



## Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt und Uta Häsel-Weide

[birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de](mailto:birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de)

[uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de](mailto:uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de)

Beitrag: Julchen Brieger

[julchen.Brieger@zlb.tu-chemnitz.de](mailto:julchen.Brieger@zlb.tu-chemnitz.de)

### „Denk doch mal an die Un-Realität!“ – Philosophische Diskussionen über Unendlichkeit im Mathematikunterricht der Grundschule"

In einem Design-Based-Research-Ansatz eingebettet wurden philosophische Gespräche in einer Unterrichtsreihe videografiert und transkribiert. Inhaltlicher Fokus der zweiten Stunde war ein fiktiver Streit zwischen Georg Cantor und Gottfried Wilhelm Leibniz, ob man alle Zahlen in einen großen Beutel packen darf. In einer Gruppenarbeit sollen die Kinder sich zu diesem Problem positionieren. Auszüge aus den Gesprächen der Kinder Nadja, Nadine, Berat und Kilian werden im Folgenden präsentiert.

#### 1 Motivation, Design, Sampling

Das Thema Unendlichkeit ist in vielen Inhalten des Mathematikunterrichts implizit enthalten, wird aber nicht explizit in den Curricula aufgeführt (Dötschel, 2011; Schimmöller, 2011). Besonders bei Inhalten, in denen Unendlichkeit implizit inbegriffen ist, treten an den weiterführenden Schulen einige Verständnisprobleme auf (Grenzwerte, Infinitesimalien, Inkommensurabilität, vgl. Davis & Vinner, 1986; Eisenmann, 2002; Williams, 1991). Aus dieser Problematik heraus entstand die Motivation, das Thema explizit im Unterricht mit Kindern zu besprechen. In Vorbereitung auf ein mögliches Propädeutikum<sup>1</sup>, welches (vermutlich) den Verständnisproblemen in der Sekundarstufe II vorbeugen könnte, wurde zunächst exploriert, ob es in der Primarstufe generell möglich ist, philosophisch-mathematische Gespräche über Unendlichkeit zu führen. Hierzu wurden vier Unterrichtsstunden

---

<sup>1</sup> Ein solches Propädeutikum soll Forschungsanlass für weiterführende Arbeiten sein, aber nicht Fokus der Dissertation.

konzipiert, die in zwei Erhebungszyklen an einer Grundschule (3./4. Klasse – über 3 Halbjahre wegen COVID-19) und einer Gesamtschule<sup>2</sup> (5. Klasse) in Sachsen-Anhalt abgehalten wurden. In der hier relevanten zweiten Stunde wird darüber diskutiert, ob die natürlichen Zahlen durch Mengenklammern begrenzt werden dürfen. In Kl. 3 wurde der Begriff der Menge über die Metapher des Beutels<sup>3</sup> eingeführt, in Kl. 5 explizit als Menge von Zahlen. Das Datenmaterial wird mittels Interaktionsanalyse (Krummheuer & Brandt, 2001) im Rahmen der interpretativen Unterrichtsforschung ausgewertet.

## 2 „Denk doch mal an die Un-Realität!“

Im Folgenden wird eine erste Analyse der Gespräche im Rahmen einer Gruppenarbeit zur Frage „*darf man ALLE Zahlen in einen Beutel packen*“ vorgestellt. Die Kinder Nadja, Nadine, Berat und Kilian arbeiten gemeinsam an einer Positionierung. Vor ihnen liegen Bilder von Cantor, Leibniz und einer Heuschrecke.

Im Verlauf des Gespräches nimmt Berat vorrangig Cantors Position ein, was möglicherweise daran liegen kann, dass die Illustration von Cantor auf seinem Platz liegt. Nadine bringt scherzhaft ab und an die Heuschrecke, deren Bild vor ihr liegt, als dritte Option ein. Da die Gruppe in der inhaltlichen Diskussion eher Leibniz' Position verteidigt, schlägt Berat vor, dass auch beide Recht haben könnten. Nadja und Nadine stimmen dem zu, Kilian argumentiert dagegen (beteiligt sich aber im Vergleich eher seltener am Gespräch). Es kommt die Idee auf, mehrere kleine Säcke<sup>4</sup> zu befüllen, die dann in den großen Sack gepackt werden. Nadja wendet ein, dass man dafür Milliarden kleinerer Säcke bräuchte. Die Gruppe fragt den Lehrer um Rat; er beschreibt seine Position, woraufhin die Kinder diese (mit Abstimmung in der Gruppe) annehmen. Nadine bringt Berats Idee, dass auch beide Recht haben könnten, wieder ins Gespräch. Die Kinder überlegen, wie Cantor Recht haben könnte und was für Sachen alle in den großen Beutel

---

<sup>2</sup> Eine 5. Klasse wurde zur Erzeugung kontrastierenden Materials herangezogen – auch, weil in manchen Bundesländern Kl. 5 und 6 noch zur Grundschule zählen.

<sup>3</sup> Rückwirkend betrachtet eine ungünstige Metapher, da die Kinder größtenteils in räumliches Denken verfielen und das Thema schwer abstrahieren konnten.

<sup>4</sup> Bzw. Beutel, die Kinder haben den Begriff umformuliert.

passen könnten. Nadja greift ihre vorherige Idee der Bündelung wieder auf und sagt, man bräuchte mini kleine Säckchen, damit alles in den einen großen Sack passt. An dieser Stelle beginnt die folgende Unterhaltung<sup>5</sup>.

Nadja: *(spricht erst Berat, dann Nadine an)* Man bräuchte mini kleine Zahlen, damit es in einen Beutel passt.

Nadine: *(lachend)* Kopfexplosion

Berat: *Explosion (stellt eine Explosion mit den Händen dar)*

Nadja: *Ahmt lachend eine Explosion ihres Kopfes nach*

Nadja bezieht sich hier auf eine konkrete räumliche Manifestation der Zahlen, nicht auf bspw. extrem kleine reelle Zahlen. Sie meint damit, das Zahlen mit einer kleinen räumlichen Ausdehnung in einen großen Beutel gepackt werden sollen. Die anschließenden „Kopfexplosionen“ und das Lachen von Berat und Nadine lockern das Gespräch in der Gruppe auf, zeigen aber wiederum auch die Motivation der Kinder für das Thema und könnten für eine kognitive Aktivierung stehen.

Nadine: *Wie geht das? Ich kann das nicht richtig zeichnen. (parallel lacht Nadja weiter)*

Kilian: *(parallel zu Nadine)* Trotzdem

Nadja: *Diese Welt spinnt mit mir*

Kilian: *(zu Nadja)* Trotzdem passt das dann nicht, weil es sind unendlich.

Berat: *(parallel zu Kilian)* Ich versteh überhaupt gar nichts.

Nadja: *(zu Kilian)* Kilian, du denkst zu sehr an die Realität. Denk mal an die *(lachend)* Un-Realität.

Nadine möchte den Gedanken zu den kleinen Zahlen von Nadja festhalten, kann aber die Idee nicht bis zur Paraphrase bzw. Verschriftlichung hin verstehen. Nadja möchte ihr helfen, greift aber selbst ihren Gedankengang noch nicht auf einer der Verschriftlichung würdigen

---

<sup>5</sup> Das Transkript wurde zur besseren Lesbarkeit in Orthografie und Grammatik angepasst. Mögliche Änderungen könnten bereits Interpretationen der Verfasserin beinhalten. Paraphrasische Äußerungen sind kursiv gesetzt.

Ebene. Eventuell kann sie die Bedeutung des Unendlichen nicht vollends erfassen. Kilian hat sich lange nicht am Gespräch beteiligt, möchte nun aber seine Bedenken zu Nadjas Vorschlag anbringen und wird dabei von Berat unterbrochen. Hier ist unklar, ob er einen kognitiven Konflikt äußern möchte oder Kilian (der zuvor Leibniz' Standpunkt verteidigt) gezielt unterbricht bzw. Nadjas Aussage angreifen möchte. Kilian kann die Idee der unendlich kleinen räumlichen Ausdehnung nicht greifen, für ihn sind unendlich viele unendlich kleine Zahlen trotzdem räumlich ausgedehnt und können in unendlicher Vielfachheit trotzdem nicht durch ein Gefäß wie den Beutel begrenzt werden. Nadjas Antwort darauf ist beachtenswert: sie fordert ihn direkt auf, zu abstrahieren und von den konkreten Vorstellungen abzusehen. Das Gedankenexperiment hat die Kinder, wie im (kleinen) Transkriptausschnitt gezeigt, zum Denken und Abstrahieren angeregt. Bei der Analyse weiterer Ausschnitte sollen zukünftig Argumentationen sowie inhaltliche Ideen der Kinder eine Rolle spielen.

## Literatur

- Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 5(3), 281–303.
- Dötschel, D. (2011). Zum Verständnis der [sic!] Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Band 45, S. 207–210). WTM-Verlag.
- Eisenmann, P. (2002). Die Vorstellungen der Schüler vom Unendlichen. *Mathematica didactica*, 25(2), 52–64.
- Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion: partizipations-theoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Beltz.
- Schimmöller, T. (2011). Wie verstehen Schülerinnen und Schüler den Begriff der Unendlichkeit? In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik Verstehen* (S. 179–188). Vieweg & Teubner.
- Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 219–236.