrundschulKinder beim Bauen der Würfelbauwerke vorgehen und inwieweit die Art der Projektion (Schatten vs. Seitenansicht), die Art der Vorgabe (Ständer vs. Karte vs. Doppelkarte) oder spezifische

Merkmale der vorgegebenen Projektionen die Bauprozesse und -produkte der Kinder beeinflussen.

Für die Interviews wurden Aufgabenreihen aus jeweils 9 bis 13 Aufgaben (zuzüglich Einführungsaufgaben) entwickelt, bei denen einerseits vermutete Schwierigkeitsfaktoren systematisch variiert und mit denen andererseits Projektions- und Vorgabearten vergleichbar werden; für Details sei auf Aßmus und Fritzlar (2019a) verwiesen. Die Interviews wurden videografiert und u. a. hinsichtlich beobachtbarer Bauprozesse und -produkte protokolliert.

2 Wie werden Würfelgebäude gebaut?

In diesem Beitrag stehen die verwendeten Vorgehensweisen beim Errichten der Würfelgebäude im Vordergrund. Weitere Ergebnisse sind in Aßmus und Fritzlar (2019a, b) zu finden.

Identifizieren konnten wir hauptsächlich die folgenden Vorgehensweisen (In Klammern wird jeweils die Häufigkeit des Auftretens angegeben.):

- V1: Bauen einer Figur, die der linken oder rechten vorgegebenen Silhouette entspricht, an korrekter Position; Anbauen fehlender Würfel der zweiten Silhouette (152).
- V2: Bauen einer Figur, die der linken oder rechten vorgegebenen Silhouette entspricht, an noch nicht passender Position; Verschieben der Figur auf eine korrekte Position; Anbauen fehlender Würfel der zweiten Silhouette (71).
- V3: Bauen einer Figur, die der linken oder rechten vorgegebenen Silhouette entspricht, an noch nicht passender Position; Anbauen fehlender Würfel der zweiten Silhouette mit gleichzeitigen Korrekturen der bislang errichteten Figur (z. B. Versetzen einzelner Würfel) (31).
- V4: Schichtweiser Aufbau der Figur: Zuerst werden alle notwendigen Würfel der unteren Schicht, dann der zweiten und ggf. der dritten Schicht positioniert (46).
- V5: Ebenenweiser Aufbau der Figur: Nacheinander werden vertikale Ebenen errichtet, durch die gleichzeitig die Vorgaben der linken und der rechten Silhouette erfüllt werden (38).

Die folgende Vorgehensweise führt zu einem korrekten Gebäude, das jedoch nicht korrekt platziert ist:

V6: Bauen einer Figur, die der linken oder rechten vorgegebenen Silhouette entspricht, an nicht passender Position; Anbauen fehlender Würfel der zweiten Silhouette (30).

Fehlerhafte Ergebnisse entstehen u. a. bei folgendem Vorgehen:

V7: Bauen einer Figur, die der linken oder rechten vorgegebenen Silhouette entspricht, an nicht passender Position. Anbauen der zweiten Silhouette einschließlich oder abzüglich der Schnitssäule (55).

Darüber hinaus zeigten sich vereinzelt weitere Strategien,¹ Variationen der beschriebenen Vorgehensweisen sowie Kombinationen davon. 437 Bauprozesse ließen sich klassifizieren, bei 123 Aufgabenbearbeitungen war dies nicht der Fall.

Auffallend häufig tritt V1 auf. Dies betrifft jedoch nicht alle Aufgaben gleichermaßen. So werden Aufgaben, die sich auf Grundlage der Lösungsraten als besonders schwierig erwiesen haben (komplexe dreischichtige Figuren auf Einzelkarten sowie einfache Figuren auf Doppelkarten, bei denen der höchste Turm nicht nahe der Projektionsflächen steht; s. Aßmus & Fritzlar (2009a, b)), nur sehr selten durch die erste Vorgehensweise bearbeitet. Für fehlerhafte Bauten ergibt sich dies zwangsläufig, da V1 immer zum korrekten Ergebnis führen muss. Allerdings werden bei solchen Aufgaben auch korrekte Gebäude kaum über Nutzung dieser Vorgehensweise errichtet. Möglicherweise erscheint dieses Verfahren durch die Komplexität der vorgegebenen Projektionen wenig vielversprechend bzw. wird es aus Unsicherheiten während des Bauprozesses wieder verlassen.

Betrachtet man Strategien individuumsbezogen, so zeigt sich, dass die meisten Kinder verschiedene Vorgehensweisen zum Einsatz bringen. Dennoch kristallisieren sich unterschiedliche Typen der Strategienutzung heraus: Während Kinder mit vorwiegend *silhouettenorientiertem*

¹ Aus stilistischen Gründen verwenden wir hier die Begriffe „Vorgehensweisen“ und „Strategien“ synonym.

Vorgehen größtenteils V1 und V2, V1 und V6 oder V1 und V7 verwenden, gibt es andere Kinder, die starke Präferenzen für *schichtweises* Vorgehen zeigen (V4). Kinder mit *flexiblem* Vorgehen verwenden zu ähnlichen Anteilen V1, V4 und V5 sowie teilweise weitere andere Strategien. Einzelne Kinder scheinen demgegenüber eher *unstrukturiert* vorzugehen in dem Sinne, dass ihre Bauprozesse überwiegend nicht eingeordnet werden können. Dieses Phänomen zeigt sich in der hier vorgestellten Studie ausschließlich in der Gruppe der Zweitklässler.

Grundsätzlich lässt sich festhalten, dass es für die ersten drei Typen in jeder Gruppe Kinder gibt, die nahezu alle Aufgaben korrekt lösen. Für alle drei Typen ist somit eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben möglich. Betrachtet man allerdings jeweils die vollständigen Gruppen, so erweisen sich der flexible (5 Kinder) sowie der schichtorientierte Typ (3 Kinder) als konstant erfolgreich, während in den beiden anderen Gruppen auch Kinder mit vergleichsweise geringen Lösungsraten zu finden sind. Für das silhouettenorientierte Vorgehen lässt sich dies insofern erklären, als dass die Silhouetten teilweise als zwei eigenständige Gebäude wahrgenommen werden (s. V7), deren Zusammenführung zu einem Bauwerk schwer fällt.

Literatur

Aßmus, D., & Fritzlar, T. (2019a). Building 3D shapes from Side Views and Shadows – An Interview Study with Primary School Students. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien, & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the IGPM* (vol. 2, pp. 49–56). Pretoria: PME.

Aßmus, D., & Fritzlar, T. (2019b). Würfelgebäude nach Seitenansichten und Schatten bauen – eine Interviewstudie mit Grundschulkindern. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019*. Münster: WTM.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., Villiers, M. de, & Jones, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691–719.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2009). Spatial Ability for STEM Domains: Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies Its Importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817–835.

Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt & Uta Häsel-Weide

birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de

uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de

Beitrag: Kirsten Winkel

kirsten.winkel@uni-mainz.de

Wie können lernwirksame Kommunikationsprozesse aussehen? Den Blick schärfen für die Prozessqualität mathematischer Unterrichtsgespräche

Kommunizieren Grundschul Kinder – verbal und nonverbal – beim Lösen von Aufgaben über ihre mathematischen Handlungen, Darstellungen und Vorstellungen, kann dieser Austausch dazu beitragen, dass sie gemeinsam eine Lösung finden, auf die sie alleine nicht gekommen wären. Es gibt wenig Zweifel an dem Wert, den ein wechselseitiges Erklären, Begründen, Zeigen, Zuhören, Aushandeln und Nachfragen für das Lernen von Mathematik haben. Dieser Wert wurde bereits vor über 20 Jahren ausführlich diskutiert (z. B. Mercer 1996). Er konnte in qualitativen Studien mit verschiedenen Perspektiven und Methoden bestätigt werden (Erath & Prediger 2018). In den Bildungsstandards manifestiert ihr Wert sich in den allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Kommunizieren“ und „Argumentieren“ (KMK 2005).

Ziel dieses kurzen Beitrags ist es zu skizzieren, wie sich Merkmale für die Qualität mathematischer Unterrichtsgespräche direkt ausgehend von den KMK-Beschreibungen zur Kompetenz „Kommunizieren“ entwickeln lassen und wie gelungene Kommunikationsprozesse über eine Kategorisierung von Transkriptausschnitten sichtbar gemacht werden können. Dabei werden entsprechend des verwendeten Kategoriensystems¹ (Cohors-Fresenborg 2012, S. 151) Beiträge im Transkript **grün** gefärbt, die die Kommunikationsqualität positiv beeinflussen. Und Redebeiträge, die sich störend darauf auswirken, werden **grau** gefärbt.

¹ Für weitere Informationen zu den genauen Kategorisierungen und sowie für das vollständig kategorisierte Transkript der Unterrichtsszene sei auf Winkel 2012 (S. 174 ff.) verwiesen.

Entsprechend der Systematik von Erath & Prediger (2015) fokussiert mein Beitrag damit auf die diskursive Dimension der Qualität von unterrichtlichen Interaktionen.

1 Kommunizieren mit einer gewissen Genauigkeit

In den Bildungsstandards wird gefordert, dass Kinder „*eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren*“ (KMK 2005, S. 8, Bezüge dazu *kursiv*) können. Doch was kann ein Maß dafür sein, die Qualität dieser kommunikativen Kompetenzen in Unterrichtsgesprächen zu erfassen? Bzw. in den Worten der Bildungsstandards ausgedrückt: Was zeichnet

- (1) eine gelungene *Beschreibung der eigenen Vorgehensweise*,
- (2) ein gelungenes *Verstehen der Lösungswege* anderer und
- (3) eine gelungene *gemeinsame Reflexion darüber* aus?

Nehmen wir die Perspektive einer zuhörenden MitschülerIn ein, wird schnell klar, dass (1) und (2) eng miteinander zusammenhängen. Eine *Beschreibung der eigenen Vorgehensweise* ist dann gelungen, wenn MitschülerInnen den *Lösungsweg gut verstehen* oder nachvollziehen können. Und Voraussetzung für (1) und (2) ist, dass sich ein Beitrag sprachlich oder durch Zeigen mit einer gewissen Genauigkeit auf die Sache bezieht. Als Voraussetzung spätestens für (3) kommen Querverzüge zwischen Schülerbeiträgen hinzu. Sobald ein oder mehrere Lösungswege von MitschülerInnen im Raum stehen, wird dabei wichtig, dass ein neuer Lösungsweg nicht nur als alternativer Vorschlag daneben gestellt wird, *ohne ihn von anderen Beiträgen abzusetzen*. Damit ein Klassengespräch zu einer gelungenen *gemeinsamen Reflexion* (3) wird, muss ein neuer Beitrag verdeutlichen, auf welchen Beitrag, welches Argument oder welchen Gedanken er sich bezieht oder wie er sich von vorherigen absetzt - wiederum mit dem Zweck, MitschülerInnen das *Verstehen der Lösungswege* (2) zu erleichtern.

Markieren wir einzelne Beiträge in Unterrichtstranskripten, in denen die Kinder beginnen, sich mit einer gewissen Genauigkeit auf den mathematischen Gegenstand oder sogar schon aufeinander zu beziehen, erfassen wir mit dieser – grün markierten – Kategorie eine erste wichtige Dimension der Qualität mathematischer Kommunikationsprozesse.

Jana Meinst du, weil hier wieder 10 rauskommt [zeigt Zehner]
die 1 dann hier hin? [zeigt Übertrag für den Hunderter]

In diesem kurzen Ausschnitt aus der 2. Stunde einer Unterrichtseinheit zur schriftlichen Multiplikation in Klasse 3 (Winkel 2012, S. 190) stellt Jana einen Bezug zur Begründung eines Mitschülers („Meinst du, weil ...“) und gleichzeitig über ihr Zeigen einen präzisen Bezug zur Sache her. Das aktive Nachvollziehen der genauen Bezüge hilft ihr, eine eigene Fehlvorstellung, die sie zuvor geäußert hat, zu beheben.

2 Die Rolle verabredeter Gesprächsregeln

Als weiterer Aspekt wird in den Bildungsstandards zur Kompetenz „Kommunizieren“ gefordert, dass Kinder „*Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.*“ Dieser Aspekt misst der Kooperation beim Kommunizieren eine große Bedeutung zu. Jedoch sind verabredete Gesprächsregeln in Transkripten nur selten explizit zu finden. Und um sie aufzuspüren, ist manchmal mehr Kontextwissen zur Klasse notwendig als ein Transkript üblicherweise hergibt. Dennoch hat es sich in der Versuchsklasse als sehr aufschlussreich erwiesen, diese sehr entscheidende Dimension der Prozessqualität von Kommunikationsprozessen genauer in den Blick zu nehmen:

David Einwände? [schaut zur Klasse, Jonas meldet sich]
 Hast du was dagegen? [zu Jonas]

Jonas Nein!

David Und wieso hast du dich dann gemeldet?

Nachdem David die aktuell diskutierte Aufgabe für erledigt hält, erkundigt er sich – wie in der Klasse verabredet – bei seinen MitschülerInnen, ob jemand Einwände zur aktuellen Aufgabe hat (siehe Winkel 2012, S. 191). Jonas meldet sich, hat aber keinen Gesprächsbedarf zur aktuellen, sondern zu einer anderen Aufgabe. Mit dem Hintergrundwissen, dass es in dieser Klasse eine *Verabredung* gibt, dass sich Wortmeldungen nur auf die Aufgabe beziehen sollen, die gerade zur Debatte steht, müssen wir seinen Beitrag *grau* markieren, weil Jonas hier die in der Klasse *verabredete Gesprächsregel nicht einhält*. Bemerkenswert ist gleichzeitig, dass David den verabredeten „didaktisch-sozialen

Vertrag“ (vgl. Sjuts 2003) soweit verinnerlicht hat, dass er die [Einhaltung der verabredeten Gesprächsregel bei Nichteinhalten](#) selbst [einfordert](#).

Mittels weiterer [grüner](#) und [grauer](#) Kategorisierungen in den Transkripten kann gezeigt werden, wie einige der Gesprächsregeln bewirkt haben, dass sich in der Versuchsklasse eine Unterrichtskultur entwickelt und etabliert, in der die eingangs genannten wechselseitigen kommunikativen Aktivitäten zunehmend zur Gewohnheit werden und schließlich wie selbstverständlich zum Mathematiklernen dazugehören.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. (2012). Metakognitive und diskursive Aktivitäten - ein intellektueller Kern im Unterricht der Mathematik und anderer geisteswissenschaftlicher Fächer. In Bayrhuber et al. (Eds.), *Formate fachdidaktischer Forschung*, Band 2 (S. 145-162). Münster: Waxmann.

Erath, K. & Prediger, S. (2018). What characterizes quality of mathematics classroom interaction for supporting language learners? Disentangling a complex phenomenon. In N. Planas & M. Schütte (Eds.), *Proceedings of ETC4 – Fourth ERME Topic Conference ‘Classroom-Based Research on Mathematics and Language’* (S. 49-56). Dresden: ERME / HAL.

KMK (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. München: Luchterhand.

Mercer, N. (1996). The quality of talk in children's collaborative activity in the classroom. *Learning and instruction*, 6(4), 359-377.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24(1), 18-40.

Winkel, K. (2012). *Entwicklungsmechanismen von Metakognition im mathematischen Unterrichtsdiskurs der Grundschule - ein designbasierter Unterrichtsversuch über vier Schuljahre*. München: Verlag Dr. Hut.

Arbeitsgruppe Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien

Koordination: Roland Rink & Daniel Walter

r.rink@tu-braunschweig.de d.walter@uni-muenster.de

Beitrag: Laura Birklein

laura.birklein@uni-bamberg.de

Frühe mathematische Bildung in einer digitalisierten Welt

„Die frühkindliche Bildung in einer digitalisierten Welt ist bislang weder national noch international Gegenstand umfassender empirischer Forschung. Dies zu ändern, wird in den kommenden Jahren eine zentrale Aufgabe all jener Wissenschaftsdisziplinen sein, die sich aus ihrer spezifischen Perspektive heraus dem Thema nähern können“ (Enquete-Kommission des Deutschen Bundestages für Internet und digitale Gesellschaft, 2013, S. 10).

Das in diesem Beitrag vorgestellte Dissertationsprojekt möchte diesem Desiderat, das durchaus bis heute Gültigkeit besitzt, aus mathematikdidaktischer Perspektive begegnen. In einer Evaluationsstudie werden Effekte des Einsatzes einer App zur frühen mathematischen Bildung auf die mathematische Kompetenzentwicklung der Kinder untersucht. Der Blick auf unterschiedliche Bedingungsfaktoren berücksichtigt dabei – stärker als eine reine Wirkungsstudie – auch kognitive und interaktive Prozesse im Zusammenspiel zwischen digitalem Medium und Kind.

1 Digitale Medien und frühe mathematische Bildung

Während über die Bedeutung früher mathematischer Bildung weitgehend Konsens herrscht, wird der Einsatz digitaler Medien im Elementarbereich noch kontrovers diskutiert (vgl. z. B. Neuß, 2017). Einigkeit besteht jedoch darin, dass Potenziale und Wirkungen digitaler Lernumgebungen nur unter bestimmten Bedingungen zum Tragen kommen. Ein fachdidaktisch fundiertes Konzept, eine sinnvolle pädagogische Einbindung und die Interaktion mit einer Lernbegleitung sind einige Aspekte von wesentlicher Relevanz. Die in den letzten Jahren erkennbar verstärkten (mathematikdidaktischen) Forschungsbemühun-

gen lassen immer fundiertere Aussagen zu (vgl. z. B. Moyer-Packenham, Litster, Bullock & Shumway, 2018; Papadakis, Kalogiannakis & Zaranis, 2018; Schacter & Booil, 2016). Auch die im Folgenden vorgestellte Studie soll die Erkenntnisbasis diesbezüglich ergänzen und erweitern.

2 Evaluationsstudie

In den teilnehmenden Kindergärten wird die App *MaiKe* [Mathematik im Kindergarten entdecken] eingesetzt, die sich an „anschlussfähigen, mathematischen Grundideen und wesentlichen (prädikativen) Kompetenzen“ orientiert (Steinweg & Weth, 2014, S. 1168). Die Inhalte werden im Sinne des Spiralprinzips in sechs Welten mit je zehn Spielen angeboten und im Spielverlauf in einer vorgegebenen Reihenfolge freigegeben.

Die Untersuchung ist in einem Mixed-Method-Design angelegt, das quantitative und qualitative Zugänge kombiniert, um verschiedene Forschungsschwerpunkte methodisch zu erfassen.

Der *Forschungsschwerpunkt 1* liegt auf einer Nutzungsanalyse im Vergleich zweier unterschiedlicher Implementationsformen. Im Setting A stehen die Tablets und die App den Kindern in der Freispielzeit jederzeit zur Verfügung, sodass sie eigenverantwortlich darauf zugreifen können. Im Setting B finden regelmäßig organisierte Spielsitzungen in Begleitung der Untersuchungsleitung statt. Die leitende Forschungsfrage lautet:

Welche Unterschiede zeigen sich bei der Nutzung des Tablets und der App unter den gegebenen Rahmenbedingungen der beiden Interventionssettings?

Diese Ergebnisse stehen zusätzlich als Datengrundlage und Interpretationsbasis für den *Forschungsschwerpunkt 2* zur Verfügung. Durch ein Pre- und Posttest Design wird die mathematische Kompetenzentwicklung der beiden Interventionssettings und einer Kontrollgruppe verglichen:

Zeigen sich kontrollierte Effekte der beiden Interventionssettings auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen?

Um konkrete Aufgabenformate und deren Einfluss auf Lösungsstrategien, Denkwege und individuelle Lernprozesse der Kinder genauer zu

untersuchen, wird im *Forschungsschwerpunkt 3* der mathematische Inhaltsbereich der (strukturierten) Anzahlerfassung herausgegriffen:

Welche Lern- und Entwicklungsprozesse lassen sich exemplarisch bezüglich digitaler Aufgabenformate zur Anzahlerfassung nachvollziehen?

Zu jedem der drei Forschungsschwerpunkte werden im folgenden Abschnitt ausgewählte Ergebnisse präsentiert.

3 Ausgewählte Ergebnisse

Im *Forschungsschwerpunkt 1* lässt sich (unter anderem) durch eine Logfile-Analyse feststellen, dass die Kinder im begleiteten Setting B während des Interventionszeitraums höhere Spielstände erreichen, dabei jedoch weniger Spiele wiederholen und so insgesamt etwas weniger Zeit mit dem Tablet und der App verbringen als die Kinder des freien Settings A. Die gesamten Nutzungszeiten unterscheiden sich zwischen den beiden Settings jedoch nicht wesentlich und sind weder aus medienpädagogischer noch aus fachdidaktischer Sicht als bedenklich einzustufen.

Um im *Forschungsschwerpunkt 2* die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen im Vergleich der beiden Settings und der Kontrollgruppe statistisch zu überprüfen, werden geeignete (95%-)Konfidenzintervalle konstruiert. Die Ergebnisse zeigen keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden unterschiedlichen Implementationsformen A und B, stützen jedoch die vorab aufgestellte Hypothese, die besagt, dass sich bei den Kindern beider Interventionssettings eine höhere mathematische Kompetenzentwicklung zeigt als für die Kinder der Kontrollgruppe.

Im *Forschungsschwerpunkt 3* werden die Lösungsstrategien der Kinder bei den Spielen zur (strukturierten) Anzahlerfassung zunächst durch Videoanalyse identifiziert und in einem Kategoriensystem gefasst. Die entstandenen Daten zeigen einerseits, dass verschiedene Charakteristika der digitalen Aufgabenformate (Darstellungsarten, Animation, etc.) die Wahl von Lösungsstrategien beeinflussen. Andererseits lassen sich über den gesamten Spielverlauf betrachtet, Änderungen in den Lösungsstrategien feststellen, die auf stattgefundene Lernprozesse der Kinder hindeuten. Insbesondere lässt sich eine Entwicklung weg von

einem einzelnen Abzählen von Elementen einer Menge, hin zur vermehrten Nutzung von Strukturen in den Darstellungen feststellen. Diese Tendenz ist im Hinblick auf die Ausbildung eines Teile-Ganzes-Konzepts und eines ersten Operationsverständnisses äußerst wünschenswert (vgl. z. B. Benz, 2010; Gaidoschik, 2013). Ausgehend von den quantifizierten Daten und Entwicklungspfaden findet eine begründete Auswahl illustrierender Fallbeispiele statt. Diese bieten durch ausführliche, qualitative Analyse abschließend einen vertieften Einblick in individuelle Lern- und Entwicklungsprozesse einzelner Kinder.

Literatur

- Benz, Ch. (2010). Zählen ist nicht alles, was zählt. Zur Förderung der strukturierten Mengenwahrnehmung vor und zu Beginn der Schulzeit. *MNU Primar*, 2 (4), 52-57.
- Enquete-Kommission des Deutschen Bundestages (2013). *Sechster Zwischenbericht der Enquete-Kommission "Internet und digitale Gesellschaft"*. Abgerufen von <http://dipbt.bundestag.de/doc/btd/17/120/1712029.pdf>
- Gaidoschik, M. (2013). *Rechenschwäche vorbeugen. 1. Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen*. Wien: G&G Kinder- und Jugendbuch.
- Moyer-Packenham, P. S., Litster, K, Bullock, E. P. & Shumway, J. F. (2018). Using video analysis to explain how virtual manipulative app alignment affects children's mathematical learning. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, C. Vale (Hrsg.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education* (S. 9-34). Cham: Springer.
- Neuß, N. (2017). Tablets in Kinderhänden? Digitale Medienbildung in Kitas. *Frühe Bildung*, 6, 228-230.
- Papadakis, S., Kalogiannakis, M. & Zaranis, N. (2018). The effectiveness of computer and tablet assisted intervention in early childhood students' understanding of numbers. An empirical study conducted in Greece. *Education and Information Technologies*, 62 (4), 1-23.
- Schacter, J. & Booil, J. (2016). Improving low-income preschoolers mathematics achievement with Math Schelf, a preschool tablet computer curriculum. *Computers in Human Behavior*, 55, 223-229.
- Steinweg, A. S. & Weth, T. (2014). Auch das noch? Tablets im Kindergarten. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1167-1170). Münster: WTM.

Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Dagmar Bönig
dboenig@uni-bremen.de

Beitrag: Elke Mirwald & Roland Rink
egmirwald@t-online.de r.rink@tu-braunschweig.de

Das Experimentieren als Zugang zum Aufbau von Größenvorstellungen

Der Begriff des Experimentes wird in vielen Kontexten verwendet. Abhängig von der wissenschaftlichen Disziplin wird auch das Experimentieren anders ausgelegt.

Seinen Ursprung hat das Wort im Lateinischen *experimentum* und kann sowohl mit „Versuch, Probe“ als auch mit „Erfahrung“ oder „Beweismittel“ übersetzt werden. Generell verstehen die meisten wohl unter einem Experiment eine wissenschaftliche Methode, durch die etwas entdeckt, bestätigt oder gezeigt werden soll. So beschreiben Beck & Clausen das Experimentieren als „eine hochkomplexe Methode, die die Fähigkeit zum Beobachten, zum Klassifizieren, zur Identifikation von Variablen, zur Bildung von Hypothesen, zur Planung, Durchführung und Kontrolle von Experimenten, zur Dokumentation und Analyse der Ergebnisse einschließt.“ (vgl. Beck & Clausen 2000, S.10).

Im unterrichtlichen Kontext wird aber weniger das (natur-) wissenschaftliche Experimentieren als vielmehr das Unterrichtsexperiment als Methode eingesetzt.

Im Mittelpunkt sollte dabei der Lernprozess des Kindes stehen. „Während Experimente in den Naturwissenschaften in erster Linie der Erkenntnisgewinnung dienen, werden im [...] Unterricht auch andere didaktische Absichten wie z. B. die Veranschaulichung naturwissenschaftlicher oder technischer Zusammenhänge, das Vertrautmachen mit physikalischen Phänomenen und die Motivation von Schülerinnen und Schülern verfolgt [...]“ (Engeln 2004, S. 23).

In Bezug auf den Mathematikunterricht beschreiben Goy & Kleine (2015, S. 2) Experimentieren als „eine Tätigkeit, mit deren Hilfe Schülerinnen und Schüler mathematische Zusammenhänge erforschen können“.

1 Experimentieren im Mathematikunterricht der Grundschule

Da das Experimentieren aber eine sehr komplexe Methode ist, ist es legitim, die Methode in der Grundschule auf das *Laborieren* zu reduzieren. (vgl. Wiebel 2000; Grygier & Hartinger 2009) Das bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler Vorgaben zu der Vorgehensweise des Experimentes erhalten, anstatt gänzlich auf sich alleine gestellt zu sein. Dennoch kann in der Kommunikation mit den Schülerinnen und Schülern der Begriff des Experimentes verwendet werden, da dieser den Kindern aus dem Alltag geläufiger als das Laborieren ist. (vgl. Mirwald & Nitsch 2013) Auch in diesem Beitrag sprechen wir im Weiteren vom Experimentieren und orientieren uns jedoch am Begriff des Laborierens.

Dabei ist das ein wesentliches Ziel das gemeinsame Analysieren und Diskutieren der Kinder zum Experiment.

Die Aufgabenstellungen und der Umgang mit den zur Verfügung gestellten Materialien sollten für Kinder verbal und technisch verständlich sein. Auch kreative Vorgehensweisen von Kindern sollten zugelassen und anschließend gemeinsam allen Kindern präsentiert und besprochen werden.

1.1 Zu den Potentialen von Experimenten im Mathematikunterricht

Das Experimentieren im Mathematikunterricht kann sich positiv auf verschiedenste Aspekte auswirken. Neben solchen, welche die Persönlichkeit und das Interesse der Schülerinnen und Schüler betreffen, spricht das Experimentieren auch die Mathematik im fachwissenschaftlichen Sinne an und unterstützt die Durchdringung mathematischer Inhalte. (vgl. Hartinger 2007, S. 70) Positive Aspekte hinsichtlich der Kompetenzentwicklung der Kinder für den Mathematikunterricht der Grundschule ergeben sich u.a. sowohl für fachliche als auch für allgemeine Lernziele.

Neben der Arbeit an inhaltlichen Kompetenzen wie z. B. für das Messen, Schätzen, die Entwicklung von Größenvorstellungen sowie auch für das Rechnen mit Größen können die Kinder beim Experimentieren ihre Fähigkeiten allgemeiner mathematischer Kompetenzen ebenso

weiter entwickeln. So ergibt sich bei jedem Experiment eine Kommunikation zwischen den Kindern zu eigenen Vorgehensweisen (z. B.: zur Nutzung eines passenden Messgerätes oder zur Reihenfolge des Vorgehens, zur Abstimmung hinsichtlich der Übernahme einzelner Teilaufgaben) von selbst. Besonders gefordert werden die Kinder, wenn sie Vermutungen zum Ausgang des Experimentes formulieren und begründen müssen, dann die Vermutungen mit dem tatsächlich eingetretenen Ergebnis vergleichen und vor allem auch Begründungen geben müssen, warum die geäußerte Vermutung zutraf oder nicht zutreffen konnte. Unsere Beobachtungen zu den Experimenten zeigten immer wieder, wie völlig natürlich und motiviert an dieser Stelle Kinder zum Kommunizieren und Argumentieren bereit waren. Schwierigkeiten konnten eher beim Protokollieren der Vermutungen und Ergebnisse beobachtet werden (z. B.: Ist eine Tabelle sinnvoll? Ist der vorgegebene Lückentext hilfreich? Kann ich eine Skizze zu meinen Ideen angeben?) Auch hier sehen wir eine weitere Möglichkeit, geeignete Darstellungen zu finden, zu vergleichen und zu bewerten.

Nicht selten stellt das entsprechende Experiment die Kinder vor einen kognitiven Konflikt (Was kann dabei passieren? Habe ich so etwas schon einmal durchgeführt? Was hat mir dabei geholfen?). Und nur mit abrufbaren heuristischen Strategien kann dieser dann gelöst oder nicht gelöst werden. Eine Möglichkeit, das Problemlösen zu fördern, wird hier deutlich

1.2 Zur Konkretisierung des Experimentierens am ausgewählten Beispiel

Das nachfolgende Beispiel soll das Einbeziehen von Experimenten im Mathematikunterricht der Grundschule verdeutlichen.

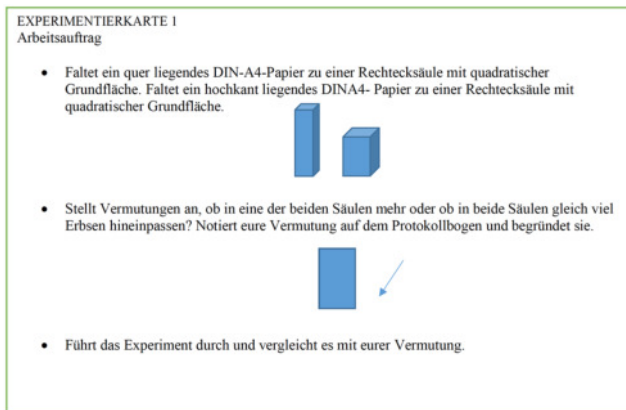


Abb. 1 Experimentierkarte

Das folgende Video zeigt eine Schülergruppe, die das Experiment bearbeitet. Im Verlauf des Videos wird sehr schön deutlich, wie die Kinder herausgefordert und die o. g. Kompetenzen gefördert werden: <https://youtu.be/9DWnnLA2UVg> .

Literatur

Beck, G., & Clausen, C. (2000). Experimentieren im Sachunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, 139, 10–11.

Grassman, M., Eichler, K.-P., Mirwald, E., & Nitsch, B. (2010). Mathematikunterricht. *Kompetent im Unterricht der Grundschule, Band 5*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag.

Engeln, K. (2004). *Schülerlabors: authentische, aktivierende Lernumgebungen als Möglichkeit, Interesse an Naturwissenschaften und Technik zu wecken*. Berlin: Logos.

Gryger, P., & Hartinger, A. (2009). *Gute Aufgaben Sachunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Hartinger, A. (2007). Experimente und Versuche. In D. von Reeken (Hrsg.), *Handbuch Methoden im Sachunterricht* (2. Aufl.) (S. 68–75). Baltmannsweiler: Schneider Verlag.

Mirwald, E., & Nitsch, B. (2013). Experimentelles. Ein interessanter Zugang zum Thema „Größen und Messen“. *Grundschule*, 2, 15–19.

Wiebel, K. H. (2000). „Laborieren“ als Weg zum Experimentieren im Sachunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, 139, 44–47.

Arbeitsgruppe Frühe mathematische Bildung

Koordination: Julia Bruns & Meike Grüßing

julia.bruns@uni-paderborn.de meike.gruessing@uni-vechta.de

Beitrag I: Stephanie Schuler, Nina Sturm, Anja Schuler

stephanie_schuler@uni-landau.de nina.sturm@ph-ludwigsburg.de

anja_schuler@uni-landau.de

Mathematische Aktivitäten von Kindergartenkindern beim Spielen mathematischer Spiele

Spiele mit mathematischem Potenzial können bereits im Kindergarten eingesetzt werden, um mathematische Lerngelegenheiten zum Erwerb des Zahlbegriffs zu initiieren. Welche Rolle dabei die verbale Unterstützung spielt und welche Aktivitäten angeregt werden können, wird in der vorgestellten Studie untersucht. Dazu wurden zwei Unterstützungsmaßnahmen implementiert: Die indirekte Unterstützung, welche sich durch das Bereitstellen von anregendem Material sowie durch die Präsenz der Fachkraft auszeichnet, und die direkte Unterstützung, welche Techniken der Lernbegleitung mit dem Ziel der kognitiven Aktivierung und der adaptiven Förderung fokussiert.

1 Direkte und indirekte Formen der Unterstützung

Grundsätzlich wird davon ausgegangen, dass das frühkindliche Lernen unterstützt werden muss (z.B. Schuler, 2013). In Bezug auf die Form der Unterstützung gibt es jedoch noch kaum empirisch belastbare Befunde. Hauser et al. (2014) konnten in ihrer Studie bereits bei einem weitgehend unbegleiteten Spiel signifikante Lernzuwächse beim Einsatz von Spielen mit mathematischem Potenzial beobachten. Schuler (2013) konnte in ihrer Studie zeigen, dass die auftretenden Lerngelegenheiten jedoch nicht nur vom mathematischen Potenzial des Spiels abhängen, sondern dass sich durch eine direkte Unterstützung das Spektrum der mathematischen Lerngelegenheiten deutlich erweitert. Auch in anderen Studien sind positive Wirkungen des Spielens verknüpft mit der Verbalisierung der Spielzüge oder mit dem engagierten Spielen der Spielleiterin (z.B. Gasteiger et al., 2015). Interessant ist daher, zu untersuchen, welche mathematischen Lerngelegenheiten sich

beim Einsatz von Spielen mit mathematischem Potenzial zu verschiedenen Aspekten des Zahlbegriffs zeigen, wenn die Kinder direkt bzw. indirekt unterstützt werden.

2 Untersuchungsdesign und methodische Überlegungen

Mit Kindergartenkindern wurden verschiedene Spiele in zwei unterschiedlichen Varianten (direkte vs. indirekte Unterstützung) gespielt. Die Spiele wurden so ausgewählt, dass sie in ihren Schwerpunkten auf zentrale Konzepte des Zahlbegriffs fokussieren.

In Spielsituationen mit indirekter Unterstützung führte die Spielleitung die Regeln ein. Fehler wurden nur auf Nachfrage korrigiert und die verbale Kommunikation beschränkte sich auf Anweisungen zum Spielablauf. Auf Fragen der Kinder wurde jedoch eingegangen. In Spielsituationen mit direkter Unterstützung wurden in Anlehnung an Tourner (2017) Impulsfragen entwickelt, die sich auf die verschiedenen Techniken der Lernbegleitung beziehen: Aktivierung von Vorwissen, Einfordern von Beschreibungen und Begründungen, Mitspielen der Spielleiter/in, Modellieren der eigenen Handlungen und Denkprozesse, offene Fragen, Fehler als Lerngelegenheit und diagnostisches Moment (s. Schuler & Sturm, 2019).

Die mathematischen Lerngelegenheiten wurden an den beobachteten mathematischen Aktivitäten der mitspielenden Kinder festgemacht. Die Art und die zeitlichen Anteile der mathematischen Lerngelegenheiten wurden mit MAXQDA ausgewertet. Inferenzstatistisch wurde untersucht, ob sich die zeitlichen Anteile in den beiden Settings unterscheiden (s. Schuler & Sturm, 2019). Die Voraussetzungen für die Durchführung inferenzstatistischer Analysen waren erfüllt.

3 Ergebnisse

Die Ergebnisse werden exemplarisch für eines der eingesetzten Spiele, das Spiel *Einser raus*, berichtet.¹ In beiden Settings traten folgende mathematische Aktivitäten (verbal und nonverbal) auf:

¹ Die Regeln stellen eine Variation des Spiels Elfer raus (Ravensburger) dar.

- Zahldarstellung einer Menge von Spielkarten (MA2)²
- Zahlauffassung einer Menge von Spielkarten (MA3)
- Nachfolger/Vorgänger suchen, erkennen, anlegen und/oder benennen (MA10)
- Zahlzeichen suchen, erkennen und / oder benennen (MA11)
- Zahlwortreihe aufsagen (MA12)

Prozessbezogene Kompetenzen wie Begründungen, warum eine Karte passt bzw. angelegt werden kann, sowie die Korrektur von Fehlern (MA8) konnten nur bei direkter Unterstützung beobachtet werden. In beiden Settings haben die Kinder ihre Spielzüge kommentiert (MA9). Exemplarisch sollen die mathematischen Aktivitäten für beide Gruppen an einem typischen Spielzug verdeutlicht werden:

Bei *indirekter Unterstützung* schaut das Kind, ob es eine passende Karte hat, die es an die bereits ausgelegten Karten anlegen kann und legt die Karte aus (MA10). Beim Auslegen wird teilweise das Zahlzeichen auf der Karte benannt (MA11). Kann es keine Karte legen, muss es eine Karte ziehen. Da eine gezogene Karte sofort ausgelegt werden kann, muss entschieden werden, ob sie angelegt werden kann (MA10, MA11).

Bei *direkter Unterstützung* schaut das Kind ebenfalls, ob es eine passende Karte hat, die es an die bereits ausgelegten Karten anlegen kann und legt die Karte aus (MA10). Beim Auslegen wird nachgefragt, warum es diese Karte legen kann (MA8). In diesem Zug werden Zahlzeichen auf bereits ausgelegten und der gelegten Karte benannt (MA11). Anschließend wird das Kind stets gefragt, ob es noch weitere Karten legen kann (MA10). In diesem Zuge kommentiert das Kind seine Spielzüge: z.B. Ich kann keine Karte mehr legen (MA9). Kann es keine Karte legen, muss eine Karte gezogen werden und es ergeben sich wie bei der indirekten Unterstützung die mathematischen Lerngelegenheiten MA10 und MA 11. Um herauszufinden, ob die Karte passt, wird manchmal die Zahlwortreihe aufgesagt (MA12).

² Da in anderen Spielen weitere Aktivitäten auftraten, ist die Nummerierung für dieses Spiel nicht durchgängig.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Das Spektrum der mathematischen Aktivitäten unterschied sich beim Spiel *Einser raus* deutlich zwischen den beiden Settings. Prozessbezogene mathematische Aktivitäten waren nahezu ausschließlich bei direkter Unterstützung zu beobachten, insbesondere Begründungen (vgl. Schuler, 2013). Es zeigten sich signifikante Unterschiede zwischen direkter und indirekter Unterstützung in den Anteilen verbaler mathematischer Aktivitäten sowie nonverbaler mathematischer Aktivitäten. Insgesamt sprechen die bisherigen Ergebnisse nicht für eine Überlegenheit eines der beiden Settings. Es gibt jedoch Hinweise darauf, dass Spielsituationen mit direkter Unterstützung die Kinder in besonderem Maße zur Verbalisierung ihrer mathematischen Aktivitäten anregen sowie kognitiv herausfordernder sind und sich damit Techniken der Lernbegleitung auch als wirksam im Hinblick auf den Erwerb des Zahlbegriffs erweisen könnten.

Zu klären ist, wie die beiden Settings gestaltet werden können, dass ein Spielen ohne Mitspielen initiiert werden kann. Eine zweite Pilotierung soll aufdecken, ob die Verbalisierung mathematischer Aktivitäten sich tatsächlich auf den Lernerfolg der Kinder auswirkt.

Literatur

Gasteiger, H., Obersteiner, A. & Reiss, C. (2015). Formal and Informal Learning Environments: Using Games to Support Early Numeracy. In J. Torbeyns, E. Lehtinen & J. Elen (Eds.), *Describing and Studying Domain-Specific Serious Games* (S. 231–250). Cham: Springer.

Hauser, B., Vogt, F., Stebler, R. & Rechsteiner, K. (2014). Förderung früher mathematischer Kompetenzen. *Frühe Bildung*, 3(3), 139–145.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs*. Münster: Waxmann.

Schuler, S. & Sturm, N. (2019). Mathematische Aktivitäten von fünf- bis sechsjährigen Kindern beim Spielen mathematischer Spiele. In D. Weltzien, H. Wadepohl, C. Schmude, H. Wedekind & A. Jegodtka (Hrsg.), *Forschung in der Frühpädagogik Band 12: Schwerpunkt: Interaktionen und Settings in der frühen MINT-Bildung*. i.Druck.

Tournier, M. (2016). *Kognitiv anregende Fachkraft-Kind-Interaktionen im Elementarbereich*. Münster: Waxmann.

Beitrag II: Aileen Steffen
aileen.steffen@uni-vechta.de

Wie Kindergartenkinder eine digitale Lernbegleitung für die Bearbeitung von Tangram-Aufgaben nutzen

Das vorgestellte Dissertationsprojekt untersucht Nutzungsweisen verschiedener Funktionen der Osmo Tangram-App, die als potenzielle Lernbegleitung bei der Bearbeitung von Tangram-Aufgaben mit physischen Tangram-Formen agieren. Durch die Wechselwirkung der realen Handlungen mit simultanen, digitalen Lernbegleitungen stellt das Spielsystem eine Besonderheit dar. Neben den Nutzungsweisen werden auch deren Auswirkungen auf die Kompetenz- und Strategieentwicklung bei der Bearbeitung von Aufgaben mit räumlichen Anforderungen untersucht. In der Vorstellung wird auszugswise eine ausgewählte Funktion des digitalen Spielsystems fokussiert.

1 Theoretische Verortung

Lernbegleitungen gelten in der Theorie als essenziell für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten. Dabei kommt der Fachkraft in den Bildungsbereichen die tragende Rolle zu, Spiel- und Lernsituationen adaptiv zu begleiten. Dieses setzt wiederum fachdidaktisches Wissen voraus (vgl. u.a. Schuler 2013; Wullschleger 2017).

In Bezug auf die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens wird einer Lernbegleitung in Form von Rückmeldungen ebenfalls ein hoher Stellenwert beigemessen (vgl. Frostig & und Maslow 1978). Souvignier (2001) sieht ein Feedback, ob eine Aufgabe richtig oder falsch bearbeitet wurde, als wesentliches Merkmal wirksamer Trainingsmaßnahmen, welches zu einer Steigerung von Trainingseffekten führen kann.

Theoretisch bilden sich Potenziale digitaler Medien ab, eine solche Lernbegleitung zu verwirklichen (vgl. Krauthausen 2012). Unmittelbare Rückmeldungen können als potenzielle Chance angesehen werden, jedem Lernenden zum passenden Zeitpunkt im Lernprozess ein Feedback zu geben. Zugleich sind jedoch die Wirkungen einer solchen Funktion zu betrachten, da Rückmeldefunktionen Einfluss auf die Lösungsstrategie der Lernenden nehmen können (vgl. Hügel et al. 2017).

An dieser Stelle setzt die Ausgangsfrage des vorgestellten Forschungsprojektes an, inwieweit eine digitale Lernbegleitung die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens begünstigen und damit auch die pädagogische Arbeit der Fachkräfte unterstützen kann. Hierfür wurde die nachfolgend vorgestellte Osmo Tangram-App ausgewählt.

2 Die Osmo Tangram-App

Die Osmo Tangram-App ist mit einem wechselseitigen Bezug aus Handlungen mit physischen Tangram-Formen und digitalen Rückmeldeprozessen ein außergewöhnliches Spielsystem. Über einen kleinen Spiegel auf der Frontkamera des iPads werden die Handlungen der Kinder erfasst und situative Rückmeldungen geboten. Diese Rückmeldungen reichen von Simulationen der Positionierung einzelner Formen bis hin zu Tipps in Form von farbigen Kennzeichnungen von Formen, bei denen die Umrisse der einzelnen Formen in der Zielfigur nicht zu erkennen sind. Darüber hinaus gibt die App Rückmeldung zu bereits korrekt positionierten Formen, indem diese farbig ausgestaltet werden (siehe Abb.1).

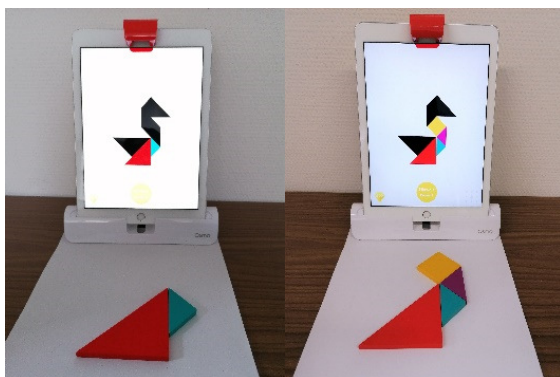


Abb. 1 Feedbackfunktion der Osmo Tangram-App zu bereits korrekt positionierten Formen.

3 Untersuchungsdesign

Für die Datengewinnung wurden in acht Kindergärten im norddeutschen Raum mit ca. 150 Kindern jeweils fünf-wöchige Interventionsstudien durchgeführt. Die Stichprobenzuteilung erfolgte zufällig in drei Gruppen: Zwei Interventionsgruppen und einer Kontrollgruppe.

In einem Pre-Post-Post-Test wurden die Kompetenzen der Kinder im räumlichen Vorstellungsvermögen überprüft. Während die Kontrollgruppe lediglich an den Testungen in den Wochen 1, 3 und 5 teilnahm, erhielten die Interventionsgruppen in den Wochen 2 und 4 Interventionen mit der Osmo Tangram-App und ihrer physischen Entsprechung. Dabei unterscheiden sich die beiden Interventionsgruppen lediglich in der Reihenfolge der Interventionen mit den beiden Medienformen.

	Woche 1	Woche 2	Woche 3	Woche 4	Woche 5
Interventionsgruppe 1	Pretest	Intervention Osmo Tangram-App	Posttest	Intervention physisches Pendant	Posttest
Interventionsgruppe 2		Intervention physisches Pendant		Intervention Osmo Tangram-App	
Kontrollgruppe					

Tab. 1 Design der Studie

Den Kindern wurden bei den Interventionen mit beiden Medienformen Tangram-Aufgaben auf unterschiedlichen Niveaustufen präsentiert, die nach festgelegten Auf- und Abstiegskriterien in Bezug auf die Niveaustufen aus einem Aufgabenleitfaden ausgewählt wurden, um den Kindern Aufgaben auf ihrem Leistungsniveau zuzuordnen und dennoch eine Vergleichbarkeit herstellen zu können. Dieses ermöglicht zugleich eine Gegenüberstellung der Aufgabenbearbeitungen und Strategienutzungen im intra- und interindividuellen Vergleich der Interventionen.

Die gesamte Studie wurde mit Videos aufgezeichnet und wird mit Hilfe eines Kodierleitfadens ausgewertet.

3 Ausgewählte Erkenntnisse

Nachfolgend werden erste Erkenntnisse der unterschiedlichen Nutzungsweisen der Feedbackfunktion, also der Rückmeldung der korrekt positionierten Formen durch die App, dargestellt.

Während die Funktion viele Kinder dazu anregt, ihre Ergebnisse zu überprüfen und inkorrekt positionierte Formen zu identifizieren sowie zu korrigieren, gibt es einige wenige Kinder, die die Funktion nicht

wahrnehmen. Diese Kinder handeln nicht entsprechend der Kennzeichnung und manipulieren teilweise bereits gekennzeichnete Formen erneut oder können inkorrekt positionierte Formen nicht mit Hilfe der digitalen Funktion identifizieren. Darüber hinaus nutzen einige Kinder die Feedbackfunktion gezielt zur Enkodierung einzelner Formen oder ihrer Lageposition, indem sie an einer Position verschiedene Formen testen oder Formen mit dem Blick zum Tablet soweit verschieben, bis die App diese als korrekt kennzeichnet. Es zeichnet sich ab, dass die Kinder, die die Feedbackfunktion nutzen, Aufgaben sicherer und auf einer höheren Niveaustufe bearbeiten.

Literatur

Frostig, M. & Maslow, P. (1978). *Lernprobleme in der Schule*. Stuttgart: Hippokrates-Verlag.

Hügel, C., Pellander, C. & Rezat, S. (2017). Vorsicht Feedback. Beim Arbeiten mit digitalen Schulbüchern bleiben Lehrende unersetzlich. *Mathematik differenziert*, 1, 14–21.

Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs*. Münster: Waxmann.

Souvignier, E. (2001). Training räumlicher Fähigkeiten. In K. J. Klauer (Hrsg.), *Handbuch kognitives Training*. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage (S. 293–319). Göttingen u.a.: Hogrefe Verlag für Psychologie.

Wullschleger, A. (2017). *Individuell-adaptive Lernunterstützung im Kindergarten. Eine Videoanalyse zur spielintegrierten Förderung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen*. Münster: Waxmann.



University
of Bamberg
Press

Dieser Tagungsband dokumentiert die Ergebnisse der Jahrestagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), die in diesem Jahr wieder in Bad Salzdetfurth stattfand. Vom 15. bis 17. November 2019 widmete sich der Arbeitskreis dem Thema „Darstellen und Kommunizieren“.

Mathematische Bildung in der Grundschule ist eine herausfordernde und langfristige Aufgabe für die Unterrichtspraxis und die mathematikdidaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit. Mit Fokus auf prozessbezogene mathematische Kompetenzen wurden die Bereiche „Darstellen und Kommunizieren“ im Rahmen von vier Hauptvorträgen aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet und im Plenum diskutiert. Hierbei standen die Entwicklung und Nutzung dieser prozessbezogenen Kompetenzen der Kinder für den Zugang zur und das Verstehen von Mathematik im Mittelpunkt. Das wurde exemplarisch für die Entwicklung und das Verständnis grundlegender Konzepte in einzelnen Inhaltsbereichen dargestellt. Auf der Grundlage empirischer Befunde haben die Referentinnen und Referenten praktische Ansätze für eine langfristige Förderung im Mathematikunterricht aufgezeigt und zur Diskussion gestellt.

Zusätzlich setzten sich sieben Arbeitsgruppen mit den Themenfeldern ‚Arithmetik‘, ‚Geometrie‘, ‚Sachrechnen‘, ‚Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit‘, ‚Kommunikation und Kooperation‘, ‚Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien‘ sowie ‚Frühe mathematische Bildung‘ intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander. Zentrale Inhalte der Arbeitsgruppen sind in diesem Band ebenfalls dokumentiert.

Die jährlich stattfindende Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM richtet sich seit ihrem Bestehen an Personen, die den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schulischer Praxis sowie den schulverwaltenden Institutionen suchen.

Die Tagung ist von Beginn an in besonderer Weise durch eine offene und kollegiale Kooperation von Vertreterinnen und Vertretern aus Praxis und Theorie geprägt.

ISBN 978-3-86309-689-2



9 783863 096892

www.uni-bamberg.de/ubp

