Anna Susanne Steinweg

Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern

Epistemologisch-pädagogische Grundlegung



Pädagogik und Zeitgeschehen

LIT

Anna Susanne Steinweg

Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern

Pädagogik und Zeitgeschehen

Erziehungswissenschaftliche Beiträge

herausgegeben von

Prof. Dr. Kurt-Ingo Flessau
(Universität Dortmund)

Band 3

LIT

Anna Susanne Steinweg

Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern

Epistemologisch-pädagogische Grundlegung

LIT

In der vorliegenden Veröffentlichung wurde ein Teil des Anhangs, der u.a. die gesamten Transkripte der Untersuchung enthielt, ausgelassen; er kann jedoch bei der Verfasserin eingesehen werden.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Steinweg, Anna Susanne:

Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern:

Epistemologisch-pädagogische Grundlegung / Anna Susanne Steinweg. –

Münster: LIT, 2001

(Pädagogik und Zeitgeschehen: Erziehungswissenschaftliche Beiträge; 3.)

Zugl.: Dortmund, Univ., Diss., 2000

ISBN 3-8258-5515-5

© LIT VERLAG Münster – Hamburg – London

Grevener Str. 179 48159 Münster Tel. 0251–23 50 91 Fax 0251–23 19 72
e-Mail: lit@lit-verlag.de http://www.lit-verlag.de

Für Martin

Zum Geleit

Kein Zweifel: Mathematik ist der deutschen Schüler Lieblingsfach nicht; Fachwahlstatistiken angehender Abiturienten zeigen es ebenso wie latente oder manifeste Aversionen künftiger Primarstufenlehrer und wie das Lehrer demotivierende „Bloß nicht!" etwa von Grundschülern. Mathematikdidaktiker und -lehrer kämpfen seit langem mit der Ratlosigkeit, die solche Reaktionen und Indizien hervorrufen. Neue didaktische Konzepte werden erwogen, eingeführt und verworfen, neue Methoden sollen einer Schülerschaft, die sich zunehmend der Mühe des Begriffs und des Denkens versagt, „Spaß" machen und Lustgewinn verschaffen. Aus dem Pflichtfach für alle Primaner wurde nach und nach über das Wahlpflichtfach ein Wahl- und bis in jüngste Zeit sogar ein Abwahlfach. Mittlerweile steht der Mathematikunterricht, zumal im Gymnasium, für manche Allgemeindidaktiker und Allgemeinpädagogen nachgerade zur Disposition – wie vor ihm Hebräisch, Griechisch und Latein, Religionslehre und Geschichte oder, ein anderes Paradigma zu nennen, das pädagogische Ziel „Allgemeinbildung".

Was also ist es (oder könnte es sein), was den Schülern von heute die Mathematik so aufschließt und damit so nahe bringt, dass sie in ihr einen Lern- und Arbeitsgegenstand zu sehen beginnen, mit dem sie sich ernsthaft, bemüht und zugleich lustvoll beschäftigen, ja auseinandersetzen mögen? Dabei geht es nicht um die Kreation eines weiteren Spaßfaches, zu dem in den letzten 10, 20 Jahren die Mehrzahl der Unterrichtsfächer, zumal in der Grundschule, mutiert ist. Auch geht es nicht um ein gefälliges Potpourri aus Kniffen, Tricks und Taschenspielereien, die momentan Interesse wecken, Motivation schaffen, aber die Mathematik nicht auf Dauer aus der skizzierten Misere herausführen könnten. Nein, es geht um die Begründung und die Entwicklung einer neuen Haltung von Schülern gegenüber der vielfach so ungeliebten, auch verkannten Mathematik. Das hat mit Psychologie in erster Linie nichts oder allenfalls insofern zu tun, als Haltungen und Einstellungen immer auch affektive und nicht nur kognitive Vorgänge zugrunde liegen und innewohnen.

Neugierverhalten entwickeln, experimentieren lassen, den Schülern eigene Lösungswege ermöglichen, schematisiertes Rechnen vermeiden zu Gunsten diskursiven Ausprobierens und Vermutens – das könnte der neue Weg der Mathematik sein, wenn sie ihn denn von Anfang, d.h. von der Grundschule an ginge, besser: gehen ließe – und wenn sie den Lehrer befreite von seiner traditionellen Rolle des dirigistischen Vorrechners und Methodenvermittlers. Spätestens seit den Zeiten des Berthold Otto und Adolf Reichwein wissen Pädagogen, welcher Lern- und Motivationsgewinn sich

bei Schülern einstellen und wie viel ungezwungener und effizienter Unterricht sein kann: Die Schüler beginnen (auch: eigenständig, ja eigenverantwortlich) zu denken, statt bloß Formuliertes und Formelhaftes wiederzugeben oder anzuwenden, das sie auswendig gelernt haben. So könnte das Fach Mathematik zumindest etwas zurückgewinnen von dem, was es einmal war: über das „Triviale" hinausgehender Grundbestand der Wissenschaften im Allgemeinen, der Naturwissenschaften im Besonderen und – nicht erst heute – einer der Garanten einer von Technik und Wirtschaft dominierten Lebenswelt.

Dazu freilich bedarf es der Lehrer, die ihren Schülern solche Freiheit des forschend-entdeckenden Lernens geben und ihre eigene Aktivität *möglichst* gegen Null konvergieren lassen, wie schon der Reformpädagoge Hugo Gaudig und in den 60er, 70er Jahren die pädagogischen Psychologen A. und R. Tausch gefordert haben.

Aus diesen und anderen Überlegungen haben die Dortmunder Mathematikdidaktiker Gerhard N. Müller und Erich Ch. Wittmann, um nur die beiden in Deutschland, ja Europa führenden zu nennen, die Didaktik „Mathe 2000" begründet, und auf ihr hat Frau Steinweg mit ihrer Dissertation von ursprünglich zwei Bänden, einem Text- wie einem umfangreichen Material- und Quellenband, dies Buch entwickelt – nahezu ein Maximum und ein Optimum dessen, was billigerweise von einer Doktorarbeit zu erwarten ist. Dabei bearbeitet sie nach ihrem Einführungskapitel über „Die veränderte Sicht der Mathematik" neue Wege, entwickelt sie überraschenderweise alte Theorien und Aspekte zu neuen Perspektiven weiter, wenn sie „mathematische Aktivität als Spiel" darstellt und zu sehen lehrt – überraschend insofern, als sich, selbst für die meisten Pädagogen und manche Mathematiklehrer, von Schülern ganz zu schweigen, mit dem Begriff „Mathematik" alles, nur nicht Spiel verbindet – nämlich „reine Wissenschaft", „Ernsthaftigkeit", „Anstrengung", „Mühe", ja „Qual".

Ausgehend von dem, was ich für die Arbeit einen Glücksfall nenne, vom „Zahlenmauerbuch" des sechsjährigen Tim (vgl. S. 58 ff.), und von dem Ansatz neuerer Mathematikdidaktik, Mathematik als „Wissenschaft von Mustern" zu verstehen, wendet sich die Autorin den wichtigsten Spieltheorien seit Schiller („Spieltrieb" als Mitte und Vermittlung zwischen „Formtrieb" und „Stofftrieb") und -metatheorien (Röhrs, Scheuerl) zu. – Wie in dem ersten, die Geschichte der neueren Mathematikdidaktik nachzeichnenden Kapitel besticht Frau Steinwegs Untersuchung einerseits durch die weitgespannte Belesenheit der Autorin, andererseits durch ihr höchst differenziertes Reflexionsvermögen. Nicht nur die Geschichte der Mathematik und die Strömungen der Mathematikdidaktik stehen ihr zu Gebote, nicht nur Pädagogik und Bildungstheorie, auch Philosophie seit der griechischen Antike und Psychologie seit ihren Anfängen im 19. Jahrhundert sind ihr ver-

traut, ja geläufig – und das bis in eine Vielzahl von Verästelungen hinein. Alle diese Aspekte werden methodisch sicher und eigenständig, dazu philologisch exakt und stringent miteinander in Beziehung gesetzt, sorgsam interpretiert und der Thematik dienstbar gemacht – Grundvoraussetzungen für ein anregendes Lesevergnügen. – In diesen beiden ersten Kapiteln liegt m. E. der erste Gipfel der Arbeit. Über Ottos und Leglers unterrichtsbezogene Ästhetiktheorien, die Otto vor allem mit Schillers Spieltheorie zu verknüpfen weiß, gelangt Frau Steinweg, mit Otto, zu der mathematikdidaktischen Maxime: „Denkweisen praktizieren, statt Wissen zu vermitteln." (S. 112)

Dieser Maxime wird – von Tim unbeabsichtigt – sein schon erwähntes „Zahlenmauerbuch" gerecht, und die Autorin nimmt es als signifikantes Beispiel dafür, „dass Mauern für sich und die Muster innerhalb des Buches ästhetisch sind und ästhetisch wirken", weil „die schriftliche Fixierung aller Reihungen innerhalb einer Zahlenmauer den sinnlichen Zugang zu den schönen Mustern zunächst erlaubt und dann unterstützt." (S. 114)

Im dritten und umfangreichsten Teil ihrer Darstellung – „Zum Zahlenmusterverständnis von Kindern" - bietet Frau Steinweg eine „Standortbestimmung" (S. 115 bis 258). Sie ergibt sich aus zwei empirischen Untersuchungen, die einander ergänzen und bestätigen, einem „Paper-Pencil-Test" (vgl. S. 120 bis 167) sowie einer umfassenden Interviewstudie (S. 168 bis 258). Ziel ist es, mittels spezieller Testaufgaben herauszufinden, ob Kinder so etwas wie ein genuines Zahlenmusterverständnis besitzen und wie es sich, möglicherweise, ausdrückt und auswirkt. (Die Nähe zu Piagets Forschungen über das Zahlenverständnis von Kindern ist augenfällig.) Und tatsächlich gelingt der Nachweis, dass „weit über die Hälfte" (S. 256) der jungen Probanden ein solches Zahlenmusterverständnis aufweist, mehr noch, auch imstande ist, es zu artikulieren, ohne dass ihnen ihr Mathematik-Unterricht Verständnis und Begründungsfähigkeit zuvor vermittelt hätte.

Nachdem Frau Steinweg in den ersten beiden Kapiteln ihre historischen Kenntnisse sowie ihre hermeneutischen, d.h. auch: geisteswissenschaftlichen, geistesgeschichtlichen und philosophischen Fähigkeiten unter Beweis gestellt hat, zeigt sie in diesem dritten Kapitel, wie hervorragend sie mit empirischen Verfahren umzugehen weiß – in, versteht sich, enger Verbindung mit dem hermeneutischen Verfahren, ohne das alle Empirie bloße Zahlenhuberei bliebe (vgl. dazu bes. S. 133 bis 164 und S. 173 bis 249).

Von den vielen für mich bemerkenswerten Ergebnissen greife ich zum Schluss einige heraus. Sie zeigen mir, dass (und wie sehr) Frau Steinweg mit ihrer Untersuchung einen beachtenswerten Beitrag zur Veränderung und Verbesserung der Mathematik-Didaktik geleistet hat:

„Wenn die Mathematik in der Grundschule unverfälscht unterrichtet werden soll, muss arithmetischen und geometrischen Mustern schon auf dieser frühen Stufe zentrale Bedeutung eingeräumt werden." (S. 259)
Und weiter:
„Mathematik ist als Wissenschaft von den Mustern naturgemäß abstrakt. Dieser Besonderheit braucht sich der Mathematikunterricht der Grundschule nicht zu entziehen."
Wer Mathematik als Sonderform des Spiels und als eine andere Form des „Lebens mit der Aisthesis" (Hartmut von Hentig) verstehen gelernt und sehen gelehrt hat, braucht diesen abstraktionsreichen Unterricht nicht als dem Kind ungemäße Verfrühung oder Überforderung zu interpretieren. Vielmehr ist er ein auch schon dem kindlichen Geist adäquates Sachgebiet und ein so schöner wie, entwicklungspsychologisch gesehen, guter, vernünftiger und das heißt: vernunftvoller Zugang zu einer allzuoft von Schülern verketzerten Wissenschaft. Frau Steinweg formuliert es so:
„Eine tiefere Analyse zeigte, dass die Auffassung von der Mathematik als Wissenschaft von Mustern in höchstem Maße pädagogisch bedeutsam ist."
Und sie fährt fort:
„Die in Zahlenmusteraufgaben liegenden Entdeckungspotentiale sind sehr hoch und ermöglichen unterschiedliche Zugangsweisen und verschiedene Lösungen."
Endlich dann und alle vielleicht noch vorhandenen Zweifel beseitigend sagt sie:
„Der weit verbreitete Glaube, man könne Kindern die reine Mathematik nicht zumuten, sondern müsse das Fach erst pädagogisch zubereiten, ist unberechtigt." (S. 263)
Ein letztes Fazit zieht Frau Steinweg für die Lehrerbildung, wenn sie erklärt:
„Lehrerinnen und Lehrer der Grundschule diese Einsicht zu vermitteln, wird eine fundamentale *gemeinsame* Aufgabe von Mathematikdidaktik und Pädagogik im 21. Jahrhundert sein." (S. 264)
Und mein letztes Fazit lautet: Mit ihrer Arbeit gelingt es Frau Steinweg, der Mathematikdidaktik wie der Mathematikmethodik neue und zugleich gangbare Wege zu weisen.

Kurt-Ingo Flessau

Vorwort

> But it is easier and simpler to leave it as it is, and then by trick of method to arouse interest, to make it interesting; to cover it with sugar-coating; to conceal its barrenness by intermediate and unrelated material; and finally, as it were, to get the child to swallow and digest the unpalatable morsel while he is enjoying tasting something quite different. But alas for the analogy! Mental assimilation is a matter of consciousness; and if the attention has not been playing upon the actual material, that has not been apprehended, nor worked into faculty.
>
> DEWEY 1974, 30

Mathematik begegnet uns in vielen Situationen als langweilig und trocken. Mathematik hat einen schlechten Ruf, und es ist populär geworden, diesem Fach mit spöttischer Nichtachtung zu begegnen. Mathematik, aus der heutigen Sicht betrachtet, verdient diesen Spott nicht. Wenn Mathematik nicht als fertiges Produkt, sondern als menschliche Aktivität verstanden wird, kann sie in ihrer Schönheit und besonders in ihren Mustern faszinieren.

In der Grundschule wird in der heutigen Zeit verstärkt auf Anwendungen und Projekte und weniger auf 'reine' fachliche Inhalte gesetzt. Eine pure Mathematik der Zahlen, so scheint es, kann den Kindern nicht 'zugemutet' werden. Meiner persönlichen Erfahrung nach sind Grundschulkinder jedoch oft durchaus begeisterte 'Mathematiker'. Die vorliegende Arbeit versucht, eine mögliche Grundlage für die Arbeit mit Zahlenmustern in der Schule aufzuzeigen. Insbesondere war es für mich wichtig, eine moderne Sicht der Mathematik darzulegen. Diese Mathematik ist und wird in der aktiven Auseinandersetzung interessant und benötigt keine 'Verpackungen'. Es war spannend zu erleben, wie Kinder auf Zahlenmusteraufgaben zugehen und ohne Scheu diese Muster bearbeiteten.

Meinen Gutachtern *Herrn Prof. Dr. Kurt-Ingo Flessau* und *Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Erich Christian Wittmann* möchte ich herzlich für ihre intensive Betreuungsarbeit danken. Sie haben in vielen Gesprächen und durch diverse Anmerkungen zu Manuskripten meine Arbeit immer wieder neu angeregt und kritisch-konstruktiv begleitet.

Am Mathematics Education Research Centre der University of Warwick (Coventry, UK) habe ich mit vielen Kolleginnen und Kollegen ein Semester lang intensiv über meine Arbeit diskutieren können. Die enge Zusammenarbeit und der keineswegs selbstverständliche offene Einblick in die eigenen Forschungen war für mich sehr lehrreich und anregend. Insbesondere möchte ich mich bei *Herrn Prof. Dr. David Tall* für seine großzügige Gastfreundlichkeit und die vielen großen und kleinen Gespräche und Diskussionen bedanken. Mein Dank gilt ebenso *Eddie Gray*, der nicht nur in den Doktorandenseminaren immer die richtigen Denkanstöße geben konnte. *Frau Dr. Liz Bills* und *Chris Bills* gilt ein besonders herzlicher Dank für den intensiven Austausch über Probleme der Didaktik in England und Deutschland. Viele Ideen konnte ich auch aus dem internationalen Arbeitskreis der Doktoranden von Warwick mitnehmen. Besonders *Hazel Matthews*, *Katrina Daskalogianni* und *Alkistis Klapsinou* sei herzlich gedankt.

Eine große Hilfe waren mir auch meine deutschen Kollegen, die mir mit Rat und Tat zur Seite standen. Alle Mitglieder des Projekts „mathe 2000", insbesondere *Prof. Dr. Gerhard Müller* und *Prof. Dr. Heinz Steinbring*, begleiteten meine Arbeit stets interessiert. *Katrin Gerdiken* konnte mir durch Rückmeldungen zu ersten Forschungsideen oft weiterhelfen. Ebenso möchte ich mich herzlich bei *Klaus-Ulrich Guder* und *Dr. Ralph Schwarzkopf* bedanken, die nicht nur bei computertechnischen Fragen eine große Hilfe für mich waren.

Alle Teilnehmern des PGG in Paderborn sei herzlich für Anmerkungen zu ersten Ergebnissen der Forschungsstudien gedankt.

Natürlich gilt mein Dank auch den Lehrerinnen und Lehrern, die es mir ermöglicht haben, Kinder aus ihren Klassen zu befragen. Insbesondere danke ich *Barbara Albrecht* und *Bernd Wagner*, die meine Arbeit stets interessiert verfolgt haben. Ebenso gilt mein Dank den vielen beteiligten Kindern, die bereitwillig über ihre Lösungen und Gedanken zu Zahlenmustern in einem Test oder Interview Auskunft gegeben haben.

Nicht zuletzt möchte ich meinem Mann, *Martin Kerstein*, herzlich dafür danken, dass er nicht nur meinen Rücken gestärkt, sondern auch von allen Kleinigkeiten frei gehalten hat. Für das mühevolle Korrekturlesen bin ich ihm und meinem Bruder *Christian Steinweg* sehr dankbar. Ebenso danke ich *Anja Fresen* für manche Hilfe bei der Korrektur der ersten Fassungen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

1 Die veränderte Sicht der Mathematik 8

1.1 Keith Devlin:
Mathematik als Wissenschaft von den Mustern 10

1.2 Philip J. Davis und Reuben Hersh:
Mathematik als Erfahrung 15

1.3 Hans Freudenthal:
Mathematik als Tätigkeit 23

1.4 Gian-Carlo Rota und Helmut Hasse:
Die Phänomenologie mathematischer Schönheit 28

1.5 Eine historische Fallstudie:
Figurierte Zahlen 35

2 Mathematische Aktivität als Spiel 58

2.1 Spiel mit mathematischen Mustern:
Tims „Zahlenmauerbuch“ 60

2.2 Das Spiel als epistemologisch-psychologische
Kategorie 69

2.3 Das Spiel als pädagogische Kategorie 86

2.4 Das Spiel als bildungsphilosophische Kategorie 100

2.5 Das Spiel als ästhetische Kategorie 108

3 Zum Zahlenmusterverständnis von Kindern - eine Standortbestimmung 115

3.1 Paper-Pencil-Test 120
3.1.1 Design des Paper-Pencil-Tests 124
3.2 Ergebnisse des Paper-Pencil-Tests 133
3.2.1 Analyse der Ergebnisse der Typ - A - Aufgaben 135
3.2.2 Analyse der Ergebnisse der Typ - B - Aufgaben 152
3.2.3 Analyse der Ergebnisse der Typ - C - Aufgaben 159
3.2.4 Zusammenfassung des Paper-Pencil-Tests 165
3.3 Interviewstudie 168
3.3.1 Design der Interviewstudie 168
3.4 Ergebnisse der Interviewstudie 173
3.4.1 Analyse der Reaktionen auf Typ - A - Aufgaben 174
3.4.2 Analyse der Reaktionen auf Typ - B - Aufgaben 206
3.4.3 Analyse der Reaktionen auf Typ - C - Aufgaben 228
3.4.4 Zusammenfassung der Interviewstudie 249
3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse beider Studien 255

4 Resümee und Ausblick 259

Literatur 265

Quellen der Abbildungen 277

Anhang 278

Einleitung

> Zum mathematischen Tätigsein gehören sowohl das korrekte Schlußfolgern aus in sich widerspruchsfreien Definitionen und Annahmen wie auch Intuition und Konstruktion (als treibende Kräfte), ebenso 'das Spielen mit Zahlen und Formen' und auf das praktische Anwenden gerichtetes Vorgehen.
>
> COURANT/ROBBINS, Was ist Mathematik? (1992)

Im Jahre 1985 trat in Nordrhein-Westfalen ein neuer Lehrplan für den Mathematikunterricht in der Grundschule in Kraft, dem insofern historische Bedeutung zukommt, als er der erste Lehrplan ist, in dem die von progressiven Mathematikdidaktikern im 20. Jahrhundert (insbesondere Johannes KÜHNEL, vgl. 1925a und 1925b) nachdrücklich vertretene Forderung nach aktiv-entdeckendem Lernen umgesetzt wird:

> *Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts wird in besonderem Maße eine Konzeption gerecht, in der das Mathematiklernen als konstruktiver, entdeckender Prozeß aufgefaßt wird. Der Unterricht muß daher so gestaltet werden, daß die Kinder möglichst viele Gelegenheiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen eines Lernprozesses erhalten:*
> - *von herausfordernden Situationen ausgehen; die Kinder zum Beobachten, Fragen, Vermuten auffordern*
> - *ein Problem oder einen Problemkomplex herausstellen; die Kinder zu eignen Lösungsansätzen ermutigen; Hilfen zum Selbstfinden anbieten*
> - *Ergebnisse mit bisherigem Wissen auf vielfältige Weise in Verbindung bringen, Ergebnisse mehr und mehr so klar und kurz wie möglich darstellen, evtl. gedächtnismäßig verankern; die Kinder zum selbständigen Üben ermuntern*
> - *über den Wert des neuen Wissens und über die Art seiner Aneignung sprechen (Rückbesinnung); dabei die Kinder auffordern, sich neue, verwandte Sachverhalte zu erschließen*
>
> *Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, herausfordernde Anlässe zu finden und anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel und produktive Übungsformen bereitzustellen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller Kinder förderlich ist (herausfordern, aufmerksam machen, ermuntern, ermutigen,*

hinlenken, zu bedenken geben, zum Probieren, Erkunden, Fragen anregen).
Entdeckendes Lernen darf sich nicht auf die Erarbeitung neuer Lernstoffe beschränken. Es soll so weit wie möglich den Unterricht insgesamt bestimmen, die Anordnung der Inhalte ebenso wie die Art und Organisation der Lernaktivitäten und die Kommunikation in der Klasse. Dazu ist es wichtig,
- *mathematische Ideen zu betonen, die für das Leben der Kinder bedeutsam sind,*
- *Begriffe stufenweise und spiralig zu entfalten und Verfahren zunehmend zu systematisieren,*
- *den Handlungscharakter begrifflicher Zusammenhänge durch planmäßiges Variieren, Umstrukturieren und Übertragen hervorzuheben,*
- *Lernen und Verstehen an prägnanten Beispielen aus Situationen ermöglichen, die den Kindern bekannt sind,*
- *Fehler sachlich und für die Kinder motivierend aufzuarbeiten,*
- *ein anregendes und ermutigendes Lernklima zu sichern.*

(KM NRW 1985, 26 f.)

Der Paradigmenwechsel vom belehrenden zum aktiv-entdeckenden Unterricht, der sich hier ausdrückt, steht in enger Verbindung mit Paradigmenwechseln in drei Bezugsdisziplinen der Mathematikdidaktik (vgl. WITTMANN in MÜLLER/WITTMANN 1995, 16 - 17 und in MÜLLER et al. 1997, 15 - 30):

1. In der *Lernpsychologie* hat sich seit den fünfziger Jahren die 'kognitive Wende' von der passivistischen Assoziationspsychologie zur aktivistischen Kognitionspsychologie vollzogen (vgl. z.B. PIAGET 1972, BRUNER 1973).
2. In den *Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften* werden seit den siebziger Jahren zunehmend 'mechanistisch-technomorphe' durch 'systemisch-evolutionäre' Denkmuster abgelöst (vgl. MALIK 1996, BUNK 1996).
3. In der *wissenschaftstheoretischen Diskussion über Mathematik* wird seit den sechziger Jahren zunehmend der Erkenntnis*prozess* bei der Erforschung von Mustern gegenüber der formalen Darstellung fertiger Strukturen als wesentliches Charakteristikum der Wissenschaft Mathematik herausgestellt (FREUDENTHAL 1973, DAVIS/HERSH 1996, DEVLIN 1997).

Die historische Bedeutung des Lehrplans wird dadurch unterstrichen, dass diese neue Sicht der Mathematik nicht nur im Abschnitt 'Unterrichtsgrund-

sätze' hervortritt, sondern auch die anderen Abschnitte des Lehrplans über Ziele und Inhalte durchzieht:

> *Der Mathematikunterricht leistet darüber hinaus einen fachspezifischen Beitrag zur allgemeinen Denkentwicklung, indem er viele Möglichkeiten eröffnet, die Kinder in den folgenden grundlegenden Fähigkeiten zu fördern: Die Kinder sollen lernen,*
> - *kreativ zu sein: nach Gesetzmäßigkeiten und Mustern Ausschau halten, Vermutungen äußern, selbständig Lösungswege suchen (...), ...*
> - *zu argumentieren: Aussagen begründen, Behauptungen überprüfen, Begründungen verlangen (...), ...*
> - *zu mathematisieren: Daten aus der Umwelt gewinnen (...), ...*
>
> (KM NRW 1985, 21)

Inhaltlich sollen die Kinder z.B. im Bereich der Arithmetik Gesetzmäßigkeiten und Muster durch folgende Ziele aktiv entdecken:

> - *Zusammenhänge verschiedener Zahlsätze (...) erkennen*
> - *Rechenstrategien als Ausnutzen von Rechengesetzen kennen und nutzen lernen*
>
> *(...)*
> - *Zahlen durch Erarbeitung von Zahleigenschaften (z.B. gerade, ungerade, durch 3 teilbar, Primzahl) und Beziehungen zwischen Zahlen (z.B. kleiner als, teilbar durch, das Doppelte von) genauer kennenlernen.*
>
> (KM NRW 1985, 23 f.)

Von zentraler Bedeutung ist insbesondere der explizite Bezug auf die Doppelnatur der Mathematik als 'reine' und als 'angewandte' Mathematik im dritten Abschnitt, in dem beschrieben wird, dass sich der Unterricht in gleichem Maße auf die interne Struktur der Mathematik wie auf die Anwendungen ausrichten muss („Struktur - und Anwendungsorientierung"):

> *Einerseits wird das vorhandene Alltagswissen zur Darstellung mathematischer Ideen verwandt, andererseits wird neues Wissen über die Wirklichkeit durch Mathematisierung entwickelt.* [Der Mathematikunterricht muss ebenso] *das Regelhafte, Gesetzmäßige, Formelhafte sichtbar machen, das einer Erscheinung Ordnung und Organisiertheit aufprägt. In dieser Sicht besteht das Lernen von Mathematik zu einem wesentlichen Teil im Aufdecken und Beschreiben von Strukturen.* (KM NRW 1985, 25)

Insgesamt lässt sich feststellen, dass der Grundschullehrplan Mathematik des Landes Nordrhein-Westfalen in ein umfassendes, stufenübergreifendes

didaktisches Konzept von Mathematiklernen eingebettet ist, in dem mathematische, psychologische, pädagogische und unterrichtspraktische Aspekte integriert sind. Heinrich WINTER, dem die Federführung bei der Erstellung des Lehrplans oblag, hat dieses Konzept in geschlossener Form dargestellt und durch zahlreiche konstruktive Beiträge für alle Stufen konkretisiert (WINTER 1991).

Ein umfassendes Verständnis und eine adäquate Umsetzung dieses Lehrplans und der anderen unter seinem Einfluss inzwischen erstellten Grundschullehrpläne sind natürlich nur möglich, wenn alle Aspekte voll in Betracht gezogen werden. Genau hier liegt aber eine grundsätzliche Schwierigkeit: Die deutsche Grundschule ist traditionell auf die Pädagogik und Psychologie hin orientiert und steht zu den Fächern in einer gewissen kritischen Distanz (vgl. GIESECKE 1998, GRUNDSCHULVERBAND 1999a und 1999b). Für das Fach Mathematik ist die Situation noch problematischer. Bei vielen Lehrerinnen und Lehrern gibt es grundsätzliche Vorbehalte gegenüber dem Fach Mathematik, wie neueste Studien bestätigen. GELLERT (1998, 132 ff.), der diese Problematik systematisch untersucht hat, konnte bei Lehramtsstudierenden nicht nur eine reservierte Einstellung, sondern sogar ausgeprägte Aversionen gegenüber der Mathematik feststellen. Die Erlebnisberichte der Studierenden deuten auf eine äußerst problematische Wirkung des gymnasialen Mathematikunterrichts hin (vgl. GELLERT 1998, 135). Die überwiegende Zahl der Studierenden hat die Mathematik rein rezeptiv und lebensfern erlebt und sich ihr wie einer 'Hoheitsmacht' ausgeliefert gefühlt. Anknüpfungspunkte für einen sinnvollen Mathematikunterricht sehen die Studierenden nur in einem Unterricht, der sich von der 'reinen Mathematik' distanziert und sich stattdessen an der 'Welt und Realität der Kinder' orientiert. Damit ist vielen Studierenden der Zugang zu einer positiven Sicht der strukturorientierten, in ihrer Abstraktion als sinnlos empfundenen Mathematik verschlossen (vgl. GELLERT 1998, 162 ff.). Als einziger Weg, die Mathematik für die Kinder anders als durch Lebensbezüge erträglich zu machen, wird die 'spielerisch-spaßige Verpackung' der Mathematik angesehen (vgl. GELLERT 1998, 178 ff.).

Es ist klar, dass Grundschullehrerinnen und -lehrer mit einer solchen Einstellung zur Mathematik die neuen Vorstellungen zum Mathematiklernen nicht konstruktiv umsetzen können.

Angesichts dieser Situation kann es nicht genügen, einfach auf die in den Lehrplänen beschriebenen neuen Ansätze aufmerksam zu machen.

Vielmehr ist es dringend erforderlich, das Verhältnis der Lehrerinnen und Lehrer zum Fach und zum Kind aus einer grundsätzlichen, pädagogischen Perspektive zu reflektieren und zu bereinigen.

Bei diesem Problem braucht man keineswegs beim Punkt Null zu beginnen. Kein Geringerer als John DEWEY (1859-1952) (vgl. DEWEY in BOYDSTON 1985, DEWEY 1974 und vgl. auch WITTMANN 1983a und 1996) erkannte schon zu einem frühen Zeitpunkt, dass die Pole 'Kind' und 'Fach', die nicht nur bezüglich der Mathematik als Gegenpole empfunden werden, keineswegs entgegengesetzt sind, sondern sich bei näherer Betrachtung als komplementär erweisen.

DEWEY identifiziert in seiner Analyse drei typische didaktische Fehlentwicklungen, die das Missverhältnis von Kind und Fach verursachen:

1. Der Stoff wird formalistisch dargestellt; daher finden die Erfahrungen des Kindes keine Anknüpfungspunkte.
2. Der Stoff wird von außen an das Kind herangetragen und kann daher kein echtes Interesse wecken.
3. Die methodisch-didaktische Aufbereitung zerstört die innere Logik des Faches und behindert damit das Verständnis (vgl. DEWEY 1974).

Der Schlüssel zur Herstellung einer *produktiven Beziehung* zwischen 'Kind' und 'Fach' liegt nach DEWEY darin, dass ein genetischer Standpunkt eingenommen wird: Die Entwicklungsfähigkeit des Kindes muss mit der Entwickelbarkeit des Faches zum Ausgleich gebracht werden (vgl. WITTMANN 1996a).

> *Hence, the facts and truth that enter into the child´s present experience, and those contained in the subject-matter of studies, are the initial and final terms of one reality. To oppose one to the other is to oppose the infancy and maturity of the same growing life; it is to set the moving tendency and the final result of the same process over against each other; it is to hold that the nature and the destiny of the child war with each other.* (DEWEY 1974, 12, Hervorh. A.S.S.)

Der eingangs genannte Paradigmenwechsel in der wissenschaftstheoretischen Sicht von Mathematik eröffnet heute eine realistische Perspektive, um den von DEWEY geforderten Ausgleich herbeizuführen:

Mathematik wird heute als die Wissenschaft von (begrifflichen) Mustern gesehen (vgl. FEYNMAN 1995, DEVLIN 1997). Der Zugang zu Mustern ist

aber weder im Erkenntnis- noch im Lernprozess durch schlichte Kontemplation möglich. Muster müssen interaktiv erschlossen und produktiv entwickelt werden. Wie DEWEY schon Anfang des Jahrhunderts in grundsätzlichen Analysen herausgearbeitet hat, ist die Entwicklung des Denkens untrennbar an Handlungen, Erfahrungen und die Reflexion der Handlungsfolgen geknüpft:

> *Indem wir die Rolle zu bestimmen suchten, die das Denken in der Erfahrung spielt, bemerkten wir zunächst, daß der Begriff der Erfahrung eine Beziehung einschließt zwischen einem Handeln und Probieren mit einem „Erleiden", das die Folge davon ist. Die Abtrennung der aktiven Phase des T u n s von der passiven des E r l e i d e n s zerstört die Bedeutung einer Erfahrung für das Leben. Denken bedeutet die planmäßige und sorgfältige Herstellung von Beziehungen zwischen Handlungen und ihren Folgen. Es begnügt sich nicht mit der Feststellung, daß solche Beziehungen vorhanden sind, sondern versucht alle Einzelheiten dieser Beziehungen zu erfassen.* (DEWEY 1993, 202, Hervorh. i. O.)

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, in dieser Richtung einen Beitrag zu leisten: Im zentralen *Kapitel 2* wird nachgewiesen, dass die interaktive Begegnung von Kindern mit mathematischen Mustern als 'Spiel' im besten *pädagogischen* Sinn der Bildungstheorie und der Ästhetik aufgefasst werden kann. Der neue Ansatz des Lehrens und Lernens, wie er eingangs beschrieben wurde, wird damit *pädagogisch* begründet.

Zum besseren Verständnis dieses Kapitels wird die neue Sicht der *Mathematik* als Untersuchung und Hervorbringung von Mustern zunächst in *Kapitel 1* dargestellt. Es wird dabei gezeigt, dass sich der prozesshafte Zugang zu Mustern schon in der frühen Geschichte der Mathematik nachweisen lässt und im Mathematikunterricht von Anfang an zur Geltung kommen kann.

Die Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern im Unterricht braucht nicht beim Nullpunkt zu beginnen. In *Kapitel 3* werden anhand eines Tests und einer Interviewstudie die *psychologischen* Voraussetzungen von Kindern für eine aktive Auseinandersetzung mit Zahlenmustern untersucht.

Die Ergebnisse zeigen, dass Kinder intuitive Vorstellungen von Zahlenmustern in die Schule mitbringen und im normalen Rechenunterricht mehr oder weniger stark weiter entwickeln. Es zeigt sich allerdings auch, dass sich ein

Verständnis für mathematische Muster durch den alltäglichen Mathematikunterricht, das Lernen im Alltag oder durch Reifungsprozesse nicht von selbst entwickelt. Zahlenmuster gehören offensichtlich zu den 'nicht privilegierten' Unterrichtsinhalten (vgl. STERN 1998). Die Muster als Beziehungsgefüge von Zahlen beruhen auf theoretischen, abstrakten Begriffen, die keine Eigenschaften von Dingen bezeichnen, sondern wiederum nur Beziehungen reflektieren (vgl. STEINBRING 1997). Für Lehrerinnen und Lehrer stellt sich die Aufgabe, den Kindern die Möglichkeit zu geben, eine Bewusstheit für Muster zu entwickeln.

Leserinnen und Leser, die sich einen Überblick über die Arbeit verschaffen wollen, seien auf das abschließende *Kapitel 4* verwiesen, das eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und einen Ausblick bringt.

1 Die veränderte Sicht der Mathematik

> Die Mathematik ist eine menschliche Tätigkeit, und die formallogische Beschreibung ist nur eine Fiktion; die eigentliche Mathematik manifestiert sich in der praktischen Arbeit der Mathematiker.
>
> DAVIS/HERSH (1996, 320)

Im vorliegenden Kapitel wird der Paradigmenwechsel von einer Sicht der Mathematik als Wissenschaft formaler Systeme zu einer Sicht als Wissenschaft von (interaktiv zu erschließenden) Mustern anhand von vier repräsentativen Veröffentlichungen namhafter Mathematiker so weit referiert, wie es für diese Arbeit notwendig ist. Die jeweiligen Akzente dieser Publikationen ergänzen sich dabei zu einem geschlossenen Bild:

Keith DEVLINS Buch „Mathematics: The Science of Patterns" (1997) stellt die veränderte Sichtweise von Mathematik dar, die sich an *Lösungsfindungsprozessen* und nicht nur an Produkten orientiert.

In „Mathematik als Erfahrung" (DAVIS/HERSH 1996) und „What is Mathematics, Really?" (HERSH 1997) deuten Philip J. DAVIS und Reuben HERSH Mathematik als *menschliche Tätigkeit* und *sozialen Erfahrungsbereich*.

Hans FREUDENTHAL (1973) arbeitet in „Mathematik als pädagogische Aufgabe" die *Bedeutung* der mathematischen Tätigkeit für das *Lernen* heraus.

Der besondere Reiz mathematischer Tätigkeit liegt in ihrer 'Schönheit'. In seinen „Indiscrete Thoughts" beschreibt Gian-Carlo ROTA (1996) die Phänomenologie *mathematischer Schönheit*. Vertieft wird diese Darstellung durch Helmut HASSES (1952) Ausführungen zur Verbindung von Kunst und Mathematik.

Ergänzend zu diesen Ausführungen zeitgenössischer Mathematiker wird in einem fünften Abschnitt aufgezeigt, dass das heutige Mathematik-Bild tief in der *Geschichte* verwurzelt ist. Am Fallbeispiel der figurierten Zahlen, die im heutigen, aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht der Grundschule eine neue Aktualität erhalten und auch in die im Kapitel 3 diskutierten Tests und Interviews eingegangen sind, wird die interaktive Erzeugung und Begründung von Mustern in der mathematischen Praxis aufgezeigt.

1.1 Keith Devlin: Mathematik als Wissenschaft von den Mustern

DEVLIN zeichnet in seinem Buch den historischen Weg zu einer Auffassung der Mathematik als Wissenschaft von den Mustern nach. Er beschreibt, wie sich die Gebiete und Problemfelder der Mathematik zunehmend ausdifferenziert haben: In den Anfängen der Mathematik waren besonders die Zahlen von Interesse. Die Griechen (500 v. Chr. - 300 n. Chr.) erweiterten den Blickwinkel um die Geometrie. Später (Mitte des 17. Jh.) traten die mathematische Erfassung von Bewegungen und Veränderungen sowie das Studium allgemeinerer Strukturen ('Räume') hinzu.

Diese Erweiterungen waren nach DEVLIN jedoch nicht nur kumulativer Art, sondern gingen mit einer jeweils veränderten Sicht des Faches einher. In den Anfängen der Mathematik schien noch ein gewisser Utilitarismus[1] zu herrschen, der sich in der Rezeptartigkeit der frühen mathematischen Schriften ausdrückte. Die Griechen erhoben die Mathematik zu einer theoretischen Wissenschaft. Neben rein pragmatischen spielten bei ihnen auch ästhetische und religiöse Motive eine wichtige Rolle.

Eine weitere große Wandlung macht DEVLIN im siebzehnten Jahrhundert aus. Durch die Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ bewegte sich die Mathematik von den 'statischen' Themen („static issues" DEVLIN 1997, 2), nämlich Zahlentheorie und Geometrie, hin zur Untersuchung von Funktionen, mit denen Bewegungen und Veränderungen mathematisch gegeben werden können. Die Erfolge der Differential- und

---

[1] Die Mathematik beschäftigte sich hauptsächlich mit praktischen Dingen, wie Bauwerken, Landvermessungen nach den Nilüberflutungen oder ökonomischen Interessen der Getreidewirtschaft. Aus heutiger Sicht würde diese Mathematik als stark anwendungsorientiert bewertet werden. KLINE (1972, 22) beschreibt, „Apart from a few incidental results in Babylonia, mathematics in the two civilizations [Egypt and Babylonia] was not a distinct discipline, nor was it pursued for its own sake. It was a tool in the form of disconnected, simple rules which answered questions arising in the daily life of the people". Noch härter formuliert er sein Urteil im Vergleich zu den Griechen, wenn er sagt, „By this standard the Egyptians and the Babylonians were crude carpenters, whereas the Greeks were magnificent architects" (KLINE 1972, 23). Die Griechen und vornehmlich die PYTHAGOREER sahen, dass die Mathematik direkt auf den Geist wirkt und „die Mathesis, das Denken, die Logik selbst" darstellt (BALTZER 1983, 131).

Integralrechnung beruhen auf einem Höchstmaß an Formalismus, der in den Anfängen der Mathematik noch unbekannt war.

Die Vorteile der abstrakten Notation liegen auf der Hand. Die Abstraktion erlaubt es, mit Konzepten anstatt mit realen Objekten oder ihren Repräsentanten zu arbeiten. DEVLIN gibt aber zu bedenken:

> *But for all that mathematics books tend to be awash with symbols, mathematical notation no more is mathematics than musical notation is music. (...) It is in its performance that the music comes alive and becomes part of our experience; the music exists not on the printed page but in our minds. The same is true for mathematics.* (DEVLIN 1997, 3 f.)

Durch die Abstraktion wird die fertige Mathematik für einen Großteil der Menschen nicht mehr erfahrbar. Erfahrbar bleibt hingegen der ästhetische Reiz der Muster in den Anfängen der mathematischen Tätigkeit. Bereits elementare Muster können durch ihre Schönheit bestechen. Die Schönheit ist in der Mathematik ein überragendes Kriterium, auch, wenn es schwierig ist, 'Schönheit' zu definieren, wie schon HARDY klar erkannt hat:

> *The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful, the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test; there is no permanent place in the world for ugly mathematics ... It may be very hard to define mathematical beauty, but that is just as true of beauty of any kind - we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it.* (in DEVLIN 1997, 6)

DEVLIN stellt in seinem Buch mathematische Muster aus sechs Themenkomplexen genauer dar. Er möchte damit einerseits das moderne Bild der Mathematik verdeutlichen und andererseits einen kurzen Überblick über die geschichtliche Entwicklung geben. Der Themenkomplex zu Zahlenmustern (Numbers) ist für diese Arbeit von besonderem Interesse und wird nun näher betrachtet. Ergänzend möchte ich auf einige Aspekte des Kapitels über Begründen (Reasoning and Communication) eingehen.

Zahlen, so betont DEVLIN, sind nur als theoretisches Konzept zu verstehen. Schon der Gebrauch von Zahlen als Anzahlen der Menge von Objekten ist theoretischer Natur.

Der geschichtliche Überblick, den DEVLIN über die Entwicklung der Zahlen bis hin zur Ausbildung von Zahlentheorie gibt, zeigt, dass das Rechnen allein noch nicht die Theorie ausmacht. Erst die bewusste Auseinandersetzung mit Zahlenmustern und Zahleigenschaften führt weiter. DEVLIN illustriert diesen Gedanken am Beispiel des Kommutativgesetzes für natürliche Zahlen. Während die Babylonier und Ägypter dieses Gesetz zwar nutzten und für spezielle Fälle auch notierten, gelang es erst zur Zeit der Griechen, die Kommutativität als Gesetz zu formulieren. Den Griechen weist DEVLIN ebenso das Verdienst zu, eine Bewusstheit für die Notwendigkeit und den Charakter mathematischer Beweise entwickelt zu haben.

In der Darstellung eines Einblicks in die Ideen GAUSS' und FERMATS gelingt es DEVLIN, die Idee der Muster in der Mathematik lebendig werden zu lassen. Besonders bei der Beschreibung der Beweisversuche des letzten Theorems von Fermat, die schließlich zu einem Beweis durch Andrew WILES (vgl. WILES 1995, TAYLOR/WILES 1995, SINGH 1997) geführt haben, wird deutlich, dass mathematische Muster über Jahrhunderte hinweg immer wieder fasziniert und Lösungen ungelöster Probleme inspiriert haben.

Die dynamische Kraft der Muster, die zum Hinterfragen und Erklären antreibt, verdeutlicht DEVLIN auch in einem Exkurs zur vollständigen Induktion. Als Beispiel wählt er den Satz, dass die Summation der ungeraden, natürlichen Zahlen immer eine Quadratzahl ergibt. Die dabei eingesetzten elementaren Muster überzeugen einerseits durch die Schlichtheit, den einfachen Zugang, andererseits durch ihre Leistungsfähigkeit.

DEVLIN bezieht im Weiteren einen klaren Standpunkt zu mathematischen Beweisen, die nicht notwendig formal sein müssen, um stichhaltig zu sein:

> *The choice of language, whether symbolic, verbal, or even pictorial, might affect the length of the proof, or the ease with which you can understand it, but it does not affect whether the argument does or does not constitute a proof.* (DEVLIN 1997, 37-38)

Die Beispiele des Buches verdeutlichen in ihrer Gesamtheit, dass die Kraft der Mathematik wesentlich in ihren Mustern, Symmetrien und regelhaften Operationen zu suchen ist. Die Beispiele zeigen, dass diese Muster nicht statischer, sondern dynamischer Natur sind. Es hat zwar den Anschein, als ob DEVLIN die verschiedenen Themen aufbauend darstellte. Er macht aber deutlich, dass es sich dabei um keine reine Vorwärtsbewegung handelt und illustriert dies am Entwicklungsprozess der Zahlentheorie, der sich von den natürlichen Zahlen bis zu den komplexen Zahlen (CAUCHY und RIEMANN) erstreckte und schließlich im Rückblick neue Aufschlüsse über die natürlichen Zahlen liefern konnte:

> *Mathematics had come full circle.* (DEVLIN 1997, 103)

Mathematik als Wissenschaft von den Mustern bedeutet nicht, dass nur innerhalb der Disziplin nach Mustern gesucht wird. Die Suche nach Mustern erstreckt sich – so DEVLIN – auch auf die Welt der Physik, der Biologie oder der Börsenkurse:

> *As the science of patterns, a lot of mathematical activity is concerned with finding new patterns in the world, analyzing those patterns, formulating axioms to describe them and facilitate further study, looking for the appearance in a new domain of patterns observed somewhere else, and applying mathematical theories and results to phenomena in everyday world.* (DEVLIN 1997, 52)

Neben den oben erwähnten, mathematischen Mustern lassen sich Muster in verschiedenen Lebensbereichen wiederfinden.[2] DEVLIN erinnert an die Muster der Gedanken, der Kommunikation, der Gesellschaft und des Lebens selbst (DEVLIN 1997, 7), und er gibt immer wieder Einblicke in die Zusammenhänge zwischen mathematischen Mustern und realen Mustern (z.B. Schneeflocken, der Geometrie der Erdkugel oder einfachen Tapetenmustern; vgl. DEVLIN 1997, 146, 126 und 164). Die mathematischen

---

[2] In allen Lebensbereichen fühlen sich Menschen durch Strukturen und Muster angezogen. „In all walks of life, it seems we are attracted to regularity, and often try to interpret situations by looking for, or even imposing, pattern" (ORTON 1999, vii). Diese scheinbar urmenschliche Attraktion verbindet die Mathematik der Muster mit anderen Bereichen, wie der Gestaltung und der Kunst. Und tatsächlich lassen sich viele Analogien zwischen diesen Fächern aufzeigen (vgl. Kap 2).

Muster sind dabei nicht immer nur ein Reflex auf reale Muster, sondern können jenen vorangehen. DEVLIN berichtet z.B. von dem englischen Mathematiker Roger PENROSE, der mathematische Muster der Fünfeckssymmetrie von Parkettierungen erkannte, noch bevor die sogenannten Quasikristalle entdeckt wurden, zu denen die Parkettierung von PENROSE exakt passt.

1.2 Philip J. Davis und Reuben Hersh: Mathematik als Erfahrung

DAVIS und HERSH betonen in ihrem einflussreichen Buch „Mathematik als Erfahrung" (1996) die Bedeutung der Aktivität in der Auseinandersetzung mit der Mathematik. HERSH führt dies in seinem Buch „What is Mathematics, Really?" (1997) weiter aus.

Im Rahmen meiner Arbeit interessieren vor allem die Antworten, die DAVIS und HERSH auf folgende Fragen geben:

- Was ist der Ursprung und das Wesen der Mathematik?
- Wie stellt sich die Mathematik von außen und von innen dar?
- Wie ist das Lehren und das Lernen von Mathematik zu interpretieren?

Auf diese Fragen wird im Folgenden der Reihe nach eingegangen.

Die Natur der Mathematik

HERSH beantwortet die Frage nach dem Wesen der Mathematik in vier Punkten:

1. *Mathematics is human. It's part of and fits into human culture.*
2. *Mathematical knowledge isn't infallible. Like science, mathematics can advance by making mistakes, correcting and recorrecting them (...).*
3. *There are different versions of proof and rigor, depending on time, place, and other things. The use of computers in proof is a nontraditional rigor. Empirical evidence, numerical experimentation, probabilistic proof all help us decide what to believe in mathematics. Aristotelian logic isn't always the only way to decide.*
4. *Mathematical objects are a distinct variety of social-historic objects. They're a special part of culture. Literature, relogion, and banking are also special parts of culture. Each is radically different from others.* (HERSH 1997, 22)

ad 1. HERSH bezeichnet die Mathematik als 'menschlich', weil sie sozial bzw. gesellschaftlich bedingt ist. Bei einer Unterscheidung physischer und mentaler Objekte stellt er fest, dass die Mathematik weder dem einen noch dem andern Bereich vollständig zuzuordnen ist, und verweist zum Vergleich auf den Supreme Court der Vereinigten Staaten, der ebenfalls weder physisch an das Gebäude, in dem er tagt, noch an die Mitglieder, die wechseln, gebunden ist. Das Rechtswesen ist ebenso wie die Mathematik eine soziale Institution (vgl. HERSH 1997, 14). Dies führt HERSH zur Einschätzung der Mathematik als eines geschichtlich gewachsenen Kulturbereichs der jeweiligen Gesellschaft (vgl. HERSH 1997, 248).

HERSH konstatiert, dass Mathematik als sozial-historische Realität existiert und dass daher hinter ihr keine tiefere Bedeutung gesucht zu werden braucht (vgl. HERSH 1997, 23).

ad 2. Die Erkenntnisse der Mathematik sind nach HERSH nicht unfehlbar. Die Vorstellung, sie seien unfehlbar, leitet sich davon ab, dass es 'richtige' Antworten in der Mathematik gibt, die nicht durch eine Autorität - wie einen Lehrer - bestätigt werden müssen, sondern die aus sich heraus konsistent sind:

> *That's what's special about math. T h e r e a r e r i g h t a n s w e r s. Not right because that's what Teacher wants us to believe. Right because t h e y a r e right.* (HERSH 1997, 11, Hervorh. i. O.)

Die Richtigkeit mathematischer Resultate kann aber überinterpretiert werden und so den Eindruck erwecken, es könne *nur* eindeutig bestimmte richtige Antworten geben. HERSH wehrt sich nicht gegen jede Art von Regeln. Er nennt gewisse Prinzipien, denen auch in seiner Sicht der Mathematik gefolgt werden soll: Verständlichkeit, Übereinstimmung mit der Erfahrung, Vereinbarkeit mit der Wissenschaftsphilosophie und der allgemeinen Philosophie (vgl. HERSH 1997, 249). Aber, so gibt er zu bedenken, aus der Einhaltung von Regeln und Prinzipien lässt sich nicht die Unfehlbarkeit des Vorgehens ablesen. Er untermauert die neue Sicht des Faches, die die Wege und Umwege des Entdeckens, des Erkundens und der Beweisführung deutlich macht, durch Verweis auf das Buch „Beweise und Widerlegungen" von Imre LAKATOS (1979). Diesem Autor folgen DAVIS und HERSH auch in ihrem Kapitel 7 'Von der Gewißheit zur Fehlbarkeit' ihres Buches „Mathematik als Erfahrung" (DAVIS/HERSH 1996, 333 ff.). In der frühen Geschichte der Mathematik stand nach DAVIS/HERSH die Suche nach der

Wahrheit im Vordergrund des Tuns. Die Mathematik gab verlässliche Angaben und Gewissheit. Mathematischen Objekten wurde eine Existenz im platonischen Ideenreich zugeschrieben. Diese noch heute vielfach geteilte Sicht der Mathematik wird von DAVIS/HERSH dem sog. 'Eukild-Mythos' zugeschrieben (vgl. 1996, 339 ff.). Spätestens jedoch seit der Philosophie POPPERS (vgl. DAVIS/HERSH 1996, 363 ff.) hat sich die Einstellung gegenüber mathematischen Beweisen verändert. LAKATOS (1979) übertrug POPPERS Idee, Theorien seien niemals endgültig bewiesen, sondern könnten sich höchstens immer besser bewähren und seien prinzipiell der Falsifikation ausgesetzt, von der Naturwissenschaft auf die Mathematik. Er öffnete den Blick dafür, dass Beweise stets Widerlegungsversuchen standhalten, modifiziert, verworfen oder formal neu gefasst werden müssen. Das Beweisen nach LAKATOS folgt keinem stringenten 'Rezept' und kann auch nicht zu einer unumstößlichen Wahrheit führen. Der Beweis ist weniger als Endprodukt einer Untersuchung, sondern als auf ständige Verbesserung ausgerichteter Prozess interessant. Beweise können keine absolute Gültigkeit beanspruchen:

> *... daß kein Grund besteht, an die Mathematik zu glauben, außer der, daß sie zu funktionieren scheint.* (DAVIS/HERSH 1996, 370)

ad 3. Mit dem Hinweis auf die Fehlbarkeit der Mathematik geht die Erkenntnis einher, dass Beweise auf verschiedene Arten gefunden werden können. Beweise geben Antworten auf Problemstellungen. Hier liegt nach HERSH die Lebenskraft der Mathematik. Mathematik ist nach HERSH nicht die Antwort auf Fragen, die niemand gestellt hat. Gerade erst die Fragestellung ermöglicht mathematisches Handeln und macht das 'mathematische Leben' aus:

> *It's the questions that drive mathematics. Solving problems and making up new ones is the essence of mathematical life. If mathematics is conceived apart from mathematical life, of course it seems - dead.* (HERSH 1997, 18)

ad 4. Mathematische Objekte sind nach HERSH, wie schon beschrieben, weder physischer noch abstrakter, sondern sozial-historischer Natur. HERSH stellt fest, dass die Objekte der Mathematik von Menschen geschaffen werden. Die Objekte entstehen dabei aus der aktiven Auseinandersetzung mit bereits existierenden Objekten oder dadurch, dass sie von anderen Wissenschaften oder dem alltäglichen Leben benötigt werden. Wenn die

Objekte jedoch einmal geschaffen sind - so stellt HERSH weiter fest -, dann haben sie besondere Eigenschaften, die oft nicht leicht zu erforschen sind (vgl. HERSH 1997, 16). Diese Sicht der Mathematik und ihrer Objekte erlaubt es nicht, so HERSH, die eingangs gestellte Frage nach dem Wesen der Mathematik ohne Weiteres zu beantworten, sondern bietet nur einen weiteren Zugang:

> *Recognizing that mathematics is a social-cultural-historical entity doesn't automatically solve the big puzzles in the philosophy of mathematics. It puts those puzzles in the right context, with a new possibility of solving them.* (HERSH 1997, 249)

Insgesamt zeichnet HERSH ein humanistisches Bild einer Mathematik, die ohne die Mathematik treibenden Menschen nicht vorstellbar wäre.

Mathematik von außen betrachtet

DAVIS und HERSH thematisieren zunächst die 'Nützlichkeit' der Mathematik (vgl. 1996, 78 ff.), die sich auf unterschiedliche Bereiche beziehen kann:

> *So erstrecken sich die Bedeutungsnuancen von «nützlich» über ästhetische, philosophische, historische, psychologische, pädagogische, wirtschaftliche, wissenschaftliche, technologische und mathematische Aspekte.* (DAVIS/HERSH 1996, 79)

Mathematische Erkenntnisse können auch intern nützlich sein. Verschiedene Theorien bauen aufeinander auf oder profitieren von den Erkenntnissen in anderen Bereichen der Mathematik (vgl. DAVIS/HERSH 1996, 80).

Mathematik kann für Mathematik oder auch für andere Wissenschaften nützlich sein. Die Zwecke werden dann bei den Anwendungen gefunden (DAVIS/HERSH 1996, 82 ff.). Die Nützlichkeit dient oft als Legitimation für das Fach Mathematik. Dabei wird aber vergessen, dass damit nur eine Seite der Mathematik beachtet wird.[3]

---

[3] Schon JACOBI wandte sich 1830 gegen die Sicht, die Mathematik durch ihre Nützlichkeit zu legitimieren: „Es ist wahr, dass M. Fourier der Meinung war, das vornehmliche Ziel der Mathematik sei ihre Anwendungen und die Erklärung der Naturphänomene; aber ein Philosoph wie er sollte wissen, dass das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und in diesem Sinne eine Frage der Zahlen ebenso viel wert ist wie eine Frage des Systems der Welt" (JACOBI 1969, 454 - 455, Übersetzung A.S.S.).

DAVIS und HERSH kritisieren die übliche Gegenüberstellung der sog. reinen und der angewandten Mathematik und die Höherstellung der reinen Mathematik. Sie räumen ein, dass die Mathematik in ihrer Abstraktheit dazu auffordern kann, sich - zumindest zeitweise - der Realität zu entziehen und sich in der Sprache der Zahlen und geometrischen Symbole eine eigene Welt zu schaffen, und zitieren als extremes Beispiel den Mathematiker HARDY:

> *Ich habe nie etwas gemacht, das ‹nützlich› gewesen wäre.* [... Ich] *habe etwas zur Erkenntnis beigetragen...* (HARDY in DAVIS/HERSH 1996, 85)

Die Autoren kritisieren aber den 'Hardyismus', der nutzlose Mathematik betreibt, ebenso wie den 'mathematischen Maoismus', der nur gesellschaftlich relevante Mathematik zulässt (vgl. DAVIS/HERSH 1996, 87 ff.). Sie stellen fest, dass diese Trennung nicht mehr mit der heutigen mathematischen Realität übereinstimmt.

Mathematik von innen betrachtet

Bei ihrem Versuch, sich dem Wesen der Mathematik 'von innen' zu nähern, verweisen DAVIS und HERSH auf 'Muster' als Gegenstände mathematischen Tuns. Sie sehen im Schaffen von Ordnung den Zweck der Mathematik. Diese Ordnung gestaltet sich nicht aus der Mathematik selbst, sondern sie wird durch den Menschen geschaffen, der Mathematik betreibt. Die Gegenstände des mathematischen Tuns 'existieren' nicht unabhängig vom handelnden Subjekt (vgl. DAVIS/HERSH 1996, 339 ff. 'Überwindung des Euklid-Mythos').

DAVIS/HERSH (1996, 177 ff.) beschreiben vier mögliche Beziehungen zwischen Ordnung und Chaos:

- Ordnung aus Ordnung — $1^3=1^2$, $1^2+2^3=(1+2)^2$, $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$ usw.
- Chaos aus Ordnung — $12 \cdot 21 = 252$, $123 \cdot 321 = 39483$ usw.
- Chaos aus Chaos — $53278 \cdot 2147 = 114387866$
- Ordnung aus Chaos — Goldbachsche Vermutung: Jede gerade Zahl ist Summe zweier Primzahlen.

Der Sinn für Ordnung ist eng an ein ästhetisches Empfinden geknüpft. Die Ästhetik entscheidet erstens darüber, ob ein Phänomen überhaupt 'ins Auge springt', und zweitens, ob es 'wertvoll' genug ist, weiter bearbeitet zu werden. Poincaré stellt in diesem Sinn fest, dass „eher Ästhetik als Logik das dominierende Element mathematischer Kreativität" (in DAVIS/HERSH 1996, 172) ausmacht:

> *Vor allem die mathematischen Wissenschaften zeichnen sich aus durch Ordnung, Symmetrie und Beschränkung; und dies sind die größten Formen des Schönen.* (ARISTOTELES, Metaphysik, M3, 1078b zitiert in DAVIS/HERSH 1996, 172)

Die Phänomene der Mathematik selbst können als 'schön', symmetrisch, kunstvoll erachtet werden. Ebenso kann ein Beweis, eine Schlussfolgerung mehr oder weniger ästhetisch aufgebaut werden, und je ästhetischer er ist, um so höher wird er mathematisch eingeschätzt. Dabei spielen Symmetrie und Harmonie eine große Rolle. DAVIS/HERSH (vgl. 1996, 314) beschreiben ein eindrückliches Beispiel von zwei Beweisen ein und desselben Phänomens, bei dem die größere Ästhetik auch mit der klareren Einsicht Hand in Hand geht. Ästhetik prägt das Leben des Mathematiktreibenden und das Leben des Faches:

> *Im Gegenteil erfüllt die Empfänglichkeit für dieses Element [die Ästhetik] den Gegenstand mit wunderbarem Leben, mit einem Feuer, wie das bei keiner anderen Schöpfung des menschlichen Geistes der Fall zu sein scheint.* (DAVIS/HERSH 1996, 173)

Lehren und Lernen

HERSH sieht in der Lehrbarkeit das 'Herz' der humanistischen Konzeption von Mathematik (vgl. 1997, 238). Tatsächlich wird in dem Kapitel 6 'Lehren und Lernen' in 'Erfahrung Mathematik' (DAVIS/HERSH 1996) die Sicht der Mathematik der Autoren sehr deutlich.[4]

Die Autoren begründen die Schwierigkeit, Mathematik zu verstehen, damit, dass nur ein bestimmter Teil des Mathematiktreibens sichtbar wird, und verweisen auf

> *... die seltsame Bescheidenheit, die es uns zu verbieten scheint, sobald wir außerhalb unserer Studierzimmer sind, das ehrliche Tasten und Suchen unserer Methoden vor einer profanen Öffentlichkeit zu zeigen.* (BLOCH in DAVIS/HERSH 1996, 287)

DAVIS/HERSH beschreiben das übliche Vorgehen eines Dozenten, der auf Nachfragen nur die Möglichkeit sieht, in anderen Worten erneut den selben Inhalt zu wiederholen. Der Weg zum Verständnis führt aber nur über den Weg der Entdeckung. Diese kann nachempfunden werden oder aber selbst gemacht werden. Der letztgenannte Weg wird als erfolgversprechend angesehen: „Der beste Weg, um etwas zu verstehen, ist oft, für sich selber einen Beweis in einer anderen (oder sogar neuartigen) Weise zu konstruieren" (DAVIS/HERSH 1996, 292).

Auch Lehrbücher werden von DAVIS/HERSH kritisch beurteilt. Oft fehlt die Darstellung des Prozesses der Lösungsfindung. „Erklärungen gelten [in der Sicht der Mathematiker] als langweilig" (DAVIS/HERSH 1996, 295). Darin liegt die Ursache für die verkürzten, also letztlich unverständlichen Darstellungen.

---

[4] In einer Befragung von britischen Professoren und Dozenten konnte BURTON (1999) feststellen, dass viele Mathematiker ihren eigenen Arbeitsstil als kooperativ und kommunikativ bewerten. Die veröffentlichten Produkte der Mathematiker verleiten aber zu dem falschen Schluss, dass Mathematiker nur stringent und formal arbeiten und keine Um- und Irrwege, keine Intuition und Anregung im Prozess der Lösungsfindung akzeptieren. Tatsächlich ist Mathematik als Prozess aber geprägt von der Bewusstheit, dass Unsicherheiten und Fehler zu der lebendigen Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen gehören (vgl. BURTON 1999, 138). BURTON (1999, 137) spricht von einem Umschwung im Arbeitsklima der heutigen Mathematiker, den die Beteiligten selbst als solchen empfinden und der von der isolierten Einzeltätigkeit weg und hin zu einer kooperativen Arbeit führt. Die Befriedigung, die den meisten Mathematikern ihre Arbeit bietet, liegt in der Emotionalität, in den 'Aha-Erlebnissen', die die Mathematik zu bieten hat und keineswegs in einer bürokratischen Trockenheit: „So, coming to know, for my participants, was represented by feelings, the powerful sense of Aha! which is what holds them in mathematics" (BURTON 1999, 135).

Die Autoren fordern implizit eine stärkere Fachausbildung der Lehrer, die sie davor bewahren könnte, Lehrbüchern sklavisch zu folgen (vgl. DAVIS/HERSH 1996, 295). Aber auch auf Seiten der Lernenden gilt es umzudenken. DAVIS/HERSH beklagen das Bedürfnis vieler Studierender, augenblicklich verstehen zu wollen, und kritisieren dieses Verhalten als kontraproduktiv (vgl. DAVIS/HERSH 1996, 296).

Die Erkenntnis, die sich im blitzartigen Aha-Erlebnis[5] manifestiert, ist der Ausnahmefall und nicht lehrbar. Gefördert werden können aber Kreativität und heuristisches Denken. Dabei greifen die Autoren explizit auf die Ideen Pólyas und die sog. Lakatos-Heuristik zurück (DAVIS/HERSH 1996, 297 ff.).

---

[5] Eines der bedeutendsten Dokumente, die sich der Beschreibung solcher mathematischer Lösungsfindungsprozesse widmen, stammt von HADAMARD (1945), der sich mit dem Problem der mathematischen Entdeckung durch Befragung von POINCARÉ, EINSTEIN und anderen Wissenschaftlern genähert hat. Alle großen Erfindungen - so HADAMARD - sind geprägt von einer Zeit der zwar gerichteten, aber erfolglosen Suche und Anstrengung. Die Lösung findet sich dann oft in einem unerwarteten Moment mit einer blitzartigen Macht, so wie es GAUSS über die Lösung eines arithmetischen Theorems beschreibt: „Finally, two days ago, I succeeded, not on account of my painful efforts, but by the grace of God. Like a sudden flash of lightning, the riddle happened to be solved. I myself cannot say what was the conducting thread which connected what I previously knew with what made my success possible" (in HADAMARD 1945, 15). HADAMARD (1945, vgl. z.B. 105) charakterisiert die mathematische Erfindungstätigkeit als subjektiv, vom Unbewussten beeinflusst und intuitionsgeleitet (vgl. auch DAVIS/HERSH 1996, 325). Der Intuition, so geben DAVIS/HERSH an, misst auch FEFERMAN eine große Bedeutung zu. Er erklärt, dass er die Logik weder für die Geschichte der Entwicklung der Mathematik, noch für den sog. Alltag eines Mathematikers als maßgeblich einschätzt, sondern eher die Intuition (vgl. DAVIS/HERSH 1996, 377).

1.3 Hans Freudenthal: Mathematik als Tätigkeit

> Ich glaube in der Tat, daß eine Unterrichtsreorganisation erforderlich ist, die darauf abzielt, nicht das aktive Lernen zu ermöglichen, sondern das passive Lernen unmöglich zu machen.
>
> Freudenthal (1973, 63)

FREUDENTHAL definiert die Mathematik in seinem epochalen Werk „Mathematik als pädagogische Aufgabe" (1973) als Tätigkeit. Damit wendet er sich gegen die traditionelle Auffassung von der Mathematik als Fertigprodukt, die deswegen nahe liegt, weil in der mathematischen Literatur nur die Ergebnisse der Forschung veröffentlicht werden.

> *Daß es neben der Mathematik noch Mathematik als Tätigkeit gibt, weiß jeder Mathematiker unbewußt, aber nur wenigen scheint es bewußt zu sein, und da es nur selten betont wird, wissen Nichtmathematiker es gar nicht.* (FREUDENTHAL 1973, 110)

FREUDENTHAL beschreibt die mathematische Tätigkeit zunächst als Tätigkeit des Ordnens. Dabei können einerseits die Welt und ihre Phänomene geordnet werden, andererseits aber auch die Mathematik selbst zum Gegenstand des Ordnens werden:

> *Will man sie* [die Wissenschaft] *beherrschen, so muß man die erworbene Kenntnis organisieren. Das gilt für die Mathematik wie für andere Wissenschaften, nur wird in der Mathematik dieses Ordnen bewußter und auf höherem Niveau als anderswo ausgeübt; in der Mathematik ist das Ordnen auch eine mathematische Tätigkeit.* (FREUDENTHAL 1973, 50)

Die Ordnungssysteme ändern sich ständig. Deshalb ist es nach FREUDENTHAL schwer, auf die Frage: 'Was ist Mathematik?' zu antworten. Antworten können immer nur zeitweise genügen: „Die Mathematik ist eben niemals fertig - alle, die ein System der Mathematik anbeten, mögen es sich gesagt sein lassen" (FREUDENTHAL 1973, 50 - 51). Die Möglichkeit, ein System aufzubauen, liegt in der Beziehungshaltigkeit der Mathematik. Diese

Beziehungen können innermathematischer Natur sein, aber ebenso können Beziehungen nach außen gesucht werden.

Die mathematische Tätigkeit ist bestimmt durch bewusstes Ordnen. Die Bewusstheit wird besonders in der Logik betont. Das begriffliche Ordnen wird in der Logik zum Gegenstand des Denkens (vgl. FREUDENTHAL 1973, 558). Die Fähigkeit zu einer bewussten Auseinandersetzung trennt die Tätigkeit des Menschen qualitativ vom maschinellen Operieren ab. Nach FREUDENTHAL (vgl. 1973, 559) ist es die besondere Aufgabe der Schule, diese Fähigkeit zu fördern.

Wenn bereits gewonnene Erkenntnisse Gegenstand der mathematischen Tätigkeit werden, dann spricht FREUDENTHAL von Schematisieren und Reflektieren. Schemata können jedoch nur gefunden werden, wenn die mathematische Tätigkeit Möglichkeiten zu Entdeckungen bereithält. Diese Möglichkeiten sieht FREUDENTHAL vor allem in der Geometrie gegeben. Die geometrischen Inhalte lassen Entdeckungen für Auge und Hand zu, da die Objekte oft real repräsentiert werden können. Die mathematische Tätigkeit kann sich aber zunehmend von den Repräsentanten lösen. FREUDENTHAL folgt in seinen Ausführungen der VAN HIELE'schen Stufentheorie. Diese Theorie besagt, dass die mathematische Auseinandersetzung in verschiedenen Phasen verläuft. Zunächst werden Erscheinungen geordnet und Eigenschaften phänomenologisch erfahren, dann können die Eigenschaften und Konzepte begrifflich beschrieben werden, und schließlich kann auf einer Metaebene das erkannte logische System selbst zum Gegenstand des entdeckenden Lernens werden (vgl. FREUDENTHAL 1973, 423).

In jeder Phase spielen Entdeckungen eine große Rolle. Diese Entdeckungen müssen stets vom Lernenden selbst gemacht werden. Es genügt nicht, wenn die Erkenntnisse dem Lernenden von außen – durch den Lehrer – zugetragen werden, im Gegenteil, es schadet sogar (vgl. FREUDENTHAL 1973, 389; vgl. auch 569). Wie sich die Aktivitäten im einzelnen ausgestalten, beschreibt er ausführlich für alle Themenbereiche der (Schul-)Mathematik. Dabei bleiben die Beispiele keineswegs immer für Entdeckungen mit Augen und Hand zugänglich, sondern betreffen auch abstrakte Themen. Ausführlich äußert er sich zum Zahlbegriff, weiter auch zu Mengen und Funktionen, zur Geometrie, zur Analysis, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik und zur Logik. Immer wieder stellt

er ausdrücklich klar, dass die Mathematik als Tätigkeit nicht mit Definitionen, deduktiven Systemen oder Axiomatiken beginnen kann, sondern von Beispielen ausgehen muss, die Entdeckungen zulassen. Zur Illustration dieser durchgängigen Idee benutzt er folgendes Beispiel:

Wenn ich jemandem, der keine Mathematik kennt, erzählen will, daß

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

ist, so zeige ich ihm, daß

1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16, usw.

und hoffe, daß es nach dem 'usw.' verstanden hat, wie es weitergeht.

(FREUDENTHAL 1973, 589 f.)

Die 'Übersetzung' des Satzes in allgemeinverständliche Beispiele ermöglicht einen Zugang, der ausdrücklich an Nicht-Mathematiker gerichtet ist. Nur in der konsequenten Fortsetzung der Einzelbeispiele wird das mathematisch interessante Phänomen erkennbar.

FREUDENTHAL spricht sich auch an anderer Stelle dagegen aus, Definitionen überzubewerten. Vielmehr soll von den Lehrenden selbst und von der Darstellung des Stoffes an die Intuition oder an die Erfahrung der Lernenden angeknüpft werden. Dies gilt ebenso für die Zahlentheorie wie auch für die Geometrie oder die Mengenlehre. „Gewaltsame explizite Definitionen gehören in eine veraltete Methodologie und Methodik" (FREUDENTHAL 1973, 317). Beispiele sollen zeigen, wie mit mathematischen Objekten operiert werden kann (vgl. FREUDENTHAL 1973, 331). Der Zugang zu den mathematischen Strukturen ist dabei heuristischer Art (vgl. FREUDENTHAL 1973, 569). Die Tätigkeiten können dann auch erst 'lokal' geordnet und in ein System gebracht werden. In Phasen der Kreativität oder auch der Anwendung, so beschreibt es FREUDENTHAL, ordnet auch der Mathematiker Ergebnisse und Entdeckungen lokal und vernachlässigt ein potentielles Gesamtsystem des Faches.

Ordnungen, die durch mathematische Beispiele gefunden wurden, müssen aber auch formuliert werden. FREUDENTHAL bezeichnet das sprachliche Formulieren mit mathematischem Charakter und in mathematisch einwandfreier Sprache mit 'Formalisieren' (vgl. FREUDENTHAL 1973, 558).

> *Der Endzustand [des Formalisierens] wäre eine Sprache, die so exakt ist, daß eine Rechenmaschine sie hantieren kann.* (FREUDENTHAL 1973, 35)

In der Unterscheidung von begrifflicher und algorithmischer Mathematik folgt er diesem Gedanken (vgl. FREUDENTHAL 1973, 47 ff.). Dabei gibt er grundsätzlich keiner von beiden Sichtweisen den Vorzug. Das algorithmische Arbeiten kann auch Voraussetzung dafür sein, andere, neue Gebiete der Mathematik aktiv und frei zu durchdenken und zu entwickeln. Er verdeutlicht an der Entwicklung des Rechnens, dass erst das mechanische Rechnen die Möglichkeit für zahlentheoretische Überlegungen eröffnete. Die Vorteile der begrifflichen Mathematik, die ein Mensch begreift und logisch durchdringt, wurden schon an anderer Stelle gezeigt.

FREUDENTHAL fordert bei der Auseinandersetzung mit Mathematik die Eigenaktivität auch aus einem weiteren Grund: Im neuen Mathematikunterricht spiegelt sich nach FREUDENTHAL die neue Gesellschaft wider. Innerhalb der Gesellschaft werden Selbstständigkeit und Individualität ebenso wie Selbstverantwortung eingefordert. Deshalb müssen auch die Lehr-Lernformen darauf eingehen und die Eigenverantwortung der Lernenden im aktiven Prozess der Auseinandersetzung mit dem Fach fördern, mehr noch, sie müssen so gestaltet sein, dass sie passives Lernen unmöglich machen (vgl. FREUDENTHAL 1973, 63). Für FREUDENTHAL besteht die Neuheit darin, dass sich nicht die Inhalte wesentlich geändert haben, sondern die Stile der Vermittlung.

Mehrfach greift er die neue Methodik auf, die der Mathematik als Tätigkeit verstanden entspricht. Die Aktivität sieht er dabei eindeutig auf Seiten der Schülerinnen und Schüler. Der Lehrende muss weit mehr tun, als dafür zu sorgen, dass der Lernende mechanisch rechnen kann. Der alte Schulmeister, so FREUDENTHAL, konnte mit dem Ziel, den Kindern das Rechnen beizubringen, zufrieden sein. Heute hat der Lehrende darüber hinaus die gesellschaftliche Verpflichtung, die Selbstständigkeit der Studierenden oder der Kinder zu fördern (vgl. FREUDENTHAL 1973, 60).

Aktiv-entdeckend tätig werden die Lernenden jedoch nur, wenn ihnen geeignete Angebote gemacht werden. FREUDENTHAL sieht hier den großen Vorzug, den mathematische Strukturen zur Anregung des Denken bieten:

> *Voraussetzung dafür ist, daß es als eine disciplina mentis betrieben wird, d.h. daß man schon im Mathematikunterricht das Erkennen und*

> *Hantieren solcher Strukturen übt und bewußt macht ...* (FREUDENTHAL 1973, 85)

Dieser didaktische Weg stellt neue, ungewohnte Forderungen an den Lehrer. FREUDENTHAL erinnert daran, dass der Lehrer einen Wissensvorsprung gegenüber dem Schüler haben muss. FREUDENTHALS Verdienst ist es, diese Sicht, die in der Pädagogik schon seit Kerschensteiner und sogar Herbart bekannt war, in das Bewusstsein der Mathematikdidaktik zu bringen. Er definiert dieses 'Mehr', indem er darauf verweist, dass der Lehrer 'über' dem Stoff stehen muss. Ebenfalls muss er eine Metaebene zur Methodik aufsuchen. Die Methoden müssen mit der Sicht des Faches als Tätigkeit übereinstimmen (vgl. FREUDENTHAL 1973, 598).

1.4 Gian-Carlo Rota und Helmut Hasse: Die Phänomenologie mathematischer Schönheit

> Mathematical beauty is the expression mathematicians have invented in order to obliquely admit the phenomenon of enlightenment while avoiding acknowledgement of the fuzziness of this phenomenon.
>
> ROTA (1996, 132)

Gian-Carlo ROTA setzt sich in „Indiscrete Thoughts" (1996) kritisch mit der Mathematik auseinander, die Strenge und präzise Definitionen fordert. Er erinnert daran, dass mathematische Aktivitäten selten von einer formalen Definition der untersuchten Objekte abhängig sind (vgl. ROTA 1996, 48 ff.). ROTA zeichnet ein lebendiges Bild der Mathematik, in der die Frage nach Sinn und Bedeutung von Aktivitäten wichtiger ist als die Strenge. Vor diesem Hintergrund wendet er sich insbesondere dem Problem der mathematischen Schönheit zu.

Mathematische Schönheit als Phänomen

ROTA (1996, 121 ff.) entwickelt eine Phänomenologie der mathematischen Schönheit, in der er zunächst die mathematischen Objekte kennzeichnet, die 'schön' sein können. Er gibt eine Reihe von Beispielen für schöne Theoreme, Beweise, Definitionen oder Axiomensysteme. ROTA verweist auf gewisse Abhängigkeiten in diesem Fall. Er zeigt auf, dass z.B. ein schöner Beweis immer zu einem schönen Theorem gehört, gibt aber zu bedenken, dass umgekehrt mit einem schönen Theorem nicht zwingend ein schöner Beweis verbunden ist. Ebenso ist die Schönheit der Darlegung eines Theorems unabhängig von der Schönheit des Theorems selbst:

> *This example shows that the beauty of a mathematical theory is independent of the aesthetic qualities, or the lack of them, of the theory's rigorous exposition.* (ROTA 1996, 124)

ROTA nutzt die Begriffe Schönheit und ästhetische Qualität hier synonym.

Der Begriff 'mathematische Schönheit' ist - ähnlich wie der Begriff Kreativität - ein sehr dehnbarer und schwer zu erfassender Begriff. Die Schönheit kann, wie die Kreativität, nur als Nebenprodukt einer mathematischen Aktivität nachträglich festgehalten werden, als

> ... *a word* [creativity, mathematical beauty, or happiness etc.] *that promises some benefit that cannot be controlled or measured, and that can be attained as the unpredictable byproduct of some identifiable concrete activity.* (ROTA 1996, 127)

ROTA macht deutlich, dass das von HARDY beschriebene Element der Überraschung als ein Aspekt von Schönheit angesehen werden kann, aber Überraschung allein keinesfalls Schönheit begründet (vgl. ROTA 1996, 123).

Weiter weist er auf die Zeitabhängigkeit der Vorstellungen von Schönheit hin:

> *Mathematical beauty and mathematical truth share the fundamental property of objectivity, that of being inescapably context-dependent.* (ROTA 1996, 126)

Schönheit - Hässlichkeit

Da eine direkte Definition der Schönheit schwer zu geben ist, nähert sich ROTA durch eine Beschreibung des Gegenteils, der 'Hässlichkeit', der Schönheit. Kein Mathematiker würde jemals einen Teil der Mathematik direkt als hässlich bezeichnen. Vielmehr benutzt er Umschreibungen wie 'schwerfällig', 'schwierig', 'undurchsichtig' und 'überflüssig'. Insbesondere gelten technische, sinnlose oder unnötige Beweise als unschön. Hässliche Mathematik provoziert immer die Frage: Wozu ist das gut? (vgl. ROTA 1996, 128 f.)

Schönheit erkennen

Schönheit von Mathematik zu empfinden ist unabdingbar geknüpft an das Verstehen. Es genügt nicht, einen schönen mathematischen Ausschnitt einfach zu betrachten. Vorwissen, Hintergrundverständnis und Wissen um andere schwerfälligere Beweise etc. ermöglichen es erst, diesen Ausschnitt als 'schön' zu bezeichnen (vgl. ROTA 1996, 129 f.).

Diese Erkenntnis hat direkte Auswirkungen auf das Unterrichten von schöner Mathematik. Der Versuch, mit schöner Mathematik Interesse bei den Lernenden zu wecken, kann nur fehlschlagen und sich ins Gegenteil umkehren, wenn die Lernenden mit diesem Teil der Mathematik nicht vertraut sind.

> *Appreciation of mathematical beauty requires familiarity with a mathematical theory, and such familiarity is arrived at the cost of time, effort exercise, and Sitzfleisch rather than by training in beauty appreciation.* (ROTA 1996, 128, Hervorh. i. O.)

Es ist nach ROTA nicht möglich, das Empfinden der Schönheit direkt zu unterrichten. Diese Idee entstammt dem falschen Verständnis, dass mathematisches Verstehen in einer gewissen Plötzlichkeit - wie das Aufleuchten einer Glühbirne - entsteht.

> *We would like mathematical beauty to consist of this flash; mathematical beauty should be appreciated with the instantaneousness of a light bulb being lit.* (ROTA 1996, 130, Hervorh. i. O.)

Er warnt weiter davor, die Lernenden in dem Glauben zu bestärken, diese Plötzlichkeit sei die übliche Art, Mathematik zu betreiben und schätzen zu lernen. Die eindrucksvollen Beispiele (vgl. z.B. HADAMARD, hier in Kap. 1.2), die von den plötzlichen, genialen Einfällen berühmter Mathematiker berichten, können nicht auf den alltäglichen Umgang mit Mathematik verallgemeinert werden. Im Bewusstsein vieler Menschen wird aber oft das Fehlen der plötzlichen Eingebung in der eigenen mathematischen Auseinandersetzung mit mathematischer Unbegabtheit gleich gesetzt. Diese Unbegabheit dient dann als Vorwand, Mathematik grundsätzlich nicht verstehen zu wollen. ROTA möchte vielmehr die Schönheit als ein Juwel verstanden wissen, das erst nach mühevoller Arbeit aufglänzt.

Eine Beschreibung mathematischer Schönheit

ROTA zieht als Kriterien Sinn, Relevanz[6] und Erleuchtung heran (vgl. ROTA 1996, 131 ff.). Diese drei Kriterien können die Frage nach dem 'Wozu ist das gut?' befriedigend beantworten. Wenn diese Aspekte in einem Stück Mathematik und in mathematischer Aktivität aufgespürt werden können, so sind sie ein Indiz für die Schönheit.

Es wird deutlich, dass auch ROTA selbst Schwierigkeiten hat, die Schönheit im Weiteren genauer einzugrenzen. Erneut greift er darauf zurück, das Fehlen von Schönheit zu beschreiben, um so einen indirekten Zugang zu ermöglichen. So kann er festhalten, dass Mathematik zu einem 'merkwürdigen Spiel' degradiert würde, das von 'verrückten Menschen' gespielt wird, wenn Momente der Erleuchtung fehlten (vgl. ROTA 1996, 132).

Das Mathematiktreiben bleibt nur lebendig, wenn diese Momente der Erleuchtung erlebt werden können:

> *Enlightenment is what keeps mathematical enterprise alive and what gives mathematics a high standing among scientific disciplines.* (ROTA 1996, 132)

Schließlich vermutet ROTA, dass der Begriff der Schönheit eine gekonnte Umschreibung ist, die von der Schwierigkeit ablenkt, die erleuchtenden Momente im Mathematiktreiben und in mathematischen Sätzen und Beweisen etc. zu definieren.

Schöne Mathematik, so bleibt festzuhalten, ermöglicht es, einen Sachverhalt beglückt und 'erleuchtet' zu verstehen, so wie man ein Geheimnis versteht, das man selbst gelüftet hat (vgl. ROTA 1996, 132). Umgekehrt macht dieser Prozess der Erkenntnis diese Mathematik erst schön.

---

[6] Die Soziologin Bettina HEINTZ betont, dass die Schönheit neben der Relevanz auch die Richtigkeit einer Vermutung nahe legt (vgl. HEINTZ 2000, 145 ff.). Sie beschreibt in ihrer Studie über Mathematiker, dass diese „ihre Objekte nicht selten mit ästhetischen oder normativen Attributen" belegen: „In der Mathematik ist das Schöne zugleich das Wahre, und das Wahre ist in der Regel das Gute" (HEINTZ 2000, 146).

Schönheit in Kunst und Mathematik

Der Zahlentheoretiker Helmut HASSE (1952) hat sich in einem Essay über die Verbindungen zwischen Kunst und Mathematik[7] geäußert und Auffassungen entwickelt, die starke Parallelen zu ROTAS Überlegungen aufweisen und auf die daher ebenfalls eingegangen werden soll.

Für HASSE stellt die Schönheit – neben der Freiheit, Intuition, Kommunikation und Formalisierung – eine der Gemeinsamkeiten zwischen Kunst und Mathematik dar.

Die *Freiheit* der Kunst ist selbstverständlich, ebenso wie die sprichwörtliche Freiheit der Gedanken. Wenn nun Mathematik aber als Gedankenexperiment Gestalt annimmt, dann hat sie alle Freiheit, die auch die Kunst für sich in Anspruch nimmt. Der Mathematiker kann sich alltäglichen Anwendungen zuwenden, ebenso, wie sich der Künstler im Design von Gebrauchsgütern darstellen kann. Grundsätzlich definiert sich der Künstler – und eben auch der Mathematiker – aber durch die Ungebundenheit an Ansprüche der Wirklichkeit. ROTA bezeichnet diese Ungebundenheit als 'Trick', der Realität mit ihrer 'Unordnung' zu entkommen (vgl. ROTA 1996, 133).

Die freie *Inspiration*, die Intuition, das plötzliche Aufleuchten einer Idee unterstützen den Künstler bei seiner Arbeit. Eindrücke nehmen in der Kunst Gestalt an und können so wiederum auf den Betrachter Eindruck machen.

> *Man denkt gemeinhin, daß mathematische Wahrheiten durch logische Denkprozesse gewonnen werden. Das ist aber keineswegs immer der Fall. Gerade die größten und auf lange Sicht richtungsweisenden mathematischen Entdeckungen sind zuerst mit dem geistigen Auge erschaut worden.* (HASSE 1952, 19)

Die innere Eingebung unterstützt also den Prozess, mathematische Probleme zu lösen. Die Aufklärung, im Sinne einer 'Erleuchtung', die ROTA beschreibt, lässt den Mathematiktreibenden die Mathematik erst schätzen.

Aber nicht jede Intuition führt zu einem Kunstwerk, nicht jede Idee zu einer bahnbrechenden Erkenntnis in der Mathematik. Nur diejenigen Ideen haben

---

[7] Diese enge Verbindung zwischen Kunst und Mathematik ist nicht neu. Das griechische Quadrivium umschloss, neben der Arithmetik und der Geometrie, die Astronomie und die Harmonik (vgl. VAN DER WAERDEN 1977, 7 ff.). Die Theorie der Sphärenmusik ist ein eindrückliches Beipiel für das Zusammenspiel von Mathematik und Künsten (vgl. auch Anmerkung Nr. 13 in Kap. 1.5).

Bestand, die dem harten Urteil der *Schönheit* standhalten. Diese Schönheit zeigt sich in der Mathematik nach HASSE in unterschiedlichen Ausprägungen. Einerseits können schon kleine Formulierungen als schön empfunden werden, weil sie klar und prägnant einfache Sachverhalte darstellen, andererseits gibt es die Schönheit ganzer Theorien, die die Mathematik dadurch zu „einem lebendigen harmonischen Organismus" (HASSE 1952, 24) ausgestalten. Ebenso wie ROTA sieht HASSE die Schönheit in der Klarheit und nicht in unpräzisen, schwerfälligen Aussagen und in ihrer Sinnhaltigkeit und 'Wucht ihrer Überzeugungskraft' gespiegelt:

> *Als höchste Stufe haben wir in der Mathematik die Schönheit einer ganzen Theorie, deren einzelne Bestandteile (Ausgangspunkt, Fragestellung, grundlegende Definitionen, vorbereitende Sätze und Hauptsätze nebst ihren Beweisen) durch die Klarheit ihrer Formulierungen, durch ihre gegenseitigen Beziehungen, durch ihre Tragweite, ihre Zielstrebigkeit, durch die Wucht ihrer Überzeugungskraft und durch ihre Verallgemeinerungsfähigkeit einen lebendigen Organismus bilden.* (HASSE 1952, 24)

Schöne Mathematik kann in ihrer inneren Schönheit überzeugen, die sich durch Präzision und Beziehungshaltigkeit auszeichnet. Sie kann nach außen auftreten, in dem sie Sinn macht, überzeugend und erkenntnisfördernd wirkt.

Mathematik lebt, sie zeigt Dynamik und gleichzeitig Eleganz. HASSE warnt jedoch davor, die Schönheit und Eleganz überzubetonen. Er setzt den Inhalt über die Form. ROTA verweist ergänzend auf den Unterschied zwischen Eleganz und Schönheit. Die elegante Darstellung allein macht den dargestellten Inhalt nicht zu schöner Mathematik, da sie sich nicht auf den Inhalt selbst bezieht, sondern nur auf die Präsentation (vgl. ROTA 1996, 128).

Es wird oft behauptet, dass Mathematik ein Gespräch des Geistes mit sich selbst ist[8], aber ein „echter Mathematiker, der etwas Schönes gefunden hat, spürt in sich den unwiderstehlichen Drang, diese seine Entdeckung den anderen mitzuteilen." (HASSE 1952, 26). Die *Kommunikation* mit einem Gegenüber verschafft der Kunst, wie auch der Mathematik, Gehör. Die Auseinandersetzung mit anderen Kunstwerken bzw. mit anderen mathematischen Theorien und Erkenntnissen ordnet das Werk, die Idee, den Beweis in einen größeren Zusammenhang ein. Erst in der Auseinandersetzung wird der wahre Gehalt der von der Schönheit geführten und von der Intuition erschaffenen Idee deutlich. Deshalb besteht – zumindest in der Mathematik – eine Verpflichtung, eine Kommunikation aufzunehmen. Die Darstellung der neuen Erkenntnis darf nicht elitär bleiben, sondern muss verständlich sein (vgl. HASSE 1952, 27).

Wird jedoch das Streben nach Schönheit durch eine auf die Spitze getriebene *Formalisierung* übertrieben, kann die Verständlichkeit zerstört werden. HASSE unterscheidet hier zwischen der *klassischen Schönheit*, die sich im höchsten Formalismus zeigt, aber dadurch tot scheint, und der *unvollendeten Schönheit*, die den Zugang noch erlaubt und lebendig bleibt. Als Paradebeispiel für klassische Schönheit benennt er die 'Elemente des Euklid', die für den Leser ein totes, langweiliges Bild der Mathematik zeichnen (vgl. HASSE 1952, 28).

Schöne Mathematik, so wie ROTA sie beschreibt, muss Sinn machen und einsichtig sein – wenn auch nach mühevoller Auseinandersetzung (vgl. 1996, 128 und 131). Der formale Beweis kann ebensowenig leben wie das auf Notenblättern fixierte Musikstück, das erst zum Leben erwacht, wenn es interpretierend gespielt wird. Schönheit und Dynamik machen die Mathematik aus, die HASSE als 'echte' und lebendige Mathematik bezeichnen würde.

---

[8] Mathematiktreiben gestaltet sich besonders in der unterrichtlichen Form natürlich im sozialen Kontext und in der Interaktion mit Mitschülern und Lehrern. Diese Komponente wird hier keinesfalls geleugnet. Dennoch bleibt zu beachten, dass sich der soziale Kontext oder die Interaktion immer auf das individuelle Subjekt direkt auswirken muss, um Lernen zu ermöglichen. Motivation, Anregung, Strategien, Vorbilder etc. können durch die Mitmenschen oder auch allein durch die Interaktion mit Medien und Materialien gegeben werden, aber diese Einflüsse können das individuelle Lernen nur ergänzen und es nicht ersetzen.

1.5 Eine historische Fallstudie: Figurierte Zahlen

> Whoever is interested in the history of mathematics should study the processes rather than the products of mathematical creativity.
> FREUDENTHAL (1981, 33)

Für die vorliegende Arbeit ist es sehr wichtig zu sehen, dass sich die veränderte Sichtweise nicht nur auf die höhere, sondern auch auf die elementare Mathematik bezieht. Aus diesem Grund wird im Folgenden ein elementares Stoffgebiet von seinen historischen Wurzeln her und auf den heutigen Unterricht hin analysiert.

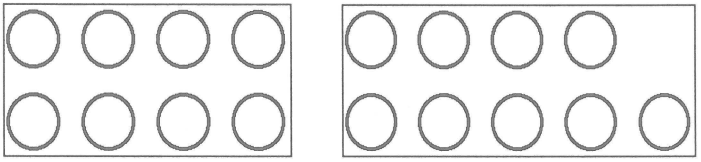
Historische Wurzeln der figurierten Zahlen

In der griechischen Mathematik gab es eine Periode, die man als Wiege der Zahlentheorie ansehen kann: die sog. ψῆφοι -(Steinchen-)Arithmetik (vgl. BECKER 1964, 34 ff.).

> *Am Anfang der griechischen Mathematik, vermutlich noch im 6. Jahrh. beginnend, steht eine eigentümliche Betrachtungsweise, die man als halb arithmetisch, halb geometrisch bezeichnen kann. Sie benutzt Steinchen (ψῆφοι) von gleicher Größe und Form (rund und quadratisch), mit denen Figuren gelegt werden. So berichtet Aristoteles (Metaphysik N 5, 1092 b 10) von dem Pythagoreer Eurytos, er habe bestimmt, was die „Zahl" (ἀριθμός) jedes Gegenstandes sei und die Formen der Lebewesen durch Spielsteine (ψῆφοι) nachgeahmt „in der Art derjenigen, die Zahlen in die Gestalt eines Dreiecks oder Quadrats bringen".* (BECKER 1964, 34)

Zählsteinmuster geben einerseits eine bestimmte Anzahl von Steinen wieder, andererseits geben sie auch Auskunft über gewisse Zahleigenschaften. Nicht die lose Anordnung von Steinen, sondern ihre geordnete Darstellung macht das Zahlenmuster aus.

Die erste Einteilung der natürlichen Zahlen in gerade und ungerade Zahlen[9] kann über Steinchenmuster z.B. in 2er-Reihen gut deutlich gemacht werden:



8 wird als 2 mal 4 gelegt. 9 kann nicht in 2er-Reihen gelegt werden.

Abb. 1.1

Die Abbildung 1.1 gibt nur ein *Endstadium* eines Legeprozesses wieder. Steinchen für Steinchen können die natürlichen Zahlen von 1 an in möglichen 2er-Reihen angeordnet werden. Wird von der 8 ausgehend ein nächstes Steinchen hinzugefügt, so wird eine neue Spalte begonnen. Umgekehrt kann von der Anzahl 9 ausgehend durch Wegnahme eines Steines die nächst kleinere gerade Zahl, d.h. eine Zahl, die sich in 2er-Reihen legen lassen kann, ermittelt werden[10].

Die Muster der Steinchen geben den Zahlen Namen. Alle Zahlen können als sogenannte figurierte Zahlen oder Polygonalzahlen dargestellt werden. Ein Anfang einer solchen Musterfolge wird in der folgenden Abbildung angegeben.

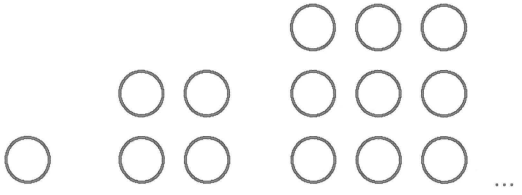


Abb. 1.2

[9] In der Arithmetik des EUKLID (330 v. Chr.) (Die Elemente, Buch VII bis IX) finden sich auf die PYTHAGOREER zurückzuführende Sätze über die Teilbarkeit von Zahlen, Primzahlen und Zahlverhältnisse (vgl. z.B. EUKLID 1969). „Die Theorie ist pythagoräisch, und sie ist das erste μαθημα oder Lehrstück, in welchem sich die logisch-arithmetische Wissenschaft der Pythagoräer niedergeschlagen hat" (REIDEMEISTER 1972, 34).

[10] EPICHARMOS erwähnt diese Besonderheit, wenn er über die Veränderungen des menschlichen Wesens spricht und diese mit Veränderungen von Zahlenmustern und Zahleigenschaften vergleicht: „Wenn einer zu einer ungeraden Zahl, meinethalben auch einer geraden, einen Stein zulegen oder auch von der vorhandenen einen wegnehmen will, meinst du wohl, sie bleibe noch dieselbe?" (DIELS 1966, 196). Wie selbstverständlich wird hier die Darstellung von Zahlen in Mustern genutzt.

Bildet eine bestimmte Anzahl von Steinen ein Quadrat (Abb. 1.2), so sprechen wir von Quadratzahlen, ein Dreiecksmuster kann durch die Dreieckszahlen, ein Pentagon durch die Fünfeckszahlen gelegt werden usw. (vgl. PEIFFER/DAHAN-DALMEDICO 1994, CAPELLE 1935).

Schon die Babylonier (vgl. auch KLINE 1972) oder, wie WUßING (1997) sie bevorzugt nennt, Mesopotamier (2700 – 2000 v. Chr.), nutzten Wissen über die Berechnung von Zahlreihen konstanter Differenz[11], die als figurierte Zahlen zu interpretieren sind (vgl. NEUGEBAUER 1973). Aber erst bei den Griechen findet sich die Ordnung dieser Folgen zu Zahlenmustern in Figuren[12]. Ebenso griechischen Ursprungs sind die Beschreibung der Entstehung der figurierten Zahlen, eine Begründung der auftretenden Muster und die Anordnung der Theorie über diese Zahlen in mathematischen Systemen (vgl. BECKER 1965, XVI).

Erste historische 'Definitionen' der figurierten Zahlen der Griechen

Es gibt verschiedene Quellen, die erste 'Definitionen' der figurierten Zahlen belegen. Als Beispiel sollen hier zwei solcher 'Definitionen' genannt werden, die die Natur der figurierten Zahlen in der Sicht der Griechen erhellen können:

DIOPHANT nennt HYPSIKLES als den Urheber der 'Definition' von Polygonalzahlen (vgl. HEATH 1921, 84 oder CZWALINA 1952, 144). Die 'Definition' des HYPSIKLES beschreibt eine Prozedur, mit der Polygonalzahlen erzeugt werden können:

> *If as many numbers as you please be set out at equal intervals from 1, and the interval is 1, their sum is a triangular number: if the interval is 2, a square: if 3, a pentagonal: and generally the number of angles is greater by 2 than the interval.* (HYPSICLES zitiert von DIOPHANT in GOW 1884, 87)

---

[11] Zahlenfolgen konstanter Differenz gehören im Weiteren zu den betrachteten Zahlenmustern in dieser Arbeit (vgl. Kap. 3).

[12] Die Ursprünge dieser Zahldarstellungen sind strittig, da die frühen pythagoreischen Lehren kaum direkt aufgezeichnet worden sind. Spätere Autoren, wie EUKLID (um 330 v. Chr.) oder DIOPHANT (um 250 n. Chr.) erlauben jedoch einen indirekten Einblick in diese Frühzeit. BECKER und HOFMANN bezeichnen die figurierten Zahlen als 'alt gesichert' (1951, 50).

Diese Definition beschreibt die Zahlenfolgen in Abb. 1.3 und deren schrittweise Summation. Die Differenz von Glied zu Glied ist konstant und beträgt für die Folge der natürlichen Zahlen 1, für die Folge der ungeraden Zahlen 2 usw.

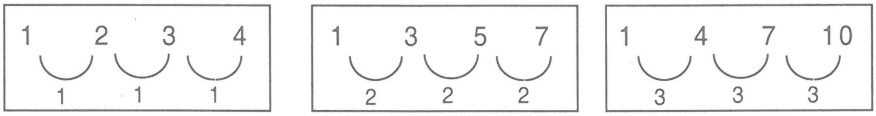


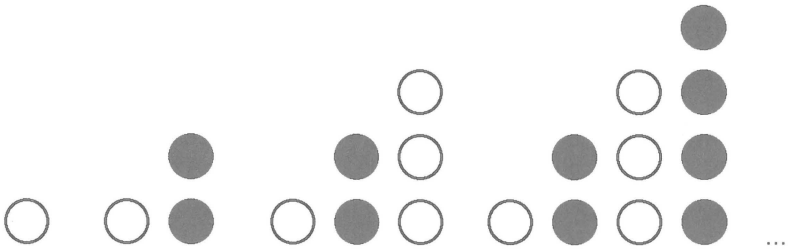
Abb. 1.3

Die Summe der ersten n Glieder der Folge der natürlichen Zahlen ist die n-te Dreieckszahl, die Summe der ersten n Glieder der Folge der ungeraden Zahlen die n-te Quadratzahl, usw. (vgl. auch Abb. 1.4 und 1.5).

Die 'Definition' der Polygonalzahlen nach HYPSIKLES geht von arithmetischen Folgen aus. Diese Folgen werden erst durch das Hinzulegen von Rechensteinen zu einer figurierten Zahl. Erst die Summe der Folgenglieder bildet die Polygonalzahl. Die Beschreibung der figurierten Zahl erfolgt über eine Art Handlungsanweisung. Die Rückübersetzung der Beschreibung durch konkretes oder vorgestelltes Legen der Steinchen führt zu den figurierten Zahlen. Den Zahlen selbst sieht man die Handlung nur insofern an, als die Möglichkeit des Legens und Wegnehmens ihnen in der Musterform stets inhärent ist (vgl. DAMEROW/LEFÈVRE 1981).

Es gibt aber andere Belege, die PYTHAGORAS (580 - 500 v. Chr.) selbst mit einer 'Definition' der figurierten Zahlen in Verbindung bringen. Eine Anekdote, die LUCIAN wiedergibt, beschreibt PYTHAGORAS als einen Gelehrten, der das fortgesetzte Zählen, also die Folge der natürlichen Zahlen, mit den Dreieckszahlen in Verbindung bringt, d.h. der in der Gestaltung der Rechensteine denkt:

> *Pythagoras told someone to count. He said 1, 2, 3, 4, whereon Pythagoras interrupted, 'Do you see? What you take 4 is 10, a perfect triangle and our oath'. This connects the knowledge of triangular numbers with true Pythagorean ideas.* (HEATH 1921, 77)



Dreieckszahlen dargestellt als Summe der Folge der natürlichen Zahlen.

Abb. 1.4

Der Zählprozess wird im Muster durch fortlaufendes Anlegen der nächst genannten Anzahl interpretiert. So kann in der Dreiecksfigur[13] letztlich beides, die Zählzahlfolge (1, 2, 3, 4) und die Summe (1+2+3+4), abgelesen werden. Diese Anlegeprozesse sind grundsätzlich immer fortsetzbar.

Figurierte Zahlen sind somit bei den Griechen stets durch zwei Eigenschaften gekennzeichnet: Sie können als ein eher statisches Bild von einer geometrischen Anordnung von bestimmten Anzahlen und als fortsetzbarer Prozess des Legens und Anlegens interpretiert werden.

Mathematische Tätigkeiten in figurierten Zahlen

In der pythagoreischen Schule wurden diese Muster in vielfältiger Weise genutzt und arithmetische Zusammenhänge aufgezeigt (vgl. KLINE 1972). Im Weiteren werden prägnante Beispiele der griechischen Mathematik betrachtet, die die mathematischen Tätigkeiten, die in figurierten Zahlen

[13] Die besondere Bedeutung der 'Zehnzahl', die in der Form eines Punktmusterdreiecks auch als Zeichen der PYTHAGOREER bekannt ist und in der Anekdote als 'Schwur' der PYTHAGOREER bezeichnet wird, wurde erst im 5. Jh. v. Chr. ausgebildet (CAPELLE 1935). Dieser kam eine esoterische Bedeutung zu. Die Vollkommenheit der Zehn wurde sogar in Gebeten formuliert. So geben PEIFFER/DAHAN-DALMEDICO (1994, 41) folgenden Text wieder: „Segne uns, göttliche Zahl, die du die Götter und die Menschen hervorgebracht hast! Oh heilige, heilige Tetraktys, die du die Wurzel und die Quelle des ewigen Flusses der Schöpfung enthältst! Weil die göttliche Zahl mit der reinen und tiefen Einheit beginnt und schließlich die geheiligte Vier erreicht; endlich gebiert sie die Mutter von allen, die alles vereinigt, die Erstgeborene, die niemals sich verändert, die niemals müde wird, die heilige Zehn, die den Schlüssel zu allen Dingen in sich trägt." Dieses Gebet zeugt von der tiefen, spirituellen Verbindung der PYTHAGOREER zu den Zahlen. Auch in der christlichen und buddhistischen Kultur zeigt die Gabe von exakt Zehn Geboten (GALLING 1962), dass der Zahl Zehn eine heilige Bedeutung zugesprochen wird. Diese Verehrung der Zehnzahl der PYTHAGOREER ergibt sich auch aus den mathematischen Erkenntnissen. In der Tetraktys verbergen sich Zahlenmuster, die wieder auf andere Lebensbereiche referieren (z.B. vier Saiten der Lyra; vgl. VAN DER WAERDEN 1979).

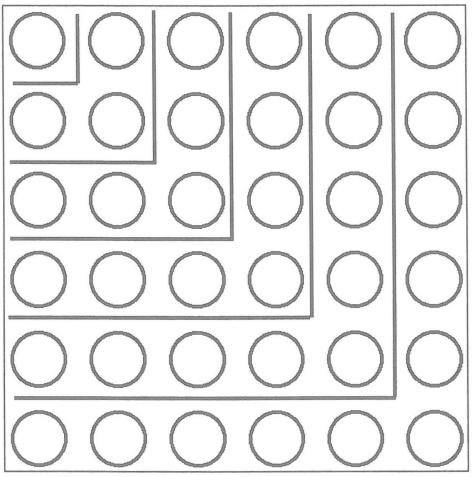
liegen, verdeutlichen. Es wird das Explorieren, Argumentieren und Formulieren explizit an prägnanten Beispielen dargestellt. Alle Beispiele sind im Zusammenhang zu verstehen und beinhalten stets alle drei Aspekte der mathematischen Tätigkeit, auch wenn diese nicht explizit aufgeführt werden.

- *Explorieren* von Mustern der figurierten Zahlen

In den aufgeführten 'Definitionen' wurde bereits deutlich, dass das Legen der Folge der natürlichen Zahlen in Steinchenmustern zu den *Dreieckszahlen* führt. Diese Idee des musterhaften Anordnens kann weiter exploriert werden: So wird z.B. ersichtlich, dass das fortgesetzte, gleichmäßige Anlegen von ungerade vielen Steinchen an einen ersten Anfangsstein stets zu einer quadratischen Form führt. Es liegt die Vermutung nahe: Die Summe der ersten n Glieder der Folge der ungeraden Zahlen ist die n-te *Quadratzahl*.

Der Beweis beruht auf einer systematischen Folge von Operationen:

Der Ausgangspunkt des Legeprozesses ist ein einzelner Stein. Um den ersten Stein wird die nächste ungerade Zahl (3) angelegt. Dies wird fortlaufend mit dem nun entstanden Muster wiederholt. Das Anlegen der Steine erfolgt geordnet:



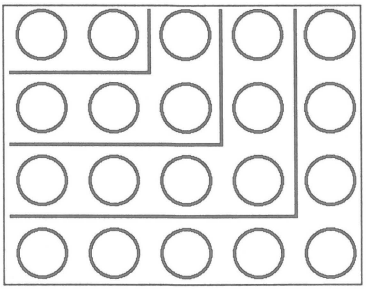
Quadratzahlen als Summation der ungeraden Zahlen 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7 usw.

Abb. 1.5

Wird zum Anfangsglied 1 stets die nächste ungerade Zahl addiert, so ergibt sich in der Figur immer ein Quadrat. Das Anwachsen der Summe kann durch

die Handlung des Anlegens von Steinchen oder Punkten sofort überblickt werden. Die Winkel in Abb. 1.5, die jeweils die nächste Anzahl von zugefügten Punkten verdeutlichen, sind unter dem Namen Gnomone bekannt.

Die Operationen, die zu einer Quadratzahl führen, können leicht abgewandelt und dann neu exploriert werden. Bestehen die Gnomone aus Anzahlen gerader Punkte, so ergeben sich wiederum figurierte Zahlen: die *Rechteckszahlen* (Abb. 1.6). Die Rechteckszahlen können zahlentheoretisch durch die Folge dargestellt werden, deren erstes Glied 2 ist und deren Zuwachs sich jeweils um 2 erhöht, d.h. dass der Zuwachs der Folge der geraden Zahlen folgt. Andere Darstellungen sind durch Produkte möglich 1·2, 2·3, 3·4, 4·5, ... oder durch direktes Aufzählen der entstandenen Werte 2, 6, 12, 20 ...



Rechteckszahlen als Summation der geraden Zahlen 2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6+8 usw.

Abb. 1.6

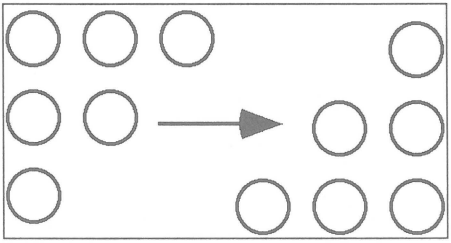
Das konkrete oder gedachte, musterhafte Anlegen von gleichartigen Gnomonen an eine Ausgangskonfiguration ermöglicht also das Auffinden von Polygonalzahlen. Dies gilt auch für Fünfeck-, Sechseckzahlen oder jedes andere Vieleck. Die Ausgangsfigur kann dabei aus einem einzigen Steinchen oder aus zweien bestehen.

- *Argumentieren* mit Mustereigenschaften von figurierten Zahlen

Figurierte Zahlen stehen auch untereinander in Beziehung. Diese Beziehungen verdeutlichen die Strukturhaftigkeit der Mathematik auf zahlentheoretischer Ebene ebenso wie in der geometrischen Darstellung durch Rechensteinchen. Gerade in der Handlung des Legens der Zahlen oder umgekehrt

in der Zerlegung bereits gelegter Figuren können einige Beziehungen auf offensichtliche Weise 'bewiesen'[14] werden.

So können z.B. Rechteckszahlen zerlegt werden: Ein Rechtecksmuster kann in zwei gleiche Dreiecksmuster zerlegt werden, bzw. zwei gleiche Dreiecksmuster können zu einem Rechtecksmuster zusammengeschoben werden. Es kann argumentiert werden: Rechteckszahlen der Form n(n+1) sind die Summe zweier gleicher Dreieckszahlen, wie Abb. 1.7 verdeutlicht.



Zwei Dreieckszahlen bilden eine Rechteckszahl: z.B. $D_3+D_3=R_3$.

Abb. 1.7

Diese Argumentation ist auf alle Rechteckszahlen zu verallgemeinern, da das Muster der n-ten Rechteckszahl die gleichen Eigenschaften hat, wie das Muster der im Beispiel gezeigten dritten Rechteckszahl (vgl. Abb. 1.8):

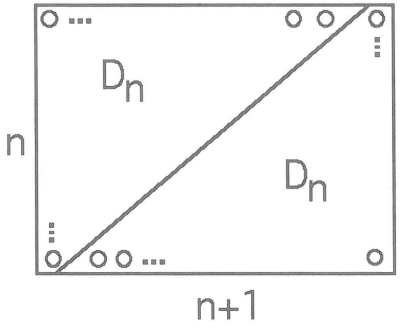
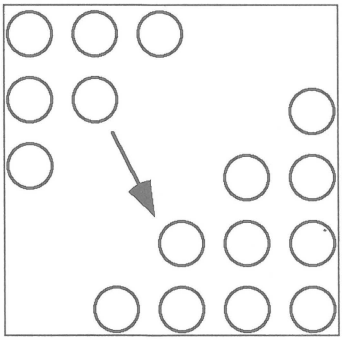


Abb. 1.8

Analog können weitere Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Polygonalzahlen an den Mustern aufgezeigt werden. Auch Quadratmuster

[14] Dass diese scheinbar anschauliche Argumentation mit Rechensteinbildern ein exakter Beweis ist, wird später noch genauer geklärt.

können z.B. aus zwei Dreiecksmustern, die in diesem Fall jedoch nicht gleich sind, zusammengesetzt werden.[15]

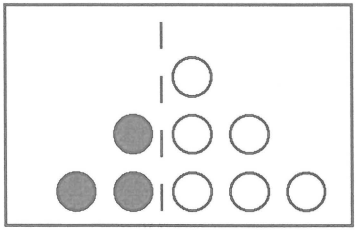


Zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen bilden eine Quadratzahl: z.B. $D_3+D_4=Q_4$.

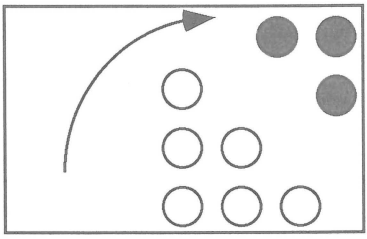
Abb. 1.9

Die Argumentationen in diesem Beispiel sind wiederum verallgemeinerbar.

Die Muster der figurierten Zahlen lassen oft auch unterschiedliche Zugänge zu. So kann eine Quadratzahl auch als sogenannte 'Treppenzahl' gelegt werden und umgekehrt. An den 'Treppenzahlen' können die zwei Dreieckszahlen zunächst unmittelbar abgelesen werden, bevor die beiden 'Treppenhälften' dann durch Umlegen in eine Quadratform umgewandelt werden (vgl. Abb. 1.10):



Die dritte 'Treppenzahl' besteht aus D_2 und D_3.



Das Umlegen von D_2 zeigt, dass die Treppenzahl eine Quadratzahl (Q_3) ist.

Abb. 1.10

Die Handlung des Umlegens kann an konkreten, repräsentativen Beispielen ausgeführt werden. Die Argumentationen sind jedoch stets dann allgemein-

[15] THEON beschreibt den Satz, dass jede Quadratzahl aus zwei Dreieckszahlen zusammengesetzt ist (vgl. HEATH 1921, 83).

gültig, wenn sie nur von den Mustereigenschaften ausgehen und fortsetzbare Operationen beinhalten, die für *alle* Dreieckszahlen, Quadratzahlen oder Rechteckszahlen gelten.

- *Formulieren* mit figurierten Zahlen

Figurierte Zahlen können in bestimmten Konstellationen zu Formulierungen in Gleichungen führen. Ebenso können Formeln als Zusammenspiel von figurierten Zahlen interpretiert werden. So beschreibt z.B. die folgende Gleichung eine Äquivalenz zwischen einer Quadratzahl (mit der Kantenlänge 2n+1) und acht Dreieckszahlen plus einem zusätzlichen Punkt:

$$8 \cdot 1/2\, n\,(n+1) +1 = 4\, n\,(n+1) +1 = (2n+1)^2$$

Da die Dreieckszahlen zu Rechtecken zusammengefasst werden können (vgl. Abb. 1.8) , bleibt zu zeigen, dass vier Rechtecke der Größe n(n+1) und ein zusätzlicher Punkt ein Quadrat der Kantenlänge 2n+1 ergeben (vgl. HEATH 1921, 84):

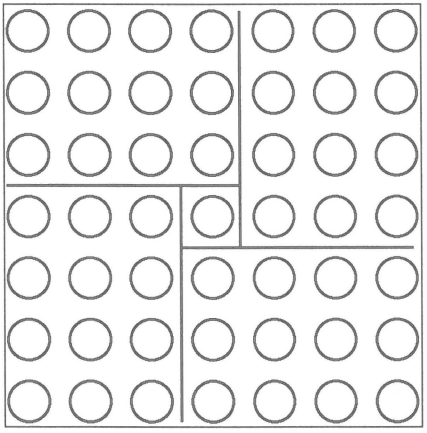


Abb. 1.11

In der Abb. 1.11 werden vier Rechteckszahlen der Form 3·4 derart zusammengelegt, dass ein Quadrat der Kantenlänge 7 entsteht. Die Rechtecke lassen in der Mitte genau einen Platz für einen zusätzlichen Punkt frei. Da es nur auf die Rechtecke und nicht auf ihre 'Größe' ankommt, kann die Konstruktion immer durchgeführt werden. Es entsteht stets ein Quadrat der Kantenlänge n+n+1=2n+1.

Die hier aufgeführten, ausgewählten Beispiele verdeutlichen, dass die mathematischen Operationen an und mit figurierten Zahlen die Elemente des Explorierens, Argumentierens und Formulierens voll repräsentieren.

Spätere Erweiterungen der Überlegungen

Die in den Beispielen aufgezeigten Besonderheiten der figurierten Zahlen wurden auch nach der Blütezeit der Pythagoreer weiter genutzt und vertieft.

Das heißt einerseits, dass spätere Aufzeichnungen von NIKOMACHOS[16] (1./2. Jh. n. Chr.) oder DIOPHANT (um 250 n. Chr.) die altgriechischen Ideen aufgriffen und erweiterten, und andererseits, dass die benutzte Begriffe (Gnomon, Rechteck, ...) weiter gefasst und verallgemeinert wurden.

In der 'Einführung in die Arithmetik'[17] des Neupythagoreers NIKOMACHOS können Aufzeichnungen zu figurierten Zahlen gefunden werden. Hierin findet sich ein vorher noch nicht erwähntes Zahlenmuster, das pythagoreische Zahlenfeld (Abb. 1.12).

Wie in einer Maltafel werden die Aufgaben von 1·1 bis 10·10 aufgeführt. Innerhalb der Zeilen und in den Diagonalen und Spalten sowie in ausgesuchten Ausschnitten des Feldes lassen sich verschiedene Muster und Zahlbeziehungen finden.

---

16 NIKOMACHOS (in der englischen Schreibweise der zu Grunde gelegten Literatur auch NICOMACHUS), ein Vertreter der Neupythagoreer, war von den Ursprüngen der Lehre PYTHAGORAS' ebenso beeinflusst wie von der Philosophie PLATONS (vgl. ROBBINS/KARPINSKI 1926 und NICOMACHUS 1926). „Die ganze Tendenz geht dahin, die Philosophie des `Pythagoras` mit der von Platon und Aristoteles zu einer Synthese zu verschmelzen" (VAN DER WAERDEN 1979, 298). Dabei traf NIKOMACHOS mit seiner Verquickung von Mystik, Philosophie und Mathematik genau den Puls seiner und der nachfolgenden Zeit. Seine Werke blieben noch bis in das Mittelalter von hohem Interesse. „The Introditio was the standard text in arithmetics for a thousand years" (KLINE 1972, 138).

17 Es gibt unterschiedliche Einschätzungen zur Originalität dieses Werkes. THEON von Smyrna und NIKOMACHOS gelten nicht als Mathematiker, sondern als Philosophen (MESCHKOWSKI 1984, 23). Einige Autoren sehen in dieser 'Einführung' nur ein Kompendium bereits vorhandener Sätze und Zahlbeziehungen (GERICKE 1996), da keinerlei Beweise gegeben werden. KLINE (1972, 137) gibt jedoch zu bedenken, dass NIKOMACHOS über die Ideen der PYTHAGOREER hinausgeht: „He goes beyond the Pythagoreans in seeing, though not proving, general relations."

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Abb. 1.12

Die Dreieckszahlen (Δ) lassen sich in einem bestimmten Rhythmus finden, die Quadratzahlen (□) in der Hauptdiagonalen usw. Bei NIKOMACHOS erscheinen die Zeilen und Spaltenüberschriften nicht gesondert.

In den Aufzeichnungen von NIKOMACHOS werden Formeln für die Beschreibung figurierter Zahlen genutzt. Diese Formeln enthalten die Handlungsanweisungen des Legens, Umlegens und Interpretierens der Muster.

Bei der Betrachtung von figurierten Zahlen in einer Art Tabelle entdeckt NIKOMACHOS weitere Beziehungen zwischen Rechteckszahlen, Quadratzahlen, Dreieckszahlen usw. NIKOMACHOS nutzt bei der geometrischen Anordnung von Zahlen alle drei Dimensionen. Er nennt lineare Anordnungen, flächige (Dreieckszahlen, Quadratzahlen etc.) und dreidimensionale (Kubikzahlen etc.).

DIOPHANT geht in seinen Rechnungen noch weiter als NIKOMACHOS und die frühen Griechen. Er löst sich von der Vorstellung einer Zahl als geometrisch repräsentiertes und repräsentierbares Objekt und kann so mehr als drei Faktoren multiplizieren (vgl. KLINE 1972). In seiner 'Arithmetik' zeigt

DIOPHANT viele weitere Bezüge der figurierten Zahlen auf (vgl. CZWALINA 1952).

Die Erweiterungen und Verallgemeinerungen können nicht nur an der Mehrdimensionalität oder an der komprimierten Darstellung der figurierten Zahlen im pythagoreischen Zahlenfeld nachgewiesen werden, sondern auch bei der Nutzung von einzelnen Begriffen:

Der Begriff der Rechteckszahl[18] war bei THEON von Smyrna und NIKOMACHOS auf Zahlen beschränkt, die sich um 1 unterscheiden, während PLATON und ARISTOTELES damit jede Zahl benannten, die aus zwei ungleichen Faktoren zusammengesetzt ist (vgl. HEATH 1921, 83).

Der Begriff des Gnomons, der ursprünglich ein astronomisches Messgerät (Sonnenuhr), später ein Instrument zum Zeichnen rechter Winkel bezeichnete, wurde zunehmend allgemeiner in Bezug auf figurierte Zahlen benutzt: Zunächst wurde die Figur damit bezeichnet, die übrig bleibt, wenn ein kleines Quadrat aus einem größeren ausgeschnitten wird. Später wurde dieser Ansatz von EUKLID[19] auf andere Formen, auch auf Parallelogramme, verallgemeinert (vgl. HEATH 1921, 78 f.). So wird heute - nach HERON VON ALEXANDRIA - mit Gnomon dasjenige bezeichnet, was, addiert zu einer Zahl oder Figur, diese wieder ähnlich zur ersten macht.

---

[18] Es fällt auf, dass die Rechteckszahlen niemals im Verhältnis n:(n+1) gleich sind, während bei den Quadratzahlen immer wieder gleiche Verhältnisse entstehen. Einige Autoren sehen hier den Grund dafür, dass die Griechen die ungeraden Zahlen 'begrenzt' nannten, während sie die geraden Zahlen mit 'unbegrenzt' bezeichneten (HEATH 1921, 82 - 83, vgl. auch MESCHKOWSKI 1984, 26). Die Bezeichnung der Zahleigenschaften wurde also direkt aus der geometrischen Handlungserfahrung und der daraus resultierenden Phänomene abgeleitet.

[19] In den Elementen des EUKLID wird ein Fragment über die Polygonalzahlen vermutet. Es ist jedoch strittig, ob es jemals existiert hat. NESSELMANN verneint dies, während HANKEL und CANTOR von der Existenz dieses Fragments ausgehen (vgl. GOW 1884, 102).

Insgesamt lassen sich aus den historischen Wurzeln der figurierten Zahlen folgende Punkte festhalten:

- 'Erweiterung' und Verallgemeinerung

Die Darstellung der natürlichen Zahlen in Punkt- oder Steinchenmustern erlaubt zunächst eine erste Kategorisierung der Zahlen: Die Unterscheidung der Zahlen in gerade und ungerade.
Bei der Anordnung von Folgen konstanter Differenz in geometrische Formen ist ein spezifisches Vorgehen zu erkennen, das zunächst zu den Dreieckszahlen, dann zu den Quadratzahlen, den Fünfeckszahlen usw. führt.
Diese Erweiterung einer Idee lässt sich ebenfalls bei den betrachteten Dimensionen der Figuren wiederfinden. Zunächst werden lineare, dann flächige und schließlich dreidimensionale Anordnungen untersucht (vgl. NIKOMACHOS). Die Verallgemeinerung wird weiter fortgesetzt durch die theoretische Beschreibung mehrdimensionaler Anordnungen, z.B. durch DIOPHANT.
Auch bei speziellen Beschreibungen von figurierten Zahlen ist dieselbe 'Ausdehnung' an Beispielen offensichtlich:
(i) Die Bezeichnung Gnomon, die zunächst nur für Quadratzahlen galt, wird für allgemeine Parallelogramme verallgemeinert (vgl. EUKLID).
(ii) Der Begriff Rechteckszahl wird zunächst für n(n+1)-Formen benutzt und später für die geometrische Anordnung von beliebigen Produkten aus zwei Faktoren verwendet (vgl. PLATON und ARISTOTELES).

- Mathematisieren - Explorieren - Argumentieren - Formulieren

Die figurierten Zahlen sind ein Beispiel für einen mathematischen Prozess, der zu einer Theorie führt:

Die Darstellung von bestimmten Zahlen in Form von ψῆφοι - Mustern bei den Griechen ermöglichte die Exploration der Eigenschaften der gelegten Muster, ihrer Erzeugungsprozesse und der möglichen Fortsetzungen und Transformationen der figurierten Zahlen. Die Erkenntnisse führten zu theoretischen Überlegungen, die durch Argumentationen untermauert sind. Die Entdeckungen wurden formuliert, systematisiert und später auch in Formeln (vgl. NIKOMACHOS / DIOPHANT) niedergeschrieben.

ψῆφοι – *(Steinchen–) Beweise als Beweise*

Überlegungen zu figurierten Zahlen sind Argumentationen, die zu Formulierungen führen. DAMEROW/LEFÈVRE sehen hierin die „heuristische Leistungsfähigkeit der ψῆφοι - Arithmetik" (1981, 136), die allgemein anerkannt wird. Die allgemeingültige *Beweis*kraft der dargestellten Operationen wurde jedoch oft nicht anerkannt. Figurierte Zahlen, die als 'fundamentaler Inhalt der antiken Mathematik' gelten (vgl. GOW 1884, 88), werden in ihrer Bedeutung für Mathematik als Wissenschaft unterschiedlich gesehen. Diskutiert wird vor allem, ob die figurierten Zahlen Ausdruck eines empirisch-anschaulichen Mathematikverständnisses sind oder ob sie darüber hinausweisen und eine Grundlage der Zahlentheorie und der Mathematik als Wissenschaft von den Mustern darstellen.

In den Anfängen der pythagoreischen Schule fand sich das Phänomen, dass Beweise an Spezialfällen aufgehängt wurden. Die Darstellung im Steinchenmuster verführt heute oft dazu, nur die Einzelfälle als 'bewiesen' oder gezeigt zu akzeptieren und die Allgemeingültigkeit, die den Operationen inhärent ist, zu übersehen.

In der vom Formalismus[20] geprägten Phase der Mathematikgeschichte wurden diese Beweise missbilligt. Die heutige, veränderte Sicht der Mathematik, die in Kap. 1.1 bis 1.4 aufgezeigt wurde, lässt die ψῆφοι - (Steinchen-) Arithmetik der Griechen jedoch in einem anderen Licht erscheinen.

SZABÓ versucht, dem griechischen Verständnis des Beweises durch die Analyse der Wortbedeutung von 'deiknymi' auf die Spur zu kommen. Dies Wort bedeutet ursprünglich „'zeigen', wie auch 'durch Worte zeigen', 'erklären'" (SZABÓ 1958, 107).

---

[20] Die formalen Sprachen wurden im späten 19. Jh. von FREGE und PEANO eingeführt. In den fünfziger und sechziger Jahren breitete sich der Einfluss des Formalismus, nicht zuletzt durch Veröffentlichungen der BOURBAKI-Gruppe, bis in die Mathematikausbildung an Hochschulen und Schulen aus (vgl. z.B. DAVIS/HERSH 1996, 138 ff. und 356 ff.).

Er schließt sich der Meinung anderer Forscher an, die in den Anfängen der Mathematik der Empirie ein starkes Gewicht zubilligen[21]. Empirisches Wissen heißt: aus eigener Anschauung Bescheid wissen – Augenzeuge sein, das bedeutet wiederum, dass „das konkrete Zeigen, das Sichtbarmachen eine sehr wichtige Rolle gespielt haben" (SZABÓ 1958, 109).

Einige berühmte andere Belege stützen diese Interpretation, wie z.B. der Dialog des Menon, bei dem die Sandzeichnung eine besondere Rolle spielt, oder der Beweis des Satzes von Thales durch die 'Deckungsmethode' (vgl. SZABÓ 1958, 111-112 und 116).

Die Wissenschaft der Griechen blieb aber nicht bei der bloß anschaulichen Evidenz stehen. In der griechischen Philosophie, so SZABÓ, sowie in der eng mit ihr verbundenen Mathematik, wurde das Bemühen deutlich, über Anschauung hinauszugelangen. Da die Beweise der Griechen auf den ersten Blick jedoch oft sehr 'anschaulich' wirken, ist diese Tendenz nicht immer offensichtlich.

Findet sich z.B. bei EUKLID ein Beweis zum Satz über die Addition von geraden und ungeraden Zahlen mit einer 'Veranschaulichung' durch Strecken, so wird erst im Nachhinein deutlich, dass diese Strecken für den Beweis an sich unbrauchbar sind. Der Repräsentation der Zahlen durch geometrischen Strecken ist genau das Spezifikum abhanden gekommen, das für den Beweis ausschlaggebend wäre - wenn man ihn anschaulich führen wollte. SZABÓ vermutet, dass „ursprünglich dieselben Sätze wohl mit Rechensteinen (...) veranschaulicht wurden" (SZABÓ 1958, 119). In der Steinchendarstellung ist eine gerade und eine ungerade Zahl unterscheidbar, dies gilt für die Streckendarstellung nicht mehr (vgl. auch DAMEROW/LEFÈVRE 1981, 138 f.).

---

[21] Ursprünglich wurden mathematische Entdeckungen wie empirische Fakten behandelt, die keiner weiteren Untersuchung oder Nachprüfung bedurften (vgl. PEIFFER/DAHAN-DALMEDICO 1994). Zumindest kann man sich des Eindrucks nicht erwehren, dass die Niederschrift von Beweisen in der Frühzeit der Mathematik nicht fundamental war, sondern dem Formulieren von Entdeckungen mehr Beachtung geschenkt wurde. So berichtet KLINE (1972, 14) über die Babylonier: „The concept of proof, the notion of a logical structure based on principles warranting acceptance on one ground or another, and the consideration of such questions as under what conditions solutions to problems can exist, are not found in Babylonian mathematics."
Erst als die Philosophie den Weg eingeschlagen hatte, einen Unterschied zwischen der greifbaren Realität und der Theorie zu machen, konnten Überlegungen außerhalb der gegenständlichen Welt oder zumindest weit darüber hinaus weisend angestellt werden (vgl. PLATON 'Höhlengleichnis', Der Staat, VII. Buch). Wenn jedoch das Unmögliche denkbar wird, dann musste für eine Aussage viel mehr unter Beweis gestellt werden als das, was in einer Zeichnung oder in einer Demonstration doch augenscheinlich zu sein schien. Die reine Erfahrung reichte nicht mehr aus.

> *Durch Euklids Art zu 'veranschaulichen' ist der ursprüngliche Sinn des konkreten Sichtbarmachens - mindestens in dem geprüften Fall - so gut wie völlig zerstört.* (SZABÓ 1958, 120)

SZABÓ (1958) begründet die Abkehr von den Rechensteinen dadurch, dass mit den Steinen nur bestimmte, konkrete Zahlen darstellbar waren (vgl. hierzu spätere Kritik DAMEROW/LEFÈVRE 1981).

Auch nach REIDEMEISTER (1972) wurden die figurierten Zahlen nur als geläufige elementare Methode genutzt und nicht zur wissenschaftlichen Erkenntnis. Das heißt, für ihn gehört die Loslösung von den Repräsentanten unabdingbar zur Theorieentwicklung. Er betrachtet jedoch die Vorstellung, das Wesen der griechischen Mathematik sei die Anschaulichkeit, als „weitverbreitetes Vorurteil" (in DAMEROW/LEFÈVRE 1981, 137).

Richtig ist, dass die Arithmetik sich mit Objekten (den Zahlen) befasst, die weiter reichen als die beispielhaft durch Steine oder auch Zahlsymbole repräsentierten: „Die Arithmetiker sprechen eigentlich von Zahlen, die man nur denken kann, und welche anders als auf gedanklichem Wege gar nicht zugänglich sind" (PLATON in SZABÓ 1958, 124).

Deshalb wandte sich der Beweis von dem direkten Veranschaulichen ab und wandelte sich zu einem indirekten, der nach SZABÓ (1958) auf PARMENIDES zurückzuführen ist.[22] Diese Logik reicht weiter als das augenscheinliche Darstellen durch geometrische Strecken, Rechensteine o.ä.

> *Parmenides: ... gebrauche den Verstand statt deiner Augen und sieh das noch so Ferne gleichwohl mit dem Verstande sicher gegenwärtig ...* (SZABÓ 1958, 122)

Das 'geistige' Auge ersetzt das physische. Aber auch bei dieser Anschauung, der im Geiste, wird der gleiche Begriff in den Schriften verwandt. Deshalb, so SZABÓ, kann es zu Missverständnissen kommen. Der Beweis selbst fand zunehmend auf gedanklicher Ebene statt. Gleichzeitig kann jedoch das 'Sichtbarmachen' in der Beweisführung durchschimmern und so zu dem Urteil führen, dass die Beweise hauptsächlich auf Anschauung gestützt waren, was jedoch nicht der Fall ist (vgl. SZABÓ 1958, 131). Erst mit

---

22 PARMENIDES war stark beeinflusst von der Philosophie der Eleaten (vgl. SZABÓ 1958). Die Widerspruchsfreiheit als Kriterium für die Wahrheit ebnete den Weg für den indirekten Beweis: „Man versteht diese Einstellung erst dann, wenn man daran denkt, wie die Logik der Eleaten zustande kam. Sie war nämlich keine Quintessenz der praktischen Erfahrung und der sinnlichen Wahrnehmung, sondern sie musste sich eben gegen diese behaupten" (SZABÓ 1958, 129).

der Zeit wurden logische Schlussfolgerungen und Beweise im heutigen Sinne deutlicher, die manche Autoren erst als 'legitime Beweise' bezeichnen:

> *The most likely conclusion about proof in Pythagorean geometry is that during the most of the life of the school the members affirmed results on the basis of special cases, much as they did in their arithmetic. However, by the time of the late Pythagoreans, that is, about 400 B.C., the status of proof had changed because of other developments; so these latter-day members of the brotherhood may have given legitimate proofs.* (KLINE 1972, 34)

Die oben zitierte Einschätzung KLINEs ist strittig. Die 'anschaulichen Beweise' der frühen Pythagoreer waren in der damaligen Zeit anerkannt, da sie in der Kommunität der pythagoreischen Schule nicht weiter formalisiert werden mussten. Ein Beweis kann grundsätzlich dann als gültig anerkannt werden, wenn er in der Gemeinschaft verständlich und den Konventionen gemäß formuliert wurde und keine falschen logischen Schlüsse enthält.[23] Damit ist er nicht dagegen gefeit, dass Widerlegungen gegen seine Schlussfolgerungen gefunden werden können. Diese Widerlegungen können jedoch auf der gleichen Abstraktionsebene gefunden und angeführt werden und bedürfen nicht zwingend einer anderen Formalstufe. Ebenso wurde schon deutlich herausgearbeitet, dass die vermeintliche Anschaulichkeit nicht an den repräsentierten Steinen verhaftet ist, sondern nur ein Abbild einer Prozessfolge von Operationen darstellt. Die Operationen sind es, auf die sich der Beweis gründet.

Auch die Griechen kehrten jedoch von verbalen Schlüssen ab und wandten sich einer Theorie des Beweises zu. Nach PEIFFER/DAHAN-DALMEDICO (1994, 47) liegt diese Abkehr bei PLATON begründet:

---

[23] Gerade die Anfänge der griechischen Mathematik sind für diese Arbeit beachtenswert. Die Begründungen und Beschreibungen von Zahlenmustern, die hier später von Schülerinnen und Schülern untersucht werden, können in ihrer Schlüssigkeit eine ähnliche Beweiskraft aufweisen, wie z.B. EUKLIDs Überlegungen, die sich auch an Zeichnungen orientiert haben und 'offensichtliche' Punkte gar nicht diskutierten. Man kann hier von einem 'lokalen Argumentieren' (vgl. Kap. 3) sprechen, das zunächst nicht den Anspruch genereller Allgemeingültigkeit erhebt, sondern einzelne Phänomene und Zahlbeziehungen beschreibt und zu begründen versucht.

> *Diese Auffassung der Mathematik, die von der physischen Welt getrennt ist, hat Konsequenzen hinsichtlich der Rolle eines Beweises: Jeder Bezug auf die Erfahrung ist von nun an untersagt. Die Anhänger Platons setzen sich für die ausschließliche Verwendung der deduktiven Beweisführung ein; diese Entscheidung verändert die Mathematik radikal.*

ARISTOTELES rückte das theoriegeleitete, an Deduktion gebundene Beweisbild PLATONS wieder zurecht, indem er dem μαθημα (Erkennen, Kennen lernen) einen wichtigen Stellenwert auf dem Weg zum ἐπίσταθαι (Verstehen) einräumte (vgl. auch SEIDL 1984, 31 ff.). Er gab aber keinerlei Wertung darüber, auf welchem Wege ein Beweis geführt wird. Deduktive und induktive Beweise waren gleichermaßen angesehen und möglich. PEIFFER/DAHAN-DALMEDICO (1994, 48) zitieren die Zweite Analytik (erstes Buch):

> *Alles vernünftige Lehren und Lernen geschieht aus einer vorangehenden Erkenntnis.*

Das Objekt der Erkenntnis war bei PLATON das 'Seiende' (nach REIDEMEISTER), demgegenüber war bei ARISTOTELES die Grundlage der Erkenntnis nicht die Tatsache eines Phänomens an sich (demonstratio quia), sondern das Wesen der Tatsache (demonstratio propter quid), das die Frage nach dem Warum beinhaltet (vgl. HIRSCHBERGER 1965). Der Blick führte also hinter die augenscheinlichen Gegebenheiten zu den grundlegenden Mustern und Strukturen der Sache oder des 'Bezeichneten'. Nicht das statische Bild der figurierten Zahl, sondern die Operationen, die das Bild nur ansatzweise widerspiegeln kann, haben Beweiskraft.

DAMEROW/LEFÈVRE (1981, 136) verdeutlichen dies klar:

> *Wir sehen also, daß die älteren Pythagoreer die* ψῆφοι *nicht zum Rechnen benutzten. (...) Diese Beschäftigung mit den* ψῆφοι *war frei von den praktischen Zwecksetzungen, unter denen das gewöhnliche Steineln steht.*

Und an anderer Stelle:

> *Bei dieser Ausgangslage ließ sich mit den ψῆφοι nicht nur rechnen, sondern sie konnten auch dazu benutzt werden, die Zahlen als Zahlen zu untersuchen. Der „freie" Gebrauch der ψῆφοι durch die Pythagoreer bestand somit darin, daß sie das in der damaligen Rechenpraxis gebräuchliche Mittel der Repräsentation von Zahlen verwendeten, um das Abstraktum „Zahl" als Abstraktum zum Gegenstand ihrer Erkenntnistätigkeit zu machen.* (DAMEROW/LEFÈVRE 1981, 163 f.)

Die Steine oder besser die Operationen an den Steinen dienten somit der allgemeinen Erkenntnis und nicht nur der Beschreibung der Phänomene eines Spezialfalls. Die Beziehungen bestimmter Zahlen zueinander, die Muster, konnten mit den Steinen gelegt, untersucht und wegen der verallgemeinerbaren Operationen bewiesen werden. Die Bindung an die konkrete Darstellung wurde gerade durch die Steine abgelegt und nicht gefestigt. Die theoretische Erkenntnis wurde durch die handelnde Tätigkeit mit den Rechensteinen ermöglicht.

> *Wir haben gesehen, welche verblüffenden Einsichten in arithmetische Gesetzmäßigkeiten den figurierten Zahlen abzugewinnen sind. Was aber den figurierten Zahlen keinesfalls abzulesen ist, das sind Einsichten in die Gesetzmäßigkeiten der Erzeugungshandlungen (...). Diese Handlungen sind vielmehr in jeder gelegten Flächenzahl verschwunden. Einsicht ist hier also nicht durch weitere erzeugende Legungen zu gewinnen, sondern nur durch die Reflexion auf das erzeugende Legen mit diesen spezifischen Elementen selbst. Diese Reflexion auf das erzeugende Legen selber setzt nun aber voraus, daß die Erzeugungshandlungen nicht jeweils in der gelegten Zahl als Produkt erlöschen, sondern eine Daseinsweise haben, die den Legeakt überdauert. Diese dauerhafte Daseinsweise können sie, ihrer Natur als Akte entsprechend, nur in einem Repräsentanten haben. Wenn nun die Sprache der Reflexion auf das erzeugende Legen die Erzeugungshandlungen dauerhaft und gegenständlich repräsentiert, so erfüllt sie damit die Funktion eines spezifischen Erkenntnismittels. Die gesetzmäßigen Beziehungen zwischen den Erzeugungshandlungen und den spezifischen Elementen dieser Arithmetik können entdeckt und selbst sprachlich abgebildet werden, weil es der Erkenntnis möglich ist, sich auf diese Erzeugungshandlungen und ihren Zusammenhang als Gegenstand zu beziehen, wenn die Handlungen in der Sprache gegenständlich repräsentiert sind.* (DAMEROW/LEFÈVRE 1981, 146)

Das spielerische Ausprobieren und Operieren am Einzelfall und hypothetisch in der gedanklichen Bearbeitung, dargestellt durch Rechensteine, ist somit als mathematische Tätigkeit des Beweisens nachgewiesen.

Bedeutung für Unterricht im heutigen Mathematikverständnis

In diesem kurzen Abschnitt zu den figurierten Zahlen konnte deutlich gemacht werden, dass die Steinchen- oder Punktmuster weit mehr darstellen als die Repräsentation konkreter Anzahlen.

Die hier dargelegte Vorgehensweise der Griechen ist übertragbar auf die Handlungsweisen im Elementarunterricht heute.[24] Die Darstellung im Muster gibt nicht ein statisches, empirisch-anschauliches Bild, ein *Produkt*, wieder, sondern bildet einen 'Akt' ab, der in der Reflexion der *Operationen* Erkenntnis vermittelt (vgl. z.B. DAMEROW/LEFÈVRE 1981).

Die Beweise sind an Handlungen geknüpft und werden von WITTMANN als operative Beweise bezeichnet:

> *Beweise, bei denen die den Objekten durch Konstruktion aufgeprägten Eigenschaften und Beziehungen sowie deren Verhalten bei Operationen explizit ausgenutzt werden, nennt man operative Beweise.* (WITTMANN 1985, 11)

Die Punktmuster können im heutigen Unterricht durch Plättchen nachgebildet werden. Die Plättchen ermöglichen das Legen und Umlegen von Mustern. Die untersuchten Punktmuster werden gewissen Handlungen ausgesetzt und die Handlungsfolgen reflektiert. Die Operationen beziehen sich dabei nicht ausschließlich auf den gezeigten Einzelfall, sondern sind allgemeingültig für dieses bestimmte Muster.

> *The generality of the argument in an operative proof rests on the fact that the conclusions are not drawn from the special case but from the operations applied to the numbers involved. These operations are recognized as generally applicable to the whole class of cases.* (WITTMANN 1997, 20)

---

[24] WITTMANN gibt ein Beispiel einer Serie von Unterrichtsbeispielen, die den fundamentalen Ideen „Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile" und „arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster" folgen, und einen bruchlosen Übergang von der Arbeit mit rechteckigen Punktmustern im 2. Schuljahr zu der Auflösung quadratischer Gleichungen herstellt. (vgl. WITTMANN 1983b, 50 ff.).

Die Erklärung eines Phänomens läuft immer unter der Prämisse einer Einigung über übliche Konventionen, die ein Verständigen erleichtern sollen und nicht erschweren. WITTMANN/MÜLLER (1988, 253) beschreiben:

> *Die Stichhaltigkeit eines Beweises ergibt sich letzten Endes nicht, zumindest nicht nur, aus dessen formaler Darstellung innerhalb einer axiomatisch-deduktiven Systematik, sondern aus der intuitiven Kohärenz der im Beweis aufgezeigten begrifflichen Beziehungen und ihrer Übereinstimmung mit den Erfahrungen der Forscher.*

Es gilt also, ein Gleichgewicht zwischen einer möglichen Formalisierung und der Möglichkeit der Zugänglichkeit für die Beteiligten zu schaffen. Je nachdem, mit wem Mathematik betrieben wird und wer die Informationen verstehen soll, müssen und können unterschiedliche Abstraktionsgrade gewählt werden. Noch einmal sei betont, dass die heutige Mathematik keine Hierarchie mehr vorsieht, in der das Höchstmaß an Abstraktion und Formalismus über analogem Schlussfolgern gesehen wird.

Wenn eine produktorientierte, formalistische Mathematik die 'Offensichtlichkeit' der Argumentationen an Punktmustern gering schätzte, so eröffnen die Muster in der heutigen Sichtweise der prozessorientierten Mathematik intensive Anknüpfungspunkte an die Geschichte der Mathematik und die Anfänge der Mathematik als Wissenschaft, die sich auch in den Handlungen an Zahlenmustern aufzeigen lassen (vgl. z.B. CONWAY/GUY 1997).

Die Vorgehensweise der Griechen und die in der Natur der figurierten Zahlen liegenden Elemente des Explorierens, Argumentierens und Formulierens sind auch im heutigen Mathematikunterricht tragfähig.

Die Konkretheit der Darstellung von figurierten Zahlen durch Plättchen, die im Grundschulunterricht gebräuchlich sind, und die begreifbaren Handlungsmöglichkeiten dürfen nach diesen Erkenntnissen nicht zu dem Fehlschluss führen, die Exploration der figurierten Zahlen und ihrer Eigenschaften sei empirisch-anschaulich. HEFENDEHL-HEBEKER (1998) sieht in der Nutzung von Punkten, Steinen, Plättchen o.ä. statt den zu zählenden Objekten selbst einen Entwicklungsschritt zur Abstraktion, der als fundamental für die Mathematik beschrieben werden kann. Dieser fundamentale Inhalt der Elementarmathematik weist gerade über die reine Anschauung hinaus und eröffnet die Möglichkeit des Argumentierens und Formulierens in bewusster Reflexion der Operationen.

> *Das Überlegen spiegelt sich im Legen wider und umgekehrt. Vom Legen aus ist dabei ein günstiger Einfluß auf das Überlegen zu erwarten. Kinder sind es von ihren Spielerfahrungen her gewohnt, konkrete Objekte im Hinblick auf bestimmte Ziele zunächst einmal versuchsweise zu legen und sie, solange es nicht paßt, umzuplazieren. In dem Maße, in dem es gelingt, diesen experimentellen Charakter des Legens auf das Überlegen zu übertragen, trägt der Rechenunterricht zur Denkschulung bei.* (WITTMANN 1994, 44, Hervorh. i. O.)

Das aktiv-entdeckende Element liegt nicht allein im 'Ausprobieren' unterschiedlicher Formenmuster, sondern in der Möglichkeit, eigenständig zu reflektieren und theoretische Erkenntnisse über mathematische Muster zu machen und zu beweisen. Die Förderung der allgemeinen Lernziele (Explorieren, Argumentieren und Formulieren) wird durch die Untersuchung von Mustern optimal unterstützt (vgl. WITTMANN 1994, 44 f.).

2 Mathematische Aktivität als Spiel

> When I was very young - the earliest story I know - when I still ate in high chair, my father would play a game with me after dinner. He had brought a whole lot of old rectangular bathroom floor tiles from some place in Long Island City. We set them up on end, one next to the other, and I was allowed to push the end one and watch the whole thing go down. So far, so good.
>
> Next, the game improved. The tiles were different colors. I must put one white, two blues, one white, two blues, and another white and the two blues - I may want to put another blue, but it must be a white. You recognize already the usual insidious cleverness: first delight him in play, and then slowly inject material of educational value!
>
> Well, my mother, who is a much more feeling woman, began to realize the insidiousness of his efforts and said, „Mel, please let the poor child put a blue tile if he wants to." My father said, „No, I want him to pay attention to patterns. It is the only thing I can do that is mathematics at this earliest level." If I were giving a talk on „what is mathematics," I would already have answered you. Mathematics is looking for patterns.
>
> FEYNMAN (1995, 100)

Wie in der Einleitung formuliert, ist es die Grundthese dieser Arbeit, dass die neue Sicht der Mathematik als Wissenschaft von Mustern *pädagogisch* bedeutsam ist. Diese These wird im Folgenden begründet. Als Ausgangspunkt wird bewusst ein schriftliches Dokument eines Erstklässlers gewählt, das den spielerischen Umgang mit mathematischen Mustern in wunderbarer Weise verkörpert.

Zur pädagogischen Interpretation dieses Dokuments werden unterschiedliche Folien herangezogen:

- John DEWEYs Sicht des Denkens als Interdependenz von äußeren Produkten und inneren Gedanken (vgl. DEWEY 1993);
- Pädagogische Theorien des Spiels (vgl. HUIZINGA 1987, SCHEUERL 1994, FLITNER 1996, RÖHRS 1983 u.a.);
- Friedrich SCHILLERs Deutung des 'Spieltriebs' als Ausgleich zwischen 'Formtrieb' und 'Stofftrieb'(vgl. SCHILLER 1956 und 1967);
- Die Deutung von Ästhetik und von Unterricht als 'Performance' durch Gunter OTTO und Wolfgang LEGLER (vgl. OTTO 2000, LEGLER 1980).

Die unterschiedlichen Folien verweisen auf epistemologisch-psychologische, pädagogische, bildungsphilosophische und ästhetische Kategorien, die für eine Gesamtsicht des Dokuments bedeutsam sind. In der jeweiligen Interpretation wird auf einen Schwerpunkt fokussiert, ohne die vielfältigen Bezüge, die natürlich zwischen den Kategorien bestehen, zu leugnen. Die einzelnen Deutungen sind als perspektivische Betrachtung des Dokuments zu verstehen. Erst ein Zusammenspiel aller Perspektiven kommt dem Gehalt des Dokuments und somit einer Deutung der mathematischen Aktivität als Spiel nah.

2.1 Spiel mit mathematischen Mustern: Tims „Zahlenmauerbuch“

Zum Dokument

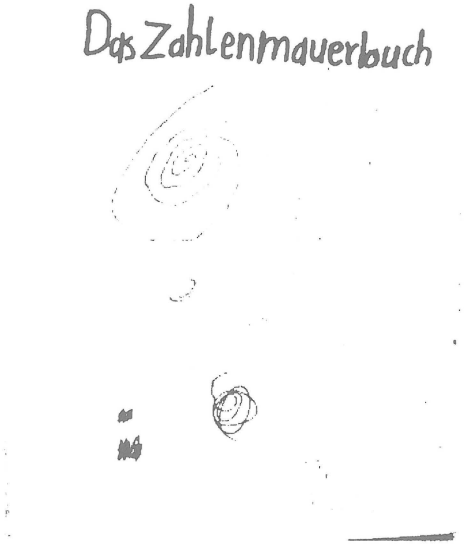


Abb. 2.1

Das „Zahlenmauerbuch“, das im Folgenden analysiert werden soll, ist auch insofern ein ganz bemerkenswertes Dokument, als es von dem 6-jährigen Tim LÜMKEMANN spontan ohne Anregung von außen gestaltet wurde. Es ist daher eine Eigenproduktion[25], die den produktiven Umgang von Kindern mit Mathematik authentisch zum Ausdruck bringt.

Das „Zahlenmauerbuch“ umfasst siebzehn Einzelseiten, die zu einem Heft zusammengefügt wurden (vgl. LÜMKEMANN 1995). Die erste Seite ist als Titelblatt gestaltet (Abb. 2.1). Auf jeder der folgenden sechzehn karierten

[25] Eine allgemeine Darstellung zur Definition und Bedeutung von Eigenproduktionen findet sich z.B. in SELTER 1994, 29 ff. und 1995, 138 ff.

Seiten ist jeweils unten eine einzige Zahlenmauer, aufgezeichnet (vgl. Abb. 2.2). Die Zahlenmauern lassen sich daher durch die Seitenzahl genau identifizieren.

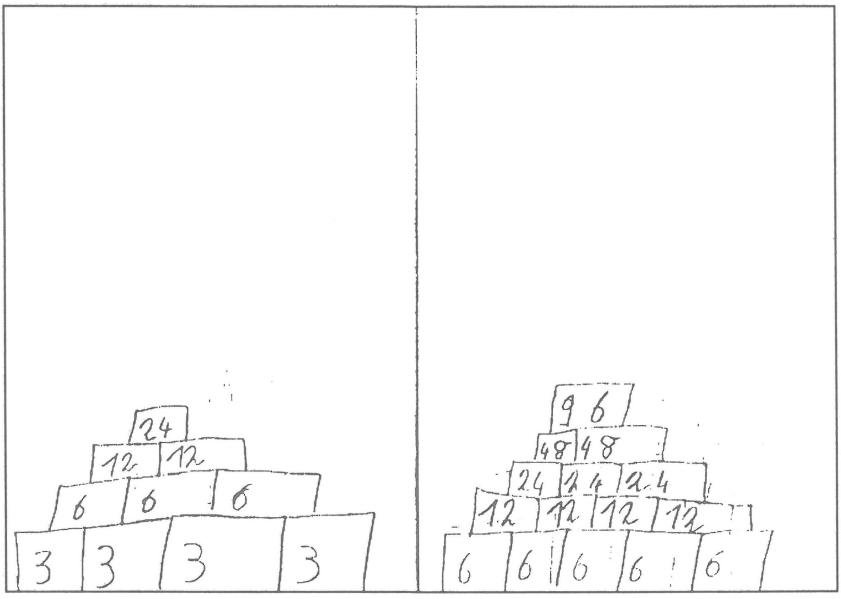


Abb. 2.2

Tim kommentiert die Entstehungsgeschichte des „Zahlenmauerbuches“ selbst:

> *Wir haben in der Schule über Zahlenmauern gesprochen. Als ich meine Hausaufgaben gemacht hatte, habe ich mich gelangweilt, und es hat geregnet. Vor dem Fernseher kam mir die Idee, das Zahlenmauernbuch zu schreiben.* (Tim, 1. Schuljahr, in MÜLLER/WITTMANN 1995, 81)

Zahlenmauern sind ein gebräuchliches Übungsformat im Mathematikunterricht der Grundschule. Sie haben folgende Struktur: Steine werden pyramidenförmig aufgeschichtet. Jeder Stein muss die Summe der beiden Steine tragen, auf denen er liegt.

Für die Beschreibung der Zahlenmauern und für die Dokumente werden im Weiteren die Begriffe Basissteine, Randsteine, Zielstein und Stockwerke benutzt, deren Zuordnung sich aus Abb. 2.3 ergibt.

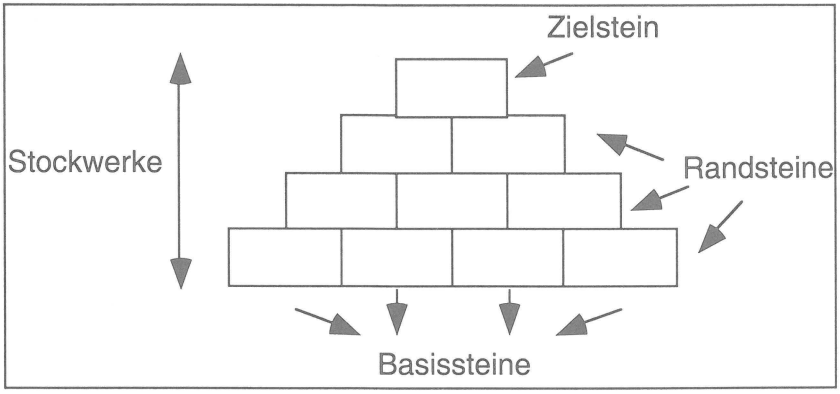


Abb. 2.3

Zahlenmauern können durch die Wahl der Basissteinanzahl auf bestimmte Stockwerkanzahlen festgelegt werden. Wenn drei Basissteine gewählt werden, ergeben sich bis zum Zielstein drei Stockwerke mit insgesamt sechs Steinen, bei vier Basissteinen ergeben sich vier Stockwerke mit zehn Steinen usw.

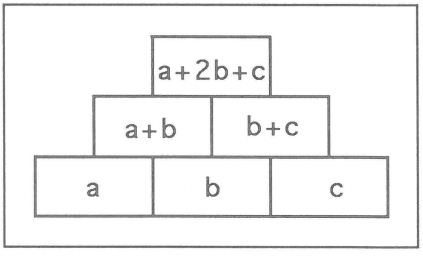


Abb. 2.4

Die Zielzahl ergibt sich als gewichtete Summe der Basiszahlen. So geht bei einer dreistöckigen Mauer die mittlere Basiszahl zweifach in die Zielzahl ein (vgl. Abb. 2.4), bei einer vierstöckigen Mauer gehen die beiden Mittelsteine dreifach in die Summe ein usw.

Tim waren Zahlenmauern aus dem Unterricht bekannt. In dem Unterrichtswerk[26], das seine Klasse benutzte, werden Zahlenmauern zur Übung der Addition und Subtraktion eingeführt (vgl. Abb. 2.5). Die Basiszahlen der vorgegebenen Mauern in Tims Mathematikbuch bewegen sich immer im Zahlenraum bis 10. Die Zielzahlen überschreiten die Zahl 20 nicht.

[26] WITTMANN, Erich Ch., Gerhard N. MÜLLER et al. (1996). Das Zahlenbuch: Mathematik im 1. Schuljahr. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag

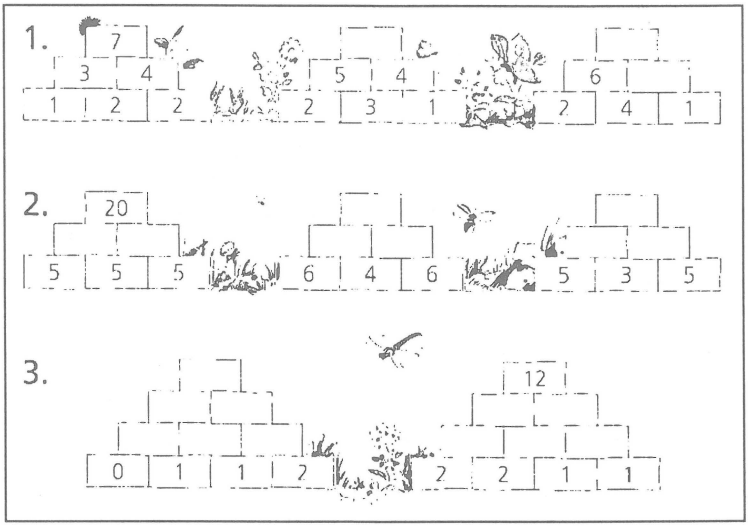


Abb. 2.5

Tim hat das „Zahlenmauerbuch“ im ersten Schuljahr nach eigener Aussage aus sich heraus, ohne äußeren Auftrag geschaffen. Natürlich wurde er durch die Behandlung von Zahlenmauern im Unterricht angeregt (vgl. Abb. 2.5). Seine Eigenproduktion geht aber weit über den unterrichtlichen Rahmen hinaus.

Tim hat bewusst eine Ganzheit, ein ‘Buch’, schaffen und in diesem seinen Ideenreichtum ausdrücken wollen. Die Titelgebung („Zahlenmauerbuch“) deutet auf die semantische Nähe mit dem Titel seines Unterrichtswerks („Zahlenbuch“) hin.

In Tims „Zahlenmauerbuch“ besteht bei den drei- und vierstöckigen Mauern kein ‘proportionaler’ Zusammenhang zwischen den Zahlenräumen, in denen die Zielzahl liegt, und der Stockwerkanzahl der Mauern. Es gibt ‘kleine’, dreistöckige Mauern, deren Zielzahl größer als Tausend ist und vierstöckige Mauern mit Zielzahlen aus dem Hunderterraum.

Die Mauern mit fünf bzw. sechs Stockwerken haben ausschließlich einstellige Basiszahlen, und die erforderlichen Rechnungen bleiben bis zum Zielstein im Hunderterraum.

Abb. 2.6 gibt eine Übersicht über die Zahl der Stockwerke der Mauern, den jeweils genutzten Zahlenraum und die Wahl der Werte für die Basissteine an.

Seite / Mauernnummer	Stock-werke	Zahlenraum	Basissteine
1	4	10.000	1000, 1000, 1000, 1000
2	3	100.000	6000, 6000, 6000
3	4	1.000	15, 16, 17, 18
4	5	100	1, 3, 2, 1, 2
5	4	100.000	2000, 2000, 2000, 2000
6	3	etwas über 100	99, 1, 1
7	3	etwas über 100	98, 2, 2
8	4	10.000	1002, 1002, 1002, 1002
9	4	100	3, 3, 3, 3
10	5	100	6, 6, 6, 6, 6
11	4	100	7, 7, 7, 7
12	4	100	9, 9, 9, 9
13	3	100	10, 10, 10
14	4	1.000	50, 50, 50, 50
15	3	100.000	8000, 8000, 8000
16	6	100	1, 1 ,1, 1, 1, 1

Abb. 2.6

Durch Wahl der Zahlen in den Basissteinen wird der Zahlenraum bestimmt, in dem die Rechnungen für die Ermittlung der anderen Steine ausgeführt werden müssen.

Sechs Zahlenmauern haben einstellige Basiszahlen. In fünf von ihnen sind die Basiszahlen gleich (Basiszahlen jeweils 1, 3, 6, 7 bzw. 9). Nur in der Mauer 4 sind die Basissteine nicht gleich, sondern tragen die Zahlwerte 1, 2 und 3.

Bei ebenfalls sechs Zahlenmauern sind die Basiszahlen Vielfache der Stufenzahlen 10 (10 und 50) oder 1000 (1000, 2000, 6000 und 8000); sog. ‘glatte’ Zehner oder Tausender. Vielfache der Stufenzahl 100 treten nicht auf. Diese zwölf Mauern wurden bis auf eine Ausnahme in den Basissteinen mit jeweils demselben Wert belegt.

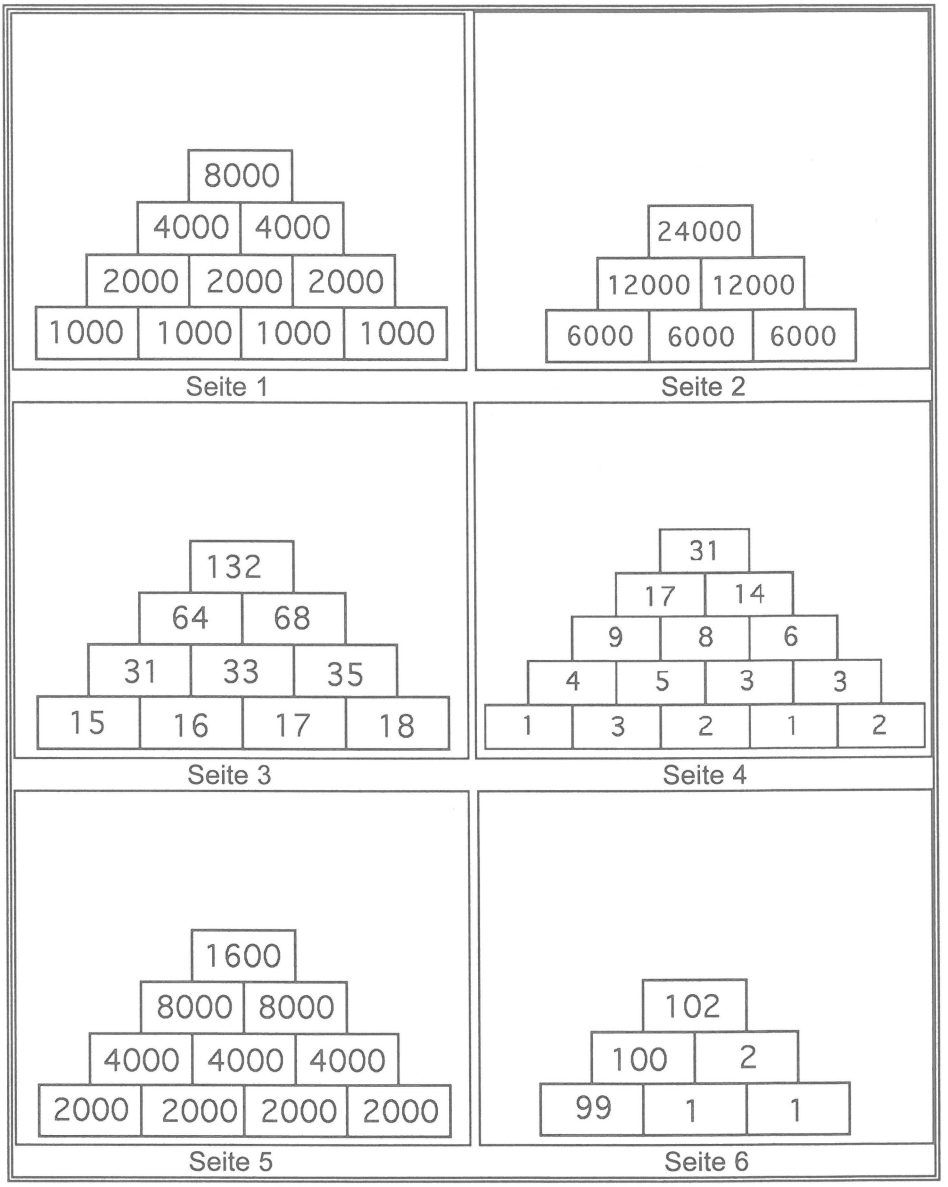
Die Mauer 3 hat zweistellige Basissteinzahlen, die einen Ausschnitt aus der Folge der natürlichen Zahlen bilden. Die Mauern 6 und 7 haben jeweils drei Basissteine, die im linken Stein mit einer zweistelligen Zahl und in den beiden anderen mit einstelligen und gleich großen Werten belegt sind. Eine Mauer (Mauer 8) hat gleich große vierstellige Basiszahlen (1002).

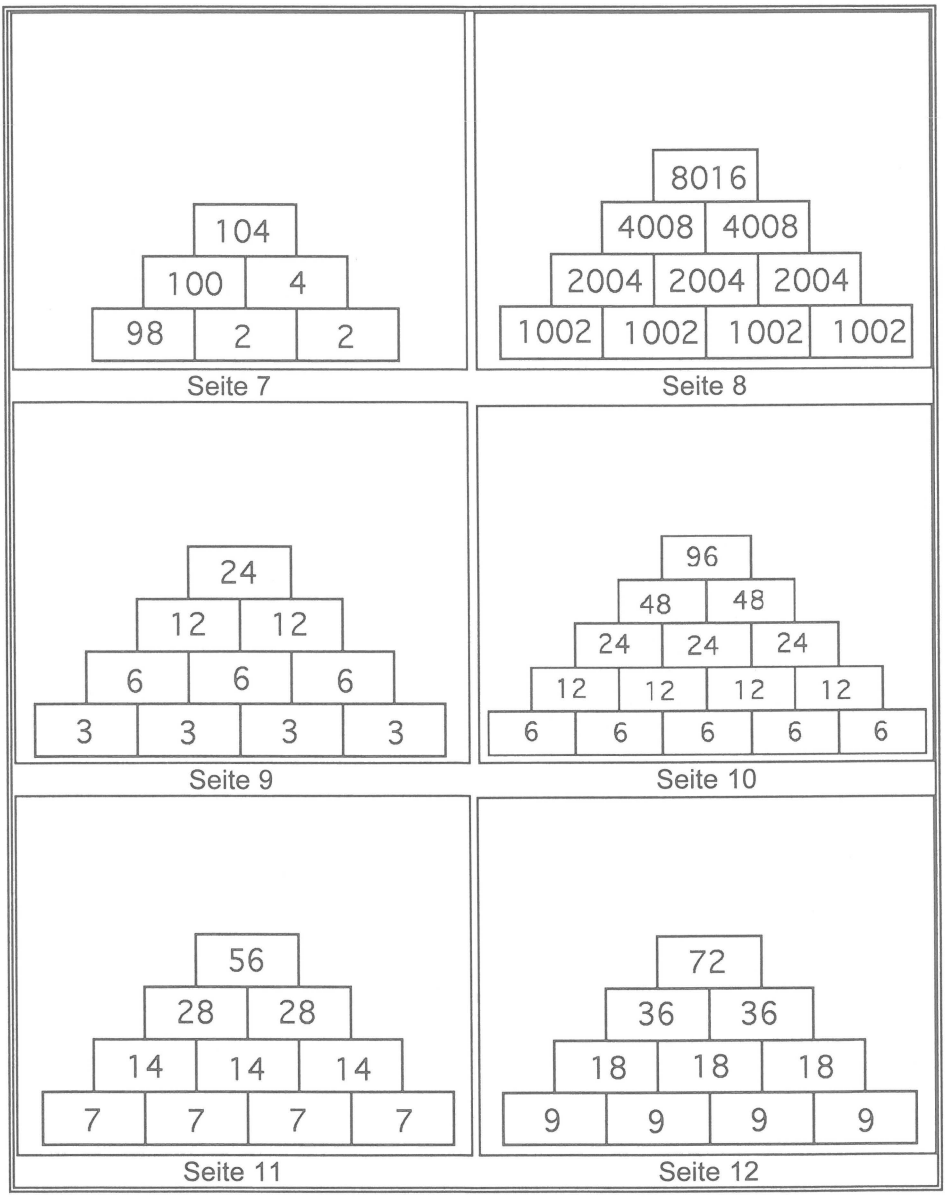
Im Einzelnen finden sich sieben Zielsteine im Hunderterraum, zwei knapp über dem Hunderter (Mauer 6 und 7, vgl. Abb. 2.6), zwei im Tausender-, zwei im Zehntausender- und drei im Hundertausenderraum.

Alle vorliegenden Zielzahlen überschreiten den Zahlenraum des ersten Schuljahres (Zahlenraum bis 20).

Da eine Wiedergabe des Originaldokuments aus technischen Gründen nicht für alle Seiten des „Zahlenmauerbuches“ möglich ist, werden im Weiteren computererzeugte Abschriften der Mauern zur Analyse und Wiedergabe genutzt.

Eine Übersicht über alle sechzehn Seiten bieten die folgende Abbildung 2.7


8000
4000 4000
2000 2000 2000
1000 1000 1000 1000
Seite 1
24000
12000 12000
6000 6000 6000
Seite 2
132
64 68
31 33 35
15 16 17 18
Seite 3
31
17 14
9 8 6
4 5 3 3
1 3 2 1 2
Seite 4
1600
8000 8000
4000 4000 4000
2000 2000 2000 2000
Seite 5
102
100 2
99 1 1
Seite 6


104
100 4
98 2 2
Seite 7
8016
4008 4008
2004 2004 2004
1002 1002 1002 1002
Seite 8
24
12 12
6 6 6
3 3 3 3
Seite 9
96
48 48
24 24 24
12 12 12 12
6 6 6 6 6
Seite 10
56
28 28
14 14 14
7 7 7 7
Seite 11
72
36 36
18 18 18
9 9 9 9
Seite 12

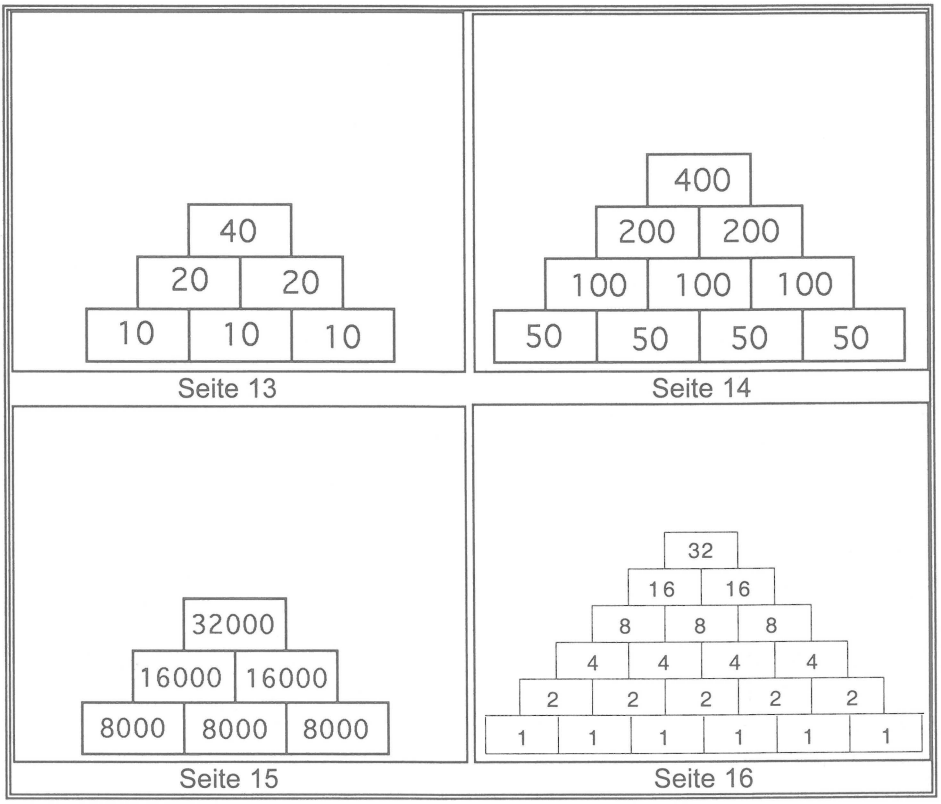

40
20 20
10 10 10
Seite 13
400
200 200
100 100 100
50 50 50 50
Seite 14
32000
16000 16000
8000 8000 8000
Seite 15
32
16 16
8 8 8
4 4 4 4
2 2 2 2 2
1 1 1 1 1 1
Seite 16

Abb. 2.7

2.2 John Dewey:
Das Spiel als epistemologisch - psychologische Kategorie

> Das Denken schließt alle diese Schritte in sich: das Erblicken eines Problems, die Beobachtung der gegebenen Tatsachen, die Formung und Ausarbeitung eines naheliegenden Schlusses und die handelnde Erprobung. Wenn auch alles Denken in Erkenntnis ausmündet, so ist ihr Wert a n s i c h doch letzten Endes geringer als ihr Wert für das D e n k e n. Denn wir leben nicht in einer abgeschlossenen und fertigen Welt, sondern in einer, die sich ständig wandelt.
>
> DEWEY (1993, 203)

Analyse der einzelnen Mauern

Die Vielfalt der Mauern, der Ideenreichtum des Erstklässlers Tim und ihre Zusammenhänge lassen sich nicht in ihrer vollen Komplexität erfassen. Es gibt unbeschränkte Möglichkeiten, neue Verbindungen zu anderen Mauern herzustellen oder auch Symmetrien und Besonderheiten innerhalb einer einzelnen Zahlenmauer zu entdecken. Die Mauern selbst stellen jede für sich nach innen ein Muster dar, ebenso lassen sich nach außen zwischen den Mauern musterhafte Bezüge finden.

In diesem Abschnitt ist jedoch mit 'Innen' das handelnde Subjekt und mit 'Außen' das behandelte Objekt gemeint Die Beziehungsstruktur zwischen Objekt und Subjekt, zwischen dem Entstehungsprozess des „Zahlenmauerbuches" und Tims Denken wird interpretiert. Tims Handlungen und Denkoperationen sind im Wechselspiel des 'Innen' und 'Außen' nach DEWEY zu interpretieren.

Die Gestaltung der Mauern ermöglicht Tim eine Erfahrung, die rückwirkend wiederum die neuen Gestaltungen beeinflusst:

> *Wenn eine Betätigung hineinverfolgt wird in ihre Folgen, wenn die durch unser Handeln hervorgebrachte Veränderung zurückwirkt auf uns selbst und in u n s eine Veränderung bewirkt, dann gewinnt die bloße Abänderung Sinn und Bedeutung; dann lernen wir etwas. (...)*

> *Durch Erfahrung lernen heißt das, was wir den Dingen t u n , und das, was wir von ihnen e r l e i d e n , nach rückwärts und vorwärts miteinander in Verbindung bringen. Bei dieser Sachlage aber wird das Erfahren zu einem Versuchen, zu einem Experiment mit der Welt zum Zwecke ihrer Erkennung.* (DEWEY 1993, 187, Hervorh. i. O.)

Tim kann Erfahrungen machen, weil in den Zahlenmauern ein großes Entdeckungspotential liegt.

Die Mauern im „Zahlenmauerbuch" stehen nicht beziehungslos nebeneinander, sondern weisen vielfältige Beziehungen auf. Die Mauern, die auf den ersten Seiten zu finden sind, werden von Tim später variiert. Tim exploriert das Format der Mauern und dürfte dabei auch immer Rückgriffe vorgenommen haben. Insofern ist es nicht sinnvoll, das „Zahlenmauerbuch" Seite für Seite zu analysieren, sondern es als Gesamtwerk zu betrachten. Die Systematik der weiteren Darstellung folgt der Idee DEWEYS, der Wechselwirkung von äußerem Produkt und inneren Gedanken, die sich an Gruppen von Variationen deutlich machen lässt.

- Die erste Zahlenmauer

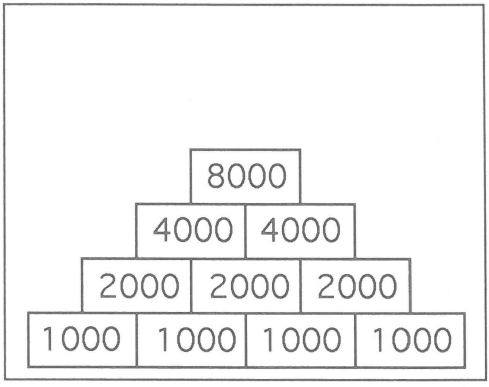


Abb. 2.8

Tim beginnt sein Buch mit einer Mauer, die ich als 'klassisch' bezeichnen möchte. Er zeigt ein für Erstklässler typisches Verhalten: Er sprengt den durch den Lehrplan gesetzten Rahmen des Zwanzigerraums und zeigt seine Vorliebe, mit Zahlen über den Tausender hinaus zu arbeiten. Dabei nutzt er die gewohnten und bekannten Rechenregeln, die das kleine 1+1 ihm zur Verfügung stellt, und bricht den Zahlenraum aber insofern auf, als er statt der Eins die Eintausend und statt der Zwei die Zweitausend wählt usw.

Tim wählt eine vierstöckige Mauer, die in den Basissteinen jeweils 1000 trägt (Abb. 2.8). Es dürfte ihm keine große Schwierigkeit bereitet haben, die reinen Verdoppelungen auszuführen, die ihn bis zum Zielstein 8000 führen.

Ein weiteres, mathematisch interessantes Merkmal dieser Zahlenmauer kann an den Zahlwerten innerhalb der Mauer abgelesen werden: Mathematisch gesehen, finden sich in den Tausenderstellen die Potenzen von 2 wieder, die durch die Struktur der Mauern automatisch erzeugt werden. Tims Basiszahlen bewirken die Verdoppelungen, die in den einzelnen Stockwerken auftreten.

Diese Mauer variiert Tim im „Zahlenmauerbuch" mehrfach.

- Exploration neuer Ansätze

Im „Zahlenmauerbuch" notiert Tim auf den Seiten 3 und 4 zwei Mauern, die als Exploration eines neuen Gestaltungsansatzes angesehen werden können. Diese Mauern werden nicht weiter variiert, sondern bleiben für sich stehen.

Dabei handelt es sich im ersten Fall um die einzige Zahlenmauer mit vier unterschiedlichen Basiszahlen:

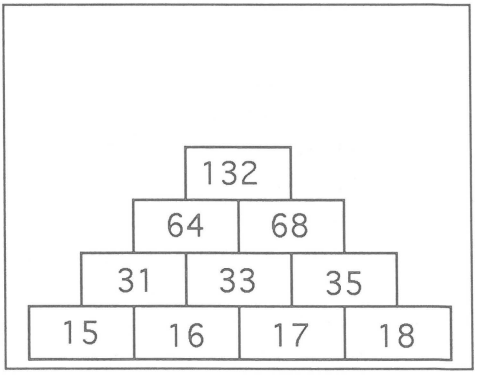


Abb. 2.9

Wie in dem vorangehenden Beispiel schon deutlich wurde, lässt sich Tim nicht vom Zahlenraum bis 20 einschränken. Er nutzt die Freiheit der selbstständigen Auseinandersetzung, wie in dieser Mauer auf Seite 3 (Abb. 2.9). Der qualitative Unterschied zur ersten Mauer besteht hier darin, dass keine 'glatten' Zahlen benutzt werden, sondern unterschiedliche, zweistellige Zahlen.

Die Basissteinen stellen einen Ausschnitt der Folge der natürlichen Zahlen von 15 bis 18 dar. Dieser Ausschnitt wird als exemplarisch für jede andere Auswahl von vier Gliedern der Folge angesehen. Die Muster, die sich in den Summenbildungen

innerhalb der Mauer ablesen lassen, sind auf andere Konstellationen übertragbar. In diesem Sinne bieten sich für Tim durch das Durchspielen einer dieser vierstöckigen Mauern Entdeckungen an, die sich ebenso bei ähnlichen Konstellationen ergeben würden. Die Summe zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist stets ungerade, da immer eine gerade und eine ungerade Zahl addiert werden. Dadurch ergeben sich in der zweiten Zeile nur ungerade Zahlen. In der dritten Zeile finden sich nur gerade Zahlen, da die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist. Dies bewirkt, dass auch die Zielzahl gerade ist.

Beginnt man eine Mauer mit einer Gliederfolge aus der Folge der natürlichen Zahlen, die eine Differenz von 1 aufweisen, so unterscheiden sich die Zahlen im zweiten Stockwerk um 2, im dritten Stockwerk um 4. Die Differenz der Zahlen des dritten Stockwerks wird in dem von Tim gewählten Beispiel besonders deutlich, da die Einerziffern der Folge der Vielfachen von 4 entspringen.

Diese Mauer zeigt ebenso, dass es Tim rechnerisch nicht schwerzufallen scheint, mit zweistelligen Zahlen und darüber hinaus zu operieren. Die Zahlen, die er auswählt, stellen nicht nur an Erstklässler besondere Anforderungen, da in der Addition Überträge beachtet werden müssen.

Im zweiten Fall der Exploration neuer Ansätze nutzt Tim einstellige Basiszahlen (Abb. 2.10).

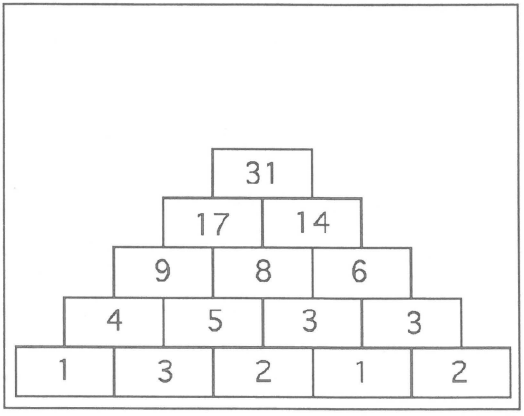


Abb. 2.10

Bei dieser fünfstöckigen Mauer auf Seite 4 scheint er relativ planlos vorzugehen. Er folgt weder der Folge der natürlichen Zahlen, noch nutzt er eine ausgeprägte Symmetrie. Es lässt sich nicht feststellen, ob Tim die Basissteine von links nach rechts eingetragen hat oder eventuell von der Mitte, der 2, ausgehend.

Auch mit Mustern von geraden und ungeraden Zahlen kann keine Struktur erkannt werden. Dies ist jedoch die Mauer mit den meisten ungeraden Zahlenwerten. Durch die Mischung von geraden und ungeraden Basissteinen - auch wenn sie nicht stringent durchgehalten wird - ergeben sich in den folgenden Zeilen immer wieder gerade und ungerade Zahlen, die schließlich sogar zu einem ungeraden Zielstein führen. Da dieser Zielstein der einzige ungerade im gesamten „Zahlenmauerbuch" ist, könnten hier Entdeckungen ansetzen und reflektiert werden.

Dieser Ansatz Tims, mit verschiedenen kleinen Basissteinen zu arbeiten, wird von ihm nicht weiter fortgesetzt.

Auffällig ist, dass Tim im Weiteren bei fünf- und sechsstöckigen Mauern für die Basissteine sehr kleine Zahlenwerte wählt, sich vorsichtig an die zu erwartende Summe im Zielstein herantastet. Vermutlich weiß er intuitiv, dass bei dreistöckigen Zahlenmauern die Zielzahl leichter zu kontrollieren ist als bei Mauern mit fünf oder sechs Stockwerken. Tim wählt mit Bedacht sehr einfache Zahlen, um den Rechenaufwand klein zu halten. Er kann aus seinem Ansatz, der in den Mauern auf Seite 3 und 4 deutlich wird, ablesen, dass sehr komplizierte und unstrukturierte Zahlenwerte die Rechenarbeit erschweren. Dies würde das ungezwungene Verändern und Ausprobieren in den Hintergrund drängen.

- Variation der ersten Mauer: a) Glatte Tausenderzahlen als Basis

In enger Beziehung zur Mauer der Seite 1 mit 1000 als Basiszahlen stehen die folgenden Variationen: Durch die Wahl gleicher Basissteine im Tausenderraum ergeben sich stets symmetrische Mauern, die dem Muster der ersten Mauer ähneln.

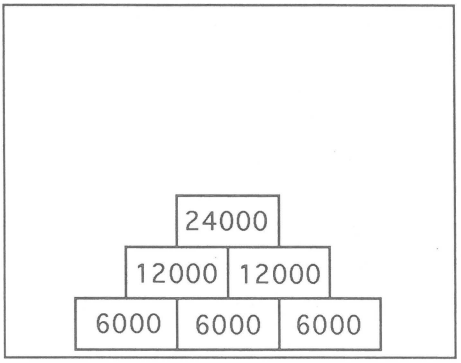


Abb. 2.11

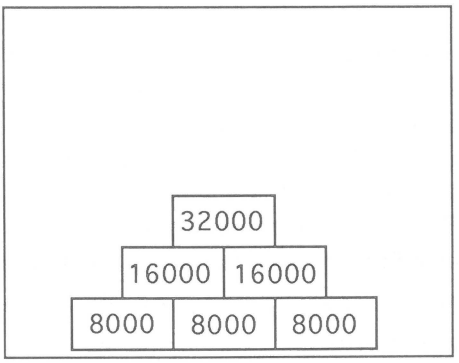


Abb. 2.12

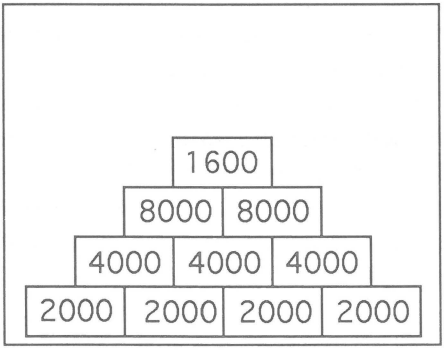


Abb. 2.13

Tim variiert das Muster der Mauer mit den Basiszahlen 1000 in drei anderen Formen (vgl. Abb. 2.11 - 2.13) . Er gestaltet zwei dreistöckige Mauern mit den Basissteinen 6000 bzw. 8000 (Seite 2 und Seite 15) und eine vierstöckige mit 2000 (Seite 5) in den Grundsteinen. Diese Mauern entwickelt Tim nicht auf aufeinanderfolgenden Seiten. Die erste Variation der 1000 als Basisstein ist die 6000 und erst danach die 2000. Die Mauer mit den Basissteinen 8000 wird auf der vorletzten Seite des „Zahlenmauerbuches“ notiert.

Auffällig ist, dass Tim im Weiteren hier nur gerade Tausenderzahlen als Basen auswählt. Durch diese Auswahl werden auch alle weiteren Steine immer mit geraden Tausenderzahlen belegt. Die gesamte Mauer besteht also nur aus geraden Tausendern. Durch die Wahl dieser Basissteine erzeugt Tim besonders ästhetische Mauern.

In der Mauer mit den Basissteinen 2000 findet sich der einzige Fehler in Tims „Zahlenmauerbuch". Bei der Berechnung des Zielsteins beachtet er nicht, dass Sechzehntausend drei Nullen besitzt. Dieser Fehler unterläuft ihm jedoch nicht bei derselben Summe 8000+8000 in Mauer 15 und auch nicht bei 6000+6000 in Mauer 2, sodass davon auszugehen ist, dass es sich nur um einen Flüchtigkeitsfehler handelt.

- Variation der ersten Mauer: b) Glatte Zehnerzahlen als Basis

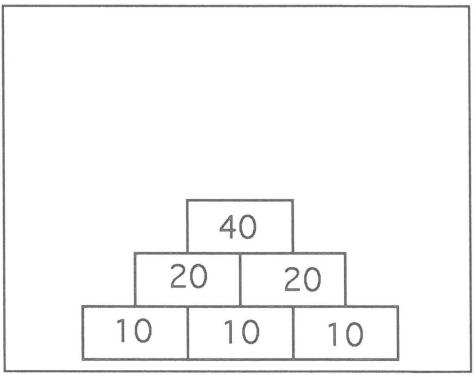


Abb. 2.14

Eine eng 'verwandte' Variation der Ausgangsmauer auf Seite 1 zeigt sich in der Ausnutzung der Basissteine mit dem Wert der Stufenzahl 10 auf Seite 13 (Abb. 2.14). Diese kann als Variation der Mauer mit den Basiszahlen 1 angenommen werden, aber auch als Abwandlung der Mauer mit der Stufenzahl 1000. Tim nutzt hier nur eine dreistöckige Mauer. Diese Mauer sagt in der Kombination mit den schon gezeigten Mauern jedoch alles aus, was man über die Basissteine 10 wissen muss: Die Werte erhöhen sich gegenüber der Mauer mit den Basissteinen 1 auf das Zehnfache oder verringern sich gegenüber der ersten Mauer auf ein Hundertstel. Ein kleiner Mikrokosmos in seinem „Zahlenmauerbuch" tut sich in den Seiten 1, 13 und 16 auf. Diese 'Familie' von Mauern in Tims Eigenproduktion kann wiederum als Grundlage für weitere Veränderungen und Abwandlungen dienen.

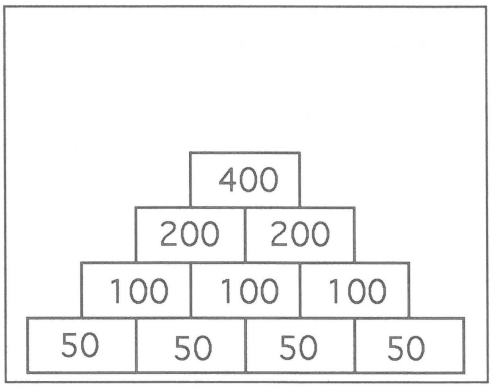


Abb. 2.15

Eine weitere Variation der Mauer mit der Stufenzahl 10 findet sich in der Ausnutzung der Steine im Wert 50 (Abb. 2.15). Diese Mauer auf Seite 14 folgt unmittelbar der Mauer mit den Basissteinen 10 auf Seite 13.

Tim gibt keine Mauer mit den Basissteinen 100 an. Eine solche versteckt sich aber als Teilmauer in der Mauer mit den 50er-Steinen. Die Steine des zweiten Stochwerks der Mauer können gedanklich als die Basissteine einer nicht schriftlich fixierten Mauer angesehen werden.

- Variation der ersten Mauer: c) Einstellige Zahlen als Basis

Alle Mauern mit ausschließlich gleichen Basiszahlen können als Variation der ersten Mauer verstanden werden. Die Grundstruktur der Mauer wird auch in kleineren Zahlenräumen variiert. Tim gestaltet fünf Mauern mit einstelligen, gleichen Basiszahlen.

So ergeben sich analog zur ersten Mauer symmetrische Mauern. Tim variiert mehrfach dieses Phänomen und nutzt es in verschiedenen Zahlenräumen und unterschiedlichen Stockwerkzahlen der Mauern. Im „Zahlenmauerbuch" werden Mauern mit den Basissteinen drei, sechs, sieben und neun angegeben. Tim folgt hier nicht der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen, auch zeigt er keine Präferenz für gerade oder ungerade Zahlen. Er bearbeitet anscheinend exemplarisch verschiedene einstellige Zahlen und kann so ihre Wirkung auf das Muster in den Mauerstrukturen verfolgen (Abb. 2.16 a - d).

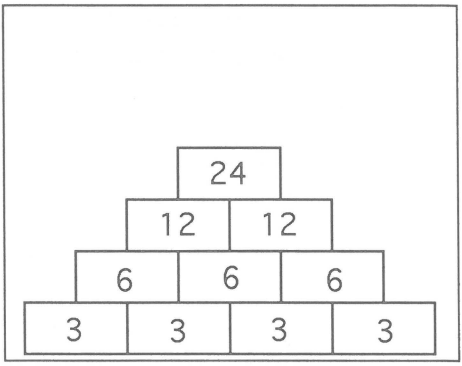


Abb. 2.16 a

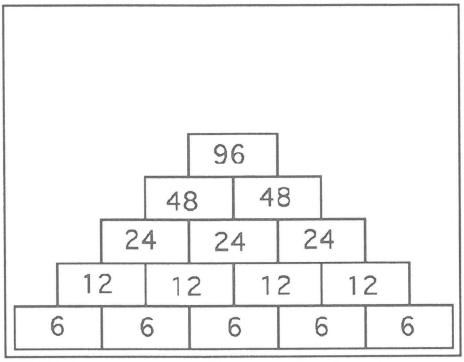


Abb. 2.16 b

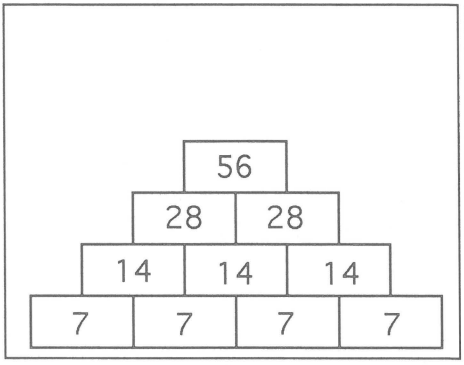


Abb. 2.16 c

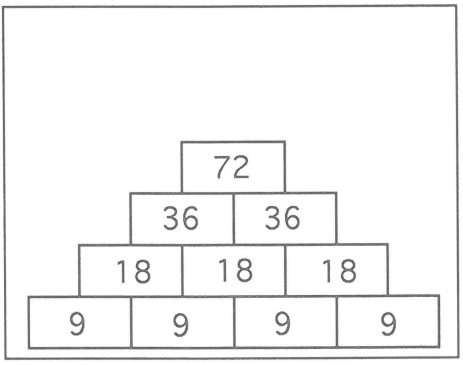


Abb. 2.16 d

Tim bevorzugt dabei vierstöckige Mauern. Abweichend davon baut er die Mauer mit den Grundsteinen sechs jedoch fünfstöckig auf. Zwischen den Mauern auf den Seiten 9 und 10 (Abb. 2.16 a und 2.16 b) besteht ein enger Zusammenhang. Lässt man in der ersten Mauer die Basissteine weg, so ergibt sich eine Mauer mit den Basissteinen im Wert sechs. Die Mauern gehen teilweise auseinander hervor, stellen also wieder Mauer und Teilmauer dar. Zunächst kann die 3 als Basiszahl willkürlich gewählt sein. Die fertige Mauer jedoch kann in einer Art Wechselwirkung die Idee aufkommen lassen, eine Mauer mit den Basissteinen 6 zu bauen. Da die Mauern mit den Basissteinen 3 bzw. 6 im Dokument auf aufeinanderfolgenden Seiten 9 und 10 notiert werden, kann Tim tatsächlich die 3er-Mauer als Anregung für die 6er-Mauer genutzt haben.

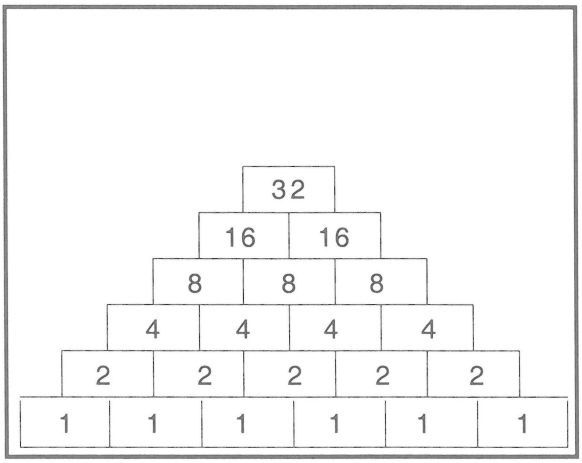


Abb. 2.17

Bei der letzten Mauer in Tims „Zahlenmauerbuch“ (Abb. 2.17) werden Potenzen von 2 erzeugt:

Die Basiszahlen 1 werden durch die Struktur der Mauer fortlaufend von Stockwerk zu Stockwerk verdoppelt. Diese Mauer ist hochgradig symmetrisch.

Tim reizt mit dieser Mauer die Grenzen seines Arbeitsblattes voll aus. Da er die Größe seiner selbst gezeichneten Steine nur minimal variiert, kann auf einem DIN A4 - Blatt keine Mauer mit sieben oder mehr Grundsteinen gezeichnet werden.

- Variationen von 100 und 1000 innerhalb der Basiszahlen

Drei Mauern in Tims „Zahlenmauerbuch“ können insofern als Variation von schon erzeugten Mauern gesehen werden, als Details innerhalb der Basissteine verändert werden.

Im „Zahlenmauerbuch“ finden sich auf den Seiten sechs und sieben zwei Mauern, die durch geringe Veränderung der Basissteine auseinander hervorgehen. Die eine Mauer hat 99, 1 und 1 als Basissteine (Abb. 2.18 a), während die andere 98, 2 und 2 (Abb. 2.18 b) aufweist. Tim handelt im Sinne des Gesetzes der Konstanz der Summe, indem er den linken Basisstein verkleinert und den Mittelstein und den rechten Basisstein um denselben Betrag erhöht.

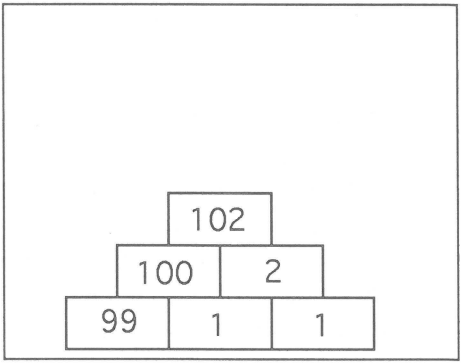


Abb. 2.18 a

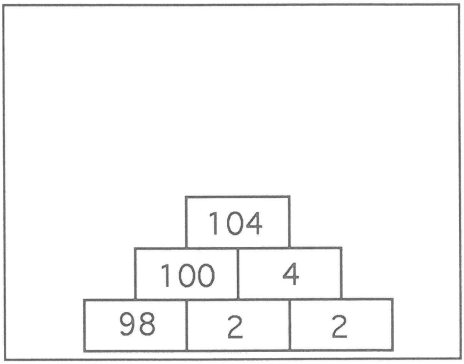


Abb. 2.18 b

Durch diese Konstellation erreicht es Tim, dass der linke Stein des zweiten Stockwerks jeweils wieder 100 als Summe trägt. Die gedankliche Zerlegung der 100 wird hier in zwei eng verwandten Variationen ausgenutzt. Die Zerlegung der Hundert in zwei Summanden erfolgt sukzessiv. Der rechte Stein der zweiten Reihe ist das Doppelte des Mittelsteins bzw. des rechten Basissteines. Auch im Zielstein (102 und 104) werden die beiden Teilsummen der zweiten Zeile wieder dadurch erkennbar, dass kein Übertrag auftritt und die 100 nur in der Einerstelle verändert wird. Die Erhöhung des rechten Ecksteins der Basis und die Verminderung des linken Steins gleichen sich in der Summe aus, während die Erhöhung des Mittelsteins der Basis um 1 sich in der Zielsteinsumme doppelt auswirkt.

Es kann sein, dass Tim eine Mauer mit gleicher oder einer um Eins verschiedenen Zielsteinsumme kreieren wollte und dabei beiläufig auf das Muster gestoßen ist, das besagt, die Erhöhung des Mittelsteins wirkt sich auf den Zielstein doppelt aus.

Die Basissteinfolgen 99, 1, 1 und 98, 2, 2 folgen in sich auch einem Muster, das durch 97, 3, 3 / 96, 4, 4 usw. fortgesetzt werden könnte.

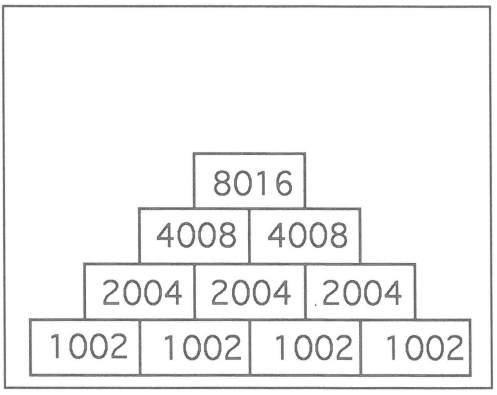


Abb. 2.19

Tim führt die Mauer mit den folgenden Steinen auf der nächsten Seite (Seite 8) auf (Abb. 2.19). Wenn man die obige Beschreibung beachtet und zurück zur ersten Mauer mit der Stufenzahl 1000 als Basis (Abb. 2.6) geht, so findet sich ein ähnliches Vorgehen von Tim wieder. Hier werden die Basissteine um 2 von 1000 auf 1002 erhöht und nicht wie oben vermindert. Der Zuwachs in den oberen Zeilen wird in den Einerstellen wiedergegeben.

Mathematisch wird man dem Entdeckungspotential der Mauer nicht gerecht, wenn hier nur ein beliebiger Zuwachs unterstellt wird. In diesem Fall hätte auch eine Erhöhung um 5, 3 oder eine beliebige andere Zahl gewählt werden können. Tim wählt jedoch die 2. Die 2 in der Einerstelle ist das Doppelte der 1 in der Tausenderstelle. Dieses Muster wird auch in der zweiten und dritten Zeile eingehalten: Die Einerstelle ist jeweils das Doppelte der zugehörigen Tausenderstelle. Die besondere Wahl der Ausgangszahlen ermöglicht es, dass dieses Muster bis zum Zielstein weiter verfolgt werden kann. Die Tausenderzahlen bieten den Vorteil, dass nicht nur die Einerstelle, sondern auch die Hunderter- und Zehnerstelle eine Null trägt und keine Überträge verursacht. So lässt sich auch das Doppelte der Einerstelle des dritten Stockwerks in Einer- und Zehnerstelle im vierten Stockwerk ablesen, ebenso wie das Doppelte der Tausenderstelle des vierten Stockwerks selbst. Die Zahlen bilden ein Muster, und sie tragen ein Muster in sich.

Die Zahlen haben eine Ästhetik in sich: Die Summen stehen in enger Beziehung zu ihren Summanden. Zusätzlich geben sie die schon erwähnten Mauern von Seite 1 und Seite 16 im „Zahlenmauerbuch“ in einer abgewandelten Form wieder. Bei genauer Betrachtung kann die Mauer mit den Basissteinen 1 und 2 abgelesen werden, wenn einmal die Entwicklung der Tausenderstelle und bei dem anderen Mal die Fortsetzung der Einerstelle betrachtet wird.

Zusammenfassung

Den Entstehungsprozess von Tims „Zahlenmauerbuch" kann man sich folgendermaßen vorstellen:

- Tim beherrscht das Format der Zahlenmauern ebenso wie das 1+1, das im Unterricht behandelt wurde. Er geht aber auch 'tastend' über diese Vorwissen hinaus.
- Er exploriert neue Ansätze der Mauergestaltung.
- Er nutzt einmal erzeugte Mauern als Anregung für weitere Mauern, die einem ähnlichen Muster folgen (Variation I).
- Tim verändert bereits erzeugte Mauern in Details und erzeugt so neue Muster (Variation II).

Tim rechnet sicher; d.h. er bringt das notwendige Vorwissen zur Problemlösung mit. Er kann einstellige Basiszahlen beliebig wählen und erforscht größere Zahlenräume, indem er häufig 'glatte' Zehner-, Hunderter- oder Tausenderzahlen als Basiszahlen nutzt. Diese Auswahl trifft er vermutlich bewusst in dem Sinne, dass er einen großen rechnerischen Aufwand, der seine augenblicklichen Fähigkeiten überschreiten würde, vermeidet. Deutlich wird dieses bewusste Vorgehen an der kontrollierten Überschreitung des Hunderters bei den Mauern 6 und 7 und an der Wahl kleiner Basiszahlen bei fünf- und sechsstöckigen Mauern.

Tim beschränkt sich nicht darauf, das unterrichtliche Wissen zu reproduzieren, sondern exploriert neue Ansätze. Diese werden in den Mauern der Seite 3 und 4 deutlich. Die hier gezeigten Ansätze werden innerhalb des „Zahlenmauerbuches" nicht fortgesetzt, sondern nur an einem Einzelfall erprobt, können aber Anlass zu reflektierenden Erkenntnissen bieten. DEWEY verwahrt sich ausdrücklich davor, Erkundungen als reine 'Ablenkung' abzuwerten (vgl. 1993, 258). Im Gegenteil, sie fördern das „geistige und sittliche Wachstum" (DEWEY 1993, 260).

Variationen sind im Sinne DEWEYS als Wechselwirkung von Ideen, Gedanken (innen) und Produkten (außen) zu verstehen (vgl. DEWEY 1993, 211 f.) Die Anregung erfolgt durch die notierte Mauer in Kombination mit dem Ideenreichtum von Tim. Beide Aspekte beeinflussen Tim beim Bau einer nächsten Mauer.

Die zwei Variationsformen nutzt er in mehreren Fällen. Die Möglichkeiten des Variierens erprobt Tim jeweils in einigen Beispielen, wie oben gezeigt.

Eine weitere Fortsetzung eines bestimmten Variationsmusters ist theoretisch immer möglich, würde jedoch den Zeitrahmen der außerschulischen Beschäftigung und den Umfang des „Zahlenmauerbuches" sprengen.

Die Zahlenmauerstruktur ist ein idealer Raum für Ab- und Umwandlungen von Ausgangswerten und die Entdeckung von entstehenden Mustern, da die Zwischenschritte bis zum Erreichen des Zielsteins notiert werden und somit reflektiert werden können ('Erleiden', vgl. DEWEY). Dabei spielt die Stockwerkanzahl eine untergeordnete Rolle. Mauern mit vier oder fünf Stockwerken können Teilmauern enthalten; die drei oberen Reihen sind dreistöckige Mauern. Ebenso geben auch die dreistöckigen Mauern Auskunft über die Entwicklung der vierstöckigen Mauern (vgl. z.B. Mauer 14).

Im „Zahlenmauerbuch" wird die Variation I z.B. durch die 3er- und 6er-Mauer deutlich (Mauer 9 und 10), die als Mauer und Teilmauer verstanden werden können. Ebenso ermöglicht die gehäufte Nutzung von gleich großen Basissteinen Tim Vergleiche zwischen den Mauern und den Transfer bereits gemachter, bewusster oder noch zu reflektierender Erkenntnis.

Die zweite Form der Variation liegt in der Änderung von Details. Dies kann z.B. bei der Mauer mit den Basiszahlen 1000 bzw. 1002 (Mauer 1 und 8) oder bei den Mauern mit den Basiszahlen 99, 1, 1 bzw. 98, 2, 2 (Mauer 6 und 7) beobachtet werden. Die 'Nähe' dieser Variationsmöglichkeit, die sich dadurch zeigt, dass Tim diese Mauern auf aufeinanderfolgenden Seiten im „Zahlenmauerbuch" notiert, spricht für DEWEYs Idee, dass die Produkte die weiteren Gedanken beeinflussen. Die Variation der gedachten 100 als Basiszahl wird auf die erste Mauer rückwirkend übertragen und führt zur Mauer mit den Basiszahlen 1002.

Das „Zahlenmauerbuch" ist nach Tims eigener Aussage aus 'Langeweile' entstanden. Tim gibt damit an, dass er 'etwas' *tun* wollte, um diese Langeweile zu vertreiben.

Tim geht mit seinem „Zahlenmauerbuch" an seine Grenzen. Die Basiszahlen, die er auswählt, liegen zwischen 1 und 8000, die Zielzahlen zwischen 24 und 32000. Er verlässt den Zahlenraum seiner Unterrichtserfahrung und nutzt sein Vorwissen aus.

Tim möchte sich selbst seine Kompetenz beweisen. Es geht ihm nicht primär darum, seine Kenntnisse und Fähigkeiten vor anderen zu zeigen, da kein Lehrer ihn in dieser Phase des ersten Schuljahres dazu anhalten würde,

solche Aufgaben zu bewältigen, sondern es geht um das 'gute Gefühl' gegenüber sich selbst, auch vermeintlich schwere Aufgaben bewältigen zu können (vgl. z.B. Mauer 3). Tim hat das „Zahlenmauerbuch" für seine Lehrerin gestaltet. Die Schaffensfreude, die Tim empfand, konnte er so mitteilen.

Tim hält die Regeln für die Erzeugung von Zahlenmauern ein, nutzt aber innerhalb des mathematischen Rahmens Freiheiten. Tim wählt auf der Suche nach 'schönen' Lösungen die Zahlenräume, die Größe und Gestaltung der Mauern selbst. Er benötigt keine verbindlichen Vorgaben.

> *Alle Betätigungen, bei denen der Handelnde nur Vorschriften befolgt, bestimmte Anordnungen ausführt oder fertige Muster ohne Abänderung nachbildet* [,sind für Spiele ungeeignet] *(...). Überdies muß die Möglichkeit, Fehler zu machen, hier und da vorhanden sein, nicht etwa, weil Fehler an sich jemals wünschenswert sind, sondern weil der Übereifer, Unterrichtsstoffe und -betätigungen so auszuwählen und auszugestalten, daß kein Fehler gemacht werden kann, die Gelegenheit zum eigenen Urteilen auf ein Mindestmaß herabdrückt, die Initiative einengt und zu Verfahren zwingt, die den verwickelten Verhältnissen des Lebens so fern liegen, daß der aus ihnen quellende Gewinn an Kräften und Fähigkeiten nur von sehr beschränkter Brauchbarkeit ist.* (DEWEY 1993, 261)

In dem von ihm selbst geschaffenen Raum kann Tim frei agieren, er kann Fehler machen und verschiedene Ansätze testen - auch solche, die in Sackgassen führen (vgl. HISCHER 1998). Durch seine handelnden Erfahrungen können seine Denkleistungen wachsen. DEWEY fasst die Punkte, die für die Entwicklung des Denkens wichtig sind, wie folgt zusammen:

> *Es sind folgende: erstens, daß der Schüler eine wirkliche, für den Erwerb von Erfahrung geeignete Sachlage vor sich hat - daß eine zusammenhängende Tätigkeit vorhanden ist, an der er um ihrer selbst willen interessiert ist; zweitens: daß in dieser Sachlage ein echtes Problem erwächst und damit eine Anregung zum Denken; drittens: daß er das nötige Wissen besitzt und die notwendigen Beobachtungen anstellt, um das Problem zu behandeln; viertens:*

> *daß er auf mögliche Lösungen verfällt und verpflichtet ist, sie in geordneter Weise zu entwickeln; fünftens: daß er die Möglichkeit und die Gelegenheit hat, seine Gedanken durch praktische Anwendung zu erproben, ihren Sinn zu klären und ihren Wert selbständig zu entdecken.* (DEWEY 1993, 218)

Da das vorliegende Dokument nicht in einer Erziehungssituation im Unterricht entstanden ist, konnte und musste Tim gerade nicht angehalten werden, seine Lösungen zu ordnen oder erneut anzuwenden (vgl. Punkte vier und fünf von DEWEY). Die 'Ordnung' der Ergebnisse prägt sich durch die Struktur der Mauern selbst, aber auch durch das Buch als Ganzes nebenbei auf. Die 'Anwendung' ist dem „Zahlenmauerbuch" inhärent, da einmal gemachte Erfahrungen an Zahlenmauern Auswirkungen auf die Gestaltung der weiteren Mauern haben. Eine weitere Anwendung der durch das Entdeckungspotential möglichen Erfahrungen durch das „Zahlenmauerbuch" im Unterricht ist ebenso möglich.

Die weiteren Kriterien DEWEYS lassen sich in Tims Aktivität wie folgt wiederfinden:

Die 'Sachlage' und das daraus erwachsende Problem wurden von Tim selbst gewählt: die Gestaltung eines „Zahlenmauerbuches". Das nötige Wissen besitzt Tim. Er kennt Zahlenmauern aus dem Unterricht und beherrscht das Berechnen der von ihm selbst gewählten Ausgangszahlen, da er die Zahlen geschickt wählt und somit die Additionen stets durchführen kann.

Tims „Zahlenmauerbuch" ist eine gewachsene Einheit. Erst an einer solchen Ganzheit kann wahres Interesse entstehen, und umgekehrt bewirkt das wahre Interesse erst, dass die Ganzheit der tätigen Beschäftigung empfunden werden kann.

> *'Ganz' im pädagogischen Sinne sind jedoch niemals rein äußere Angelegenheiten, Dinge und Vorgänge. Geistig gesehen beruht das Vorhandensein einer Ganzheit auf einem Erfaßtsein, einem Interesse: es ist nicht dem Umfange, sondern der Art nach bestimmt, ist die Allseitigkeit, mit der uns eine gegebene Sachlage anspricht.* (DEWEY 1993, 263)

Die mathematische Aktivitäten, die in der Gestaltung der Zahlenmauern in Tims Eigenproduktion deutlich werden konnten, sollen im Weiteren vertieft pädagogisch gedeutet werden. Der Schlüsselbegriff ist dabei der Begriff 'Spiel'.

Spiel und Arbeit sind in ihrem Wesen keineswegs solche Gegensätze, wie man oft annimmt; (...) Bei beiden handelt es sich im bewußt erstrebte Ziele und die Auswahl und Anwendung von Mitteln zu deren Herbeiführung. (...) Beim Spiel ist die Anteilnahme unmittelbarer, was oft mit den Worten ausgedrückt wird, daß hier die Tätigkeit keinen außer ihr liegenden Zweck hat, sondern Selbstzweck ist. (...) Das Spiel hat einen Zweck im Sinne eines leitenden Gedankens, der die Richtung und die Aufeinanderfolge der einzelnen Akte bestimmt, ihnen Sinn gibt. Spielende Menschen tun nicht eben irgend etwas (...), sondern versuchen etwas Bestimmtes zu tun oder zu bewirken; ihre geistige Haltung schließt Vorwegnahmen ein, die ihre augenblicklichen Reaktionen auslösen. (DEWEY 1993, 269)

2.3 Das Spiel als pädagogische Kategorie

Im vorliegenden Abschnitt soll die mathematische Aktivität, wie sie sich in der Anfertigung von Tims „Zahlenmauerbuch" zeigt, von einer weiteren Perspektive beleuchtet werden: nämlich von pädagogischen Theorien des Spiels her.

Das Feld der Spielpädagogik ist weit und heterogen. Es gibt höchst unterschiedliche Kategorisierungen von 'Spielen' und ganz unterschiedliche Einschätzungen ihrer Bedeutung für das Lernen.[27] Im Folgenden werden einige, ausgewählte Positionen kurz dargestellt, und vor diesem Hintergrund wird die pädagogische Sicht des Spiels herausgestellt, die für die vorliegende Arbeit maßgeblich ist.

Der Begriff 'Spiel' wird in der Pädagogik unter zwei Aspekten gesehen: Zum einen sind Spiele ursprüngliche Faktoren für jegliche Entwicklung des Lebens, zum anderen eine konstitutive 'Begleiterscheinung' alles Lebendigen (vgl. RÖHRS 1981, 384). Für eine genauere Begriffsbestimmung ist es notwendig, Spiel-Handlungen durch typische Kennzeichen von anderen Lebenshandlungen abzugrenzen (Phänomenologische Sicht, vgl. FLITNER 1996, 24 f.). In einer grundlegenden Analyse arbeitet HUIZINGA (vgl. 1987, 16 ff.) folgende Kennzeichen heraus:

1. Freiheit des Spiels
2. Spielraum außerhalb des gewöhnlichen Lebens und der Befriedigung von Notwendigkeiten
3. Abgeschlossenheit und Begrenztheit des Spiels

Diese Kennzeichen, die auch SCHEUERL (1994) u.a. zur Charakterisierung von Spiel nutzen, schlüsseln sich wie folgt auf:

Der Spielende kann sich seine Inhalte frei wählen. Das Spiel kann an beliebigen Orten und zu völlig frei gewählten Zeiten ablaufen. Im

[27] FLITNER kategorisiert die Hauptrichtungen der Spielforschung in Phänomenologie, Entwicklungspsychologie und Lernforschung, Psychoanalytische Kinderforschung, Sozialpsychologie und Gruppenforschung sowie in den Zweig, der die Thematik der Ökologie und Modernisierung des Spiels erforscht (vgl. 1996, 24f.). Die Zuordnung der verschiedenen Forschungsansätze zu einer dieser Richtungen ist nicht immer eindeutig möglich.

Spielverlauf können Gegebenheiten von den Spielenden so modifiziert werden, dass sie sich den Spielregeln und Spielvorstellungen anpassen müssen. SCHEUERL (vgl. 1994, 67 ff.) charakterisiert dieses Moment als die 'Freiheit von etwas' und sieht hierin eine 'negative' Bestimmung des Spiels durch Eingrenzung.

Der Spielende verfolgt keinen Zweck, der messbar über Sinn oder Unsinn des Spiels Auskunft geben könnte und wollte. Das Spiel findet seinen Sinn in sich selbst, in Ehrgeiz, Energie, Lust und Freude der Beteiligten[28]

Gesetze des gewöhnlichen Lebens haben keine Geltung, können und dürfen aufgehoben werden. Dabei können Welten betreten werden, die sich gänzlich von der Alltagswelt unterscheiden.

Trotz der Freiheit der Spielenden ist das Spiel abgeschlossen und begrenzt. Die Mitspieler verstehen sich als Verbündete wie in einem 'Club' (vgl. HUIZINGA 1987, 21f.), sie sind in den Vorgang und in die Regeln des Spiels eingeweiht. Es gibt Anfang- und Endpunkte, die das Spiel einläuten oder ausklingen lassen. Der zeitliche Episodencharakter des Spiels kann jedoch nur von außen wahrgenommen werden. Der Spielende selbst empfindet eine 'innere Unendlichkeit'. Die Handlung des Spielens wird fortwährend durch Anlässe zur Bewegung und Dauer angeschoben und lebt in einer Spannung, die nach Ewigkeit strebt (vgl. SCHEUERL 1994, 70 ff.).

> *Sie [die Spielbewegung] ist abgeschlossen gegenüber allem Äußeren und zugleich in sich selbst unabschließbar.* (SCHEUERL 1994, 77)

Die zeitliche Begrenztheit ist jedoch nicht die einzige Deutung des Moments der Geschlossenheit des Spiels. Ebenso findet sich eine 'gestalthafte Geschlossenheit':

> *Als Gestalt aber begrenzt es sich aktiv selbst wie ein Organismus, der sich von innen begrenzt, der nach eigenem Plan Stoffe aufnimmt und andere ausscheidet.* (SCHEUERL 1994, 94)

Es gibt stets innere Regeln, nach denen gespielt wird. Diese können sehr individuell oder im sozialen Austausch entwickelt worden sein und weiterentwickelt werden, auch aus momentanen Ansprüchen und Impulsen heraus. Das Spiel ist zweckfrei, aber nicht sinnlos. RÖHRS vermutet den Sinn vor allem in der 'Ablaufgestaltung' des Spiels:

---

[28] Vgl. hierzu auch 'Gründe des Spiels' im Folgenden in diesem Abschnitt.

> *Ein Spiel ist sinnhaft durch die Gestaltung des Ablaufs, aber es ist keinem Ziel verpflichtet und erlaubt jederzeit den Abbruch, soweit die Sinnhaftigkeit gewahrt wird.* (RÖHRS 1981, 398)

Dass der Spielende mit Ernst und Hingabe spielen kann, ist selbstverständlich. Auch das „Spiel kann sehr wohl ernsthaft sein" (HUIZINGA 1987, 14). Es kann in engem Zusammenhang zur Kultur stehen, Kultur bilden und zur Kultur erziehen, in dem es in gewisse Riten und „Spielarten" einführt (vgl. HUIZINGA 1987, 13).

Gründe des Spiels - Warum spielen Menschen?

Weshalb das Spiel in allen bekannten Kulturen und zu unterschiedlichen Lebenszeiten Grundelement des Lebens ist, wird unterschiedlich begründet. Es gibt konkurrierende und einander ergänzende Theorien, wie die Energieüberschusstheorie, die Rekapitulationstheorie, die Einübungstheorie und die Erholungs- und Entspannungstheorie (vgl. VAN DER KOOIJ 1991, 241, FLITNER 1996, 32 ff. oder z.B. SCHEUERL 1994, 102 ff.). Viele dieser Theorien fußen auf Darwins Evolutionstheorie. Es wird angenommen, das 'survival of the fittest' benötige Räume, in denen die Funktionen geübt werden können, ebenso wie Räume, in denen die harten Gesetze des Lebens nicht gelten, sog. Schonräume.

Zu den Motiven des Spiels gehören auch Wettstreit, Glück und Zufall, die Möglichkeit des Rollentausches, der Verkleidung und Maskierung sowie der Genuss des Rausches, der durch die Ekstase im Spiel hervorgerufen werden kann (vgl. CAILLOIS in FLITNER 1996, 32).

Diese Theorien liefern trotz ihrer Stichhaltigkeit in bestimmten Spielsituationen und Spielbeobachtungen jedoch keine ausreichenden Erklärungen. Nicht jedes Spiel bereitet auf den Ernst des Lebens vor, nicht jedes Spiel schafft einen Rückzugsraum. Es gibt spielerische Handlungen und Tätigkeiten, die sich all diesen Theorien entziehen.[29] FLITNER weist darauf hin, dass die z.B. von CAILLOIS genannten Motive des Spiels sich vor allem auf erwachsene Menschen beziehen: „Die eigentlich kindlichen Spiele wie Verstecken, Sandspiele, Spielzeug- oder Bauspiele finden darin keinen rechten Platz" (FLITNER 1996, 33).

---

[29] Die mathematischen Tätigkeiten, die in dieser Arbeit thematisiert werden, entziehen sich ebenfalls den oben genannten Theorien.

SCHEUERL spricht von einem 'Spieltrieb'[30], den vor allem die psychoanalytischen Theorien benennen. In Abgrenzung zur Triebtheorie der Psychoanalyse gibt er zu bedenken, dass der Spieltrieb - im Gegensatz zu anderen Trieben - niemals gesättigt werden kann; der Trieb erfährt keine Befriedigung (vgl. SCHEUERL 1994, 73).

Die Frage, warum Menschen spielen, lässt sich somit nicht vollständig beantworten.

Sinn des Spiels - Wozu spiele ich?

Wir haben gesehen, dass Spiele grundsätzlich keinem vordergründigen Zweck dienen, dennoch ernsthaft und sinnvoll sein können. Trotzdem findet sich in der Literatur eine Einteilung von Spielen nach Zwecken. So kategorisiert z.B. Ch. BÜHLER Funktionsspiel, Fiktions- und Rollenspiel, Rezeptions- und Konstruktionsspiel und Regelspiel (dtv-WÖRTERBUCH ZUR PSYCHOLOGIE 1987). Im Spiel werden Funktionen des Lebens geübt, in Rollen eingeführt (z.B. Vater und Mutter spielen) oder Situationen adaptiert, die im wirklichen Leben noch zu gefährlich oder außerhalb der Reichweite des Spielenden liegen (z.B. Auto fahren, eine Lokomotive steuern etc.). Unstrittig ist, dass diese Spiele bei Kindern in unserer Gesellschaft zu finden sind. FLITNER merkt an, das Spiel bilde die Gesellschaft nicht nur ab, sondern es widersetze sich ihr. Die 'Freiheit' bei SCHILLER bis HUIZINGA als künstlerische Produktivität, die etwas Neues, Anderes, Kreatives schafft, werde in diesen Theorien nicht gewürdigt:

> *Die funktionalen Spieltheorien des 19. und 20. Jahrhunderts übersehen gerade dieses Moment: das Querliegende, das Dysfunktionale, Unangepaßte des Spiels.* (FLITNER 1996, 131)

Dem Grundphänomen des Spiels kommt man mit einer funktionalen Kategorisierung also nicht näher, denn dabei muss man notwendig Aspekte des Spiels ausklammern, um andere deuten zu können (vgl. FLITNER 1996, 69 f.). Das Spiel an sich zeichnet sich oft gerade durch Zwecklosigkeit und das Fehlen von konkreten Zielen aus (vgl. auch FLITNER 1996, 133). Diese Zwecklosigkeit wird in pädagogischen Ansätzen, die Spielgaben und

[30] Spiel steht in der Auffasung der Psychoanalyse unter dem treibhaften Zwang unbewusster Bedürfnisentspannung, vergleichbar mit dem Bedürfnis Hunger zu stillen. Dieser 'Spieltrieb' ist in seiner Bedeutung scharf zu trennen von dem 'Spieltrieb', den SCHILLER meint (vgl. Kap. 2.4).

Spielanlässe gezielt für bestimmte erzieherische Zwecke einsetzen bewusst aufgehoben (vgl. MONTESSORI z.B. in SCHEUERL 1994, 36 ff.).

Die Rolle der Phantasie

RÖHRS vertritt die These, dass Spiele nur außerhalb des Lebens stattfinden und somit künstliche Welten (Illusionen) darstellen:[31]

> *Das Spiel (...) verkörpert ein phantasiebetontes Tun, das weder den Gesetzen der Exaktheit und Logik noch einem definierbaren Ziel verpflichtet ist.* (RÖHRS 1981, 386)

Erstaunlicher Weise ist jedoch im Spiel selbst die Phantasie suspendiert. Das ist so zu verstehen, dass zwar Gegenstände, Situationen, Personen entfremdet und dem Spiel angepasst im Spiel handeln können, aber die Handlung nicht den Rahmen der Verfügbarkeiten sprengt. Ein Stuhl kann zu einem Motorrad verwandelt werden, aber er bleibt in seiner Beschaffenheit ein Stuhl. Das Spiel gestaltet sich um die Vorgaben der Realität herum und löst sie nicht auf (vgl. z.B. LEONTJEW 1988, 135).

Jeder reale und jeder fiktive Gegenstand behält also seine Eigenschaften im Spiel. Die Eigenschaften werden nur anders interpretiert und ermöglichen so einen ungewohnten, neuen Zugang.

> *Nicht die eingebildete Situation läßt die Spielhandlung aufkommen, sondern umgekehrt. Aus der Diskrepanz zwischen Handlung und Operation entsteht die eingebildete Situation. Die Spielhandlung wird nicht durch die Phantasie bestimmt, sondern die Bedingungen der Spielhandlung machen die Phantasietätigkeit erforderlich und rufen sie hervor.* (LEONTJEW 1988, 136)

SCHEUERL (1994) bezeichnet die Scheinhaftigkeit als Wesenselement des Spiels. Nur zum Schein, so als-ob, spielen zwei Kinder Vater und Mutter, aber ebenso, so SCHEUERL weiter, gibt es den 'reinen Schein', der gegenstandslos ist. Phänomene können in diesem 'reinen Schein' in einem neuen Licht erscheinen oder hier offenbar werden. Erst so kann Ästhetik empfunden werden: „Schönheit *ist* Schein" (SCHEUERL 1994, 78), da sie

---

[31] Ausgenommen sind hier natürlich Regel- und Mannschaftsspiel, die durchaus innerhalb des Lebens stattfinden. In der heutigen Gesellschaft nehmen diese Spiele - wie z.B. Fußball und Tennis - eine wichtige Position in der Lebensgestaltung der Spielenden und der Zuschauer ein. Die Welt des Spiels bleibt aber dennoch künstlich. Diese künstliche Welt findet nur immer mehr Einlass in das 'normale' Gesellschaftleben. Diese Spiele unterscheiden sich zusätzlich qualitativ von den hier thematisierten Geistesspielen (vgl. auch SCHILLER in diesem Abschnitt).

sich den Realitäten, dem Fassbaren entzieht. Die Scheinhaftigkeit hat eine doppelte Bedeutung: Einerseits kann sie die bloße Einbildung, die Illusion, andererseits eine 'autonome Erlebnisebene der Erscheinungen' (vgl. SCHILLER in Kap. 2.4) meinen (vgl. SCHEUERL 1994, 77 ff.).

Die Physiognomie der Spielgegenstände ist nach SCHEUERL nicht 'gnostisch' greifbar, sondern 'pathisch' erfahrbar. Die Spielbewegung ist nicht real-mechanischer Natur, sondern „bildhaft beseelte Bewegung" (SCHEUERL 1994, 83). Da das Spiel in der Ebene der Bilder bleibt, führen Abgrenzungen von objektiv-subjektiv zur Wesensbestimmung des Spiels ins Leere (vgl. SCHEUERL 1994, 84 f.). Vielmehr können die Bilder des Spiels als vertraut und gleichzeitig unbekannt charakterisiert werden:

> *Das Spiel erobert sich Objekt nach Objekt nicht um dieser Objekte selbst willen, sondern um sich die ihm wesentliche Ambivalenz zwischen Bekanntem und Unbekanntem, zwischen Binden und Gebundensein zu erhalten.* (SCHEUERL 1994, 89)

Spielpflege - Kann man zum Spiel erziehen?

Wenn eines der Merkmale des Spieles die Freiheit ist, so verbietet sich auf den ersten Blick ein Eingreifen von außen in das Spiel selbst. Die Freiheit würde beschnitten, wenn ein Anlass von außen den Spielenden zum Spiel anhielte. Verbietet sich somit jede extrinsische Motivation zu spielen?

RÖHRS gibt zu bedenken, ein Verständnis von Spiel könne erst dann reifen, wenn sich eine Kommunikation zwischen Erwachsenen und Kindern, zwischen Erfahrenen und Unerfahrenen entwickelt (vgl. RÖHRS 1981, 391). Das Spiel kann sich erst von anderen Handlungen abgrenzen, wenn es als solches erkannt und definiert wird. Dies gilt ebenso für alle anderen Elemente des Lebens - der Traum wird erkannt, indem er vom Wachzustand unterschieden wird, die Arbeit wird durch die Trennung von der Freizeit definiert usw. Das Erkennen setzt voraus, dass der Spielende eine Metaebene über der Handlung aufsucht. Dies kann Kindern gelingen, wenn sie im Austausch mit Erfahrenen, Älteren oder Erwachsenen handeln und kommunizieren, da diese eine vermeintlich größere Distanz zum Spielgeschehen selbst haben.

Deshalb scheint es an bestimmten Stellen geboten, in Spiele einzuführen. Spiele können auch unter Mitgestaltung der Erwachsenen stattfinden.

> *Es ist ein Vorurteil, zu meinen, Spieltätigkeiten müßten immer spontan entstehen, und ein aufgegebenes Spiel sei schon kein Spiel mehr.* (SCHEUERL 1994, 191)

Besonders in der Kindergartenpädagogik ist dieses Vorgehen bekannt. Und es zeigt sich, dass diese Spielpflege u.U. positive Auswirkungen auf die Entwicklung der Kinder haben kann:

> *Aus neueren Untersuchungen wird deutlich, daß in Kleingruppen, die durch Erzieher im Spiel angeleitet werden, ein bedeutsamer Anstieg im Kreativitätsverhalten (einem Kreativitätstest entsprechend) gegenüber nicht betreuten Kindern festzustellen ist ...* (RÖHRS 1981, 392-393)

Auch FLITNER beschreibt die gewachsene Wertschätzung des 'Anregungspotentials' in der Pädagogik (vgl. FLITNER 1996, 136).

Es ist dabei unbedingt zu beachten, dass das freie Spiel und das angeleitete Spiel stets Raum lassen für die Spontaneität der Spielenden. Sie dürfen ihre 'Macht' über den Verlauf, über die Idee nicht verlieren. Die Kinderspiele dürfen deshalb nicht auf die strukturierten Spiele der Erwachsenen reduziert werden (vgl. ALMY 1988, 220). Paradoxerweise verhält es sich so: Die Freiheit des Spielgeschehens bleibt uneingeschränkt, auch wenn die Freiheit der Tätigkeit eingeschränkt wird (vgl. SCHEUERL 1994, 191). Die Vorgaben von Spielgegenständen, Spielregeln oder Spielanlässen können letztlich die Freiheit des tatsächlichen Spielgeschehens nicht einschränken. Die Gegenstände können gedanklich verändert oder spielerisch 'unsachgemäß' benutzt werden. Die Spielregeln können von den Spielenden stets selbst ausgehandelt und abgeändert werden. Während des Spiels mit mehreren Beteiligten, ist eine Änderung der Regeln zumeist unerwünscht. Nach dem Spiel können jedoch die Regeln unter den Beteiligten neu verhandelt werden. Ein Spiel, das nur allein gespielt wird, kann jederzeit vom Spielenden in den Regeln abgewandelt werden. Der Spielanlass kann nicht allein durch die äußere Aufforderung wirken, sondern bedarf der Motivation der beteiligten Spielenden, sich auf das Spiel einzulassen. Die Spielhandlung selbst wirkt dann auch wieder auf den Spielenden zurück:

> *Wer angesichts des Spiels von einem 'Handeln um seiner selbst willen' spricht, ist in Gefahr, den Glauben zu erwecken, als erzeuge das Handeln im Spiel überhaupt keine Wirkungen, als sei es also ein völlig nichtiges, sinnloses, ins Leere verpuffendes Tun.* (Scheuerl 1994, 97)

Wird die Freiheit des Spiels überstrapaziert, so verbirgt sich dahinter eine ganz bestimmte Auffassung der Pädagogik, die allein auf das 'Wachsenlassen' des Kindes hin orientiert ist. Ungeachtet der Strittigkeit dieser Position (vgl. z.B. LITT 1929) gilt es zu bedenken, dass die freie Entwicklung sich nie den Lebensumständen entziehen kann. Letztlich schaffen die Erwachsenen die Lebensräume und räumen auch die Freiheitsräume ein (vgl. FLITNER 1996, 133 ff.).

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der: Es gibt keine klare Zuordnung von Spielen zu Entwicklungsschritten. Spiel ist, wie jede andere Lebensgestaltung auch, multikausal und komplex. Der Erzieher darf mit ihm nicht nur einen bestimmten Zweck verfolgen; die Erziehung selbst darf Spiel nicht nur auf seinen Bildungsgehalt hin befragen. Spiel soll auch einen Sinn in sich selbst finden.

Wir halten dennoch fest, dass es sich lohnen kann, zum Spiel anzuregen, über das Spiel zu kommunizieren, aber das Spiel darf nicht als ein Erziehungsmittel missbraucht werden, es kann immer nur eine 'Einladung' zum Spiel ausgesprochen werden und kein Auftrag: „[D]enn wir erziehen nicht *durch* Spiel, nein, wir erziehen *im* Spiel!" (VAN DER KOOIJ 1991, 253) Das Spiel wirkt natürlich immer auf die Spielenden und hat somit auch erziehende Wirkung. Jede Handlung hat immer Einfluss auf die Handelnden.

Da Spiel als wichtig erachtet wird, müssen Gelegenheiten zur Anregung genutzt werden. Dies gelingt nur indirekt, indem die Möglichkeiten bereitgestellt werden, die ein Spielen ermöglichen - Raum, Zeit, Material müssen zur freien Verfügung stehen (vgl. z.B. VAN DER KOOIJ 1991, 252).

Bedeutung des Begriffs Spiel für diese Arbeit

Eine allgemeine Charakterisierung von Spielen ist nicht möglich, VAN DER KOOIJ spricht von einer 'nicht definierbaren Aktivität' (1991, 243). Der Begriff kann nur aus einer bestimmten Perspektive gedeutet werden. In der hier

vorliegenden Arbeit wird die Perspektive dadurch bestimmt, dass mathematische Aktivität als Spiel interpretiert wird.[32]

Es ist sinnvoll, die bereits aufgezeigten Merkmale des Spiels erneut herauszustellen und zu ergänzen:

Die typischen Kennzeichen für Spiel sind Freiheit, Abgeschlossenheit, innere Unendlichkeit, Scheinhaftigkeit und Begrenztheit. Spiel-Handlungen können von Zweck- und Bedürfnishandlungen abgegrenzt werden.

VAN DER KOOIJ (1991, 252) ergänzt die Merkmale um die interne Kontrolle und die intrinsische Motivation. Das Spiel wird demnach vom Spielenden kontrolliert. Er verabredet mit sich oder den Mitspielern die Regeln. Ebenso kann der Spielverlauf - sofern er bei dem jeweiligen Spiel eine Rolle spielt - als richtig oder falsch beurteilt werden. Die Motivation zu spielen entspringt dem Spiel selbst und wird nicht von außen hineingetragen. Das bedeutet nicht, dass Pädagogen, Lehrer, Eltern oder andere Kinder nicht zum Spiel oder zum Mitspielen ermutigen dürfen.

Um die mathematische Aktivität bei der Erschließung von Mustern als 'Spiel' deuten zu können, ist es notwendig, sich auf einen Typ von Spiel zu beschränken, den RÖHRS als exploratives Spiel bezeichnet:

> *... unter explorativem Spiel [ist] seine manipulierende Variante zu verstehen, die auf spielerischen Erfahrungsgewinn durch ein manipulierendes und experimentierendes Vorgehen gerichtet ist. Exploration ist eine Sonderform des Spiels, die sich auf Objekte, die Umwelt oder auf den eigenen Körper richten kann.* (RÖHRS 1983, 344)

Diese 'Sonderform' des Spiels wird auch von anderen Autoren akzeptiert: So stellt SCHEUERL einerseits Spiel und Experiment einander gegenüber, räumt andererseits aber ein, dass im Experiment durchaus auch Merkmale des Spiels deutlich werden können.

> *Der Experimentator stellt eine in sich geschlossene Situation her, gibt einen Anstoß und beschränkt sich dann auf die reine Beobachtung eines selbstständig ablaufenden Geschehens. Hierin ist das Experimentieren dem Spiel-Betreiben so nahe verwandt, daß*

[32] Obwohl sich die weiteren Ausführungen auf das Verhältnis von Spiel und Mathematik beziehen, wird keineswegs versucht, die mathematische Definition von Spiel und Spieltheorie auf Spiel im hier gemeinten Sinne zu übertragen (vgl. HENNINGSEN 1983). Hierzu finden sich Ansätze in der Spielpädagogik, die jedoch m.E. völlig ungeeignet sind, dem Spiel als Urphänomen gerecht zu werden.

> *ihm zum vollen Spiel nur noch die 'innere Unendlichkeit' fehlt.* (SCHEUERL 1994, 196)

Auch wenn SCHEUERL hier über physikalische Experimente referiert, kann ebenso ein mathematisches Experiment, ein Versuch, eine Aufgabenstellung zu lösen, die Zahlbeziehungen zu beobachten etc., in diesen Rahmen eingeordnet werden.

Die enge Verzahnung von Exploration und Spiel stellt auch FLITNER heraus: „In der Versuchsreihe von Corinne HUTT zeigte sich, daß bei neuen Gegenständen und in neuen Situationen eine explorative Phase, die der Aneignung des Neuen dient, nach einiger Zeit, wenn das Kind mit dem neuen vertrauter ist, abgelöst wird durch eine Phase des Spielens" (FLITNER 1996, 53). Die Phase der Exploration kann somit als Anfangspunkt des Spiels gedeutet werden. HUTT unterscheidet klar zwischen der anfänglichen Neugier, die mit einer hohen Aktivität einhergeht, und dem Spielen. Die Aktivitätskurve im Spiel folgt hingegen manchmal einem Auf und Ab wie eine Sinuskurve (vgl. FLITNER 1996, 54). Die Unterscheidung HUTTs in die Phase der Exploration und die Spielphase wird von anderen Autoren nicht so trennscharf nachvollzogen.

Kann jedoch eine Wissenschaft, wie die Mathematik, zum Spielen anregen oder zum Inhalt von Spiel werden? Die große Problematik ist die, dass jede Wissenschaft, so HUIZINGA, nicht nach den Regeln des Spiels, sondern nach den Regeln der Überprüfbarkeit in der Wirklichkeit spielt. HUIZINGA sieht hier einen Widerspruch, da er der Wirklichkeit unerschütterliche Wahrheiten im Sinne von Realitäten zuordnet. Diese Realität straft das Spiel, so HUIZINGA, oft Lügen (vgl. HUIZINGA 1987, 219). Die Spielregeln des Spiels sind jedoch absolut frei und können sich nicht als falsch oder richtig bewerten lassen. Somit scheint das Urteil nahe zu liegen, dass die Beschäftigung mit Mathematik kein Spiel sein kann.

Dieser Einschätzung können für die Mathematik zwei Argumente entgegengehalten werden. Zum einen kann die Mathematik nicht 'die' Wahrheit der Wirklichkeit abbilden (vgl. Kap. 1), zum anderen öffnen sich innerhalb der Disziplin Freiräume, die zum Spielen genutzt werden *können*. Diese Möglichkeit räumt auch HUIZINGA ein:

> *Etwas anderes ist die Frage, ob nicht die Wissenschaft innerhalb des durch ihre Methode abgeschlossenen Gebiets «spielen gehen» kann.* (HUIZINGA 1987, 219)

Wichtig ist HUIZINGAs Darstellung der Beziehung zwischen Spiel und Wissen. Der Suche nach Lösungen von Wissensfragen wohnt eine spielerische Macht inne, die einen jeden fesseln und faszinieren kann. Die Macht, die im Wissen verborgen liegt, regt zum Spiel, zum Wettstreit an:

> *Für den frühen Menschen bedeutet etwas können und wagen Macht, etwas wissen aber Zaubermacht.* (HUIZINGA 1987, 119)

Diese 'Zaubermacht' kann auch schon Kinder ansprechen und zur u.U. beschwerlichen Suche nach Lösungen von Wissensrätseln und mathematischen Geheimnissen antreiben.

Die Bedeutung des explorativen Spiels ist eng mit der veränderten Sicht und dem Verständnis von Mathematik (vgl. Kap. 1) verknüpft. Der spielerische Umgang mit Mathematik, mit Zahlen und Ziffern kann als Spiel aufgefasst werden. Wenn Inhalte so stark fesseln, das man sich von der Alltagswelt abzulösen scheint, dann beginnt in dieser Vertiefung das Spiel.

> *Das Kind spielt in vollkommenem - man kann mit vollem Recht sagen - heiligem Ernst. Aber es spielt und weiß, daß es spielt. (...) Der Geiger erlebt heiligste Erregung, er erlebt eine Welt außerhalb und über der gewöhnlichen, und dennoch bleibt sein Tun ein Spiel. Der Spielcharakter kann den erhabensten Handlungen eigen bleiben.* (HUIZINGA 1987, 27)

Das explorative Spiel kann Lernen durch die reflektierte Rückschau ermöglichen. Diese Reflexion kann durchaus auch während des Spiels selbst geschehen.

> *Dabei zeigen vielfältige Situationen einen bemerkenswerten Grad an Erfindungsgabe und wiederum Edukabilität in der Auswertung des durch Erfahrung nahegelegten und experimentierend Eingesehenen. Das explorative Spiel ist jederzeit offen für das Beobachtungslernen (observational learning) und für den Einbezug des Gelernten in die eigene Verhaltensweise.* (RÖHRS 1983, 345)

Spiel ist in der Sprachentwicklungsforschung als „Entwicklungsmotor und Ausgangsbasis für das Lernen" (RÖHRS 1983, 351) anerkannt. Alltagserfahrungen sprechen dafür, dass die Entwicklung des komplexen Verständnisses von Sprache und damit - nach W. von Humboldt - von Denken über spielerische Elemente, Wege und Irrwege läuft. Dabei muss die Handlung nicht immer absolut ernst genommen werden - Kinder werden bei ihrem primären Spracherwerb nicht in Grammatik unterrichtet, sie erproben sie spielerisch.

> *Just as the pleasure in a joke can be derived from play with words, so does the child enjoy play with words. But analogous to the joke, where there is sense in nonsense in the deliberate use of word play, the child's word play also makes sense. The pleasure of play is structured so that it serves as a systematic linguistic exercise.* (WEIR in RÖHRS 1983, 353)

Mit anderen Worten basiert der Scherz, der durch den spielerischen Umgang mit Wörtern entsteht, u.U. gerade darauf, dass die Struktur des grammatikalischen Zusammenhangs, die Beziehungen der Konnotationen und Denotationen variiert und als scherzhaft erkannt werden. Das Erkennen der Variation, der Manipulation, setzt aber voraus, dass die ursprüngliche Struktur bekannt ist.

Analog wird nun die Exploration für die Entwicklung des mathematischen Denkens bedeutsam. Es ist möglich, in der Mathematik (Zahlraum-)Grenzen zu sprengen, Zahlbeziehungen anders zu deuten, neue Zusammenhänge auszuloten, eben 'zu spielen', ohne den Bezug zur dahinterliegenden Struktur der mathematischen Gesetze absolut zu verneinen. Das Spiel manipuliert die Objekte für eine gewisse Zeit und stellt keine Grundsätzlichkeit in Frage. Im Gegenteil, die grundsätzlichen Gesetze der Addition, der Multiplikation, des Lösens von quadratischen Gleichungen etc. stellen das Handwerkszeug, das einen spielerischen Umgang erst ermöglicht oder vereinfacht.

Alles „hängt davon ab, was man verabredet, zum Spiel zu rechnen, und für uns ist Exploration in seinen vielen Wiederholungen ein klarer Spielakt, ist also Spielverhalten." (VAN DER KOOIJ 1991, 244) Es ist unmöglich, vorab festzustellen, dass 'etwas' ein Spiel ist, denn es wird erst ein Spiel durch die Handlungen, die ich ausführe und ihre Wirkungen auf die Objekte und auf mich selbst, durch die Haltung, die ich gegenüber dieser Handlung und ihren Objekten habe.

> *Spielen ist immer ein 'Spielen - zwischen'. Wer von einem Wesen, einem Ding, einem Geschehnis sagt, 'es spielt', der sagt formal nicht anderes aus, als daß es nicht entschieden festgelegt sei, - weder auf ein eindeutiges Ziele, noch auf einen eindimensionalen 'Aktionstunnel', - sondern daß es sich allen Richtungspolen gegenüber in einem kreisenden, pendelnden, schwebenden 'Zwischen' befinde.* (SCHEUERL 1994, 90)

Das Spiel verbindet die Objekte mit ihrem Sinn.

> *Das Mittel dazu ist das Symbol, das erlaubt, das Weltgeschehen (Dingkonstellation, Sachverhalte, Handlungen) spielend so darzustellen, daß die Wirklichkeit und (ihr vom Kinde erfragter und gefundener) Sinn wieder zusammengeführt werden. Insofern ist das kindliche Spiel nicht nur ein (Nach-) Gestalten der realen Dimensionen der Wirklichkeit; es ist vielmehr immer auch ein (Neu-) Gestalten hinsichtlich des häufig verlorengegangenen und spielend wieder zu erfragenden und zu stiftenden Sinns. Daher bedeutet das kindliche Spiel - soweit es seine Intention voll entfaltet - immer auch eine Sinnerschließung der Wirklichkeit.* (RÖHRS 1984, 377)

Es handelt sich bei Spiel also um ein 'schwebendes', aktives Umgehen zwischen einem Gegenstand, beispielsweise der Mathematik und dem Spielenden, der den Sinn der Objekte und Beziehungen hinterfragt. Der Spielende agiert unvoreingenommen, in kindlicher Freude, aber weit ab von kindischem Handeln, da der Ernst des Spielobjekts, der Mathematik, nicht geleugnet wird, sondern sogar hilfreich für das Spiel ist.

Deutung von Tims „Zahlenmauerbuch"

Die oben beschriebenen Merkmale explorativer Spiele lassen sich mühelos auf Tims Handlungen in der Gestaltung des „Zahlenmauerbuches" ausweisen. Tims Handlungen geschehen selbstständig ohne gezielten Auftrag der Lehrerin oder der Eltern. Es besteht keine Notwendigkeit für ihn, diese Mauern zu gestalten, dennoch spricht aus jedem einzelnen Stück des Dokuments die Schaffensfreude.

Das „Zahlenmauerbuch" spielt auf einem abgegrenzten Terrain zu einer abgeschlossenen Zeit (*Abgeschlossenheit des Spiels*). Es bricht nicht mit den Spielregeln der Zahlenmauern, aber es nutzt alle *Freiheiten* innerhalb des mathematischen Rahmens. Vorgaben über Zahlenräume, Größe und Gestaltung der Mauern werden nicht von außen gesetzt, sondern ergeben sich aus der Suche nach 'schönen' Lösungen.

> *Das Spiel, so sagten wir, hat eine gewisse Neigung, schön zu sein. Der ästhetische Faktor ist vielleicht identisch mit dem Drang, eine geordnete Form zu schaffen, die das Spiel in all seinen Gestalten belebt.* (HUIZINGA 1987, 19)

Tim ist es möglich seine *intrinsische Motivation* zur Gestaltung umzusetzen. Diese Motivation kann von dem ästhetischen Moment der Mauern und ihrer Muster ausgehen (vgl. KRAUTHAUSEN 1998, 39). Er benötigt dabei nicht

mehr als das Handwerkszeug des 1+1 und die Regeln der Zahlenmauern. Kein Lehrer wird sein Werk kontrollieren, wenn er es nicht möchte, keine Hausaufgabe diktiert ihm Format und Ausführung. Er hat als Spielender und als Spiel-Erfinder die absolute Kontrolle (*interne Kontrolle*).
Der Respekt gegenüber dem Spielgegenstand, gegenüber der Mathematik zeigt sich in zweifacher Weise. Einerseits werden die mathematischen Regeln der Gestaltung der Zahlenmauern durch Additionsregeln akzeptiert, andererseits ist die Mathematik, sind die Zahlen, die Operationen und ihre Wirkungen, alleiniger Spielgegenstand (*außerhalb des gewöhnlichen Lebens und der Befriedigung von Notwendigkeiten*). Es gibt keine Ausrichtung auf einen Nutzen außerhalb des Faches, außerhalb des Spiels (vgl. HISCHER 1998).

Tims Handlungen, die sich in der Auswahl der Zahlenwerte für die Steine, in der Variation der Möglichkeiten, in der Abwandlung bereits notierter Mauern und dem Aufspüren neuer Ideen für Mauern ausdrücken lassen, können somit als exploratives Spiel im pädagogischen Sinne interpretiert werden.

2.4 Friedrich Schiller: Das Spiel als bildungsphilosophische Kategorie[33]

> Denn, um es endlich einmal herauszusagen, der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und *er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt.*
>
> SCHILLER (1795 in 1967a, 618)

Die im vorangehenden Abschnitt gewonnene Deutung von Mathematik-Treiben als explorativem Spiel soll im diesem Abschnitt philosophisch vertieft werden. Die Richtung hierfür ergibt sich aus folgender Beobachtung: Die aktiv-entdeckende Erforschung und Erzeugung mathematischer Muster erfolgt im Wechselspiel von Handeln und Wahrnehmen. Damit ist die Ästhetik angesprochen. Da der verfügbare Raum zu einer Beschränkung zwingt, konzentrieren wir uns in diesem Abschnitt auf Friedrich SCHILLERS (1759-1805) Vorstellungen über die ästhetische Erziehung des Menschen, die für die Theorieentwicklung in der Ästhetik bis heute fundamentale Bedeutung haben.

Einordnung der Briefe über die ästhetische Erziehung

Auf den eingangs zitierten Satz von SCHILLER aus seinen 'Briefen über die ästhetische Erziehung des Menschen' von 1795 (vgl. SCHILLER 1967a) ist vielfach Bezug genommen worden, oft jedoch in Verkehrung des Sinns. Die Vielfalt der Assoziationen, die das Wort Spiel in der heutigen Zeit auslöst - und wohl auch zu SCHILLERS Zeit ausgelöst hat - erschweren den Zugang zum philosophischen Kern dieses Satzes.

Die Briefe über die ästhetische Erziehung des Menschen, erstmalig veröffentlicht im Jahr 1795 in der von SCHILLER herausgegebenen Zeitschrift 'Horen', entstammen einer Korrespondenz mit dem Prinzen Friedrich Christian von Schleswig-Holstein-Augustenburg, einem Förderer SCHILLERS. In den Briefen wollte SCHILLER das Wesen der Kunst und des Schönen erörtern:

---

[33] Wie zu Anfang schon erwähnt, stehen die weiteren Ausführungen zu SCHILLER natürlich in enger Beziehung zur ästhetischen Kategorie in Kap. 2.5. SCHILLERS 'Briefe zur ästhetischen Erziehung des Menschen' sind zunächst jedoch bildungsphilosophisch zu deuten.

> *Die Revolution in der philosophischen Welt hat den Grund, auf dem die Ästhetik aufgeführt war, erschüttert, und das bisherige System, wenn man ihm anders diesen Namen geben kann, über den Haufen geworfen. Kant hat schon (...) in seiner Kritik der ästhetischen Urteilskraft angefangen, die Grundsätze der kritischen Philosophie auch auf den Geschmack anzuwenden und zu einer neuen Kunsttheorie die Fundamente, wo nicht gegeben, doch vorbereitet. (...) Gewöhnlich hält man eine Erklärung der Schönheit nur darum für gegründet, weil sie mit dem Ausspruch des Gefühls in einzelnen Fällen übereinstimmend ist, anstatt daß man, wenn es wirklich eine Erkenntnis des Schönen aus Prinzipien gäbe, dem Ausspruch des Gefühls nur deswegen trauen sollte, weil er mit der Erklärung des Schönen übereinstimmend ist. Anstatt seine Gefühle nach Grundsätzen zu prüfen und zu berichtigen, prüft man die ästhetischen Grundsätze nach seinen Gefühlen. - Dies ist ein Knoten, dessen Auflösung leider selbst Kant für unmöglich hält (...).* (SCHILLER 1967a, 1136 - 1137)

Um SCHILLERS Sicht des Schönen und der Bedeutung des Spiels verständlich zu erläutern, soll sein Menschenbild im Folgenden kurz beleuchtet werden, auf dem seine Argumentation maßgeblich aufbaut.

Schillers Anthropologie

Beeinflusst von KANTS Philosophie stellt SCHILLER eine Anthropologie vor, in der er den Menschen als hin und her gerissen zwischen zwei Kräften sieht. Diese Kräfte sind auf der einen Seite die sinnliche Kraft, der *Stofftrieb*, und auf der anderen Seite die Kraft der Vernunft, der *Formtrieb*. Beide Kräfte streben nach der Herrschaft über den Menschen. In seinen Briefen zur ästhetischen Erziehung versucht SCHILLER zu zeigen, wie dem Menschen ein Weg zu einer 'Ganzheit' gelingen kann, der beide Kräfte zu einem produktiven Ausgleich bringt.

Die sinnliche Kraft entspringt der Natur des Menschen (der Materie, dem Stoff) und äußert sich in Empfindungen, die mitunter so stark sind, dass der Mensch 'außer sich' gerät, nicht mehr als Persönlichkeit agieren kann, sondern momentanen Anwandlungen ausgeliefert ist (vgl. SCHILLER 1967a, 604 ff.).

> *Mit unzerreißbaren Banden fesselt er den höher strebenden Geist an die Sinnenwelt, und von ihrer freiesten Wanderung ins Unendliche ruft er die Abstraktion in die Grenzen der Gegenwart zurücke.* (SCHILLER 1967a, 605)

Demgegenüber wird der Formtrieb vom Verstand geleitet (vgl. SCHILLER 1967a, 605 ff.). Er ist darauf ausgerichtet, die Welt nach Gesetz, Wahrheit und Recht zu ordnen. Dadurch, dass das Handeln dem Guten verpflichtet und das Denken auf Wahrheit gerichtet ist, wird der Mensch frei und kann sich als Person entfalten. Diese vernunftgemäßen Ordnungen haben 'ewige' Gültigkeit:

> *... er [der moralische und vernünftige Mensch] entscheidet also für immer, wie er für jetzt entscheidet, und gebietet für jetzt, was er für immer gebietet.* (SCHILLER 1967a, 605)

Solange die beiden Triebe antagonistisch wirken oder einer der beiden Triebe überwiegt, kann der Mensch seine wahre Bestimmung als Mensch nicht erreichen:

> *Daraus aber kann bloß Einförmigkeit, aber keine Harmonie entstehen, und der Mensch bleibt noch ewig fort geteilt.* (SCHILLER 1967a, 607)

> *In dem ersten Fall wird er nie e r s e l b s t, in dem zweiten wird er nie e t w a s a n d e r s sein; mithin eben darum in beiden Fällen keines von beiden, folglich - Null sein.* (SCHILLER 1967a, 609)

Für SCHILLER hängt die Menschwerdung entscheidend davon ab, dass die beiden Triebe in Wechselwirkung treten und zu einer lebendigen Synthese gebracht werden:

> *Beide Prinzipien sind einander also zugleich subordiniert und koordiniert, d.h. sie stehen in Wechselwirkung; ohne Form keine Materie, ohne Materie keine Form.* (SCHILLER 1967a, 607)

> *... den Stofftrieb muß die Persönlichkeit, und den Formtrieb die Empfänglichkeit oder die Natur in seinen gehörigen Schranken halten.* (SCHILLER 1967a, 611)

Die Verbindung der beiden Triebe kann nur gelingen, wenn der Mensch für die Schönheit aufgeschlossen wird, die nach SCHILLER eine „notwendige Bedingung der Menschheit" ist (SCHILLER 1956, 26).

Der Spieltrieb

Die Schönheit verschafft sich zwar auf unterschiedlichen Wegen Gehör, zum Durchbruch kann sie jedoch erst dann gelangen, wenn eine ästhetische Kultur dafür geschaffen wird.

Der Schlüssel liegt für SCHILLER darin, den Stoff- und den Formtrieb durch einen dritten Trieb zu regulieren:

> *Er [der Mensch] soll sich eine Welt gegenüberstellen, weil er Person ist, und soll Person sein, weil ihm eine Welt gegenübersteht. Er soll empfinden, weil er sich bewußt ist, und soll sich bewußt sein, weil er empfindet. (...)*
>
> *Gäbe es Fälle, wo er diese doppelte Erfahrung zugleich machte, wo er sich zugleich seiner Freiheit bewußt würde und sein Dasein empfände, wo er sich zugleich als Materie fühlte und als Geist kennenlernte, so hätte er in diesen Fällen, und schlechterdings nur in diesen, eine vollständige Anschauung seiner Menschheit (...).* (SCHILLER 1967a, 612)

Der Trieb, der diese doppelte Erfahrung und einen Ausgleich des Stoff- und Formtriebs ermöglicht, wird von SCHILLER als *Spieltrieb* bezeichnet (vgl. SCHILLER 1967a, 612 ff.).

Der Spieltrieb verursacht keine 'Nötigung' des Menschen, da er weder den Naturgesetzen noch der Vernunft in ihrer 'Zufälligkeit' verpflichtet, sondern mit beiden verbunden ist. Der spielende Mensch wird somit frei.

> *... er [der Spieltrieb] wird also, weil er alle Zufälligkeit aufhebt, auch alle Nötigungen aufheben und den Menschen sowohl physisch als moralisch in Freiheit setzen.* (SCHILLER 1967a, 613)

Der Spielgegenstand ist nicht moralischen Inhalts, denn „mit dem Guten, mit dem Vollkommenen ist es dem Menschen *nur* ernst" (SCHILLER 1956, 38). Ein Spiel ist mit dem Gegenstand des reinen Formtriebs, der Gestalt, nicht möglich. Gespielt wird aber auch nicht mit Belanglosem, kurzfristig Empfundenem, dem Gegenstand des Stofftriebes - dem Leben -, nur um des Zeitvertreibs willen, sondern mit der Schönheit:

> *Der Gegenstand des Spieltriebes, in einem allgemeinen Schema vorgestellt, wird also lebende Gestalt heißen können; ein Begriff, der allen ästhetischen Beschaffenheiten der Erscheinungen und mit einem Worte dem, was man in weitester Bedeutung Schönheit nennt, zur Bezeichnung dient.* (SCHILLER 1967a, 614)

Der Spieltrieb, der sich in dem 'Schönen' ausdrückt, hat eine 'auflösende' und eine 'anspannende' Wirkung. SCHILLER macht deutlich, dass die erste Wirkung dazu dient, Stoff- und Formtrieb zu begrenzen, während die zweite beide Kräfte gleichzeitig erhält. Beide Arten sind verbunden im Spieltrieb (vgl. SCHILLER 1967a, 619).

> *Die schmelzende Schönheit, um dieser doppelten Aufgabe ein Genüge zu tun, wird sich also unter zwei verschiednen Gestalten zeigen. Sie wird erstlich als ruhige Form das wilde Leben besänftigen und von Empfindungen zu Gedanken den Übergang bahnen; sie wird zweitens als lebendes Bild die abgezogene Form mit sinnlicher Kraft ausrüsten, den Begriff zur Anschauung und das Gesetz zum Gefühl zurückführen. (...)*
>
> *Durch die Schönheit wird der sinnliche Mensch zur Form und zum Denken geleitet; durch die Schönheit wird der geistige Mensch zur Materie zurückgeführt und der Sinnenwelt wiedergegeben.* (SCHILLER 1967a, 623 f.)

Bedeutung für die Erziehung

Der Spieltrieb macht den Menschen zu einem lebendigen Kulturmenschen. Der Kulturmensch ist nicht mehr den sinnlichen Kräften ausgeliefert wie der Naturmensch und überwindet ebenso die Strenge des Vernunftsmenschen, der die leblosen Ordnungen und Moralvorstellungen niemals zwanglos 'empfinden' könnte. So können sich unter dem Einfluss des Spieltriebs Verhaltensregeln entwickeln, die einerseits den sozialen Regeln entsprechen und andererseits Raum für Spontaneität lassen.

SCHILLER kritisiert die Wissenschaften, insbesondere die Naturwissenschaften, dass sie nicht bis zur 'wahren' Ästhetik vordringen. Er hält es für unmöglich, allein in der rein vernunftgeleiteten Beschäftigung mit den Wissenschaften diese 'Ganzheit' zu erreichen. Dazu muss die Schönheit, die Ästhetik, 'ins Spiel' kommen, die Vernunft und Sinnlichkeit zum Ausgleich bringt:.

> *Der ernsteste Stoff muß so behandelt werden, daß wir die Fähigkeit behalten, ihn unmittelbar mit dem leichtesten Spiele zu vertauschen.* (SCHILLER 1956, 49)

Das leichte Spiel, so sei noch einmal in Erinnerung gerufen, ist aber kein willkürliches, belangloses, sondern ein Spiel nach den Regeln der Schönheit und Ästhetik. Auch die Regeln des Spielobjekts, z.B. der

Mathematik, bleiben bestehen und werden im spielerischen Umgang nicht als Zwang empfunden, sondern ergeben sich natürlich aus der Sache heraus. SCHILLER bezieht sich hier sicherlich nicht auf die Mathematik im Speziellen, seine Aussagen bleiben dennoch für die Mathematik wahr und auf sie übertragbar.

> *Zum Spiel (...) gehört wesentlich, daß es Prozeß und Gestalt ist, daß die Aktivität einer Form begegnet; mit Schiller zu reden, daß es zugleich 'Leben' und 'Gestalt', daß es 'lebende Gestalt' ist.* (SCHEUERL 1994, 94)

Das Spiel mit der Mathematik ist auch dann ein Spiel mit 'lebender Gestalt', wenn nicht immer der enge Bezug zur Realität gesucht wird. Die Realität ist dadurch verwirklicht, dass der Mensch mit Leib und Geist in das Spiel involviert ist. Die Spiel-Gegenstände treten als Erscheinungen auf, die wiederum nur an Wirkungen abgelesen werden können:

> *Nicht der Gedanke selbst, dessen Ausdruck die menschliche Bildung ist, bloß die Wirkungen desselben in der Erscheinung offenbaren sich dem Sinn.* (Schiller 1967b, 443)

Schon in seiner Schrift „Über Anmut und Würde" (1793) stellt Schiller fest, dass die Kräfte im Menschen immer in ihrem Zusammenhang gesehen werden müssen:

> *Es ist bekannt, daß alle bewegenden Kräfte im Menschen untereinander zusammenhängen, und so läßt sich einsehen, wie der Geist - auch nur als Prinzip der willkürlichen Bewegung betrachtet - seine Wirkungen durch das ganze System derselben fortpflanzen kann. (...) Der Geist bestimmt sie nicht bloß absichtlich, wenn er handelt, sondern auch unabsichtlich, wenn er empfindet.* (SCHILLER 1967b, 444)

Der aktive, 'absichtlich' formende Trieb und der passiv, 'unabsichtlich', wirkende Stofftrieb werden aufgenommen in das Spiel des ganzen Menschen (vgl. Interdependenz von Gedanke und Produkt bei DEWEY in Kap. 2.2).

Für die Pädagogik heißt das: Bildung, die den ganzen Menschen einbeziehen will, muss SCHILLERS Grundgedanken des harmonischen Zusammenspiels beider Richtungen (Stoff- und Formtrieb) Rechnung tragen.

Der allein vom 'Stofftrieb' beherrschte Unterricht, wie ihn beispielsweise die antiautoritäre Pädagogik (vgl. z.B. NEILL 1970) favorisiert hat, zeichnet sich

dadurch aus, dass er auf die momentanen Vorlieben der Kinder ausgerichtet ist und dass fachliche Anforderungen als für die individuelle Entwicklung der Kinder störend abgelehnt werden.

Demgegenüber stellt ein vom 'Formtrieb' geprägter Unterricht die Gesetzmäßigkeiten des Faches in den Mittelpunkt. Der Formtrieb kann in zwei Richtungen überzeichnet werden: Zum einen durch ein fest vorgegebenes Methodenkorsett, wie es nicht nur in der Tradition der Herbartianer immer noch Unterricht bestimmt, zum anderen durch eine Überbewertung der festen Regeln, Gesetze und Definitionen in der Mathematik und durch eine festgelegte Abfolge der Stoffgebiete. Letzteres wurde z.B. durch die Einflüsse der 'New Math' in der vermeintlichen Tradition der BOURBAKI-Gruppe im Unterricht deutlich. Durch die strenge Ordnung, die den Inhalten aufgezwungen ist, wird die soziale und individuelle, aktiv-entdeckende Dimension des Lernprozesses unterdrückt.

Der durch den Spieltrieb kultivierte Unterricht führt zu einer produktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Strukturen. Er nutzt die in der Mathematik liegende Offenheit. Mathematische Strukturen werden zu lebendigen Gestalten.

Deutung von Tims „Zahlenmauerbuch"

Tims „Zahlenmauerbuch" ist als eine Eigenproduktion anzusehen, in der sich SCHILLERS Grundgedanken sehr schön nachweisen lassen.

Das „Zahlenmauerbuch" zeigt in mehreren Aspekten den *Formtrieb:* Jede einzelne Zahlenmauer stellt eine Ordnung dar, die auf festen Regeln beruht. gegeben ist. Tim respektiert diese Regeln. Tim reproduziert aber nicht die Mauern, die er im Unterricht kennen gelernt hat, sondern lässt sich auch von seinen eigenen Vorstellungen leiten. Die innere Motivation und die Suche nach 'schönen' Mauern beeinflusst Tim bei der Gestaltung. Der Form- und der Stofftrieb sind aber durch den Spieltrieb zum Ausgleich gebracht.

Tim geht nach ästhetischen Gesichtspunkten vor, d.h. er bewegt sich in dem vom Stoff vorgegebenen Rahmen phantasievoll und gibt dem Thema eine persönliche Färbung (Form). Tim führt keine 'wilden' Rechnungen durch, sondern stellt Beziehungen her. Er verhält sich kultiviert in SCHILLERS Sinne, da er den Formtrieb nicht über den Stofftrieb oder

umgekehrt stellt. Er bearbeitet den Gegenstand zwar ganz bewusst, und bewegt sich gleichzeitig immer im Rahmen der Regeln.

Die Ästhetik seines Vorgehens spiegelt sich einerseits in der äußeren Gestaltung der einzelnen Seiten des Buches: Jede Seite wird nur für eine einzelne Mauer genutzt. Die Platzierung der Mauer am unteren Seitenrand wird niemals durchbrochen. Das Platzangebot der Seiten wird nicht bis zum Letzten ausgereizt, sondern es wird gezielt eine ansprechende Form für das gesamte Dokument gesucht.

Auch in der inneren und inhaltlichen Gestaltung der einzelnen Mauern durch bestimmte, häufig gleiche Basissteine wird die ästhetische Form beachtet. Dies wird unterstützt durch die spezifische Struktur der Mauern, die gewisse Muster der Verdopplung etc. hervorbringt und durch die Notation sinnlich erfahrbar macht.

Tims „Zahlenmauerbuch“ entspricht in überzeugender Weise SCHILLERs Forderung, den „ernstesten Stoff” so zu behandeln, dass er mit dem „leichtesten Spiel zu vertauschen” ist (SCHILLER 1956, 49).

2.5 Wolfgang Legler und Gunter Otto: Das Spiel als ästhetische Kategorie

> Das Ästhetische ist ein - in den unterschiedlichsten Formen und Konstellationen wirkendes - Ferment des Lernens und Lehrens.
> OTTO (2000)

Die pädagogische und die bildungsphilosophische Interpretation des „Zahlenmauerbuches" von Tim wird verstärkt durch bildungstheoretische Überlegungen der zeitgenössischen Kunstdidaktiker Gunter OTTO und Wolfgang LEGLER, die explizit auf eine veränderte Unterrichtskultur abzielen und daher für diese Arbeit besonders wichtig sind. Zunächst werden die Grundgedanken skizziert und von dieser Position aus abschließend noch einmal Tims „Zahlenmauerbuch" interpretiert.

Bildung des ganzen Menschen

LEGLER hat schon 1978 die Verengung der didaktischen Diskussion über Bildung auf bloße Lernziele kritisiert:

> *Da Lernen jedoch, sofern es den Menschen als Ganzes im Blick hat, nicht nur auf Ziele im kognitiven Bereich fixiert sein kann, gilt auch für die kognitiven Theorien, was für die Lerntheorie im ganzen gelten muß: sie verallgemeinernd als gültige Beschreibung des Lernens im Gesamtfeld der menschlichen Persönlichkeit zu übernehmen, muß in der Didaktik zu einer Verengung und Vereinseitigung ihres Reflexionshorizonts führen.* (LEGLER 1978, 715, Hervorh. i. O.)

LEGLER gesteht den didaktischen Strömungen, die z.B. Kreativität oder kommunikatives Handeln als weitere Lernziele in die Diskussion einbringen, einen rein 'additiven' Charakter zu, der die Verengung der Sicht des Lernens nicht grundlegend ändern kann (vgl. LEGLER 1978, 717). Die fehlende Interdependenz der verschiedenen Ausrichtungen führt seiner Auffassung nach im Gegenteil zu einem Un-Verhältnis der Ziele:

> *Da eine Bezugsgröße fehlt, die die Interdependenz der verschiedenen Zieldimensionen sichert und eine Bestimmung ihrer jeweiligen Gewichtung erlaubt, kann nicht verhindert werden, daß sich in der Praxis (...) einzelne Zieldimensionen und mit ihnen verbundene Lernformen unverhältnismäßig stark durchsetzen (...).* (LEGLER 1978, 717)

Diese Problematik tritt in der Kunstdidaktik besonders prägnant zu Tage, da der Kunstunterricht immer mehr als bloßes Ausgleichsfach angesehen wird, in dem die Schüler Erholung vom Denken erwarten (vgl. LEGLER 1980, auch OTTO/OTTO 1986a).

Ästhetische Erziehung

Gegen diese Verengung setzen OTTO und LEGLER ein umfassendes Konzept ästhetischer Erziehung. Ästhetische Erziehung wird von ihnen als *Voraussetzung* allen Lernens definiert (vgl. z.B. OTTO 1998, 228) und für

> *Lehr-Lernprozesse innerhalb und außerhalb der Schule verwendet, die sich (primär) auf Herstellungs-, Veränderungs-, Reflexionsprozesse im Hinblick auf 'Wahrnehmbares' i.w.S. (als nicht nur 'Sichtbares') beziehen. Dabei ist 'Wahrnehmbares' i.w.S. nicht nur Ausgangspunkt und Instrument von Erkenntnis (z.B. im Sinne von 'Anschaulichkeit'), sondern (vermittelt über gegenständliche bzw. vergegenständlichende Tätigkeit und/oder Denken) selbst immer wieder Ziel von Prozessen (sinnlicher) Erfahrung und Erkenntnis.* (LEGLER 1978, 709)

OTTO exemplifiziert seine Sicht zwar auch an der aktuellen Kunstdidaktik, erhebt jedoch allgemein-didaktische Ansprüche an den Unterricht jeden Faches. Der Schlüsselbegriff seiner Überlegungen ist der in diesem Zusammenhang zunächst ungewöhnlich klingende Terminus 'Performance'.

Performative Prozesse, so OTTO, sind ein Kommunikations- und Verhaltensstil, „der durch Prozesshaftigkeit, Körperbezogenheit, Körpergedächtnis und präsentisches Erleben gekennzeichnet ist" (vgl. PETERS in OTTO 2000).

Diese Sicht ist für meine Arbeit insofern relevant, als OTTO die performativen Aspekte von Handlungen und Situationen nicht vom Produkt, Objekt oder Ergebnis her, sondern als Prozess (Entstehung und Wirkung) definiert. Die aktive Auseinandersetzung mit Kunst oder anderen Inhalten

wird in Beziehung zu den Wirkungen gesehen (vgl. dazu auch den Ansatz von DEWEY in Kap. 2.2).

Wirkungen versteht OTTO jedoch nicht nur als Ergebnis von bereits gemachten Handlungen, sondern auch als Ausgangspunkt für Prozesse.

Die Ästhetik, so OTTO, möchte die Aufmerksamkeit auf Vorgänge des Entstehens und Verstehens lenken.

Der Wahrnehmungsbegriff, den er für den Unterricht favorisiert, ist an Prozesse des Hervorbringens und Erzeugens (poiesis) geknüpft. Die schon von LEGLER beschriebenen Lehr-Lernprozesse der ästhetischen Erziehung beschreiben keine kontemplativen, passiven Betrachtungen von, sondern ein aktives Umgehen mit einem (Kunst-)Gegenstand. Der schöpferische Prozess zeigt sich an Veränderungen und Umgestaltungen ebenso wie an Neu-Schöpfungen. Die Strukturen eines Gegenstandes oder des 'Wahrnehmbaren' im Sinne LEGLERS sind nicht schon vorhanden, sondern werden in der Aktivität erschlossen und hineingedeutet. Dieser Prozess ist nicht beendet, sobald ein Objekt fertiggestellt ist und die Strukturen und Muster erzeugt wurden, sondern mündet in eine Reflexion. Diese muss nicht immer als zeitlich anschließend gedacht werden, sondern ist auch handlungsbegleitend.

Das freie, gedankliche Manipulieren muss nach LEGLER in enger Verknüpfung zur Denkentwicklung gesehen werden. Es werden in poietischen Handlungen „ständig Entscheidungen im Sinne der denkenden Antizipation möglicher Handlungsfolgen" (1980, 132) getroffen. Das spielerische Hantieren - ob nun manuell oder nur 'im Kopf'- erfordert also ein Mitdenken und ein vorausschauendes Denken:

> *Reflexionsprozesse formulieren heißt (...), dem Denken in der Sprache eine Form geben. Ebenso wie der Prozeß des Machens Denken in sinnlich erfaßbaren Formen vergegenständlicht, die (über die Wahrnehmung) auf das Denken zurückwirken, so formt sich das Denken selbst, indem es seine sprachliche Form ausbildet.* (LEGLER 1980, 135)

Ästhetik als Performance stellt keinen Widerspruch zu einem rationalen Umgang mit der Welt dar, sondern ist eine Erweiterung dieses Umgangs

(vgl. OTTO/OTTO 1986a, 13). LEGLER bezieht sich in diesem Zusammenhang ausdrücklich auf SCHILLER (vgl. LEGLER 1995, 5 f.).[34]

Das persönliche Interesse an einem Gegenstand wird im ästhetischen Verhalten sichtbar und versetzt den kognitiven Zustand in einen „Schwebezustand", aus dem heraus Begriffe gefunden und genutzt werden können, um den Gegenstand denkend zu fixieren (vgl. OTTO/OTTO 1986a, 16). Die Affektivität der kreativen, ästhetischen Handlung beschreibt einen sinnlichen Zugriff auf die Objekte. Dieser Zugriff ist jedoch ein Weg zur Erkenntnis und nicht abgekoppelt von der Kognition, sondern „sowohl machend als auch denkend" (vgl. OTTO/OTTO 1986b, 14).

Konsequenzen für Unterricht

OTTO kritisiert den traditionellen Unterricht, der sich in seiner verengten Wissenschaftsorientierung als 'Belehrungspraxis' herausstellt (vgl. OTTO/OTTO 1986a, 14). In der Tradition des 'cogito ergo sum' wurde die Rationalität des menschlichen Denkens in den Mittelpunkt der schulischen Ausbildung gerückt und verdrängte so andere Formen der Erkenntnis. Die Lernenden fanden und finden sich in der Rolle des rezeptiven Publikums wieder, das Wissen ansammelt (vgl. OTTO 2000).

Die Forderung nach einer ästhetischen Bildung stellt jedoch keine ausschließliche Alternative zu den Lehrplänen der Schule dar, sondern ist als Erweiterung zu begreifen (vgl. OTTO/OTTO 1986a, 18). OTTO warnt davor, die Vernunftkritik derart zu überspitzen, dass die Wissenschaften völlig abgelehnt würden (vgl. OTTO/OTTO 1986a, 17-18).

> *Es wird nicht zu viel gedacht, sondern zu verengt, zu linear, mit zu wenig Phantasie, zu wenig Alternativen, zu einseitig, zu unsinnlich - wir denken insofern zu wenig, weil wir den Modus des Denkens zu stark auf das sogenannte wissenschaftliche, auf das begriffliche Denken einschränken. Uns interessiert das Ästhetische als eine Erweiterung des Rationalitätskonzeptes.* (OTTO/OTTO 1986a, 13)

OTTO (1998) mahnt zu einer Flexibilisierung des Erkenntnisbegriffs. Er spricht von einer Pluralität der Realitätszugänge, die sich einerseits ästhetisch andererseits analytisch ausprägen kann: „In den Spannungsfiguren des Schillerschen Denkens scheint mir solche

[34] Die enge Verbindung zwischen den Vorstellungen LEGLERS und den Ideen SCHILLERS zeigt LEGLER selbst auf (vgl. 1995).

Komplementarität mitgedacht zu sein" (OTTO 1998, 226, vgl. auch SCHILLER in Kap. 2.4).

OTTO gelingt die Verknüpfung von SCHILLERS Idee mit Unterricht. Er konstatiert: Didaktische und ästhetische Prozesse haben gleichermaßen performativen Charakter. Er fasst sein Motto für Unterricht folgendermaßen zusammen:

Denkweisen praktizieren, statt Wissen vermitteln. (OTTO 2000)

Erfahrungsprozesse auszulösen, ist das Ziel der Unterrichtsinhalte. Der Lehrende ermöglicht diese Erfahrungsprozesse durch Auswahl der Inhalte. In Abwandlung der gängigen Vorstellung, den Schüler dort abzuholen, wo er ist, provoziert OTTO mit dem Wunsch, 'den Schüler dahin zu schicken, wo er noch nie war'. Der Lernende soll neue, ungewohnte Erfahrungen machen können, die der Lehrer als 'Erfahrungsgestalter' anbietet:

> *... dazu muss man sich vergewissern, wie Unterricht sein kann - ohne Methodenkorsett, ohne Formalstufen - als Interaktionsprozess von Menschen, die sich gemeinsam auf etwas einzulassen bereit oder genötigt sind, weil man nicht weggucken kann, weil man's nicht ignorieren kann, weil es staunen oder stutzen oder Spass macht, weil man zulassen muss, dass es einem etwas tut. (OTTO 2000)*

Die Herausforderung und Appelle richten sich an die sinnliche und leibliche Wahrnehmung - vor allem in der Kunst. Das 'Staunen' mündet jedoch in eine wechselseitige Auseinandersetzung zwischen den Inhalten und dem Subjekt in einem *produktiven* Prozess in einem Höchstmaß an Freiheit[35]

Jede Art von Bildung ist auch geprägt von einer ästhetischen Bildung. LEGLER erinnert an die „konstitutive Bedeutung der Sinnlichkeit" (1992, 37), die in seinem Fach (der Kunst), aber auch in allen anderen Bildungsbereichen gültig ist. Der Ruf nach der Bildung 'mit allen Sinnen' führte in der Kunstdidaktik und in vielen unterrichtlichen Theorien gerade

[35] In OTTOS Theorie wird der Subjektivität in zweifacher Hinsicht hohe Bedeutung zuteil. Einerseits gelingt die Herausforderung durch den ästhetischen Anlass nur, wenn der Lernende sich individuell angesprochen fühlt, Wirkungen zulässt und wiederum erneut auslöst. Andererseits liegt in der Prämisse, die Herausforderung müsse 'einem etwas tun', die Umkehrung, dass Anlässe, die bei den betreffenden Subjekten keine Wirkungen auslösen, auch nicht weiter thematisiert werden müssen, da es keine „legitimierten Inhalte geben kann" (OTTO/OTTO 1986a, 18). Hier zeigen sich die Grenzen der Übertragbarkeit von OTTOS Überlegungen zur Kunstdidaktik auf didaktische Überlegungen zur Mathematik. Die Kunstdidaktik stellt die Wahl der Inhalte unter die Priorität des Individuums und seiner Auswahl an Objekten des ästhetischen Verhaltens (vgl. OTTO/OTTO 1986a, 18), während es in der Mathematik durchaus 'legitimierte' Inhalte gibt, wie z.B. das Einmaleins.

zur Grundschuldidaktik dazu, den Sinn von Inhalten oft mit Attributen der 'Sinnlichkeit', des 'Alltagsbezug' oder der 'Subjektivität' gleichzusetzen. LEGLER erinnert demgegenüber an 'traditionelle' Auswahlkriterien des Exemplarischen oder Elementaren und hält diesen Ansatz für nützlich (LEGLER 1983, 588 und 591).

OTTO selbst entkräftet den Ruf nach Alltagstauglichkeit und Realitätsbezug von Inhalten durch seine Deutung von Lebenswelt:

> *In der Lebenswelt ist real, wozu ich eine Beziehung habe.* (OTTO/OTTO 1986b, 17)

OTTO und OTTO identifizieren einen qualitativen Unterschied zwischen 'Lebenswelt' und 'kindlicher Umwelt'. Interesse kann auch an Objekten und Handlungen entwickelt werden, die dem verengten Blick auf kindliche Realitäten nicht entspringen. Im Grundschulunterricht können demnach Kunstwerke von Picasso ebenso thematisiert werden wie mathematische Muster. Das Interesse der Kinder wird nicht geringer sein, als wenn Kinderzeichnungen oder Kassenzettel vom Marktbesuch der Kasse zum Unterrichtsinhalt werden.

OTTOS Grundgedanke ist keine beschränkende Beschreibung von Auslösungsprozessen im Unterricht, sondern versteht sich als Maß für Lernprozesse im Allgemeinen. OTTO kündigt die gewohnten Unterrichtsformen auf und unterstreicht:

> *... performative Prozesse sind nicht die Vorstufe für Abstraktionsleistungen, sondern ein Kern des Lernens überhaupt. Sie machen auf die produktiven ästhetischen Anteile von Lernprozessen aufmerksam und stellen alle routinierten Organisationsformen von Lernen auf die Probe.* (OTTO 2000)

Deutung von Tims „Zahlenmauerbuch"

Tims „Zahlenmauerbuch" ist in seiner Ganzheit als Ergebnis eines performativen Prozesses zu verstehen. Tim handelt, indem er sich Mauern ausdenkt und dabei unterschiedliche Gestaltungen der Basissteine und der Stockwerkanzahl ausnutzt. Sein Ideenreichtum mündet in ein gestaltetes Produkt. Die bereits erstellten Mauern wirken jedoch auf Tim zurück und provozieren ihn dazu, Muster fortzusetzen oder zu variieren. Der Gestaltungsprozess ist als Wechselspiel von Wahrnehmen und Handeln zu verstehen. Durch die Interpretation im Sinne OTTOS wird deutlich, dass die

Wirkungen der bereits erzeugten Mauern nicht nur in der Reflexion *nach* der Handlung Bedeutung haben, sondern *direkt während* der Herstellung als Anlass zu weiterem Schaffen verstanden werden können (vgl. auch RÖHRS in Kap. 2.3).

Tim gestaltet die einzelnen Mauern und das gesamte Buch 'sowohl machend als auch denkend' (vgl. LEGLER 1980, OTTO 2000). Die Aktivität wird fortwährend begleitet von vorausschauenden und rückblickenden Überlegungen, die die weiteren Schritte beeinflussen. Nicht nur Tim gestaltet, sondern auch das entstehende Werk 'macht etwas', indem z.B. die bereits gestalteten Mauern als Anregung für weitere Gestaltungen dienen.

Dieser Prozess ist durch präsentisches Erleben in dem Sinne gekennzeichnet, dass Tim keine Vorgaben zu erfüllen hat und seine Idee der ästhetischen Gestaltung des Buches direkt ausführen kann. Auch während er das „Zahlenmauerbuch" fortschreibt, kann er „staunen oder stutzen oder Spass [haben]" (OTTO 2000).

Dass die Mauern für sich und die Muster innerhalb des Buches ästhetisch sind und ästhetisch wirken, wurde schon durch die Interpretation nach SCHILLER deutlich. Die Deutung durch OTTO untermauert dies noch. Vor allem kann erneut betont werden, dass die schriftliche Fixierung aller Rechnungen innerhalb einer Zahlenmauer den sinnlichen Zugang zu den schönen Mustern zunächst erlaubt und dann unterstützt.

Der 'produktiv-ästhetische Anteil' am Entstehungsprozess des „Zahlenmauerbuches" ist stets präsent. Somit trifft dieser Prozess den Kern des Lernens - nach OTTO.

3 Zum Zahlenmusterverständnis von Kindern - Eine Standortbestimmung

> Pedanten, die solche Geistesspiele nicht zulassen, werden nie geistweckende Lehrer bilden. Rechnet man solche „Spiele" zum Luxus, meinetwegen; aber dann gilt von ihnen das französische Wort: le superflu - chose si necéssaire.
>
> DIESTERWEG (in SALLWÜRK 1911, 362)

In den ersten beiden Kapiteln wurde herausgearbeitet, dass ein sowohl mathematisch als auch pädagogisch bedeutsamer Zugang zur Mathematik als Wissenschaft von den Mustern nur durch eine aktive Auseinandersetzung mit Mustern möglich ist, die als explorativés Spiel anzusehen ist. In diesem Kapitel werden psychologische Voraussetzungen von Kindern für eine aktive Auseinandersetzung mit Zahlenmustern untersucht. Implizit ergeben sich dabei auch Anhaltspunkte dafür, ob sich ein 'Sinn' für Zahlenmuster während der Grundschulzeit spontan entwickelt.

Stufen des Verständnisses von Zahlenmustern

Für diese Arbeit wird eine Kategorisierung des Zahlenmusterverständnisses in folgende drei Stufen zu Grunde gelegt, anhand deren die Antworten der Kinder nach dem Grad des Verständnisses analysiert werden können:

I *Erkennen* und *Intuitives Fortsetzen* des Musters

II *Beschreiben* des Musters
- exemplarisch
- generalisierend

III *Erklären* des Musters
- Argumentieren am Beispiel
- auf Allgemeingültigkeit zielendes Argumentieren

Diese Stufung ist nicht als globales Phasenmodell für die psychologische Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses zu verstehen, sondern dient nur zur Klassifizierung der Reaktionen und Antworten der teilnehmenden Kinder bei den einzelnen Aufgaben. Es ist zu erwarten, dass die Reaktionen *eines* Kindes bei *verschiedenen* Aufgaben auf *unterschiedlichen* Niveaustufen gegeben werden.

Das Zahlenmusterverständnis eines Kindes darf nicht als momentan Gegebenes aufgefasst werden. Während der Bearbeitung einer Zahlenmusteraufgabe kann selbst ein Lernprozess angestoßen werden, der zu einer Weiterentwicklung führt. In Bezug auf die in Kapitel 2 gewonnenen Erkenntnisse, dass sich mathematische Aktivität in einem Wechselspiel der Handlung und Wirkungen vollzieht, müssen das 'Machen' und das 'Denken' (vgl. z.B. LEGLER 1980 in Kap. 2.5) bei der Bearbeitung von Zahlenmusteraufgaben im Zusammenhang gesehen werden. Das 'Machen' (Stufe I), das Beschreiben (Stufe II) und natürlich erst recht das Begründen (Stufe III) zeigen nicht nur bestimmte Fähigkeiten, sondern deuten auf ein umfassendes kognitives Potential hin. Jede erreichte bzw. gezeigte Stufe des Verständnisses ermöglicht dem Kind einen Fortschritt in der kognitiven Entwicklung, d.h. das Verständnis kann in nachträglicher oder gleichzeitig vollzogener Reflexion der Handlungen zum Erreichen der nächsten Stufe dienen.

Stufe I: Erkennen und Intuitives Fortsetzen des Musters

Es ist keineswegs selbstverständlich, dass ein Muster, das durch Zahlen oder geometrische Objekte (z.B. Kreise, Quadrate, Punkte) gebildet wird, immer 'augenscheinlich' im intendierten Sinn ist. Die Aufmerksamkeit muss auf die wesentlichen Elemente des jeweiligen Aufgabentyps gerichtet werden, um ein Muster zu *erkennen*, d.h. dass z.B. bei einer Folge von figurierten Zahlen nicht allein die Anzahl der Punkte, sondern auch die Form in ihrer Anordnung beachtet werden muss. In manchen Fällen können Verbindungen zu bereits erlernten Inhalten gezogen werden (z.B. zur Folge der geraden Zahlen), aber in vielen Fällen müssen neue Strukturen (z.B. Zahl&Partnerzahl) erkannt werden.

Diese Stufe I *ermöglicht* zunächst nur, dass eine Lösung gefunden werden kann. Diese Lösung muss natürlich nicht zwingend dem nahe liegenden Muster folgen. Die Option, eine Lösung zu produzieren, ist jedoch untrennbar

verknüpft mit dem *Erkennen*, dass es überhaupt ein Muster gibt, gewisse Zahlen in einer Struktur stehen, eine Folge von geometrischen Objekten einer Regelmäßigkeit folgt. Da dieses Erkennen nur in den Gedanken der Kinder stattfindet, kann diese Stufe nur daran erkannt werden, dass die Kinder das Muster non-verbal, *intuitiv fortsetzen*. Das Fortsetzen einer Folge, das Anstreichen einer unpassenden Aufgabe, das Ausfüllen einer Mauer sind Zeichen dafür, dass ein Muster (ob falsch oder richtig) identifiziert wurde. Indem die Kinder das Muster für sich *fortsetzen*, wird das *Erkennen* nachweisbar und diese Stufe überhaupt erst für Forschungen interessant.

KERSLAKE (1994) geht davon aus, das Finden eines Musters allein mache noch keine mathematische Beschäftigung aus. Da sich in der vorliegenden Arbeit diese Tätigkeit für die Probanden jedoch bewusst innerhalb mathematischer Rahmenbedingungen abspielt (im Mathematikunterricht, während eines Tests zur Mathematik usw.), ist den Teilnehmenden auch zu jeder Zeit bewusst, dass eine mathematische Beschäftigung erwartet wird. Somit kann das Auffinden eines Musters schon als erste Stufe des Zahlenmusterverständnisses definiert werden.

Stufe II: Beschreiben des Musters

Sobald das Muster gesehen und erkannt wurde, kann versucht werden, eine mündliche oder schriftliche *Beschreibung* des Zahlenmusters zu geben (vgl. auch MÜLLER/WITTMANN 1990). Hierbei können unterschiedliche Beschreibungsstile auftreten.

Einerseits das *exemplarische* Darstellen (Stufe IIa), das sich an den konkreten Daten, Werten und Objekten, die in dem Muster erkannt worden sind, orientiert. Innerhalb der *Beschreibung* werden Teile des Musters zitiert. Die Kinder beschreiben das Muster nicht begrifflich, sondern eher den *Prozess,* der das Muster *konkret* fortsetzt.

Andererseits können auch Beschreibungen gegeben werden, die über die konkreten Daten hinaus *generalisierenden* Charakter (Stufe IIb) haben. Auch hier gilt das Interesse dem Prozess des Fortsetzens. Anders als bei der Stufe IIa wird aber nun versucht, eine *allgemeine* Regel zu formulieren.

Stufe III: Erklären des Musters

Bei Zahlenmustern können die beschriebenen Phänomene auch mathematisch *erklärt* werden. Erst die Erklärungen komplettieren die mathematische Auseinandersetzung (vgl. KERSLAKE 1994). Das erfordert keineswegs eine formale Argumentation. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten für präformale Argumentationen (Stellenwerttafeln, Graphiken oder Punktmuster).

Die Erklärungen greifen manchmal nur Teile des Phänomens heraus, es wird nur lokal *am Beispiel* argumentiert (Stufe IIIa).

Wird hingegen generell argumentiert (Stufe IIIb), richtet sich der Blick auf ein Gesamtbild des Zahlenmusters und auf *Allgemeingültigkeit*. Erst hier löst sich der Blick langsam von dem Prozess der Musteraufbaus. Nicht mehr die Fortsetzung von Einzelfall zu Einzelfall steht im Mittelpunkt der Betrachtung, sondern die globale Erfassung des Musters (vgl. GRAY/TALL 1992, SKEMP 1976).

Bedeutung der Stufen innerhalb der Forschungsansätze

Innerhalb dieser Arbeit werden verschiedene Forschungsmethoden angewandt, die zu quantitativen und qualitativen Aussagen über das Verständnis von Zahlenmustern führen (vgl. auch SCHERER 1996, 121 ff.). Das jeweilige Forschungsdesign schränkt die möglichen Reaktionen der Kinder natürlich ein. Die verschiedenen Stufen des Verstehens können somit nicht immer eruiert werden. Für die einzelnen Forschungsmethoden heißt das im Einzelnen:

Innerhalb der Paper-Pencil-Tests liegt der Schwerpunkt auf dem ersten *Erkennen* und *Intuitiven Fortsetzen* des Musters (Stufe I).

Die Interviews dagegen bieten vielen Kindern die Möglichkeit, die Aufgaben nicht nur zu lösen (Stufe I), sondern auch zu *beschreiben* (Stufe II). Dies kann mündlich im Gespräch mit dem Interviewer oder auch schriftlich geschehen.

Die dritte Stufe des Zahlenmusterverständnisses erfordert eine längere, aktiv-entdeckende Auseinandersetzung mit Zahlenmustern, die im Rahmen der Interviews aus Zeitgründen nicht möglich ist. Jedoch können in den Interviews spontane Begründungsansätze auftreten.

Zugänglichkeit von Zahlenmustern

Die Lebenswirklichkeit der Kinder umfasst weit mehr als das, was in vielen pädagogischen Programmen darunter verstanden wird. Der verengte Blick auf die konkreten Lebensumstände schließt Gegenstände und Tätigkeiten aus, die das Kind nicht real erleben kann und die dennoch sein Interesse wecken. Dabei kann es sich einerseits um Bereiche handeln, die außerhalb des kindlichen Zugangs liegen, wie Raketenflüge oder das Leben der Dinosaurier. Andererseits kann das Interesse an abstrakten Gegenständen, wie z.B. Mustern und Symmetrien, entflammen. Diese Gegenstände werden durch das Interesse und durch den Umgang mit ihnen für das Kind real: „In der Lebenswelt ist real, wozu ich eine Beziehung habe" (OTTO/OTTO 1986b, 17, vgl. auch 2.5).

Mathematik wird oft als abstrakt definiert. Es darf jedoch nicht vergessen werden, dass das Bildungssystem in unseren westlichen Ländern und in vielen anderen Ländern dieser Welt gerade davon lebt, dass Lernende die Fähigkeit zu abstraktem Denken entwickeln. Die heutige Gesellschaft, Wirtschaft und Technik baut auf die Fähigkeit des abstrakten Denkens auf (vgl. DONALDSON 1982, 86). Nur so ist es möglich, die ungeheure Vielzahl von Inhalten zu speichern und zu verarbeiten und die kognitiven Kapazitäten optimal auszunutzen. Es wäre unmöglich, alle benötigten Einzeldaten isoliert zu memorieren, wenn nicht Assoziationen und strukturelle Verknüpfungen bewusst genutzt würden. Ebenso hat sich das Lernen zu einem lebenslangen Prozess entwickelt, der ständig verlangt, dass neues Wissen selbstständig erarbeitet werden kann oder an Erfahrungen angebunden wird. Dies ist nur möglich, wenn strukturelle Zusammenhänge transferiert werden können.

> *Wenn Mathematik auf Rechnen und Alltagsverstand reduziert wird, kann dies als eine Erschwerung der Entwicklung von Abstraktions-, Systematisierungs- und Analysefähigkeiten von Schülern interpretiert werden. Den Schülern wird im Hinblick auf entstehende Freude und sich ausbildende Kenntnisse und Fertigkeiten in Mathematik ein schlechter Dienst erwiesen.* (GELLERT 1999, 127)

Da es in dieser Arbeit um eine unverfälschte Begegnung von Kindern mit Mathematik geht, wurden Zahlenmuster bei den vorliegenden Tests bewusst als für sich interessanter Kontext 'ohne Verpackung' angeboten.

3.1 Paper-Pencil-Test

> Man is endowed at birth with only one ability: the ability to form specifically human abilities.
>
> LEONT'EV (in KRUTESTKI 1976, 60)

Vorüberlegungen

Grundsätzlich ist bei der Untersuchung von Fähigkeiten darauf zu achten, welche spezifische Art von Kenntnissen, Aktivitäten und Wissen von den Schülerinnen und Schülern gefordert werden.

KRUTESTKII (1976, 67 f.) unterscheidet zwischen „creative (scientific) ability" und „school ability". Diese Einteilung scheint theoretisch, erweist sich jedoch als sehr hilfreich. Die Leistungen in der sogenannten Schulmathematik sagen nicht unbedingt etwas darüber aus, wie neugierig und kreativ sich derjenige, der diese Schulleistungen erbringt, gegenüber neuen mathematischen Phänomenen verhält. Viele Komponenten fließen hier ein (vgl. Abb. 3.1):

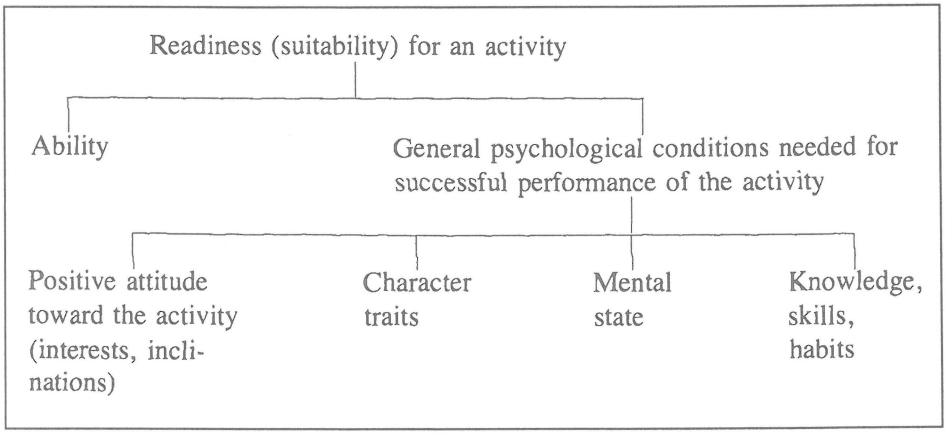


Abb. 3.1

Gewisse Kenntnisse und Fertigkeiten sind Voraussetzung dafür, kreativ und aktiv-entdeckend zu arbeiten und an neuen Aufgaben zu wachsen. Interesse und die persönliche Einstellung gegenüber der Mathematik beeinflussen die Leistungsfähigkeit ebenso.

Differenzierungen in kreative Aufgaben und Aufgaben des Schulalltags können hilfreich sein. Einerseits kann von reproduktiven, formalen Aufgaben und andererseits von eher kreativen Aufgaben gesprochen werden. Diese Unterscheidungen können auch an mathematischen Aufgaben, hier im Speziellen an Zahlenmusteraufgaben, getroffen werden.

Der fachliche Inhalt 'Zahlenmuster' ist bisher vermutlich im Unterricht der Grundschule kaum thematisiert worden. Er gehört nicht zum klassischen Unterrichtsrepertoire. Die Zahlenmusteraufgaben sind somit den kreativen Aufgaben zuzurechnen. Eine gewisse Rechenfertigkeit und ein gewohnter Umgang mit Zahlen (eines Zahlenraums) sind jedoch selbstverständlich Voraussetzung zur Bearbeitung der Aufgaben. Demnach spielen auch die Fähigkeiten, Aufgaben des Schulalltags zu lösen, bei der Bearbeitung der Zahlenmusteraufgaben eine Rolle. Ebenso kann nach KRUSTESTKII (1976) eine positive Einstellung gegenüber dem Fach die Arbeit begünstigen. Diese Komponenten spielen bei der aktiv-entdeckenden Bearbeitung von Zahlenmusteraufgaben zusammen.

Gestaltung qualitativer Tests

Die erste Untersuchung wurde als schriftlicher Test (Paper-Pencil-Test) in allen vier Schuljahren der Grundschule durchgeführt. Um die Leistungen der Schülerinnen und Schüler besser vergleichen zu können, wurden in allen Schuljahren ähnliche oder zumindest thematisch verwandte Aufgaben gestellt. Die Aufgaben wurden natürlich an die Bedingungen des jeweiligen Schuljahres angepasst. Diese Anpassung geschah in Bezug auf die genutzten Zahlenräume und die notwendigen Rechenfertigkeiten, die sich durch die Lehrpläne der Grundschule ergeben. Die Anzahl der Aufgaben in den Anfangsklassen wurde niedriger angesetzt als in den höheren Klassen, da die Konzentrationsfähigkeit der jüngeren Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen noch nicht so entwickelt ist wie bei älteren Kindern.

Im Weiteren stützte sich die Gestaltung des Tests auf die grundsätzlichen Überlegungen von Marja VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN (1996, vgl. auch 1990 und 1994), die auf eine Unterstützung eigenständiger Arbeit von Kindern im aktiv-entdeckenden Unterricht ausgerichtet sind (vgl. auch KENNEY/SCHLOEMER/CAIN in NISS 1993, JANSEN 1996/97).

Der Test sollte die Kinder zwar ermutigen, ungewohnte Lösungen zu suchen und neue Inhalte zu bearbeiten, aber er durfte nicht völlig von den

gewohnten Unterrichtsinhalten abweichen. Dies galt besonders für die Präsentation der Aufgaben, die 'auf den ersten Blick' vertraut erscheinen sollten.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN (1996, 140ff.) fordert die Beachtung folgender grundlegender Punkte für die Gestaltung und Durchführung von Tests):

- *Scratch paper:* Auf den Testbögen wird Platz eingeräumt, den die Kinder für Notizen, Zeichnungen, Bemerkungen usw. nutzen können.
- *Asking about the strategy:* Es werden direkte Fragen an die Kinder nach der benutzten Strategie zur Lösung gestellt.
- *More than one correct answer:* Aufgaben werden so gestellt, dass unterschiedliche Lösungswege und auch verschiedene Lösungen immer mitgedacht sind.
- *Option problems:* Aufgaben werden so gestaltet, dass die Testperson nicht nur verschiedene Antwortmöglichkeiten hat, sondern sich auch die Aufgabe in gewissem Rahmen frei wählen kann.
- *Own productions:* Aufgabe und Lösungswege werden von den Testteilnehmern selbst gewählt (mehr Freiheiten als in den 'option problems').
- *Alternation in presentation:* Probleme werden in zwei verschiedenen Weisen angeboten.
- *Twin tasks:* Aufgabenpaare werden so gewählt, dass die Lösung eines Problems zur Lösung des Zwillingsproblems herangezogen werden kann.
- *Multi-level pictures:* Abbildungen werden angeboten, die unterschiedliche Vergehensweisen erlauben (z.B. Abzählen, strukturiertes Zählen etc.).
- *Support problems*: Verwandte Aufgaben werden gestellt, sodass deren Lösungen einander unterstützen können.

In dem Zahlenmustertest konnten nicht alle von VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN aufgeführten Kriterien genutzt werden, da sie in diesem Zusammenhang nicht alle sinnvoll sind. Einige Kriterien wurden erst in den Interviews genutzt (vgl. Kap. 3.3).

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZENs Testdesign unterstützt vor allem den 'realistischen' Mathematikunterricht, der seinen Schwerpunkt in realen Kontexten hat, während die Zahlenmuster 'reine' mathematische Strukturen verkörpern. Aber natürlich ist die grundsätzliche Idee übertragbar, dass ein Paper-Pencil-Test aktiv-entdeckende Herangehensweisen der Kinder ermöglichen sollte.

Im Einzelnen werden die folgenden Gestaltungskriterien übernommen:

Auf den Aufgabenblätter wurde genügend Freiraum gelassen, um Nebenbemerkungen, Notizen oder Rechnungen zu erlauben (vgl. 'scratch paper').

Aufgaben eines Typs wurden auf einer Seite oder auf nachfolgenden Seiten präsentiert, um unterstützende Aspekte bei der Lösung zu ermöglichen (vgl. 'support problems').

Die Aufgaben konnten oft auf unterschiedliche Weise gelöst werden. Unterschiedliche Denkweisen konnten dabei zu verschiedenen Lösungen führen, die zunächst immer 'möglich', d.h. in diesem Sinne denkbar und richtig, sind (vgl. 'more than one correct answer'; vgl. hierzu auch die Kategorisierung der Ergebnisse in Kap. 3.2).

Der Test orientierte sich insgesamt bewusst am *Minimalpotential* der Kinder. Er kann nur die erkennbaren Musterfortsetzungen messen. Diese ermöglichen keine abschließende Beurteilung der maximalen Potentiale der Kinder. Der Paper-Pencil-Test versteht sich als 'Schnappschuss' der Reaktionen der Kinder zu einem bestimmten Zeitpunkt auf eine bestimmte Auswahl an Zahlenmusteraufgaben.

Der Test folgt EISNER (vgl. 1998, 53 ff.), der für die Ergebnisse qualitativer Studien fordert, dass sie kohärent, konsensfähig und nützlich sind: Die Kohärenz einer Interpretation ist unabhängig von der Existenz anderer Interpretationsmöglichkeiten, die bewusst ausgeblendet werden. Die vorliegende Auswertung versucht ein stimmiges und konsensfähiges Bild der Potentiale der Kinder zu geben. Nützlich sind die Ergebnisse einer solchen Untersuchung dann, wenn sie helfen, die vorliegende Situation zu verstehen. Das Verständnis für die Handlungsweisen der Kinder kann dann als Leitgedanke die weitere Arbeit mit Kindern zu diesem bestimmten Thema beeinflussen.

Die Bestimmung der Minimalpotentiale der Schülerinnen und Schüler durch den vorliegenden Paper-Pencil-Test ist im Folgenden auf diese Kriterien hin zu befragen.

3.1.1 Design des Paper-Pencil-Tests

Die Testaufgaben

Im Folgenden wird eine grobe Übersicht über die Themen des Tests gegeben, denen die Testaufgaben entnommen sind.[36]

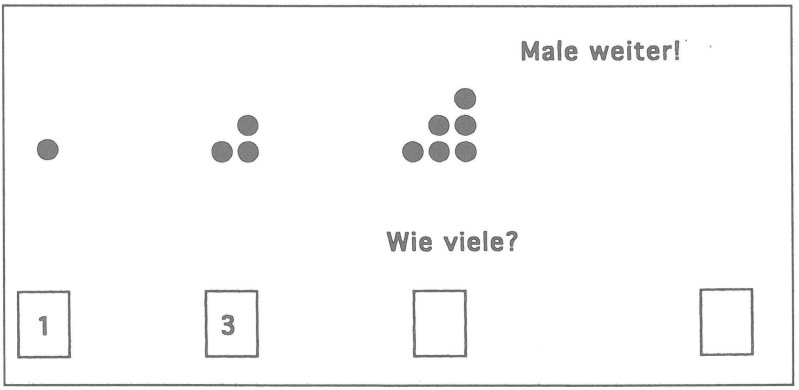
	Hintergrund
Figurierte Zahlen	Struktur im Punktmuster erkennen und weiterführen, arithmetische Struktur in der Anzahlfolge u.U. nutzen
Zahlenfolgen	Strukturen in einer Folge von Zahlen erkennen und weiterführen
Folgen mit geometrischen Objekten	Strukturen in einer Folge von geom. Objekten (Kreise, Dreiecke etc.) erkennen und weiterführen
Wertetabelle mit Zahlenpaaren	Funktionale Beziehungen zwischen Zahlenpärchen ermitteln
Operative Päckchen (mit Störaufgabe)	Struktur in allen Aufgaben erkennen; dabei ist eine Rechenleistung nicht zwingend erforderlich, da anhand der Ziffern die Störaufgabe ermittelt werden kann; eine Ausnahme bildet das vierte Schuljahr, da hier ohne die vorliegenden Ergebnisse die Störaufgabe nicht oder nur schwer entdeckt werden kann
Zahlenmauern	Muster in den Basissteinen erkennen und die folgende Mauer notieren bzw. fehlende Permutation der Basissteine ergänzen

[36] Eine genaue Beschreibung der jeweiligen Aufgaben für jedes einzelne Schuljahr findet sich im Anhang B.

Abb. 3.2

Diese Themen wurden deshalb ausgewählt, weil sie die typischen Merkmale eines Zahlenmusters enthalten. In allen Fällen geht es darum, das Muster fortzusetzen. Dies kann nur gelingen, wenn die dahinter liegende Struktur verstanden worden ist. Das Angebot unterschiedlicher Aufgabenformate soll allen Schülern ermöglichen, zumindest einzelne Lösungen anzugeben.

1. Figurierte Zahlen[37]



Testaufgabe des 2. Schuljahres zu 'Figurierte Zahlen'

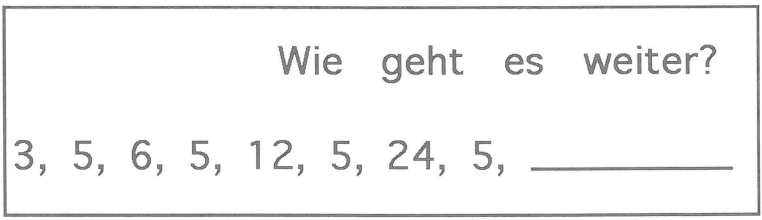
Abb. 3.3

Die aus der Frühgeschichte der Arithmetik (vgl. Kap. 1.5) bekannte Anordnung von Zahlen in Punktmustern bietet zwei Möglichkeiten, ein Muster zu entdecken. Einerseits kann die gezeichnete Folge der Punktmuster, andererseits die Folge der Anzahl der Punkte, die unterhalb des Punktmusters notiert ist, erforscht werden (vgl. Abb. 3.3). Bei der Betrachtung der Punktmuster ist es wichtig, sich von den einzelnen Punkten zu lösen und ein Gesamtbild der figurierten Zahl zu erkennen. Dieses Gesamtbild prägt auch stets den Namen der jeweiligen Zahl (Quadrat-, Dreieck-, Rechteck-, Trapez-Zahl), die in den vorliegenden Tests auftrat (vgl. Abb. 3.3).

---

[37] Eine vertiefte Darstellung der mathematischen Hintergründe der Aufgaben findet sich in Anhang A.

2. Zahlenfolgen



Testaufgabe des 3. Schuljahres zu 'Zahlenfolgen'

Abb. 3.4

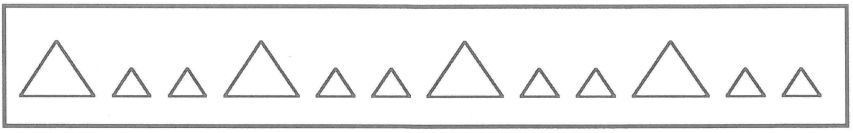
Aus dem Unterricht bekannt sind die Folgen der natürlichen Zahlen, der geraden oder der ungeraden Zahlen. Diese Folgen gehören zum Typ der arithmetischen Folgen.

Im Test wurden auch geometrische Folgen (z.B. Zweierpotenzen) aufgeführt und Folgen untereinander verknüpft (vgl. Abb. 3.4). Als einfachste Art der Verknüpfung kann eine konstante Folge jeweils als zweites Glied zwischen jede beliebige Folge gesetzt werden (vgl. sog. 'eingeschobene Fünf' in der Schuljahrsübersicht im Beispiel '1, 5, 2, 5, 3, 5, 4, 5, ...' u.a.).

Folgen können durchaus unterschiedlich fortgesetzt werden, sodass hier den Kindern verschiedene Strategien offenstehen. Die Kinder legen sich auf eine, auf 'ihre' Regel fest und bestimmen somit den Fortgang der Folge. Bei geometrischen Folgen können die Kindern Regeln finden, die ohne Multiplikation auskommen. Das ermöglicht auch solchen Kindern einen Zugang zu diesen Folgen, die die Multiplikation (noch) nicht beherrschen.

Gerade die verknüpften Folgen fordern einen selektierenden Blick: Eine Folge muss jeweils ausgeblendet werden, damit die andere auf ihr spezifisches Muster hin untersucht werden kann.

3. Folgen mit geometrischen Objekten



Testaufgabe des 1. und 2. Schuljahres zu 'Folgen mit geometrischen Objekten'

Abb. 3.5

Diese Art von Folgen wurde im Paper-Pencil-Test nur in den Anfangsklassen angeboten. Sie stellt gerade für die jeweiligen Kinder eine Einstiegsmöglichkeit in das Thema dar, die sich über Ziffern und Zahlen nicht ansprechen lassen. Eine Folge besteht z.B. aus großen und kleinen Dreiecken, die nach einer bestimmten Regel wiederholt werden (vgl. Abb. 3.5). Auch wenn die Folgenglieder Kreise, Dreiecke u.ä. sind, muss eine arithmetische Analyse der Anzahlen der Folgenglieder (z.B. *ein* großes Dreieck, *zwei* kleine Dreiecke usw.) erfolgen, damit das Muster fortgesetzt werden kann. Bei dieser Art der Darstellung ist jedoch ein stärkerer Einfluss der Nachahmung der geometrischen Form (d.h. fortsetzen, ohne explizit zu rechnen) zu erwarten.

4. Wertetabellen mit Zahlenpaaren

Zahl	1	5	6	25	30	31	
Partner	16	20	21	40		46	65

Testaufgabe des 3. Schuljahres zu 'Wertetabellen'

Abb. 3.6

In den Tabellen geht es darum, eine Zuordnungsregel zu finden und so die fehlenden Zahlen der Pärchen zu ermitteln. Um möglichst viele Anhaltspunkte für das Muster der Zuordnung zu geben, werden jeweils fünf Pärchen komplett angegeben. Bei zwei anderen Pärchen fehlt einmal die Ausgangszahl und einmal die sog. Partnerzahl. Die Zuordnungsregel muss also in beide Richtungen angewandt werden (vgl. Abb. 3.6).

5. Operative Päckchen

957	846	524	694
- 759	- 648	- 325	- 496
198			

Testaufgabe des 3. Schuljahres zu 'Operative Päckchen'

Abb. 3.7

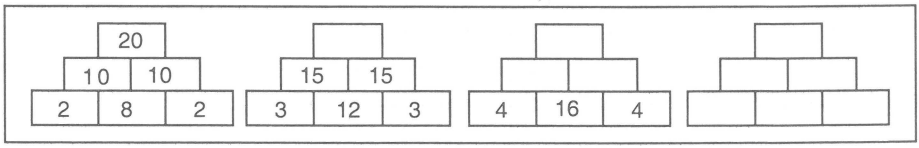
Im aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht sind Aufgabenserien, die einem Muster folgen, üblich ('Schöne Päckchen'). Im Test wurden Päckchen angeboten, die eine Störaufgabe aufweisen, d.h. eine Aufgabe, die aus dem Zahlenmusterrahmen herausfällt (vgl. Abb. 3.7). Es gilt, diese zu eruieren und eine Ersatzaufgabe für sie zu finden, die in die entstandene Lücke passt.

Bei diesen operativen Päckchen ist es einerseits möglich, über die jeweilige Gesetzmäßigkeit der Ziffern der Summanden, Faktoren, Subtrahenden und Minuenden usw. das Zahlenmuster zu erkennen, andererseits kann auch das Ergebnis oder die Entwicklung der Ergebnisse in der Päckchenfolge einen Hinweis darauf geben, welche Aufgabe unpassend ist.

In den höheren Klassen können mit den mehrstelligen Zahlen selbst schon schöne Muster gebildet werden, wie z.B. bei Umkehrzahlen (vgl. STEINWEG 1997) und ANNA-Zahlen, da der Zahlenraum bis 1000 oder weiter genutzt werden kann.

6. Zahlenmauern

Bei den Mauern gibt es innerhalb des Tests zwei Typen von Aufgaben:

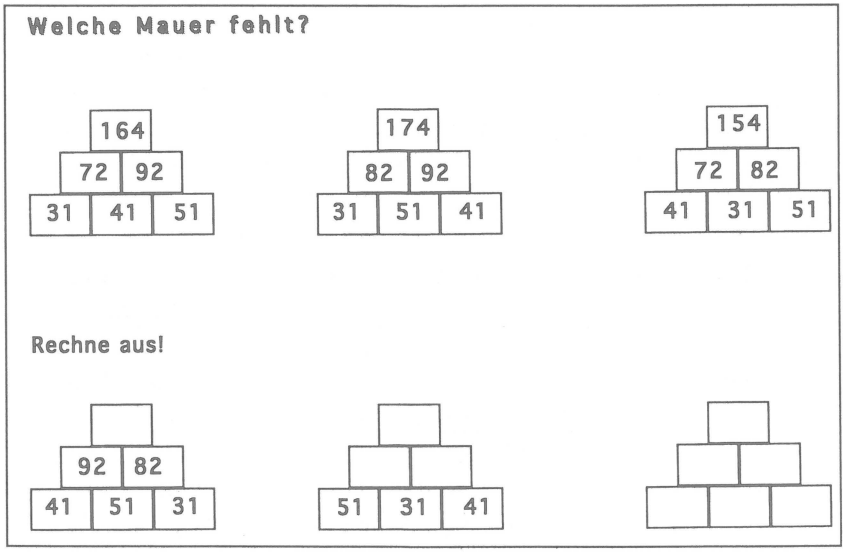


Testaufgabe des 3. Schuljahres zu 'Zahlenmauern'

Abb. 3.8

a) Schon in der Struktur dieses Übungsformats liegt es begründet, dass unter den eingetragenen Zahlen selbst, d.h. zwischen den Basissteinen (untere Steinreihe), den Mittelsteinen (mittlere Steinreihe) und dem Zielstein (Abschlussstein der Mauer), immer eine Beziehung besteht. Dies kann noch dadurch verstärkt werden, dass z.B. Randsteine und Mittelstein in der Basis eine bestimmte Beziehung zueinander haben (vgl. Abb. 3.8). Diese Steine können aber auch einem Ausschnitt einer Folge entsprechen, wie z.B. die Basissteine 1, 2, 3 / 2, 3, 4 / 3, 4, 5 usw. (vgl. Punkt 2. 'Zahlenfolgen').

Innerhalb der Testaufgabe wurden jeweils vier Mauern angeboten, die alle einem Muster folgen, d.h. auch unter den unterschiedlichen Mauern können Muster entdeckt werden. Die Entwicklung der Folge der Basissteine war hier von der Aufgabenstellung her ausschlaggebend. Die ersten drei Mauern wurden in den Basissteinen vorgegeben und z.T. ausgerechnet, und die vierte Mauer musste ergänzt werden.



Testaufgabe des 4. Schuljahres zu 'Kombinatorische Zahlenmauern'

Abb. 3.9

b) Die Basissteine können bei Mauern, die aus drei Ebenen bestehen, auch mit einer der Permutationen von drei Zahlen besetzt werden. Da sich bei drei Zahlen genau $3! = 6$ Permutationen ergeben, entsteht hier eine gut

überschaubare Gruppe von Mauern. Für den Test wurden die Mauern lexikographisch sortiert aufgeführt. Fünf Mauern wurden in den Basissteinen und z.T. ausgerechnet vorgegeben, und nach der sechsten, fehlenden Mauer wird gefragt (vgl. Abb. 3.9).

Typisierung der Aufgaben

Bei keiner Aufgabe des Paper-Pencil-Test war eine schriftliche Begründung seitens der Kinder verlangt, da dies eine weitere, hier nicht erforderliche Schwierigkeitsstufe darstellen würde.

Jede Fortsetzung der Folge, jede Reparatur eines Päckchens und jede Auswahl einer passenden Mauer zeigt implizit, ob die Regelhaftigkeit weitergeführt wird und ob das Zahlenmuster entdeckt wurde (Stufe I des Zahlenmusterverständnisses).

Es ist zu beachten, dass die Aufgaben unterschiedliche Anforderungen stellen. Stets wird jedoch gefordert, dass das Muster der Aufgabe erkannt wird. Dies gründet sich nicht immer auf Zahlen, sondern kann auch Punktmuster und Musterreihen mit geometrischen Objekten einschließen.
Bei einigen Aufgaben wird nur die Fortsetzung des Musters verlangt. Bei anderen muss eine Lösung für fehlende Elemente gesucht werden, und bei einem weiteren Typ muss das Muster 'repariert' werden, indem ein unpassendes Element entdeckt und ersetzt wird.
Folgende Typen von Aufgaben wurden unterschieden:

Typ	**Beschreibung**	**korrespondierende Aufgabe(n)**
Typ A	Muster sehen und fortsetzen (*Zahlen* bilden das Muster)	Folgen, Mauern, Wertetabellen
Typ B	Muster sehen und fortsetzen (*geom. Objekte* bilden das Muster)	Punktmuster, Folgen mit geom. Objekten
Typ C	Muster sehen, Muster reparieren und Lösung anbieten	Päckchen

Abb. 3.10

Innerhalb der Typen wurden für die verschiedenen Schuljahre unterschiedliche Aufgaben gewählt, die sich jeweils an den Zahlenraum und an die Rechenfertigkeiten der Kinder des Schuljahres anpassen. Eine genaue Darstellung der einzelnen Aufgaben findet sich im Anhang B. Die schuljahrstypische Variation hat keinen Einfluss auf die Vergleichbarkeit, da die später zu beurteilende Zahlenmusterlösung immer auf die gleiche Frage Antwort gibt (Wie geht es weiter? Welche Aufgabe ist unpassend? etc.).

Damit die Kinder sich auf die Muster und nicht auf die Rechnungen konzentrieren konnten, wurden die Aufgaben so gewählt, dass sie auf Rechenfertigkeiten zurückgriffen, die im Unterricht bereits intensiv behandelt worden waren.

Zur Durchführung der Untersuchung

Um eine breit gefächerte Stichprobe über alle vier Schuljahre zu erhalten, wurde der Test in drei Schulen[38] durchgeführt, die zu unterschiedlichen Einzugsgebieten der Stadt Dortmund gehören. Zwei Schulorte waren Vororte von Dortmund, einer lag in der Innenstadt. Die Bevölkerungsdichte der Einzugsgebiete lag bei 40,3 Einwohner pro ha, 21,1 bzw. 11,1 Einwohner pro ha. Die durchschnittlichen Anteile an ausländischen Mitbürgern lagen zwischen 16,4%, 15,1% und 8,3%. In jeder der drei Schulen wurde jeweils eine Klasse aus jedem Schuljahr untersucht. Die Auswahl der Klassen lag in der Hand der jeweiligen Schulleitung.

Insgesamt nahmen 70 (37m/33w) Erstklässler, 59 (34m/25w) Zweitklässler, 65 (34m/31w) Kinder des dritten Schuljahres und 63 (41m/21w) Kinder aus dem vierten Schuljahr an den Tests teil. Dies ergibt eine Stichprobe von 257 Kindern (146 Jungen und 111 Mädchen).

Zahlenmuster waren in keiner der Schulen zuvor im Unterricht thematisiert worden.

Die Tests fanden während der Unterrichtszeit im Rahmen des Mathematikunterrichts statt.

Der Begriff 'Zahlenmuster' wurde an einem Beispiel (Fortsetzung der einfachen Zahlenfolge 1, 4, 7, 10, ...) im Klassenverband erläutert. Die Kinder hatten so die Gelegenheit, eine exemplarische Lösung

38 In Absprache mit der Schulleitung gemäß RdErl. des Ministeriums für Schule und Weiterbildung vom 15.07.1996.

kennenzulernen und sich mit den Aufgaben vertraut zu machen. Die Aufgaben wurden zunächst insgesamt vorgestellt. Dabei wurden jede einzelne Aufgabe benannt und der Arbeitsschwerpunkt erklärt.

Die Schülerinnen und Schüler hatten zur schriftlichen Bearbeitung der Aufgaben 45 Minuten Zeit. Die Reihenfolge der Bearbeitung war nicht vorgegeben. Ebenso wurde davon abgesehen, eine Zeitlimitierung für jede einzelne Aufgabe vorzugeben, sodass die Kinder bei den Aufgaben so lange verweilen konnten, wie sie zur Bearbeitung benötigten. Fragen zum Aufgabenverständnis waren auch während des Tests erlaubt. Ansonsten wurde der Test von der gesamten Klasse gleichzeitig, aber von jedem Kind für sich bearbeitet.

3.2 Ergebnisse des Paper-Pencil-Tests

Die Fortsetzung eines Musters ist grundsätzlich nicht festgelegt. Aus mathematischer Perspektive können unterschiedliche Lösungen nicht nur 'Sinn' machen, sondern sogar korrekt sein. Die Gestaltung des Tests ließ unterschiedliche Lösungen grundsätzlich zu (vgl. Kap. 3.1).

In diesem Zusammenhang ist es unumgänglich, von der polarisierenden Beurteilung von 'falsch' und 'richtig' abzurücken. Es kann Schülerlösungen geben, die 'nicht ganz richtig' oder auch 'noch nicht ganz falsch' sind, da sie Teilaspekte der vielfältigen Muster berücksichtigen, wie sie z.B. in den Zahlenmauern oder den operativen Päckchen versteckt sind. Es ist auch möglich, dass das Aufbauprinzip einer Folge (also das Muster) aufgegriffen, jedoch mit Folgegliedern fortgesetzt wird, die einem individuellen Muster folgen. Im operativen Päckchen kann es sein, dass zwar die Störaufgabe erkannt, aber eine unpassende Ersatzaufgabe genannt wird etc. Da die Bezeichnung 'korrekt' auf verschiedene Lösungen zutreffen könnte, wird im Weiteren nur von der 'nahe liegenden Lösung' gesprochen.

Die Lösungen konnten somit in epistemologisch aussagekräftige und konsensfähige Kategorien eingeteilt werden, die im Folgenden näher beschrieben werden.

Kategorisierung der Ergebnisse

Für die Beurteilung der Ergebnisse wurden folgende Kategorien festgelegt:

- beantwortet unter Berücksichtigung des nahe liegenden Musters (1)
- beantwortet unter Berücksichtigung von Teilaspekten des Zahlenmusters (2)
- beantwortet ohne erkennbaren Zusammenhang zum Aufgabenmuster (3)
- nicht beantwortet (4)

Die Kinder konnten bei den Zahlenmusteraufgaben unterschiedliche Lösungen anbieten, da es *die* Fortsetzung eines Musters nicht gibt (vgl. Testkriterien nach VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN in Kap. 3.1). Bei der Auswertung wurde versucht, möglichst viele Lösungsmöglichkeiten zu erfassen. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass sich unter den Antworten der Kinder, die in der Kategorie 3 (ohne erkennbaren Zusammenhang) eingeordnet wurden, sinnvolle Ansätze befinden. Die Ergebnisse des Tests beschreiben daher nur die untere Leistungsgrenze der Kinder.

Bei der Auswertung der Schülerdokumente wurde zunächst festgehalten, ob die Aufgaben überhaupt bearbeitet wurden (Kategorie 4 oder 1-3). Als zweiter Aspekt wurde berechnet, wie hoch die Ausschöpfung an nahe liegenden Mustern (Kategorie 1) bzw. strukturzusammenhängenden Lösungen (Kategorie 2) oder Lösungen ohne erkennbaren Zusammenhang (Kategorie 3) war. Diese Werte wurden quantitativ erhoben und später zur Interpretation herangezogen.

Bei den Kategorien 2 und 3 war es interessant, einzelne Schülerleistungen herauszuheben. Die Auswahl geschah nur aufgrund der bemerkenswerten Strategie oder individuellen Musterfortsetzung. Zur Veranschaulichung werden dafür im Folgenden einzelne Lösungen wiedergegeben und kurz erläutert. Die Kategorisierung der Testergebnisse bedingt, dass individuelle Muster nicht immer nachvollzogen werden können, da die Kinder keine weiteren Erläuterungen zu den Lösungen abgeben konnten. Deshalb ließ sich nur durch eine nachträgliche Interpretation der Lösungen den Denkwegen der Kinder nachspüren. Diese Interpretation war immer durch das nahe liegende Muster beeinflusst und konnte nicht immer zu befriedigenden Erklärungen führen.

Die Testergebnisse des Paper-Pencil-Tests werden zunächst für die verschiedenen Aufgabentypen über alle Schuljahre hinweg dargestellt. Es soll so versucht werden, einen möglichen Entwicklungsstrang in der Bearbeitung dieses Typs von Schuljahr zu Schuljahr aufzuzeigen.

Danach werden innerhalb des Typs (A-C) und innerhalb der jeweiligen Schuljahre die einzelne Prozentwerte pro Testaufgabe[39] analysiert, um den Antworten und aufzuzeigenden Besonderheiten genauer auf den Grund zu gehen.

---

39 Alle Einzeldaten zu jeder Aufgabe und zu jedem Schuljahr befinden sich im Anhang D.

3.2.1 Analyse der Ergebnisse der Typ-A-Aufgaben

Die Ergebnisse zu Typ A (Fortsetzen von Folgen, Zahlenmauern und Wertetabellen) stellen sich über die Schuljahre verteilt wie folgt dar:

	1. Schuljahr	2. Schuljahr	3. Schuljahr	4. Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	77,60	75,50	46,80	43,30
Teilaspekte des Musters beachtet	10,40	4,20	13,80	15,70
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	7,60	11,00	24,80	21,40
nicht bearbeitet	4,40	9,30	14,60	19,60
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent -

Abb. 3.11

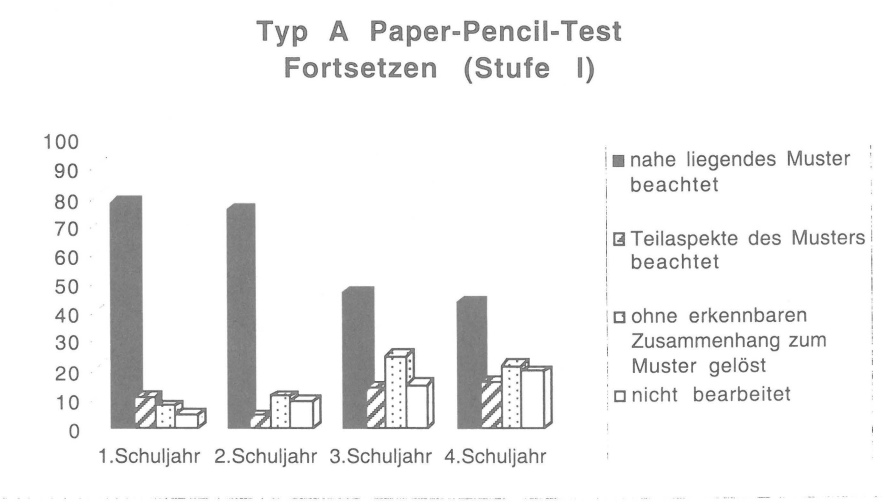


Abb. 3.12

In den Anfangsklassen gaben über 80% der Kinder Lösungen an, die den Kategorien 1 und 2 zugeordnet werden können. Die Werte für die höheren Schuljahre liegen jedoch nur bei ca. 60% (Summe der Lösungen aus Kategorie 1 und 2).

Man könnte zunächst vermuten, dass der Abstieg der Prozentwerte der Kategorie 1 und 2 nach dem zweiten Schuljahr daher rührt, dass die dritten und vierten Schuljahre Wertetabellen zu bearbeiten hatten, die den Anfangsklassen nicht angeboten wurden. Nimmt man die erzielten Werte für die Wertetabellen jedoch aus der Typ-A-Kategorisierung heraus, bleibt die Anzahl der nahe liegend gelösten Aufgaben mit 60,96% für das dritte Schuljahr und mit 56,40% für das vierte Schuljahr immer noch hinter denen der Anfangsklassen zurück, d.h. der Rückgang der Lösungsraten ist unabhängig von der Aufgabe mit den Wertetabellen.

Eine andere Erklärung für das Absinken der Lösungsraten kann darin gesucht werden, dass die höheren Schuljahre insgesamt mehr Aufgaben zu lösen hatten als die Anfangsklassen und dadurch die Motivation und Aufmerksamkeit abgenommen hätte. Wenn dies der Fall wäre, müsste eine sinkende Lösungsrate auch in allen anderen Typen zu verzeichnen sein. Dies ist jedoch nicht der Fall.

Insgesamt ist also wohl davon auszugehen, dass es sich um ein Spezifikum der Typ-A-Aufgaben handelt, derart, dass die Kinder der Anfangsklassen eher nahe liegende Lösungen anbieten als die Kinder der höheren Grundschulklassen. Die genauere Analyse der einzelnen Schuljahre versucht dieses Phänomen zu klären. Es zeigt sich, dass die Lösungsraten der jeweiligen Typ-A-Aufgaben stark schwanken. So wurde z.B. im vierten Schuljahr die Folge 1 von über 85% der Kinder nahe liegend fortgesetzt, während die Folge 3 nur von gut 12% nahe liegend und von über 65% gar nicht weitergeführt wurde. Diese Schwankungen treten in den unteren Schuljahren nicht so stark auf und bewirken im Mittel das Absinken der Kategorie-1-Lösungen für die höheren Schuljahre.

Typ A im ersten Schuljahr

Folgen

Am besten bzgl. Kategorie 1 und 2 wurde die Fortsetzung der *Folge 1* (Folge der geraden Zahlen) bewältigt (91,4%), wobei der Zahlenraum bis 20, der in den Lehrplänen des ersten Schuljahr vorgegeben ist, oft gesprengt wurde (Lösungen bis hin zu 44). Bei zwei Kindern zeigte sich: Sie versuchten zwar, die Lösungen bis 30 fortzuführen, ab 24 bzw. ab 22 vertauschten sie jedoch Zehnerzahl und Einerzahl, d.h. sie setzen mit 42, 62, 82 usw. die Folge fort. Die Lösungen ohne Strukturzusammenhang gaben die natürlichen Zahlen, die ungeraden Zahlen oder völlig unstrukturierte Zahlenfolgen wieder.

Insgesamt zeigte sich, dass die Kinder im ersten Schuljahr fast immer versuchen, jede Aufgabe 'irgendwie' zu bearbeiten. Diese Tendenz spricht dafür, dass sie keine Angst hatten, einen Fehler zu machen, sondern unbefangen an die Aufgaben herangingen.

Bei der *Folge 2* (natürliche Zahlen mit jeweils eingeschobener Fünf) wagten sich 11,4% nicht an eine Lösung, aber 62,9% fanden die nahe liegende Lösung. Hier muss ergänzend erwähnt werden, dass eine Fortsetzung auch dann in die Kategorie 1 eingestuft wurde, wenn die sogenannte 'dritte Fünf' an der Schnittstelle vergessen wurde. Die Kinder mussten die Folge von ...3, 5, 4, 5, 5 ... aus weiter fortführen, d.h. zunächst hätte eine weitere Fünf ergänzt werden müssen, die nach der Fünf in der Reihe der natürlichen Zahlen folgen müsste. Etwa ein Drittel der Kinder ergänzte diese Fünf, bevor es weiter rechnete. 14,3% boten eine Lösung, die mit der Folge in Zusammenhang steht, d.h. sie ergänzten z.B. die Folge der natürlichen Zahlen (Ignorieren der Fünf), repetierten das vorgegebene Muster oder doppelten auch die anderen Zahlen, so wie es die 5, 5 am Ende der abgebrochenen Folge suggeriert (6, 6, 7, 7, 8, 8 ...). Bei den Kindern, die keine strukturierte Lösung boten, gab es vor allem Ergänzungen durch die ungeraden Zahlen und in zwei Fällen durch 56, 56, 57, 5 bzw. 56, 56.

Zahlenmauern

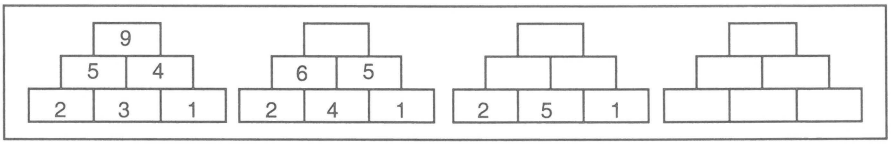


Abb. 3.13

Das drittbeste Ergebnis wurde bei den *Mauern* (vgl. Abb. 3.13) erzielt. 78,6% der Kinder gaben hier die nahe liegende Antwort. 15,7% ermittelten eine Antwort, die in einem gewissen Zusammenhang zur Aufgabe gesehen werden kann. Diese Kinder versuchten eine Mauer zu ermitteln, die den Zielstein 15 trägt, sodass die Mauer in die Zielsteinfolge passt, die die Folge der ungeraden Zahlen ist. Ein Kind bot eine scheinbar unpassende Lösung, indem es als Basissteine 6, 7 und 8 wählte. Diese Steine geben jedoch exakt die Summen der vorherigen Basissteinfolgen aus den gegebenen Mauern wieder (2+3+1=6, 2+4+1=7, 2+5+1=8). Es kann sein, dass dieses Kind versucht hat, einen Zusammenhang in dieser Art herzustellen.

Typ A im zweiten Schuljahr

Folgen

Im zweiten Schuljahr erwies sich ebenfalls die *Folge 1* (Folge der ungeraden Zahlen) als Aufgabe mit dem besten Ergebnis. 94,9% der Zweitklässler lösten sie nach dem nahe liegenden Muster. Nur drei Probanden wählten als Fortsetzung die geraden Zahlen bzw. eine unstrukturierte Reihung von Zahlen. Hierbei handelt es sich immer um Kinder, die von der Lehrerin in Mathematik mit gut bzw. durchschnittlich beurteilt wurden.

Die *Folge 2* ist die Folge der Zweierpotenzen. Obwohl die Aufgabe bis zu $2^5=32$ angegeben war, konnten 64,4% die Folge fortführen. Einige verrechneten sich, nachdem sie 64 angegeben hatten, aber es gab auch Schülerinnen und Schüler, die bis 4096 oder 8192 (2^{13}) eine Fortsetzung des Musters versuchten. 11,9% fanden eine Lösung, die als dem Muster der Aufgabe zugehörig (Kategorie 2) zu werten ist. Drei Kinder begannen bei 33 und verdoppelten dann immer weiter (u.U. liegt bei dem ersten Glied der Fortsetzung nur ein Rechenfehler vor). Andere griffen die Folge der Zuwächse (+1, +2, +4, +8 usw.) auf und begannen somit konsequent bei 33,

35 ... Dabei unterliefen zwischendurch mitunter Fehler der Art, dass ein Zuwachs vergessen wurde.

Auf einen einzigen Zuwachs (+8) hatten sich zwei Kinder versteift, wenn sie eine Folge fortführten, die ständig um 8 anwächst. Dieses Vorgehen lässt darauf schließen, dass die Kinder einen Teilaspekt des Musters generalisierten. Andere Kinder boten die geraden Zahlen oder unstrukturierte Folgen als Fortsetzung an (18,6%).

Die *Folge 3* (3, 5, 6, 5, 9, ...) wurde noch von mehr als der Hälfte der Kinder in der nahe liegenden Weise fortgesetzt (55,9%). Dabei entwickelten die Kinder eine gewisse Ausdauer: Einige setzten die Folge bis zum Folgenglied 39 fort. Es kann allgemein festgehalten werden: Wenn das Muster einmal klar war, ergänzten viele Kinder wesentlich mehr als die bei mündlicher Nachfrage gewünschten zwei bis drei Folgeglieder. Ein Schüler erkannte zwar die eingeschobene Fünf als Charakteristikum der Folge, konnte jedoch die 'Dreierreihe' der anderen Folgeglieder nicht fortführen, sondern schrieb die Folge der ungeraden Zahlen zwischen die Fünfen. Die restlichen Lösungen (16,9%) wiesen keine erkennbaren Muster auf. 25,4% der Schülerinnen und Schüler machten keinerlei Angaben. Diese Aufgabe wurde, im Vergleich zu allen anderen Aufgaben dieses Schuljahres, am häufigsten nicht bearbeitet.

Zahlenmauern

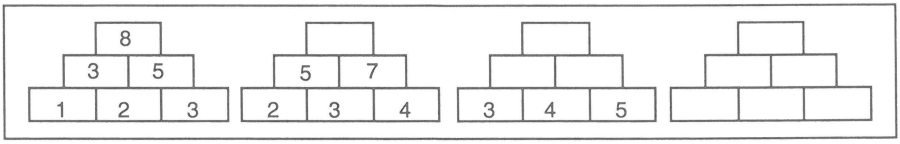


Abb.3.14

Die *Zahlenmauern* (vgl. Abb. 3.14) wurden mit 84,7% von einer beachtlichen Mehrheit im vorher angedachten Muster weitergeführt. Ein Kind erklärt sein Vorgehen sogar schriftlich:

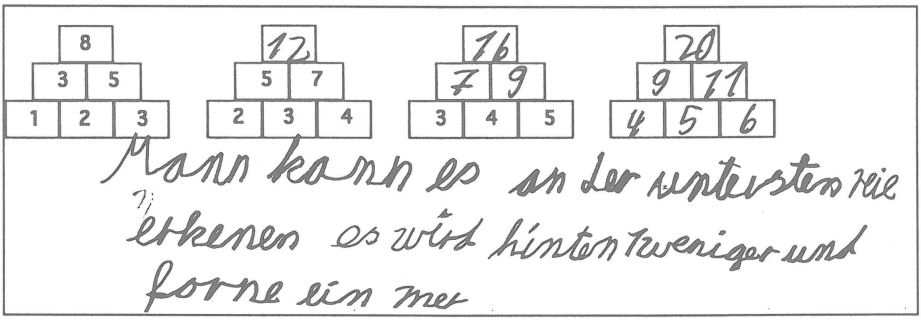


Abb. 3.15

Die Äußerung kann so interpretiert werden, dass mit 'hinten' der jeweils rechte Randstein der Vorgängermauer gemeint ist. Von diesem Stein (5) aus gedacht, kann der erste Stein der zu ergänzenden Mauer ermittelt werden, indem 1 abgezogen wird (4). Betrachtet man jeweils die linken Randsteine (1, 2, 3, 4) so wird der folgende linke Randstein durch Addition von 1 gewonnen: 'forne ein mer'.

Ein Mädchen versuchte durch die Basissteine 5, 5, 5 eine Annäherung an das implizite Zahlenmuster der Zielsteine, die jeweils um 4 anwachsen. Die Kinder, die eine Lösung außerhalb des nahe liegenden Musters angaben, verwandten oft große Zahlen (vgl. Abb. 3.16).

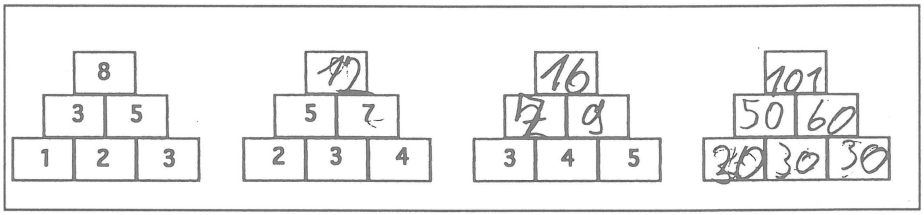


Abb. 3.16

Es hat den Anschein, dass sie die größeren Zahlenräume reizten (vgl. Tims Zahlenmauern in Kap. 2).

Typ A im dritten Schuljahr

Folgen

Dass die Kinder die *Folge 1* (1, 3, 6, 10, ...) mit 66,2% nahe liegenden Lösungen am besten bearbeiteten (derselbe Prozentsatz der Kategorie-1-Lösungen wird auch bei der ersten Maueraufgabe erreicht), ist relativ überraschend, denn es erfordert subtile Fähigkeiten, die Folge der Zuwächse zu erkennen und dann auch noch weiterzuführen. Wieder zeigte sich: Wenn das Muster einmal erkannt ist, wurde die Folge vereinzelt auch über den Zahlenraum des zweiten Schuljahrs hinaus (bis 153; das entspricht einem Zuwachs um 17) fortgesetzt. Falls ein Kind eine Addition ausgelassen hatte, wurde die Aufgabe noch zur Kategorie 1 gezählt, wenn das Muster offensichtlich sinngemäß fortgeführt wurde. 16,9% der Antworten standen zu dem vorgegebenen Muster in einer engen Beziehung. So kamen mehrere Kinder auf die Idee, die Zuwächse erneut bei +2, +3, ... zu beginnen. Einige taten dies sogar zweimal hintereinander. Sobald jedoch das eindeutige Muster der steigenden Zuwächse verlassen wurde, wurde die Antwort als unzusammenhängend gewertet. 12,3% der Kinder gaben eine solche Lösung an. Drei Schülerinnen und Schüler lösten die Aufgabe gar nicht.

Die *Folge 2*, in der eine Verdopplungsfolge mit eingeschobenen Fünfen vorgegeben wurde (3, 5, 6, 5, 12, 5, 24, 5, ...), wurde von einem Drittel der Kinder durch das nahe liegende Muster fortgesetzt (33,8%). Zwei Schüler ergänzten die Glieder bis 6144, andere nur bis 96, aber auch bis 192 und 384 wurden Lösungen angegeben. 15,4% der Lösungen konnten in einem gewissen Zusammenhang mit dem Aufgabenmuster gesehen werden. Erneut war das Phänomen zu beobachten, dass eine Differenz der vorherigen Glieder auf alle weiteren Folgenglieder generalisiert wird. Dabei tauchte die 3 als Differenz zwischen 3 und 6, die Differenz 6 zwischen 12 und 6 und die 24 zwischen 48 und 24 auf.

Ein Schüler wählte die Lösung, die die vorgegebene Folge in umgekehrter Reihenfolge repetiert. Wie ein Bogen mit Auf- und Abstieg stellt sich dann die Zahlenfolge dar (vgl. Abb. 3.17):

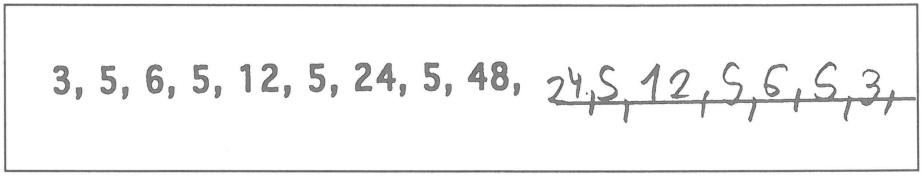


Abb. 3.17

Natürlich könnte dieser Schüler sein Muster des Auf- und Abstiegs unendlich fortsetzen. Es wird jedoch aus seiner Antwort nicht ersichtlich, ob er dieser Idee folgte oder ob er die Folge als Muster-Einheit abgeschlossen ansah, wenn wieder die 3 als letztes Glied notiert ist.

26,2% der Kinder gaben relativ kuriose Antworten. Bei näherer Betrachtung wird jedoch deutlich, dass der Großteil dieser Kinder von der wiederkehrenden Fünf beeinflusst wurde. So ergaben sich Muster, in denen die Fünf oder die Fünfzig mehrmals und in Kombination auftauchte, oder Folgen, die den Zuwachs Fünf selbst aufwiesen. 24,6% aller Befragten gaben keine Lösung an.

56,9% der Kinder setzten die *Folge 3* (20, 19, 16, 15, 12, 11 ...) durch das nahe liegende Muster fort. Wenn die Kinder die Vorgabe nicht beachteten, dass sie nur drei Folgeglieder anführen sollten, mussten sie in den Bereich der negativen Zahlen vordringen ('Zone der nächsten Entwicklung' vgl. ZANKOV 1973). Einem Schüler gelang dies korrekt bis zum Folgenglied -8. Viele andere beendeten ihre Arbeit bei Null. Der Zahlenraum wird in der Grundschule nicht auf die negativen Zahlen erweitert, sodass viele Kinder bei ihren Antworten die Null als Grenze betrachteten. Die Antworten gaben keine Auskunft darüber, wie viele Kinder in der Lage gewesen wären, den Zahlenraum der negativen Zahlen zu nutzen, wenn sie dazu aufgefordert worden wären. 12,3% der Kinder machten minimale Fehler, erkannten jedoch das Muster der Folge. So gab es mehrere Lösungen, die als Fortsetzung 5, 4, 2, 1 anboten. Hier war zwar der Aufbau klar, dass immer zwei Zahlen zusammengehören und der natürlichen Zahlreihe folgen und erst dann ein Einschnitt erfolgt, jedoch wurde nicht 3, sondern 2 subtrahiert. Dieses Phänomen wurde oben schon einmal erwähnt und deutet darauf hin, dass die Differenz mit der Aussage verwechselt wird, dass zwei Zahlen zwischen den angegebenen Werten liegen.

20, 19, 16, 15, 12, 11, 8, 7, 11, 12, 15, 16, 19, 20,

Abb. 3.18

In einer Lösung wurde das angegebene Muster in umgekehrter Reihenfolge reproduziert, d.h. die Folge baute sich hier ab und auf. Dieser Schüler hatte diesen Lösungsweg schon bei der vorhergehenden Aufgabe zu Zahlenfolgen beschritten (vgl. Abb. 3.17 und 3.18).

10,8% gaben in diesem Rahmen unstrukturierte Lösungen und 20% keine Lösung an.

Zahlenmauern

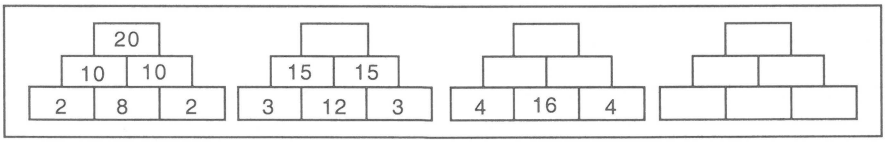


Abb. 3.19

Die *ersten Mauern* (Abb. 3.19) wurden - wie die erste Folge - von 66,2% der Kinder durch nahe liegende Muster fortgesetzt.

Bei den Mauern fanden 24,6% eine Lösung, die im Zusammenhang zur Struktur der Aufgabe zu sehen ist. Viele haben hier wieder 'von oben her' die Mauer gelöst. Sie nutzten das Zielsteinmuster, das in Zehnerschritten vorwärtsgeht. Manchmal führte diese Strategie zu Schwierigkeiten: Ein Schüler hat - seinen Aufzeichnungen zufolge - die 50 in den Zielstein eingesetzt, dann die 50 in 25 und 25 aufgespaltet und schließlich die Basissteine gar nicht ausgefüllt (vgl. Abb. 3.20).

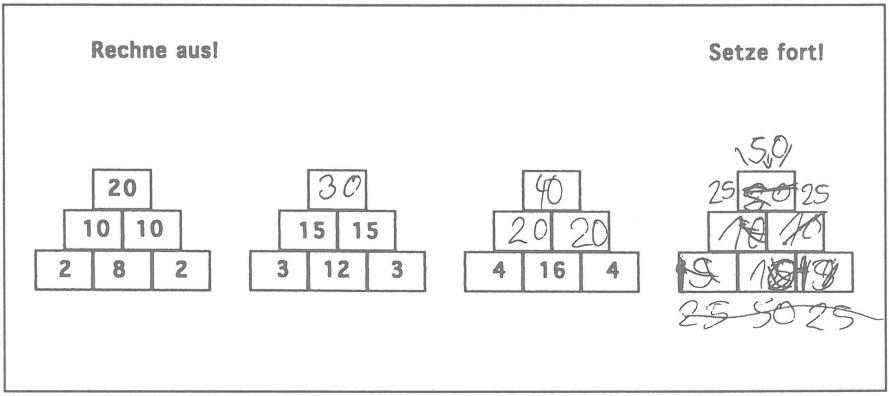


Abb. 3.20

Da er anscheinend an der Halbierungsstrategie festhielt und bei den ungeraden Zahlen keine Lösung finden konnte, erklären sich die vielen Streichungen in seiner Lösung.

Zwei Kinder wählten als Basissteine 5, 25 und 5. Hier kann angenommen werden, dass die Kinder bewusst die multiplikative Struktur zwischen Ecksteinen und Mittelstein erkannten und ausnutzten, sie wählten jedoch den Faktor 5 statt der 4. Ähnliches gilt für die Lösung 5, 15, 5.

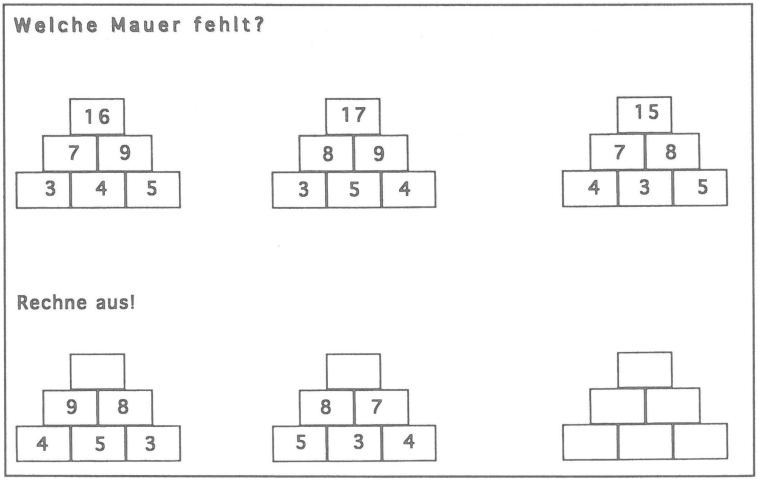


Abb. 3.21

Die Hälfte der Kinder (50,8%) löste die *kombinatorische Maueraufgabe* (Permutationen von 3, 4, 5). Da die Mauern lexikographisch angeordnet waren und sich auf dem Blatt zwei Zeilen von Mauern ergaben (vgl. Abb. 3.21), ist zu vermuten, dass einige Schülerinnen und Schüler, trotz des mündlichen Hinweises auf die Basissteine, wieder auf die Zielsteinfolge geachtet haben. Daher ergab sich eine Reihe von Antworten, bei denen der Zielstein 16 zwar korrekt erkannt wurde, aber die Kombination der Basissteine aus dem Rahmen fiel. Anscheinend war auch nicht allen Kindern deutlich, dass alle sechs Mauern zusammengehören, da sie für den Zielstein 16 wieder die Kombination 3, 4, 5 wählten, die in der ersten Mauer schon gegeben war. Insgesamt konnten 32,3% der Antworten in dieser Kategorie 2 (Teilaspekt beachtet) zusammengefasst werden.

15,4% der Kinder gaben Lösungen an, die sich von dem vorgegebenen Muster absolut lösen. Dabei sind zwei Antworten besonders hervorzuheben: Ein Junge löste alle Mauern auf eine sehr eigenwillige Art. Nachdem er die unteren Steine bis zur zweiten Reihe addiert hatte, bildete er nun das Produkt, um zum Zielstein zu gelangen.

Ein Mädchen wählte als Basissteine 6, 1, 5 und erklärt dies schriftlich (vgl. Abb. 3.22):

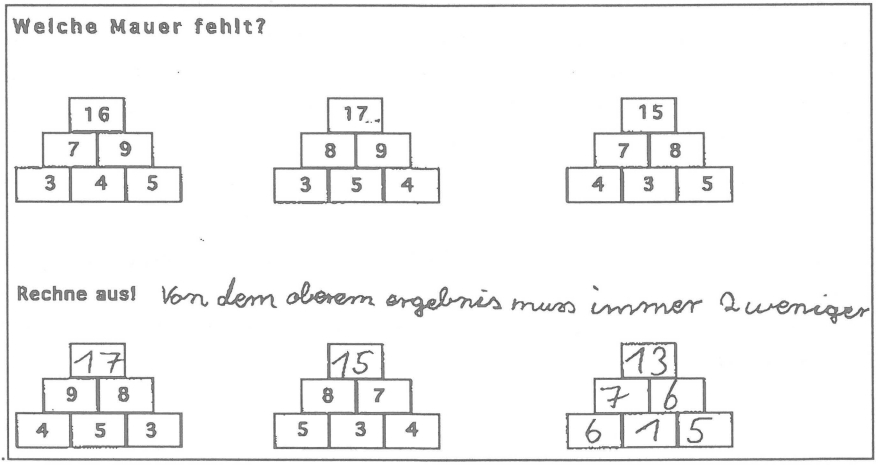


Abb.3.22

Auch in diesem Fall wurde vermutlich nur die untere Reihe der Zahlenmauern beachtet. Bei den unteren drei Mauern lässt sich tatsächlich

eine Abfolge der Zielsteine feststellen, die hier zur Begründung der letzten Mauer gewählt wurde. Wieder wurde die Mauer 'von oben' ausgefüllt, sodass Basissteine benutzt wurden, die mit den kombinatorischen Aspekten der Ziffern 3, 4 und 5 nicht in Beziehung stehen. Eine Schülerin bearbeitete diese Mauern gar nicht.

Zahl&Partnerzahl - Wertetabellen

Zahl	1	5	6	25	30	31	
Partner	16	20	21	40		46	65

Abb. 3.23

Obwohl das Aufgabenformat *Zahl&Partnerzahl* (Wertetabelle) (f(x)=x+15) allen Kindern unbekannt war, haben 64,6% den ersten Partner der ersten Aufgabe im intendierten Muster angegeben (vgl. Abb. 3.23). Zwei Kinder addierten nicht die 15 zur 30, sondern subtrahierten sie. 26,2% gaben eine Lösung an, die keinen Bezug zum Muster hat. So wurden z.B. 41, 42, 43, 44 oder auch 65 genannt. Den zweiten Teil dieser Aufgabe löste knapp die Hälfte der Befragten (49,2%). Es schien hier schwieriger zu sein, die gefundene Beziehung auch 'rückwärts' anzuwenden. 38,5% gaben Antworten, die nicht in das Muster passten. Dabei wurden mitunter auch Zahlen geschrieben, die Werte über 65 haben (71, 70), obwohl die gesuchte Zahl stets kleiner sein muss als die angegebene. Die anderen angeführten Werte bewegten sich zwischen 25 und 52.

Bemerkenswert in jedem Fall ist, dass die Lehrerin die Kinder, die keine Lösung gaben, alle mit durchschnittlich oder gut in ihren Mathematikleistungen bewertet hatte. Gerade die weniger guten Schülerinnen und Schüler bemühten sich zumindest um eine Lösung. Es zeigte sich, dass die guten oder durchschnittlichen Kinder lieber keine als eine falsche Antwort gaben.

Zahl	2	4	5	11	20	26	
Partner	5	9	11	23		53	67

Abb. 3.24

20% der Kinder fand einen passenden ersten Partner bei der *zweiten Aufgabe zu Zahl&Partnerzahl*. (f(x)=2x+1) (vgl. Abb. 3.24). Beim Auffinden des zweiten Partners fiel die Quote der nahe liegenden Lösungen auf 13,8%. Es ist wichtig zu beachten, dass die Kinder nicht stabil zu einer strukturierten oder unstrukturierten Lösung kamen. Manchmal gaben sie den ersten Partner nach dem nahe liegenden Muster an, während sie beim zweiten eine unzusammenhängende Lösung notierten. Einige Kinder (10,8% bzw. 9,2%) generalisierten eine Differenz von Zahl&Partnerzahl wieder, ohne zu beachten, dass sich die Differenzen ändern, da eine multiplikative Struktur in dem Muster verborgen ist. Dadurch ergaben sich Kombinationen von 20 und 17 bzw. im zweiten Fall von 70 und 67 (Differenz wie bei 2 und 5) und 20 und 32, analog 55 und 67 (Differenz wie bei 11 und 23). Die Kinder beachteten hier manchmal nicht, dass die untere Partnerzahl immer größer ist als die zugehörige Zahl. 41,5% bzw. 43,1% gaben eine unstrukturierte Lösung an, und 27,7% bzw. sogar 33,8% notierten keine Lösung.

Dieses Aufgabenformat war den Kindern unbekannt. Außerdem unterscheidet sich die Kombination von Zahl&Partnerzahl wesentlich von der ersten Aufgabe dieses Typs. Möglicherweise wurden die Schülerinnen und Schüler so auf einen additiven Zusammenhang fixiert und konnten noch nicht flexibel einen multiplikativen Zusammenhang oder eine Kombination aus Multiplikation und Addition erkennen.

Typ A im vierten Schuljahr

Folgen

85,7% nahe liegende Lösungen konnten bei *Folge 1* (55, 49, 43, 37, 31, ...) verzeichnet werden. Alle diese Probanden ergänzten die Folge bis zur Zahl 1, d.h. keiner wagte hier den Schritt in den Minusbereich (vgl. demgegenüber die Ausführungen zu Typ A 2. Schuljahr). Zwei Kinder verrechneten sich nach dem ersten, korrekt notierten Glied. Vier Schülerinnen und Schüler (6,3%) zeigten Lösungen, die auf den ersten Blick keinen Zusammenhang zum Muster der Aufgabe aufweisen. Ein Schüler wählte eine Folge, die

einmal um 6 anwächst und dann um 4 fällt. Diese Antwort kann damit in Verbindung gebracht werden, dass die Einerstellen der vorgegebenen Folge dieses Muster aufweisen. Wenn nur die Einerstellen isoliert betrachtet werden, können die Zuwächse mit 4, -6, 4, -6 usw. beschreiben werden. Dieses Kind nutzte die Zuwächse -4, 6, -4, 6, d.h. es vertauschte zusätzlich die Vorzeichen. Zwei Kinder gaben keine Antwort.

Die *Folge 2* (50, 51, 52, 26, 27, 28, 14, 15, 16, ...) hat mit 14,3% Lösungen der Kategorie 1 in diesem Schuljahr den zweit geringsten Anteil an Lösungen mit einem nahe liegenden Muster. Bei dieser Folge wurde deutlich, dass manchmal nur ein Teilaspekt der Struktur übernommen wurde. Die Dreiteilung schien sehr offensichtlich und wurde übernommen, während das Aufwärtszählen manchmal in Abwärtszählen verkehrt (8, 7, 6, 3, 2, 1) oder die Halbierung nicht beachtet wurde (32, 33, 34, 50, 51, 52, 78, 79, 80).

Ein Viertel der Schülerinnen und Schüler (25,4%) gab eine Lösung ohne direkten Bezug zum Muster an. Mitunter war noch ein wenig von der Dreiteilung zu spüren, aber weder das Halbieren noch das Aufwärtszählen wurde wirklich konsequent durchgehalten. Jeweils ungefähr genauso viele Schülerinnen und Schüler lösten die Aufgabe mit dem nahe liegenden Muster bzw. bearbeiteten die Aufgabe gar nicht (17,5%).

Die Fibonaccifolge (*Folge 3*) wurde von 12,7% der Kinder im nahe liegenden Muster fortgesetzt. Dies ist der geringste Anteil an Fortsetzungen der Kategorie 1 bei allen Aufgaben. In der zweiten Kategorie (Teilaspekt) zeigte sich der Unterschied der Folge 2 zur Fibonaccifolge (*Folge 3*) noch deutlicher: Während 42,9% eine strukturierte Lösung zur Folge 2 fanden, konnten bei der Fibonaccifolge 3,2% (d.h. zwei Probanden) eine solche Lösung geben. Beide Kinder gaben bei der Fibonaccifolge 88 (statt 89) als nächstes Glied an. Es kann sein, dass hier nur ein Rechenfehler vorlag.

19,0% gaben eine Lösung der Fibonaccifolge an, die augenscheinlich nichts mit der Fibonacci-Struktur zu tun hat. Ein Mädchen ging geschickt vor: Sie zählte die fehlenden Zahlen der Zahlreihe auf. Vielleicht hatte sie so versucht, hinter das Geheimnis der Folge zu kommen. 65,1% gaben bei der Fibonaccifolge keine Lösung an.

Zahlenmauern

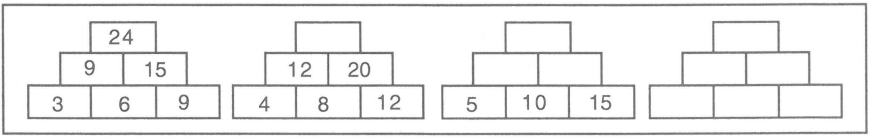


Abb. 3.25

71,4% setzten die *Mauernfolge* (vgl. Abb. 3.25) im nahe liegenden Muster fort. 7,9% der Antworten konnten wieder so interpretiert werden, dass zwar das Muster der Zielsteinfolge, aber nicht das Muster der Basissteine berücksichtigt wurde (Mauern mit Zielstein 48 werden ergänzt). 14,3% führten jedoch Mauern an, die weder mit dem Zielsteinmuster noch mit dem Basissteinmuster übereinstimmen. Allerdings wurde manchmal versucht, sich dem Muster anzunähern. In diese Kategorie fielen Lösungen mit den folgenden Grundsteinen: 2, 4, 6 oder 10, 15, 20, aber auch 6, 11, 16. Bei den ersten beiden Beispielen wurde der Ausschnitt einer Einmaleinsreihe aufgeführt, so wie es auch in den anderen Mauern der Fall war. In dem letzten Beispiel ist der Bezug zum Einmaleins verlorengegangen, jedoch wurde der erste Eckstein im nahe liegenden Sinn mit der 6 besetzt. Dann wurden allerdings Zuwächse um 5 aufgeführt, die sich vermutlich aus der letzten vorgegebenen Mauer ableiten lassen (5, 10, 15). Drei Kinder gaben keine Lösung an (6,3%).

39,7% konnten bei der *kombinatorischen Aufgabe mit den Mauern* (Permutationen von 31, 41, 51) die nahe liegende fehlende Kombination ergänzen. Ähnlich wie im dritten Schuljahr zeigte sich, dass einige Kinder nicht alle Mauern auf dem Arbeitsblatt im Blick zu haben scheinen, sodass 38,1% eine Mauer angaben, die zwar die vorgegebenen drei Zahlen als Basissteine nutzt, aber eine Kombination angibt, die schon in der Aufgabenstellung notiert war. 11,1% nutzten gänzlich andere Zahlen für die Basissteine. Oft zeigte sich, dass Zahlen bevorzugt wurden, die als Einerziffer eine Eins aufweisen. Nur in einem Fall wurde eine Mauer konstruiert, die zwar den fehlenden Zielstein 164 trägt und auch in den Mittelsteinen mit den Werten belegt wurde, die dem nahe liegenden Muster entsprechen, aber in der unteren Reihe (Basissteine) Rechenfehler aufweist. Ebenfalls 11,1% lösten diese Aufgabe nicht.

Zahl&Partnerzahl - Wertetabellen

Zahl	1	3	5	7	9	11	
Partner	1	6	15	28		66	91

Abb. 3.26

60,3% fanden den zweiten Partner bei der *ersten Aufgabe zu Zahl&Partnerzahl*. (f(x)=x(x+1):2 [x ist Index der zugehörigen Dreieckszahl]), der dem nahe liegenden Muster folgt (vgl. Abb. 3.26). Das sind wesentlich mehr, als die 38,1%, die den ersten Partner richtig ermittelten. Diese Tatsache kann u.U. darauf zurückgeführt werden, dass der zweite Partner in dieser Zeile in eine Zahlenfolge passt (Folge der ungeraden Zahlen) und nur dieses Muster zur Lösung beachtet werden muss. Hingegen muss beim ersten Partner das Muster innerhalb der Pärchen erkannt werden. Diese Muster kann auf unterschiedlichen Wegen ermittelt werden: Die Partnerzahlen ergeben sich dadurch, dass die Zahlwerte zunächst mit 1, dann mit 2, dann mit 3, mit 4 usw. multipliziert werden. Die Partnerzahlen ergeben sich ebenfalls aus der Multiplikation des zugehörigen Zahlwertes mit ihrem Nachfolger (x·(x+1)) und einer Division durch 2. Dieser letzte Zugang entspricht der Ermittlung der Dreieckszahl, die die Zahl als Index hat: Die dritte Dreieckszahl ist 6, die elfte ist die 66 usw.

19,0% (beim ersten Partner) bzw. 11,1% (beim zweiten Partner) fanden eine Lösung, die in einem gewissen Zusammenhang mit der Struktur der Aufgabe gesehen werden kann. Die gesuchten Partnerzahlen wurden dabei oft durch einen multiplikativen Zusammenhang ermittelt, der jedoch nicht ganz in das Muster passt. Statt der nahe liegenden Beziehungen wurde entweder verdoppelt oder verdreifacht, ebenso tauchten auch Multiplikationen mit 6, 4 und 9 auf. Dies könnte darauf hinweisen, dass wieder *ein* Zahlenpärchen und der Bezug des Multiplizierens mit 2 bzw. 3 generalisiert und nun für alle Pärchen genutzt wurden. 31,7% (beim ersten Partner) und 15,9% (beim zweiten Partner) notierten Zahlenpartner ohne Strukturzusammenhang. Ein Junge beschrieb die Zahl 91 selbst, indem er eine Aufgabe angab, die 91 zur Lösung hat (10x9+1). 11,1% bzw. 12,7% lösten die Aufgabe nicht.

Zahl	0	2	3	6	7	10	
Partner	1	15	22	43		71	78

Abb. 3.27

Die Hälfte der Kinder (50,8%) fand auch bei der *zweiten Zahl&Partnerzahl-Aufgabe* (f(x)=7x+1) den zweiten Partner im nahe liegenden Muster heraus (vgl. Abb. 3.27). Obwohl in diesem Fall keine Möglichkeit bestand, diese Zahl aufgrund einer Folge in der ersten Reihe der Partnerzahlen zu ermitteln (vgl. erste Wertetabelle in diesem Schuljahr), zeigte sich eine sehr große Diskrepanz zu der ersten gesuchten Partnerzahl. Diese konnten nur 17,5% der Kinder ermitteln.

Der 7 wurden von 7,9% und der 78 von 3,2% der Kinder Werte zugeordnet, die zwar nicht ganz richtig sind, aber das Muster der Aufgabe in gewisser Weise wiedergeben: So wurden der 7 statt der 50(=7·7+1) andere Vielfache plus 1 zugeordnet (36=5·7+1, 57=8·7+1, 64=9·7+1), ebenso der 78 (157=2·78+1). Ein Schüler war sich nicht ganz sicher und schrieb als Lösung „elf oder zwölf". Vielleicht hatte er die versteckte Multiplikation entdeckt, war aber durch die Addition der Eins irritiert.

46,0% bzw. 23,8% der Kinder berücksichtigten das Muster bei ihrer Antwort nicht. Der Sieben wurden Vielfache zugeordnet, aber auch z.B. 17, 59, 62, 67. Der 78 wurden ebenfalls Vielfache zugeordnet. Daneben wurden u.a. 8, 12, 13, 20 genannt. 28,6% bzw. 22,2% lösten diese Aufgabe nicht.

3.2.2 Analyse der Ergebnisse der Typ-B-Aufgaben

Zu den Aufgaben des Typs B zählen die figurierten Zahlen sowie die Folgen mit geometrischen Objekten, die jedoch nur in den Anfangsklassen gegeben wurden.

	1. Schuljahr	2. Schuljahr	3. Schuljahr	4. Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	52,85	34,75	53,80	19,00
Teilaspekte des Musters beachtet	20,00	25,40	20,00	41,30
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	26,45	34,75	26,20	36,50
nicht bearbeitet	0,70	5,10	0,00	3,20
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent -

Abb. 3.11

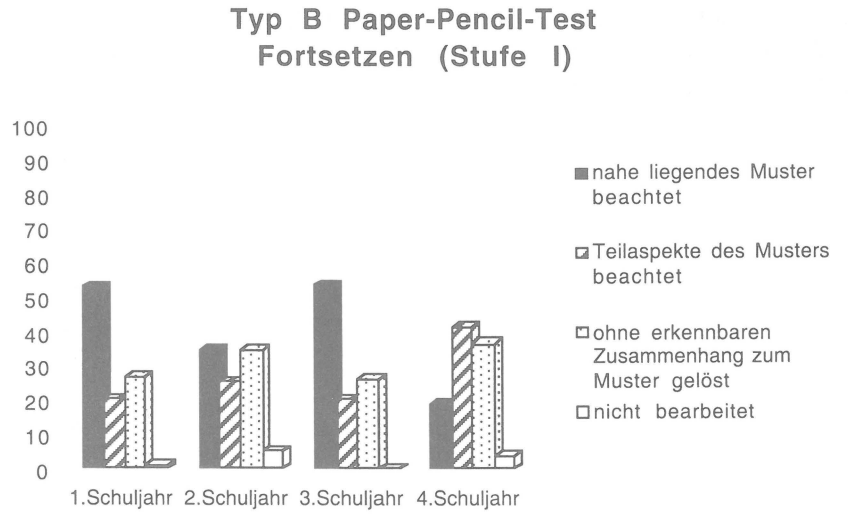


Abb. 3.29

Die Schülerinnen und Schüler im dritten und vierten Schuljahr hatten innerhalb dieses Paper-Pencil-Tests keine Aufgaben im Bereich der Folgen mit geometrischen Objekten zu bewältigen. Dieser Unterschied führte jedoch nicht zu einem Abstieg der ermittelten Prozentwerte der Anfangsklassen gegenüber den höheren Klassen. Ein Absinken der Prozentwerte der Lösungskategorie 1 ist vielmehr im zweiten Schuljahr nachzuweisen.

Der Unterschied zwischen den Aufgaben Typ B des ersten Schuljahres in den figurierten Zahlen und in der Folge der geometrischen Objekte und denen des zweiten Schuljahres ist den Lösungsraten zufolge gravierend.

Ein weiteres Absinken der Prozentwerte (Kategorie 1) ist im vierten Schuljahr zu sehen. Die Lösungsraten für die Trapezzahlen als Beispiel der figurierten Zahlen ist drastisch geringer als die der Rechteckszahlen im dritten Schuljahr. Offenbar liegt dies daran, dass Trapezzahlen von ihrer Struktur her wesentlich komplexer sind, da sie sich aus zwei figurierten Zahlen (Quadratzahl und Dreieckszahl) zusammensetzen.

In den Anteilen der Nichtbeantwortungen lässt sich - wie bei Typ A - keine Tendenz aufzeigen. Allgemein lösten ca. zwei Drittel der Kinder in jedem Schuljahr die Aufgaben nach Mustern der Kategorie 1 oder 2 (nahe liegendes oder in Teilaspekten beachtetes Muster).

Typ B im ersten Schuljahr

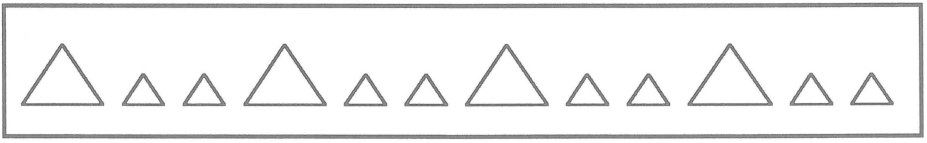


Abb. 3.30

85,7% der Kinder setzten die *Folge aus geometrischen Objekten* (vgl. Abb. 3.30) mit nahe liegenden Weiterführungen fort; dies ist ein sehr gutes Ergebnis. Nur eine Schülerin bot hier eine unerwartete Lösung, die aber als strukturzusammenhängend eingestuft wird. Sie zeichnete das Muster aus einem großen Dreieck, dem zwei kleine Dreiecke folgen, mit Kreisen und dann mit Quadraten nach. Bei den Lösungen ohne Zusammenhang zur Aufgabe (12,9%) trat am häufigsten eine alternierende Folge aus kleinem und großem Dreieck auf. Einmal wurden alternierend kleine und große Kreise gezeichnet, wobei anzunehmen ist, dass diese eine

Zeichenvereinfachung der Dreiecke war, die das Kind nicht zeichnen konnte oder wollte.

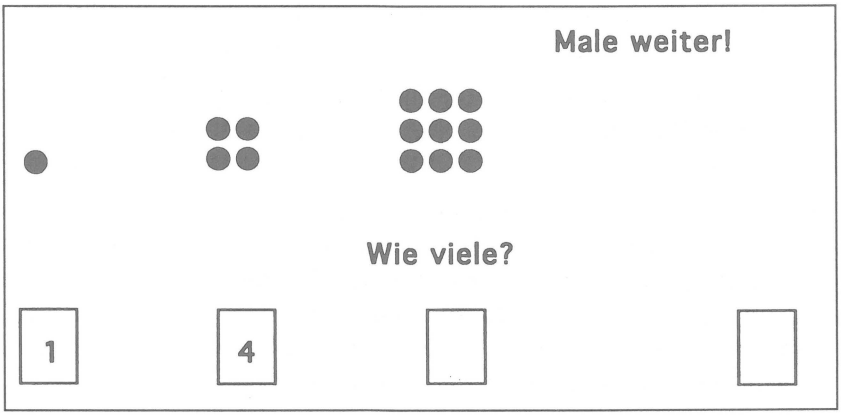


Abb. 3.31

Wider Erwarten hatten die Kinder bei den *figurierten Zahlen* (Quadratzahlen) die größten Probleme (vgl. Abb. 3.31). Nur 20% zeichneten die vierte Quadratzahl auf. 38,6% zeichneten Punktmuster von Malaufgaben wie z.B. 3x4 oder 2x3, und sogar 40% gaben Muster an, die in keinem Zusammenhang zur Quadratzahlstruktur zu stehen schienen. So tauchte dreimal das Würfelbild der Fünf auf, mehrmals wurden Malaufgabenmuster um 2 oder 3 ergänzt (4x3+2 oder 2x4+3 usw.). Diese Lösungsvielfalt ging hin bis zu 18 Punkten, die in einem ungeordneten Haufen aufgezeichnet wurden.

Die Ergänzungen zu den Malaufgaben können darauf hindeuten, dass die Kinder versucht haben, die Zahlenreihe der Quadratzahlen sinnvoll fortzusetzen. Häufig ergab sich die Anzahl 14 oder 11. Die 14 weist auf einen Zuwachs um 5 von 9 aus hin. Dieser Zuwachs ist zwischen der zweiten und dritten Quadratzahl auch wirklich gegeben (9-4=5) und wurde hier nun konsequent fortgeführt.

Die 11 unterscheidet sich um 2 von der letzten angegebenen Zahl, der 9. Diesen Unterschied findet man nicht in der Folge der Quadratzahlen. Ein Erklärungsversuch liegt allerdings darin, dass die Zahlen 1 und 4 in der

Zahlenreihe zwei Zahlen zwischen sich liegen haben. Diese Feststellung wurde u.U. mit dem Unterschied 2 verwechselt.

Typ B im zweiten Schuljahr

Der geringste Anteil an Lösungen der Kategorie 1 insgesamt war bei der *Folge aus geometrischen Objekten* und bei *figurierten Zahlen* (Dreieckszahlenfolge) zu verzeichnen.

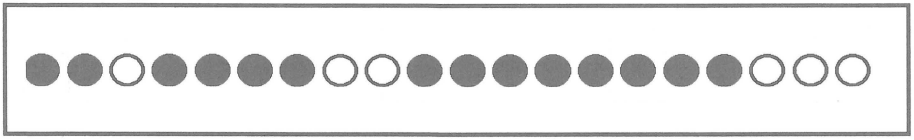


Abb. 3.32

Bei der *Folge mit geometrischen Objekten* (vgl. Abb. 3.32) konnte für das Ergebnis ausschlaggebend sein, dass eine verhältnismäßig große Anzahl von Punkten weiter gezeichnet werden musste. 39% lösten die Aufgabe nach dem nahe liegenden Muster. Ungefähr gleich viele Schülerinnen und Schüler (37,3%) boten eine Lösung an, die mit der Struktur der Aufgabe augenscheinlich nicht übereinstimmt. Bei den Lösungen, die dem intendierten Muster folgten, zeigten einige Kinder Ausdauer und zeichneten sogar bis zu dem 'Folgenglied', das aus 32 schwarzen Punkten besteht.

16,9% gaben eine Lösung an, die durchaus mit dem Muster der Aufgabe in Beziehung steht. Zumeist wurden die schwarzen und weißen Punkte gleichmäßig erhöht, d.h. es wurden zwar 4 weiße, aber nicht 16 schwarze, sondern 9 schwarze Punkte angegeben, und so fort. Einige kopierten die Vorlage (zeichneten die Punktfolge also einfach ab), andere bildeten mitunter völlig unstrukturierte Zeichenfolgen. 37,3% gaben eine Lösung an, die kaum Zusammenhang mit der Aufgabe aufweist. Ein Mädchen notierte die Zahlenfolge 9, 4, 10, 5, 11, 6. Diese Antwort kann natürlich in dem Sinne gedeutet werden, dass sie die Anzahlen der schwarzen und weißen Punkte wiedergeben mochte.

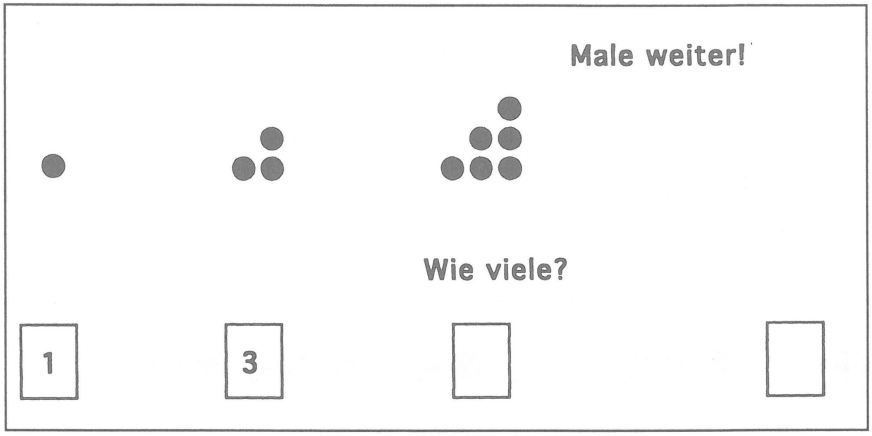


Abb. 3.33

Die *figurierten Zahlen* (Dreieckszahlen) waren den Schülerinnen und Schülern offenbar nicht vertraut (vgl. Abb. 3.33). 30,5% konnten die vierte Dreieckszahl zeichnen und richtig auszählen. 33,9% bemühten sich um eine Annäherung an das ungewohnte Muster. Sie vergaßen manchmal einen Punkt (2, 3, 4 Punkte wurden gezeichnet) oder gestalteten zwar ein Dreieck, aber entweder mit einer zu geringen Anzahl an Punkten oder mit einer differenten Anordnung der 10 Punkte. Schließlich wurden von 32,2% der Kinder Punktmuster angegeben, die Rechtecken mit Zusätzen (3x2+1), Quadraten und Ähnlichem nachempfunden sind. Die Prozentzahlen zeigten, dass je ein Drittel der Antworten den Kategorien 1, 2 und 3 zuzurechnen ist.

Typ B im dritten Schuljahr

Die *figurierten Zahlen* stehen in diesem Schuljahr insgesamt - über alle Aufgaben betrachtet (vgl. Anhang D) - bezüglich der Prozentwerte der Kategorie 1 nicht an letzter Stelle, wie es in den Anfangsklassen der Fall war.

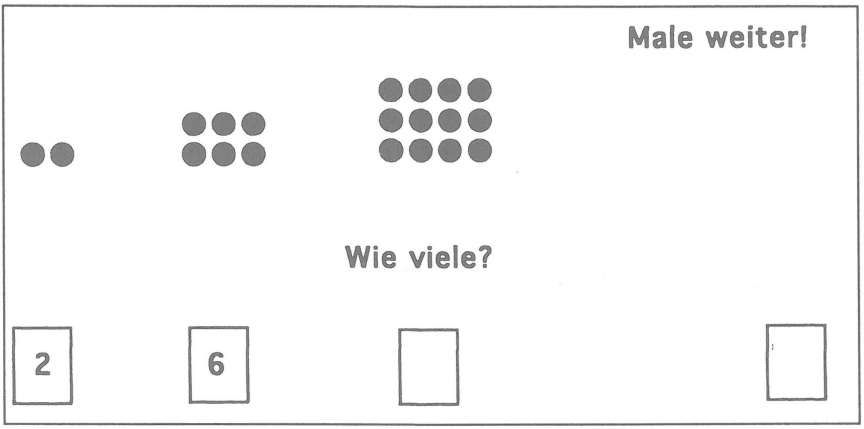


Abb. 3.34

Alle Kinder bearbeiteten diese Aufgabe (vgl. Abb. 3.34). Über die Hälfte der Kinder (53,8%) gaben die fehlende Rechteckszahl an. Zwei von ihnen zeichneten auch noch die nächste Rechteckszahl in der üblichen Darstellungsweise. Immerhin 20% gaben eine strukturierte Lösung an. Hier tauchten häufig Lösungen auf, die darauf hinweisen, dass die Kinder versucht haben, die 16 in eine Punktmusterform zu bringen, die den vorgegebenen ähnelt. Dabei wurde z.B. das Quadratzahlenmuster 4x4 genutzt. Die 16 könnte sich daraus ergeben, dass die ersten beiden Rechteckszahlen eine Differenz von 4 aufweisen und diese Differenz, zur dritten Rechteckszahl addiert, genau sechzehn ergibt.

26,2% der Kinder zeichneten, wie aus den unteren Schuljahren schon bekannt, ein Muster, das der geometrischen Form eines Rechtecks offenbar nicht ähnelt. Oftmals wurden Muster durch Zugabe eines oder zweier Punkte ergänzt, z.B. 3x5+1, 3x6+2. Bei diesen beiden Beispielen kann angenommen werden, dass diese Kinder eine Anzahl von Punkten genau festgelegt haben, die sie jetzt 'irgendwie' in ein Punktmuster umzusetzen versuchten. Das Kind im ersten Beispiel legte sich auf 16 Punkte fest und im zweiten Fall wählte das Kind sogar die nahe liegende Anzahl von 20 Punkten (die nächste zu zeichnende Rechteckszahl wird durch das Punktmuster von $4 \cdot 5=20$ Punkten gebildet). Die äußere Form, die Gestalt des Rechtecks, wurde hier von diesen Kindern vernachlässigt.

Typ B im vierten Schuljahr

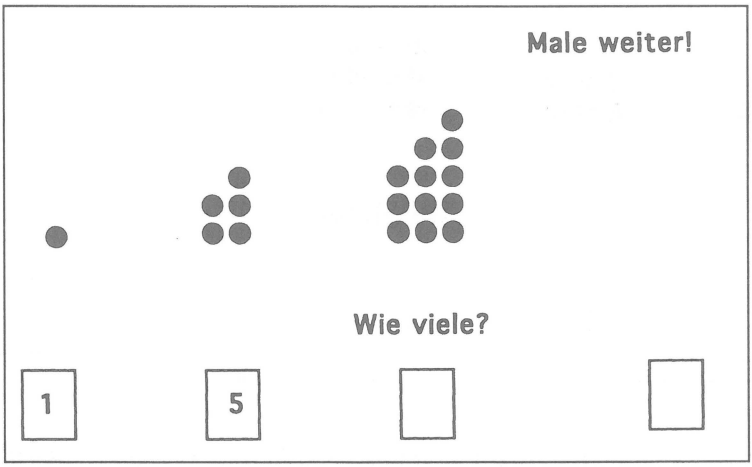


Abb. 3.35

Die *figurierten Zahlen* (Trapezzahlen) waren für alle Kinder unbekannt (vgl. 3.35), aber nur zwei Kinder gaben keine Lösung an (3,2%). Immerhin 19,0% konnten die nächste Trapezzahl zeichnen. 41,3% hatten anscheinend ein gewisses Gefühl für die ungewohnte Form und versuchten, mit Hilfe einer Rechteckszahl und einer Dreieckszahl das Muster nachzuahmen (z.B. $5x4+D_3$)[40].

Fast genauso viele Kinder (36,5%) schrieben jedoch Punktmuster auf, die sehr unstrukturiert scheinen. Zweimal trat sogar die richtige Anzahl Punkte auf, jedoch in dem Muster 4x5+2 bzw. 3x6+4. Ansonsten wurden Punktmuster zwischen 13 und 18 gezeichnet.

[40] Zur Vereinfachung werden Dreieckszahlen, Quadratzahlen usw. nur durch den ersten Buchstaben und durch den Index gekennzeichnet. D_3 bezeichnet die dritte Dreieckszahl, Q_4 die vierte Quadratzahl usw.

3.2.3 Analyse der Ergebnisse der Typ-C-Aufgaben

In jedem Schuljahr wurden als Typ-C-Aufgabe operative Päckchen mit Störaufgabe bearbeitet.

	1. Schuljahr	2. Schuljahr	3. Schuljahr	4. Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	62,90	64,40	60,00	73,00
Teilaspekte des Musters beachtet	12,90	22,85	27,75	7,15
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	24,20	9,35	11,50	9,55
nicht bearbeitet	0,00	3,40	0,75	10,30
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent -

Abb. 3.36

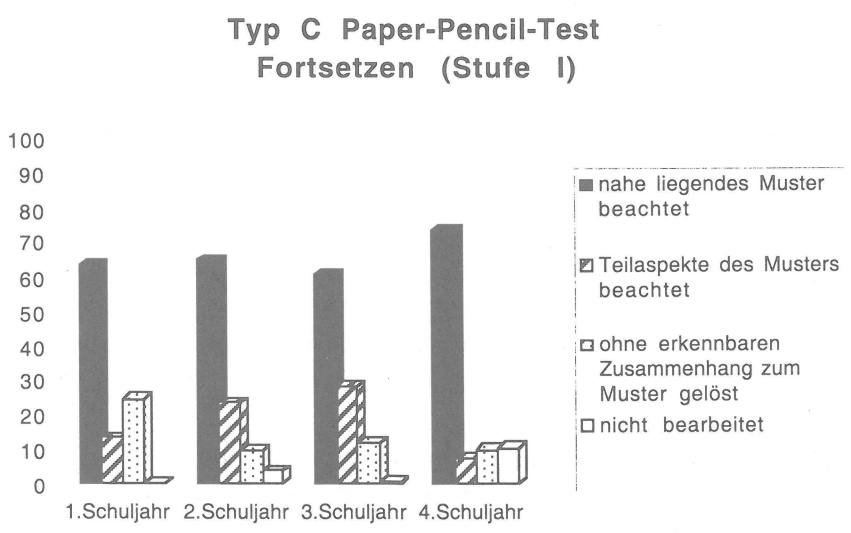


Abb. 3.37

Während sich die Prozentwerte der Ergebnisse der Kategorie 1 in den ersten drei Schuljahren zwischen 60% und 65% bewegen, steigen die Lösungsraten im vierten Schuljahr etwas an. Da die Aufgaben des Typs C in diesem Forschungsteil erfordern, dass die Kinder zunächst einige arithmetische Lösungen finden, kann u.U. die gewachsene Rechenkompetenz der Viertklässler für diesen Anstieg gesorgt haben. Nur wenn die Rechenfertigkeit ausreicht, die Aufgaben korrekt zu lösen, hat man hier die Möglichkeit, das Muster zu finden und zu reparieren. Da sich die Rechenanforderungen allerdings stets an das Schuljahr anpassen, kann dieser Anstieg auch ein Indiz dafür sein, dass Viertklässler insgesamt bessere Leistungen bei den Päckchen zeigen können. Dies kann daran liegen, dass ihnen ein Gesamtüberblick über alle Aufgaben leichter gelingt als den Kindern der niedrigeren Schuljahre. Jüngere Kinder konzentrieren sich eher auf einzelne Aufgaben und Zahlen als auf den gesamten Zusammenhang.

Typ C im ersten Schuljahr

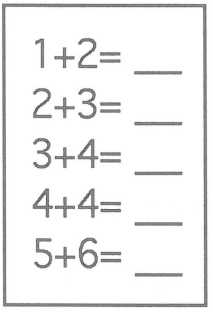


Abb. 3.38

Das *strukturierte Päckchen* (vgl. Abb. 3.38) mit Störung wies 63,8% an Lösungen der Kategorie 1 auf. Bei den Lösungen mit Strukturzusammenhang konnte mehrfach (13%) beobachtet werden, dass zwar die intendierte Aufgabe als unpassend für die Päckchenstruktur ermittelt wurde, dann jedoch eine Ersatzaufgabe geboten wurde, die zwar das Ergebnis 9 hat (wie die korrekte Ersatzaufgabe 4+5), jedoch aus anderen Summanden besteht. Vermutlich hatten diese Kinder in ihrer Argumentation die Folge der Ergebnisse (ungerade Zahlen) als Muster entdeckt, konnten dieses Muster aber nicht mit den Summanden in Verbindung bringen (vgl. Argumentation über Zielsteine, ohne die Basissteine bei Mauern zu beachten).

Auffallend ist, dass 23,2% der Kinder die letzte Aufgabe (5+6=11) strichen. Viele ersetzten diese durch eine Aufgabe, die das Ergebnis 10 hat. Da die üblichen Aufgabenkolonnen im ersten Halbjahr des ersten Schuljahres oft im Ergebnisbereich nicht über den Zehnerraum hinausgehen, kann diese

Entscheidung durch den gewohnten Unterrichtsrahmen gefördert worden sein.

Typ C im zweiten Schuljahr

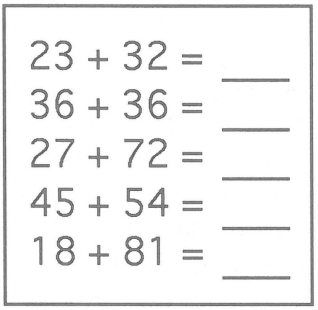


Abb. 3.39

Die intendierte, unpassende Umkehrzahlaufgabe, die im *ersten Päckchen* (vgl. Abb. 3.39) enthalten ist, wurde von 64,4% der Schülerinnen und Schüler korrigiert. Hingegen erkannten zwar 22% die unpassende Aufgabe, nannten dann aber eine Ersatzaufgabe, die nicht durch Umstellung der Ziffern im Päckchen erreicht werden kann. Dennoch lehnten sich viele bei der Wahl ihrer Lösung an das Muster der Ergebniszahlen an, bei denen nur Zahlen mit zwei gleichen Ziffern auftraten. Die Kinder, die die unpassende Aufgabe nicht erkannten, schrieben natürlich auch keine in das Muster passende Aufgabe auf (11,9%), sondern nannten, wenn überhaupt, irgendeine Aufgabe im Hunderterraum.

Im Aufgabenpäckchen mit den Subtraktionsaufgaben (*zweites Päckchen*, vgl. Abb. 3.40) erkannten ebenfalls 64,4% der Kinder die unpassende Aufgabe. 23,7% erkannten die unpassende Aufgabe und versuchten, Ersatzaufgaben zu finden, die 45 zum Ergebnis haben. Dabei waren häufig Rechenfehler zu beobachten. 6,8% rechneten zwar die Aufgabe aus, aber strichen keine oder aber mehrere Aufgaben. 5,1% lösten die Aufgabe gar nicht.

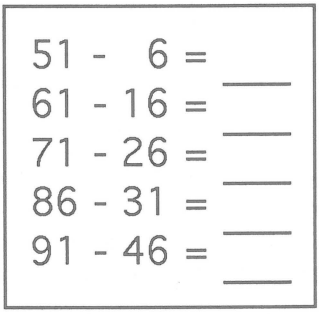


Abb. 3.40

Typ C im dritten Schuljahr

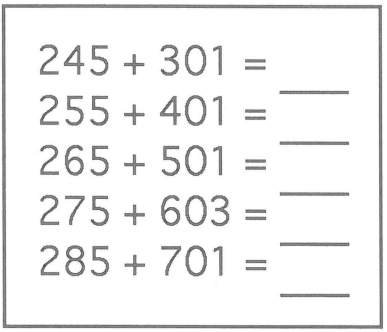


Abb. 3.41

In diesem Schuljahr hält das *erste strukturierte Päckchen* (vgl. Abb. 3.41) die Spitzenreiterrolle im Vergleich aller Aufgaben insgesamt. 95,4% erkannten die Aufgabe, die nicht in diese Aufgabengruppe gehört. Ein Kind ergänzte die Aufgabereihe durch die zusätzliche Aufgabe 295+801 und zeigte so, dass es das Muster verstanden hatte. Ein anderes Kind erkannte die unpassende Aufgabe zwar, änderte sie jedoch in 275+611=886. Ein Mädchen gab eine Antwort, die mit dem Muster in keinem Zusammenhang zu stehen scheint. Sie strich die letzte Aufgabe und schrieb die Subtraktionsaufgabe 986-701=285 nieder.

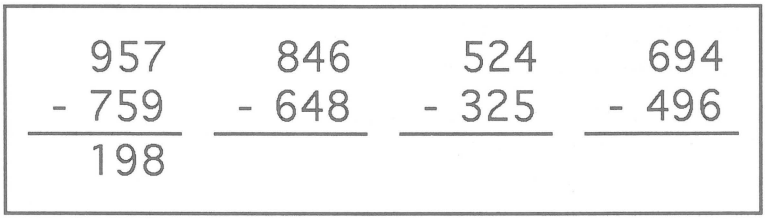


Abb. 3.42

Knapp ein Viertel der Kinder (24,6%) gab zum Umkehrzahlpäckchen (*zweites Päckchen*, vgl. Abb. 3.42) eine Antwort, die dem nahe liegenden Muster folgt. Hier wurden auch die Lösungen eingeordnet, die erstens die unpassende Aufgabe erkannten und zweitens eine Umkehrzahlaufgabe anboten, die 198 als Lösung hat, auch wenn sie nicht durch Korrektur der Ziffern der unpassenden Aufgabe entstanden war. Viele hatten den Subtrahenden in der unpassenden Aufgabe um eins erhöht und so das Ergebnis zu 198 korrigiert. Diese Antworten sind ebenso wie alle, die irgendeine Aufgabe (keine Umkehrzahlen) mit dem Ergebnis 198 aufgeführt haben, in die Kategorie 2 eingestuft worden. All diese Kinder haben auf jeden Fall die unpassende Aufgabe erkannt, die nach dem nahe liegenden Muster die Störaufgabe ist (52,3%).

Ein gutes Fünftel aller Antworten (21,5%) zeigte keinen engen Zusammenhang zum Umkehrzahlmuster und zu der Lösung 198. Verschiedene Aufgaben im Päckchen wurden gestrichen. Mitunter lag es auch daran, dass die Ergebnisse unpassend ermittelt wurden; so wurden z.B. einmal alle Aufgaben mit 202 gelöst. Eine Schülerin korrigierte daraufhin die vorgegebene und vollständig gerechnete Aufgabe auch im Ergebnis zu 202. Diese Antwort weist darauf hin, dass der Subtraktionsalgorithmus fehlerhaft durchgeführt wurde: Dieses Kind subtrahiert zwar Stelle für Stelle, aber es subtrahierte stets die kleine von der größeren Zahl und beachtete dabei nicht die Bedeutung von Minuend und Subtrahend. Eine Schülerin gab keine Antwort.

Typ C im vierten Schuljahr

7447	6336	4114	8558
- 4774	- 3663	- 1414	- 5885
2673			

Abb. 3.43

Das *erste strukturierte Päckchen* (vgl. Abb. 3.43) lag in diesem Schuljahr mit 85,7% Lösungen, die dem nahe liegenden Muster folgen, an erster Stelle im Aufgabenvergleich. Alle Kinder bearbeiteten diese Aufgabe. Die Unregelmäßigkeit in den Differenzen von ANNA-Zahlen wurde anscheinend gut erkannt, obwohl ANNA-Zahlen selbst nicht im üblichen Schulstoff aufgetreten waren.

Bei 12,7% der Schülerinnen und Schüler fiel jedoch auf, dass sie zwar die richtige Aufgabe markierten, aber eine Ersatzaufgabe fanden, die nicht durch Vertauschen der vorhandenen Ziffern gefunden wurde, sondern über das Ergebnis, das bei diesen Differenzen immer gleich ist. Dabei wurden andere, unpassende Subtraktionen aufgeführt (3183-510=2673) oder sogar Additionen genannt (2000+673=2673). Nicht alle Kinder waren im schriftlichen Subtrahieren sicher, sodass sich einige Rechenfehler einschlichen. Ein Mädchen markierte nicht nur die unpassende Aufgabe,

sondern auch die letzte Aufgabe. Leider machte sie keinerlei Anmerkungen, die ihre Lösung verständlich machen könnten.

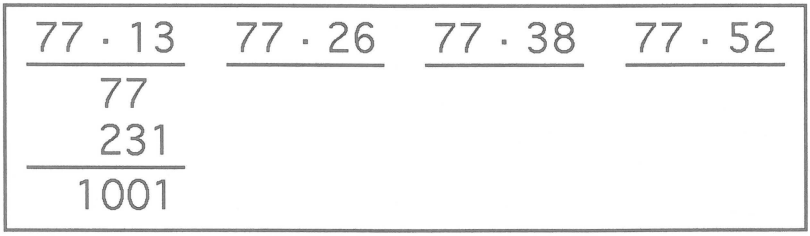


Abb. 3.44

Im *zweiten Päckchen* (vgl. Abb. 3.44) war es schwer möglich, allein an den Zahlen und Ziffern zu erkennen, welche Aufgabe unpassend ist. Für manche Kinder war es ein Hindernis, dass sie schriftlich multiplizieren mussten, um hinter die Struktur zu kommen. Dennoch haben 60,3% der Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe so korrigiert, wie das nahe liegende Muster intendiert. Dabei fiel es ihnen jedoch oft schwer, eine passende Ersatzaufgabe zu finden. Dennoch haben sie die unpassende Aufgabe richtig erkannt und ausgestrichen.

Ein Mädchen erkannte die Aufgabe zwar, schrieb aber als Ersatzaufgabe 77x49. 17,5% der Kinder geben Lösungen an, die nicht vermuten lassen, dass sie sich des Musters bewusst sind. Ein Fünftel der Kinder (20,6%) bot keine Lösung an.

3.2.4 Zusammenfassung des Paper-Pencil-Tests

Die Hauptergebnisse des Paper-Pencil-Tests lassen sich in folgenden Punkten zusammenfassen:

(1) Die Prozentanteile der Kinder, die nahe liegende oder in Teilaspekten nahe liegende Antworten zu den Zahlenmusteraufgaben finden, liegen im Durchschnitt über 60% (eine Ausnahme Typ A, 4. Schuljahr 59%).

(2) Die Anzahl der 'Nichtbearbeitungen' (Kategorie 4) ist im ersten Schuljahr am geringsten.

(3) Es ist kein kontinuierlicher Zuwachs der Lösungsquoten im Laufe der Schuljahre, der auf eine genetische Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses schließen ließe, zu verzeichnen.

(4) Muster, die durch geometrische Objekte und Punktmuster gestaltet sind, haben keine höhere Lösungswahrscheinlichkeit (insbesondere in den Kategorien 1 und 2), sondern werden im Gegenteil eher gar nicht oder mit einem nicht nahe liegenden Muster fortgesetzt.

ad (1): Da Zahlenmusteraufgaben nicht zum üblichen Unterrichtsstoff gehören, ist es bemerkenswert, dass grundsätzlich weit über die Hälfte der Kinder eine nahe liegende oder in Teilaspekten passende Lösung zu den Aufgaben finden konnte. Eine Ausnahme bildet der Typ B im zweiten und vierten Schuljahr. (Die möglichen Gründe für diese Ergebnisse werden unter (4) aufgezeigt.) Diese hohen Werte der Kategorie 1 und 2 sind außerordentlich wichtig: Sie zeigen, dass die Kinder einen natürlichen Zugang zu den Aufgaben finden, selbst wenn die Formate unbekannt sind und die Aufgaben nicht kindgemäß 'verpackt' dargeboten werden.

ad (2): Erstklässler zeigten die größte Bereitschaft, sich mit den neuen, unbekannten Aufgaben auseinanderzusetzen. Auch wenn nicht immer nahe liegende Lösungen gefunden wurden, wurde zumindest eine Anstrengung unternommen, überhaupt eine Lösung zu finden. Diese Altersklasse ist noch offener für neue Aufgabenformate, während die älteren Schülerinnen und Schüler an gewisse Aufgabentypen gewöhnt sind. Ältere Kinder haben in

ihrer Schulsozialisation auch die Erfahrung gemacht, dass sich fehlerhafte Lösungen ungünstig auswirken können, sodass sie eine nicht ganz gesicherte Lösung eher verschweigen.

ad (3): Da Pädagogik und Didaktik davon ausgehen, dass sich die Fertigkeiten und Fähigkeiten der Kinder von Schuljahr zu Schuljahr verbessern, wäre ein Entwicklungsstrang in der Zahlenmusterbewältigung zu erwarten gewesen. Es gibt jedoch hier keinerlei Hinweise darauf, dass sich die Kompetenz, mit Zahlenmustern umzugehen, kontinuierlich verbessert. Das bedeutet nicht, dass sie nicht durch gezielte Maßnahmen und entsprechenden Unterricht gefördert werden könnte. Die Kinder haben grundsätzlich wenig unterrichtliche Förderung dieser Kompetenz erfahren. Es kann somit gesagt werden, dass alle Kinder aller Altersstufen einen gewissen Zugang zu den Mustern finden, der aber vermutlich in jedem Schuljahr noch stark ausbaufähig ist.

ad (4): Die Punktmuster und Muster mit geometrischen Objekten (Typ B) sollten einen leichten Zugang zu Mustern ermöglichen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Eine Erklärung kann darin gesehen werden, dass diese Aufgabenformate den Kindern unbekannt waren und sie außerdem keine Möglichkeit hatten, über Rechenfertigkeiten zu einer Lösung zu kommen. Die Anforderung, Aufgaben zu lösen, die sich dem Zugang durch Algorithmen und Rechenoperationen auf den ersten Blick entziehen, war neu. Das Muster, das sich durch die Gestalt der figurierten Zahlen anbietet, wurde in der Konzeption des Tests als Lösungshilfe angesehen. Die Einzellösungen weisen demgegenüber darauf hin, dass die Gestalt der figurierten Zahlen bei den Lösungsansätzen der Kinder eine untergeordnete Rolle spielte.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse: Es kann nicht von einer spontanen Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses ausgegangen werden. Die hier gezeigten Mindestprozentsätze ermöglichen aber den Schluss, das Zahlenmusteraufgaben ohne jegliche Anbindung an kindgerechte Kontexte eine Herausforderung an die Kinder stellen, die sie motiviert meistern. Die Anlagen der Kinder für diese motivierte Auseinandersetzung mit Zahlenmustern, die im Test festgehalten werden konnten, sollen im Weiteren in der Interviewstudie (3.3) vertieft analysiert werden.

Es wird untersucht, ob die hohe Akzeptanz der Zahlenmusteraufgaben des Tests, die sich an den hohen Prozentwerten für die Kategorien 1 und 2 zeigt, in den Interviews bestätigt wird. Die Potentiale der Kinder konnten durch das Design des Tests, der sich stets an der unteren Grenze der Möglichkeiten orientierte, nicht ausgeschöpft werden. In der Interviewstudie wird es aber möglich sein, den Kindern in der Kommunikation als Einzelperson gerecht zu werden.

3.3 Interviewstudie

Die Vorkenntnisse der Grundschülerinnen und Grundschüler zu Zahlenmustern wurden nicht nur in einem schriftlichen Test erhoben, sondern im Gespräch mit einzelnen Kindern in Interviews weiter verfolgt. Den Interviews wurden weit gehend die Aufgaben des Paper-Pencil-Tests zu Grunde gelegt. Aufgrund der Erkenntnisse aus den vorhergehenden Tests wurden jedoch einige Modifikationen vorgenommen.

3.3.1 Design der Interviewstudie

Zur Methode

Die Befragung der Kinder wurde in *Einzelinterview*s durchgeführt. Dem epistemologischen Interesse an den Vorgehensweisen und Denkwegen des Einzelnen konnte so, besser als in Gruppen- oder Partnerinterviews, entsprochen werden.

Die Kommunikation richtete sich nach den Kriterien der halbstandardisierten Methode des klinischen Interviews (vgl. z.B. WITTMANN 1984, auch SELTER/SPIEGEL 1997, 100 ff. oder KRAUTHAUSEN 1998, 115 f.).

Die Kinder wurden angeregt, über die Aufgaben zu sprechen und die Besonderheiten und Muster zu beschreiben, sofern sie sich nicht von sich aus äußerten. Nachfragen seitens der Interviewerin bei unklaren Beschreibungen, Aufforderungen, die Regeln noch einmal genauer zu beschreiben, wie auch Lob der Kinder (unabhängig von der 'Richtigkeit' der Lösung) ergaben sich im Gespräch mit Kindern von selbst und wurden von den Kindern als selbstverständlich angesehen (vgl. SELTER/SPIEGEL 1997).

Die Interviewten hatten jederzeit das Recht, die Aufgaben abzubrechen oder unbearbeitet zu lassen, ebenso war die Reihenfolge der Bearbeitung den Kindern freigestellt. Die Interviewerin griff in diese Entscheidungen nicht ein.

Die Kinder kannten die Interviewerin nicht als Lehrperson, sodass eine natürliche Abgrenzung von einer unterrichtlichen Fragesituation und Leistungsmessung gegeben war.

Anpassung der Interviewgrundlage

Als Interviewrahmen wurde der schon erprobte Paper-Pencil-Test genutzt. Die Ergebnisse der Paper-Pencil-Tests hatten zu einigen Änderungen in den Zahlenmustertests geführt. Zusätzlich wurde versucht, den Kriterien von VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN (1996) stärker als in den Paper-Pencil-Tests gerecht zu werden (vgl. Kap. 3.1).

Bei jeder Aufgabe wurde in den Interviews neben der *Fortsetzung* nach einer *Beschreibung* des Musters gefragt. Durch die Frage nach der zu Grunde liegenden Regel wurde es ermöglicht, einen Einblick in die Strategie der Kinder zu erhalten ('asking about the strategy'). Das Antwortfeld konnte nun auch ausdrücklich für Notizen benutzt werden ('scratch paper'). Schon in den Paper-Pencil-Tests wurde deutlich, dass mehr als *eine* Regel als korrekt akzeptiert wurde, solange das Muster der Aufgabe eine entsprechende, logische Grundlage blieb ('more than one correct answer'). Dieses Vorgehen wurde auch im Interview fortgeführt.

Alle Themengebiete wurden durch mindestens zwei Aufgaben abgedeckt. Dies entspricht nicht ganz dem Prinzip der 'support-problems', hat jedoch eine ähnliche Intention. So konnten die Kinder innerhalb des Tests einen, hier durchaus gewünschten, Lernprozess durchmachen und sich an die Zahlenmuster heranarbeiten. Die figurierten Zahlen wurden je Schuljahr nur in einer Aufgabe angesprochen. Allerdings tauchte die Folge der figurierten Zahlen später als reine Zahlenfolge im Test wieder auf. Somit konnten die Kinder auch hier die Erfahrungen mit der einen Aufgabe (Punktmusterfolge) für die andere (Zahlenfolge) nutzen.

Die figurierten Zahlen lassen sich geometrisch in Punktmustern wiedergeben, aber auch als Zahlenfolge interpretieren. Die Kopplung von geometrischem und arithmetischem Aspekt wurde in den Interviews aufgelöst. Innerhalb des Gesprächs tauchte in jedem Schuljahr die relevante Zahlenfolge zu den vorher gefragten figurierten Zahlen als neue Aufgabe auf ('alternations in presentation').

Die Folgen aus geometrischen Objekten (Dreiecken, Kreisen, Quadraten) wurden nun nicht nur in den Anfangsklassen aufgenommen, sondern auch in den Schuljahren 3 und 4.

Die Paper-Pencil-Tests haben gezeigt, dass ein Muster mitunter nur wegen mangelnder Rechenfertigkeit nicht erkannt wurde. Aus diesem Grund wurden die Aufgaben jetzt zusammen mit der Berechnung der Ergebnisse vorgegeben, damit sich die Kinder ganz auf die Muster konzentrieren konnten.

Die Wertetabellen haben sich als besonders schwierig herausgestellt, da sie als Aufgabenformat unbekannt waren. Die Darstellung durch 'Dominosteine', die jeweils ein Zahlenpaar tragen, das der zu Grunde liegenden Funktion unterliegt, sollte die Lösung dieser Aufgabe erleichtern.

Die Veränderung einer Zahlenfolge des vierten Schuljahres (18, 19, 20, 10, 11, 12, ...) war jetzt so gewählt worden, dass das Muster noch offensichtlicher wird, da nun im ersten Fall die Zehnerzahl 20 halbiert wird. Weil nun in einem kleineren Zahlenraum operiert wurde, bestand die Hoffnung, dass die Regel der Folge schneller erkannt wurde und vor allem besser beschrieben werden konnte.

Ebenso wurde die Zahlenfolge im ersten Schuljahr geändert. Die in die Folge der natürlichen Zahlen eingeschobene Zahl war nun die 10 (statt der 5). So wurde zunächst der Schwierigkeit entgegengewirkt, die das Auftreten von drei gleichlautenden Zahlen in der Folge mit sich bringt. Falls eines der Kinder die Folge bis 10 oder weiter fortsetzt, ließ sich an den zuvor gezeigten Lösungen besser ablesen, ob das Muster erkannt worden ist.

Ansonsten ähnelte die Interviewgrundlage in vielen Bereichen den Paper-Pencil-Tests. Einige Elemente wurden verfeinert und aufgrund der Ergebnisse aus dem besagten Test verändert.

Zur Durchführung der Interviews

An den Interviews haben insgesamt 60 Kinder teilgenommen. In drei verschiedenen Schulen wurden jeweils 5 Kinder je Schuljahr im Einzelinterview befragt. Die Interviews im vierten Schuljahr wurden in Zusammenarbeit mit den Studierenden eines Hauptseminars[41] durchgeführt, sodass hier jedes Interview in einer anderen Schule stattfand.

Die Schulen gehörten zu den Einzugsbereichen Schwerte, Bochum und Dortmund. Die Einwohnerdichte der Einzugsgebiete lag bei 45,3 Einwohner pro ha 25,0 bzw. 23,4 Einwohner pro ha, die durchschnittlichen Anteile an ausländischen Mitbürgern lagen zwischen 11,9 %, 8,2 % und 4,9%.

Die Befragung fand während der Schulzeit in Absprache mit der Schulleitung, den Eltern und der jeweiligen Klassenleitung in einem gesonderten Raum statt. Jedes Einzelinterview wurden videodokumentiert.

Die Interviews waren für 20 min. (1. Schuljahr) bis zu 45 min. (4. Schuljahr) angelegt. Die unterschiedlichen Tempi und Temperamente der Kinder wurden jedoch immer berücksichtigt, sodass es relativ große Zeitverschiebungen nach oben oder unten gab.

Zur Auswertung

Die Ergebnisse der Interviewstudie wurden einerseits quantitativ und andererseits qualitativ ausgewertet.

In einem *ersten Schritt* wurden die Interviewbögen nach den Kategorien des Paper-Pencil-Tests ausgewertet (vgl. 3.1 und 3.2). Diese Auswertung gab Auskunft über das *Fortsetzungsverhalten* der Kinder (Stufe I des Zahlenmusterverständnisses).

Der *zweite Schritt* bestand in der Sichtung der Videodokumente. Der Schwerpunkt der Analyse dieser Aufzeichnungen lag im *Beschreibungsverhalten* der Kinder (Stufe II des Zahlenmusterverständnisses).

---

41 Die Studierenden, die die Interviews durchgeführt haben, wurden von der Autorin eingehend vorbereitet, um ein durchgängiges Interviewverhalten in allen Interviews zu ermöglichen.

In diesem Schritt wurden die Interaktionsschritte nicht explizit aufgeführt, da sie sich zwangsläufig aus der jeweiligen Bearbeitung der präsentierten Aufgaben ergaben.

Diejenigen Ausschnitte der Interviews, die ungewöhnliche Ansätze der Kinder oder besonders ausführliche Kinderäußerungen zeigten, wurde transkribiert (vgl. Anhang C). Da in dieser Untersuchung vor allem die Wortwahl der Kinder thematisiert wurde, wurden bei einigen Antworten nur die genutzten Wörter oder Teilsätze im Transkript aufgeführt.

Die Interviewstudie ermöglichte durch diese zwei Arbeitsschritte die quantitative und die qualitative Analyse der Ergebnisse. Einerseits wird im Folgenden eine Auswertung der erzielten Ergebnisse (je Typ und danach noch untergliedert je Aufgabe) in quantitativer Form und andererseits in Darstellung und Interpretation von ausgesuchten Teiltranskripten nach qualitativen Forschungsgesichtspunkten gegeben. Die folgenden Tabellen (je Typ, je Schuljahr) zeigen die prozentualen Anteile der Kinderantworten unter Berücksichtigung der *Fortsetzung und* der *Beschreibung* des Musters.

3.4 Ergebnisse der Interviewstudie

Die Ergebnisse der Interviews werden in diesem Kapitel nach Aufgabentypen sortiert und analysiert. So lässt sich einerseits der Frage nachgehen, ob sich die Antworten innerhalb eines Schuljahrganges ähneln oder ob gravierende individuelle Unterschiede bestehen. Die Zusammenstellung der unterschiedlichen Äußerungen ermöglicht es, typische Kinderantworten zu identifizieren und die Stufe der Beschreibungen (Stufe IIa oder IIb) zu ermitteln. Andererseits kann im Vergleich der verschiedenen Schuljahre gesehen werden, ob es eine Art 'Entwicklung' des Zahlenmusterverständnisses (natürliche Genese) gibt, die sich in den Antworten oder den Stufen der Beschreibungen mit fortschreitendem Alter zeigen müsste.

Die Informationen sind stets geprägt von der Interpretation der Interviewerin und schöpfen insofern nur einen möglichen Teilaspekt der Äußerungen aus (vgl. SELTER/SPIEGEL 1997b, 107ff.). Die Ergebnisse können einen möglichen Trend auf Grund von Einzelfällen aufzeigen (vgl. EISNER 1998, z.B. 103). Insbesondere wurde darauf geachtet, dass die Interpretation kohärent und konsensfähig ist (vgl. EISNER 1998, 53 ff.).

Insgesamt sind 615 Antworten (je 15 mal 8 Aufgaben im 1. Schuljahr, 9 Aufgaben im 2. Schuljahr, 12 Aufgaben im 3. Schuljahr und 12 Aufgaben im 4. Schuljahr) in Bezug auf die Fortsetzung (Stufe I) und die Beschreibung (Stufe II) ausgewertet worden. In fast allen Fällen konnten die Fortsetzungen und Beschreibungen der gleichen Kategorie zugeordnet werden. Wichen die Beschreibungen von der Fortsetzung ab, oder nahmen sie nur Teilaspekte der gezeigten Fortsetzung auf, so wird dies in der Einzelauswertung explizit beschrieben.

In 11 Fällen wurden bemerkenswert unterschiedliche Kategorien in der Fortsetzung (Stufe I) und der Beschreibung (Stufe II) von den Kindern gezeigt:

In 6 Fällen wurde eine Beschreibung im nahe liegenden Muster gegeben, während die Fortsetzung des Musters gar nicht gelang. 3 dieser Fälle traten bei Zahlenfolgen (Typ A) und 3 bei Päckchen (Typ B) auf.

In 5 Fällen wurde eine Fortsetzung (Kategorie 1 bis 3) nicht kommentiert. All diese Fälle betrafen Fortsetzungen von Folgen mit geometrischen Objekten (Typ B).

3.4.1 Analyse der Reaktionen auf Typ-A-Aufgaben

Zu den Aufgaben des Typs A gehörten die Zahlenfolgen, die Mauern und die Zahl&Partnerzahl-Aufgaben - diese wurden nur in den höheren Schuljahren gestellt. Die Aufgaben erfordern von den Kinder, das Muster zu sehen und fortzusetzen. Zahlen und Ziffern gestalten die Muster.
In einer Gesamtübersicht stellen sich die prozentualen Ergebnisse[42] der geführten Interviews (je Schuljahr) für die Stufen I und II des Zahlenmusterverständnisses wie folgt dar (vgl. Abb. 3.45 und 3.46):

	1. Schuljahr	2. Schuljahr	3. Schuljahr	4. Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	41,65	43,30	45,70	60,00
Teilaspekte des Musters beachtet	23,35	36,70	26,70	18,10
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	35,00	16,70	14,30	6,70
nicht bearbeitet	0,00	3,30	13,30	15,20
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent -

Abb. 3.45

[42] Die Prozentwerte jeder Kategorie zu jeder einzelnen Aufgabe können dem Anhang D entnommen werden.

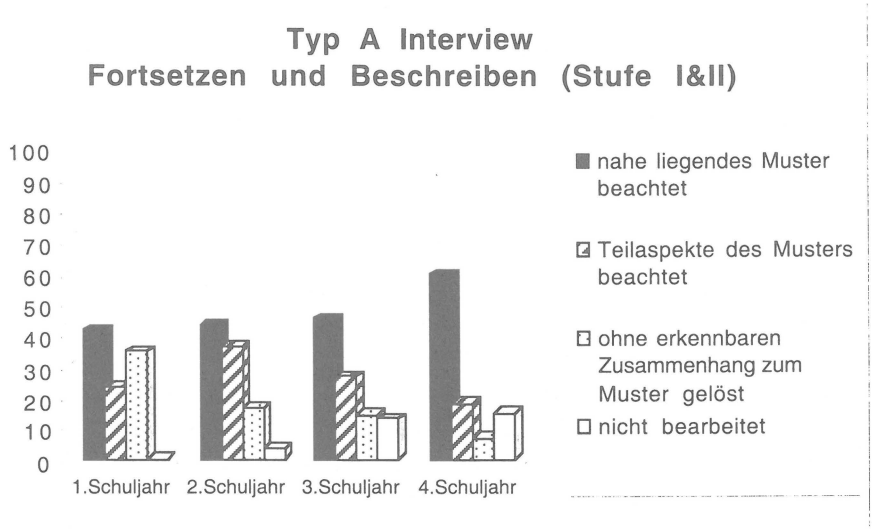


Abb. 3.46

Die Leistungen bei den Typ-A-Aufgaben blieben in den ersten drei Schuljahren relativ stabil, d.h. die Verteilung auf die Kategorien 1 und 2 ist ungefähr gleich. Im vierten Schuljahr ist ein Zuwachs der Anteile nahe liegender Lösungen zu verzeichnen.

Interessanterweise nimmt die Anzahl der Nichtbearbeitungen stetig zu und erreicht mit 15,2% im vierten Schuljahr ihren Höhepunkt. Schon bei den Paper-Pencil-Tests wurde vermutet, dass die Kinder mit zunehmendem Alter eher dazu neigen, gar nicht zu antworten, als eine vermeintlich falsche Antwort zu geben. Dies würde einen Zusammenhang damit aufdecken, dass der prozentuale Anteil der Antworten, die nicht mit dem Muster zusammenhängen, von Schuljahr zu Schuljahr abnimmt.

Ergebnisse der einzelnen Typ-A-Aufgaben

Bei der genaueren Auswertung der Ergebnisse werden gewisse Zahlenfolgen zusammengefasst, die ähnliche Aufbauprinzipien aufweisen. Die Mauern stellen ebenso eine Art von Folge dar, da die Basissteine nach einen bestimmten Folgenprinzip aufgebaut sind, das sich auch in der Zielsteinfolge widerspiegelt. Eine Besonderheit stellen die Mauern mit kombinatorisch ermittelten Basissteinen dar, die nur in den höheren

Schuljahren gegeben wurden. Die kombinatorischen Mauern bilden ein Muster in sich und wurden deshalb unabhängig von den anderen Zahlenfolgen betrachtet. Ebenso wurden die Aufgaben zu Zahl&Partnerzahl, die auch nur die Dritt- und Viertklässler bearbeitet haben, getrennt analysiert.

Zahlenfolgen

In den Interviews sollten die Kinder jedes Schuljahres drei Folgen fortsetzen und beschreiben. Die Folgen können weiter unterteilt werden, indem sie nach Schwierigkeiten differenziert werden. In jedem Schuljahr gab es demnach eine *einfache* Zahlenfolge, eine *kombinierte* Zahlenfolge (d.i. eine Folge, in der zwei Aspekte das Bildungsgesetz beschreiben) und eine Zahlenfolge, die der Punktmusterfolge der *figurierten Zahlen* (vgl. Typ B) in dem jeweiligen Schuljahr entsprach. Diese Einteilung wird die Analyse im Weiteren unterstützen, da sie Vergleiche zwischen den Vorgehensweisen der Kinder im Laufe der Grundschulzeit erst ermöglicht.

- Einfache Zahlenfolgen

In jedem Schuljahr wurde eine *'einfache' Zahlenfolge* gestellt. Die Folgen haben einfache Zuwächse von Glied zu Glied. Hierzu werden gerechnet:

- die Folge der geraden Zahlen (1. Schuljahr)
- die Folge der 2er-Potenzen (2. Schuljahr)
- die Folge mit Zuwächsen um -1, -5, -1, -5 (3. Schuljahr)
- die Fibonaccifolge (4. Schuljahr)

Die Fibonaccifolge kann hier eingeordnet werden, auch wenn sie etwas anspruchsvoller ist als die Folgen der anderen Schuljahre. Das einmal erkannte Prinzip der Fibonaccifolge ist sehr einfach und leicht fortzusetzen.

Im 1. Schuljahr fanden 60% der Kinder eine nahe liegende Fortsetzung der geraden Zahlen. Die Beschreibungen gingen dabei durchaus über das exemplarische Beschreiben hinaus (Stufe IIa):

„weil die immer zwei Zahlen übergehen." (1./X)[43]

„das sind 2er-Schritte." (1./XIII)

„weil man da ein Buchstabe, eine Zahl weglässt." (1./XV)

Das Kind in 1./XV verwechselte zunächst die Bezeichnung für ein Element der Zahlenfolge mit einem Element des Alphabets. Es beschrieb, abgesehen von dieser Besonderheit, das Zahlenmuster im nahe liegenden Muster. Ein gewisses Vorwissen über diese Zahlenfolge war nicht auszuschließen. Ein Kind beschrieb seine Kenntnisse explizit als 'Buchwissen':

1	I	liest du mir die ersten Zahlen mal vor'
2	S	2, 4, 6, 8, 10 ... das kenn ich.
3	I	wie geht es dann weiter'
4	S	12, 14, 16.
5	I	schreibst du das auch hin. so drei Zahlen kannste hinschreiben.
	S schreibt	
6	I	woher kennst du das denn'
7	S	weil da rüber so 'n Buch hab über Zahlen.

(aus Interview 1./II)

Einige Kinder setzten als nächstes Glied die 11 ein. Dabei gab es unterschiedliche Ansätze. Es konnte sein, dass von der letzten Zahl 10 aus einfach weitergezählt oder die fehlenden ungeraden Zahlen als Fortsetzung aufgelistet wurden, wie hier:

1	S	2, 4, 6, 8, 10
2	I	was meinst du, wie es weitergeht'
3	S	9' ... mit 11!
4	I	mit 11 meinst du' warum mit 11'
5	S	weil die 2, nach der 2 kommt nicht die 4, sondern nach der 2 kommt die 3 und nach der 6, vor der 6 kommt die 5 und vor der kommt die 7 und vor der 10 kommt die 9.
6	I	welche Zahl müsste dann als nächste dahingeschrieben werden'
7	S	die 11.
8	I	die 11'
9	S	die 11 geht zwei Einsen, ne'
10	I	mhm. und welche Zahl käme danach'
11	S	die 13!

(aus Interview 1./III)

[43] Zitate aus den Interviews werden mit dem jeweiligen Schuljahr und der Interviewnummer wiedergegeben. Die Codierung 1./X weist z.B. auf das zehnte Interview im ersten Schuljahr hin. Hinweise zur abweichenden Orthographie bei der Wiedergabe von Kinderäußerungen und zu den benutzten Transkriptionsregeln finden sich im Anhang C.

Es war einerseits ein Gefühl dafür zu erkennen, dass die Folge der natürlichen Zahlen eine Rolle spielen könnte. Andererseits wurde die Regel beachtet, dass nur jede zweite Zahl notiert wird. Ähnliches Vorgehen kann auch in 1./IX und 1./V beobachtet werden.

Im 2. Schuljahr ermittelten 40% der Kinder eine Fortsetzung nach dem Muster der 2er-Potenzen, zur Folge 1, 2, 4, 8, 16, ...

53,3% erkannten und nutzten Teilaspekte des Musters. Zwei typische Vorgehensweisen spiegeln sich in diesen Beispielen (vgl. Abb. 3.47 und 3.48) wider:

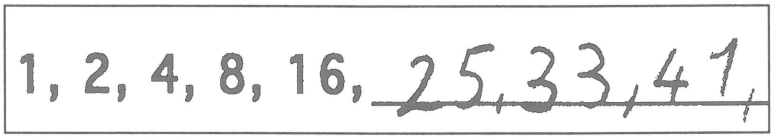


Abb. 3.47

Der Zuwachs von +8 von 8 nach 16 wurde generalisiert, dabei unterlief dem Kind bei dem ersten ergänzten Folgenglied ein Rechenfehler (vgl. Abb. 3.47).



Abb. 3.48

Hier (vgl. Abb. 3.48) wurde beachtet, dass die ersten beiden Zuwächse +1 und +2 sind. Die weiteren Zuwächse wurden ignoriert. Das Muster von +1, +2, +1, +2 wurde weiter fortgeführt.

Oft wurde zunächst vermutet, dass es sich um die geraden Zahlen handelt:

> „sind das immer die geraden Zahlen' ... nee, sind ja nicht alle geraden Zahlen." (2./XII)

Das Kind bricht hier die Überlegungen zunächst ab und ergänzt später:

> „ich würd jetzt wieder 2, 2, 4, 8 mehr ..." (2./XII),

d.h. die gegebenen Zuwächse wurden erneut genutzt.

Bei der Beschreibung der in den Interviews ebenfalls von den Kindern erwarteten Regel traten unterschiedliche Vorgehensweisen auf:

„immer die Zahl, die rauskommt, immer plus rechnen." (2./XV)

„immer das Doppelte." (2./III)

Diese beiden Beschreibungen stehen exemplarisch für die Stufe II. Es gibt jedoch feine sprachliche Unterschiede: Einerseits wird von den konkreten Zahlen ('die rauskommt') gesprochen (Stufe IIa), andererseits wird eine allgemeine Beschreibung gefunden, die sich ganz von dem Prozess der konkreten Fortsetzung löst (Stufe IIb).

Ein Kind konnte alle Zuwächse genau benennen, schrieb aber als Fortsetzung nur die Zuwächse erneut auf (2./III).

Unter den Folgen des dritten Schuljahres wies diejenige mit einem wechselnden Zuwachs von -1 und -5 den höchsten Prozentsatz an Kategorie-1-Lösungen auf (53,3%). Da hier jedoch im Gegensatz zu den Anfangsklassen zwei Operationen ausgeführt werden mussten, war es verständlich, dass einige Kinder zunächst versuchten, *eine* Operation zu finden, die die Lösung liefert.

Im folgenden Interview wurde zunächst die Operation -6 vermutet, später korrigierte sich das Kind und fand die passenden Operationen:

18	S	vielleicht 6 abziehen, weil hier gings, dann sind hier Zahlen, die bedeuten dann gar nichts vielleicht.
19	I	wenn die Zahlen da stehen, bedeuten sie auch irgendwas. wie kamst du auf 6'
20	S	weiß nicht. weil ich hab gedacht, wenn die Zahlen nix da, die zwischen da nix, wenn die da nix bedeuten, weil dann kann man nämlich nicht so, weil dann kann man nämlich immer 6 abziehen.
21	I	wo' von wo nach wo 6 abziehen'
22	S	äh, von 40 zu, zu 34, dann zu dann zu wieder 28 die 22.
23	I	aha, aha. und wie kriegst du die Zwischenzahlen dann raus'
24	S	ehm'
25	I	die nix bedeuten meintest du ja' wie kann man denn von der 40 zur 39 kommen'
26	S	nur eines abziehen.
27	I	geht das immer so mit den Zwischenzahlen' guck mal. guck mal.
28	S	ja, aber wenn man hier einen abzieht, dann muss man ja hier 5 abziehen...
29	I	mhm. ja' welche Zahl käme denn dann jetzt als nächste'
30	S	wo hier' *(zeigt Ende der Folge)*
31	I	mhm, danach.
32	S	wenn ich die 6 abziehe 18. wenn ich die 6 abziehe die 18. vielleicht ist das ja so, dass dann immer 1 abgezogen, dann wieder 5, dann wieder 1, dann wieder 5.
33	I	ja, könnte auch sein, ne'
34	S	ich glaub schon, das das so ist. *(vervollständigt die Folge)*

(aus Interview 3./III)

In diesem Interview hat das Kind auch zunächst die 'Zwischenzahlen' ignorieren wollen.

Eine Diskrepanz zwischen einer vollständigen nahe liegenden Beschreibung und einer abweichenden Fortsetzung (Stufe I) ist in 3./XI und ebenso in 3./X zu beobachten. Die Kinder nutzten nur -1 als Zuwachs, obwohl beide Zuwächse beschrieben wurden.

Kein Kind setzte die Folge bis in den Bereich der Minuszahlen fort. Die Null wurde als natürliche Grenze akzeptiert, denn

> „weiter geht es ja nicht." (3./IX).

Die im 4. Schuljahr den 'einfachen Folgen' zugeordnete Fibonaccifolge wurde von 53,3% der Kinder mit Kategorie-1-Lösungen fortgesetzt. Bei den anderen Folgen in diesem Schuljahr setzte ein höheren Prozentsatz von Kindern die Aufgabe im nahe liegenden Muster fort. Die Fibonaccifolge bot aber grundsätzlich viele Zugangsweisen zur Lösung, die die Kinder auch in den Interviews nutzten. Nur wenige gaben explizit an, nach den Zuwächsen, den 'Unterschieden' von Glied zu Glied zu suchen (z.B. 4./XV).

Bei den Beschreibungen zogen sich fast alle Kinder auf die Beschreibung an einem Beispiel zurück (Stufe IIa):

> „die zwei zusammen sind 8, die zwei zusammen sind 13, die zwei zusammen sind 21, die zwei zusammen sind 34, die zwei zusammen sind 55, die zwei zusammen sind 89." (4./I)

Andere versuchten, etwas mehr zu generalisieren

> „also, man muss immer die zwei Zahlen davor zusammenbringen. ehm, also 1 und 1 sind 2, 1 und 2 sind 3." (4./IX)

Bei dieser Folge wurde die Lösung oft sehr plötzlich gesehen (Stufe I). Vielen fiel es nach der konkreten Fortsetzung jedoch schwer, genau zu beschreiben, wie sie diese Lösung gefunden hatten (Stufe II).

- Kombinierte Folgen

Einen zweiten Typ *Folge* stellen diejenigen dar, in denen *zwei Aspekte* im Bildungsgesetz zusammenarbeiten. Dies sind die Folgen:

- Folge der natürlichen Zahlen mit eingeschobener 10 zwischen jedem Glied
- Folge der Vielfachen von 3 mit eingeschobener 5
- Folge, deren Glieder von Glied zu Glied verdoppelt werden (beginnend bei drei), mit einer eingeschobenen 5
- Folge, deren Glieder zunächst zweimal um 1 erhöht werden (Zählzahlfolgenausschnitt); das nächste, jeweils dritte Glied wird durch Halbierung des vorhergehenden gefunden

Dadurch, dass im ersten Schuljahr die Folge der natürlichen Zahlen als Zählzahlfolge sehr bekannt ist, ist klar, dass die Kinder diese Folge (1, 10, 2, 10, 3, 10, ...) als die 'normale' Folge ansahen:

> „weil das hier, erst ne 1, dann ne 10, dann wieder ne 2, dann wieder ne 10, weil da immer, weil immer erst eine normale Zahl ist und dann wieder ne 10. dann wieder die 2, dann wieder ne 10, dann ne 3, dann wieder ne 10." (1./II)

60% der Kinder setzten diese Folge im nahe liegenden Muster fort. Die eingeschobene 10 wurde einerseits als Störfaktor empfunden:

> „da wurden die verwechselt." (1./IV)

Andererseits wurde die Folge auch in einer Art interpretiert, die das laute Vorlesen suggerierte:

18	S	also: so wie 1, 10 oder irgendwie so, so wie 13 und so.
19	I	ach so.
20	S	nur, dass man das jetzt 3 und 10 dahin schreibt.

(aus Interview 1./IX)

Diesem Verdacht ging auch das folgende Kind nach, indem es die Folge mit 15 und 16 fortsetzte (es schreibt 51 und 61). Es nannte die Zahlen über 10 'die älteren Zahlen':

12	S	1, 10, 2, 10, 3, 10, 4, 10 ... mh. 9'
13	I	warum die 9'
14	S	mhm (*ablehnend*), die 11 wieder.
15	I	kannst du beschreiben, welches Muster, welche Besonderheit die Zahlen haben, die da jetzt schon stehen ... 1, 10, 2, 10, 3, 10, 4, 10.
16	S	mhm.
17	I	wie geht das denn'
18	S	die, ehm, die älteren Zahlen so.
19	I	mhm, was meinst du mit die älteren Zahlen so'
20	S	ja, dass die höher sind als die kleinen, als die 7 oder die 9.
21	I	mhm.
22	S	und dann kommt jetzt ne 15 hin.
		(*schreibt 51, 61*)

(aus Interview 1./III)

Dieses Kind integrierte die 10 in die folgenden Glieder. Die Präsenz der Zählzahlfolge kann auch hier als Ursache dafür gesehen werden, dass das Kind keine Unterscheidung zwischen vier, zehn und vierzehn machte. Erstaunlicherweise irritierte auch die Abweichung von eins, zehn zu elf und zwei, zehn zu zwölf das Kind in seinem Gedankengang nicht. 13,3% der Kinder nutzten nur diesen Teilaspekt der Folge.

Nur ein Kind des 1. Schuljahres ignorierte die 10 komplett und begann die Zahlenfolge erneut bei 1. Dieses Ausblenden der 10 konnte auch durch die Aufforderung, die ganze Folge noch einmal vorzulesen, nicht durchbrochen werden (vgl. 1./V).

Die Folge mit den zwei Bildungsaspekten (3, 5, 6, 5, 9, 5 ...) wurde nur von 26,7% der Kinder im 2. Schuljahr im nahe liegenden Muster gelöst.

Ein Kind löste diese Aufgabe, während es eigentlich an der Folge 1 arbeitete und nur mit halbem Auge das Muster der zweiten Folge sehen konnte:

> „das hier weiß ich, glaube ich, schon." „das ist erst 3, dann 5, dann wieder 3 mehr, dann war 5, dann wieder 3 mehr." (2./XII)

Anderen Kinder fiel es wesentlich schwerer, die beiden Aspekte zu erkennen. 33,3% der Kinder beachteten nur Teilaspekte des Musters. Die wiederkehrende 5 konnte dazu verleiten, sie als Zuwachs zu nutzen:

> „...da ist am meisten immer die 5 dabei ... dann muss ich, glaube ich, immer 5 dazurechnen." (2./V)

> „17 kommt hierhin' " „weil 12 plus 5 ist 17." (2./XI)

Ein weiteres Problem bestand darin, dass einige Zweitklässler im Einmaleins noch nicht gefestigt genug waren:

1	I	lies mal vor, was da steht.
2	S	da steht ne 3, ne 5, ne 6, ne 5, ne 9, ne 5, ne 12, ne 5.
3	I	mhm.
4	S	dazwischen ist immer ne 5.
5	I	mhm.
6	S	ah! jetzt weiß ich! dazwischen ist dann immer ne 5 und ja weil 3 mal und 3 macht ja 6 und dazwischen ist immer ne 5.
7	I	mhm.
8	S	12 und 2 macht 24.
9	I	woher weißt du das, dass da jetzt 24 hinkommt'
10	S	ehm, weil ich hab ja hier gerechnet: 3 und 3 macht 6 und 3 mal 3 macht dann ja 9 und 4 mal 3 macht 12, 4 mal 3 macht 12 ... und 5 mal 3 macht 24 ... macht ... das kapier ich jetzt nicht. das war dann falsch.
11	I	du kannst es ja noch ändern, wenn du denkst, dass es nicht richtig ist. 5·3 wolltest du eigentlich hinschreiben' was da rauskommt'
12	S	ach, Quatsch, 5·3 ... 5·3 (*flüstert*). ich kann noch kein Malrechnen, wir sind ja noch nicht so weit.
13	I	mhm. wenn du weißt, dass 12 4·3 ist, wie kommst du denn dann 5·3' kannst du das dann weiterrechnen'
14	S	mhm (*ablehnend*) ich kapier das nicht.
15	I	du hast ja doch recht. ist doch gut, was du gesagt hast. weißt du, was wir machen können' wir brauchen das ja nicht auszurechnen. du schreibst jetzt einfach hin 5·3 mit dem Punkt dazwischen, dann weiß ich das ...
		S schreibt ·3 und dann 6·3 ...

(aus Interview 2./I)

Dadurch, dass das Mädchen in 2./I die nächsten Folgenglieder als Aufgaben hinschreiben konnte, löste sich das Problem hier jedoch.

Im dritten Schuljahr (Folge 3, 5, 6, 5, 12, 6, 24, 5 ...) war vermutlich die Wahl des ersten Folgengliedes mit 3 dafür verantwortlich, dass die Verdopplung des ersten Gliedes zum übernächsten Glied schwer erkannt wurde (13,3% Kategorie-1- Lösungen). Einige Kinder entdeckten Zahlen der 3er- oder der 6er-Reihe, aber sie erkannten nicht die Verdopplung. Manchmal wurden, wie schon in den Anfangsklassen, die eingeschobenen Fünfen als Zuwachs aufgenommen (z.B. in 3./XI) oder komplett ignoriert (3./XIII).

„hier ist immer 5, 5, 5 da muss man immer nur ne 5 dazwischen." (3./XII)

46,7% der Kinderlösungen wurden der Kategorie 2 zugeordnet.

60% der Kinder fanden im vierten Schuljahr eine Lösung für die kombinierte Folge (18, 19, 20, 10, 11, 12, 6, 7, 8 ...). Oft war festzuhalten, dass

zunächst die drei Folgenglieder, die sich jeweils um 1 erhöhen, beschrieben wurden und erst danach ein Zusammenhang zwischen diesen '3er-Blöcken' gesucht wurde, wie hier:

1	I	schwierig'
2	S	ja. ja, zum Beispiel jetzt wieder 1, 2, 3, oder so.
3	I	mhm, also 1, 2, 3 würdest du jetzt als nächstes hinschreiben'
4	S	oder, 3, 4, 5.
5	I	und warum'
6	S	das passt auch nicht wieder, weil 6, die Hälfte 3, dann, ne, mhm *(überlegend)*, aber wieder drei Zahlen hintereinander kommen also, wie 1, 2, 3 oder 5, 6, 7 *(ist sich sicher)*.
7	I	mhm. also müsste man immer die Zahl wissen, ne, die als erstes kommt'
8	S	mhm.
9	I	du hast ja drei Päckchen von drei aufeinanderfolgenden Zahlen 18, 19, 20, 10, 11, 12 und 6, 7, 8.
10	S	ja. ach, 3, 4, 5 würde ich hinschreiben.
11	I	mhm, dann schreib das hin.
12	S	ach ne, weil, mhm, *(mit fester Stimme)* 18, 19, 20, von 20 die Hälfte ist 10, 10, 11, 12, von 12 die Hälfte ist 6, von 6, also 3, 4, 5.
13	I	mhm, aber vorhin hast du doch was anderes gesagt, also von der letzten Zahl die Hälfte. von 20 die Hälfte ist 10, zwei weiterzählen, 11, 12 ...
14	S	wenn von der hinteren Zahl die Hälfte kommt, dann..., dann müsste hier auch von der hinteren, stimmt, also 4, 5, 6.

(aus Interview 4./III)

Besonders leicht machte es sich auch das Kind in 4./VIII nicht, die Zusammenhänge aufzudecken. Sie verfolgte eine sehr komplizierte Regel, die aber zum Ziel führte:

> „also hier ham se jetzt 18, 19, 20. dann ham se 8 weniger minus 18 gerechnet, also 18 minus 8, dann waren das 10 und dann müssen se ham se 10 minus 4 gerechnet, und das sind 6 und dann müssen se 6 minus 2 und dann 2 immer die Hälfte." (4./VIII)

Schließlich erkannte sie auch, dass die Halbierung sie vom letzten Folgenglied zum nächsten bringen konnte.

Diese Regel schien auch nicht so offensichtlich zu sein, deshalb wurde die Nachfrage verständlich:

> „das kapier ich jetzt nicht, ob das ne grundsätzliche Regel ist oder ob ich da jetzt einfach nur andere drei Zahlen weitersetzen soll' " (4./XI)

Dies entspricht der Vernachlässigung eines Teilaspektes im Bildungsgesetz, so wie es in den anderen Schuljahren auch schon aufzufinden war. 26,7% der Kinderantworten waren der Kategorie 2 zuzuordnen.

Ein Kind beschrieb, wie die Folge nach der vermeintlichen Grenze durch die Null fortzusetzen wäre:

„ach so, immer die Hälfte!" „bei der 5 gehts nicht so richtig, dass wären dann 2 1/2." (4./XV)

Obwohl es die Folge gedanklich fortzusetzen wusste, schrieb es keine weiteren Folgenglieder auf. Brüche werden im Grundschulunterricht oft nicht thematisiert, sodass dieses Kind vermutete, dass eine rationale Lösung nicht notiert werden dürfe ('gehts ja nicht').

- Zahlenfolge der figurierten Zahlen

Schließlich wurde in jedem Schuljahr die *Folge der figurierten Zahlen*, die als Punktmuster unter Typ B auftritt, auch als Zahlenfolge gegeben. Die Folgen gaben also die Quadratzahlen, die Dreieckszahlen, die Rechteckszahlen und erneut die Quadratzahlen (die den 'Treppenzahlen' entsprechen) wieder[44].

Ebenso, wie kein Erstklässler die Quadratzahlen im Punktmuster richtig fortsetzen konnte (vgl. Typ B), konnte auch kein Kind dieses Schuljahres die Zahlenfolge im nahe liegenden Muster weiterführen. Der Anteil der Lösungen, bei denen Teilaspekte beachtet wurden, nahm sogar noch weiter ab (von 66,7 auf 46,7%).

Sechs Kinder generalisierten den Zuwachs um +3, wobei nicht alle das explizit beschrieben. Eine mögliche Beschreibung lautete z.B.

„immer sind 3 dazugekommen." (1./XI).

Ein Kind, das keine Lösung anbot, erklärte

„weil das immer zwei mehr sind." (1./I)

und meinte vermutlich auch den Zuwachs um 3, da oft die Zahlenzwischenräume gezählt werden und nicht die Differenz (zwei Zahlen liegen zwischen 1 und 4). Dieses Phänomen wurde auch in englischen

---

[44] Ein Vergleich zwischen den jeweiligen Prozentzahlen der Zahlenfolge und der figurierten Zahl findet sich unter den Anmerkungen zu Typ B in diesem Kapitel.

Studien aufgezeigt (vgl. HARGREAVES et al. 1999, 73), stellt also keinen Einzelfall und keine Besonderheit deutscher Schülerinnen und Schüler dar.

Auch im folgenden Interview wurden vermutlich die Zahlen zwischen den Folgengliedern gezählt, wobei jedoch auch Zählfehler unterliefen:

2	S	puh. (*überlegt einige Zeit stumm*)
3	I	welche Zahlen stehen denn da'
4	S	1, 4, 9. (*rechnet mit den Fingern unter dem Tisch und schreibt dann die 13 auf*)
5	I	aha, warum kommt jetzt die 13.
6	S	da sind 2, da sind 3, da sind 4.

(aus Interview 1./XII)

Die Folge der Dreieckszahlen wurde im zweiten Schuljahr weitaus häufiger in der Zahlenfolge (53,3%) als im Punktmuster (20%) gelöst (vgl. Typ B).

Die Kinder waren auch bei der Zahlenfolge oft versucht, einen Zuwachs zu generalisieren (33,3%).

Eine Schülerin beschrieb zunächst die einzelnen Zuwächse, generalisierte dann aber wieder einen Zuwachs, so wie sie es bei der Punktmusterdarstellung auch getan hatte (vgl. Abb. 3.49).

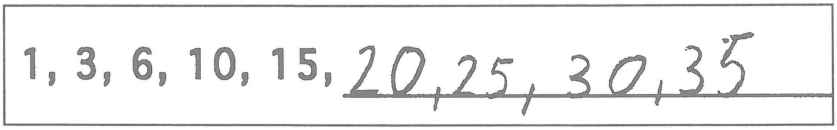


Abb. 3.49

13	S	und wieder 2 und hier sind 3 und hier sind 4 und da sind 5
14	I	und wie geht es wohl weiter'
15	S	die letzte Zahl da muss ich immer weiterrechnen. also immer 5 wei ... das sind 20, 25, 30, 35 ...
16	I	ja, Dankeschön. (*lacht*)
17	S	das fällt mir was auf, das ist das Gleiche eigentlich, da rechne ich auch hier 5 bei (*zeigt auf die zweite Zahlenfolge*).

(aus Interview 2./V)

Eine andere Schülerin beobachtete, dass der Zuwachs zwischen 1 und 3 genau eine Zahl auslässt. Deshalb folgte für sie nach der 15 die 17. Dann versuchte sie, die Verdopplung von 3 zur 6 zu übertragen, und verdoppelte 17 zu 34. Sie nutzte also das vorgegebene Muster aus und wiederholte die erkannten Aufbauprinzipien (vgl. Abb. 3.50).

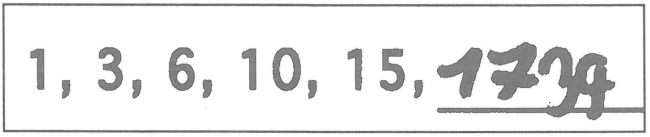


Abb. 3.50

22	S	7, 17 ... (*ergänzt 17 und flüstert und möchte den nun errechneten Wert bei F2 eintragen*)
23	I	ganz unten bist du (*zeigt auf F3*).
24	S	oh (*trägt 34 ein*).
25	I	mhm, was hast du jetzt gerechnet'
26	S	also, mhm. ungefähr 17 plus mhmmm sieb ... 17. 17 plus 17, glaub ich.
27	I	mhm. das reicht auch, glaube ich, zwei Zahlen. wieso hast du jetzt 17 plus 17 gerechnet'
28	S	weil da auch steht, mhm. 6, das Doppelt, immer das Doppelte nehmen ....
29	I	ach so.
30	S	... von denen.

(aus Interview 2./X)

Manchmal jedoch bemerkten die Kinder während der Arbeit plötzlich die Zusammenhänge ('Aha-Erlebnis', vgl. Kap. 1 und 2):

21	S	wenn man noch 2 dazurechnet. wenn man bei der 3 ist und man tut dann 2 dazu, dann ist man ja bei der 5 und nicht bei der 6.
22	I	jaaa...
23	S	ich habs kapiert!
24	I	ja, prima.
25	S	1 und 1 und 2 tu ich dazu, dann tu ich wieder 3 dazu, dann tu ich wieder 4 dazu, dann tu ich 5 dazu, 5 und dann tu ich 6 dazu, und dann tu ich 7 dazu, dann tu ich 8 dazu, dann tu ich 9 dazu, dann tu ich 10 dazu.

(aus Interview 2./I)

Ein Schüler vermutete eine multiplikative Verknüpfung. Der Hinweis, es mit 'Plus' zu versuchen, nahm er zwar auf, aber er hatte Schwierigkeiten, die Differenzen der Folgenglieder zu bestimmen. Auch in den vorhergehenden Folgen war schon deutlich geworden, dass er die 'ausgelassenen Zahlen' der Zahlreihe und nicht die Differenz angab. Seine Antworten wirkten strukturiert, und es fiel beim Zuhören schwer, eine Systematik zu erkennen. Dennoch gelang es ihm plötzlich, ein Muster zu entdecken ('Aha-Erlebnis'). Sobald er das Muster sah, ergänzte er souverän und selbstständig die weiteren Folgenglieder.

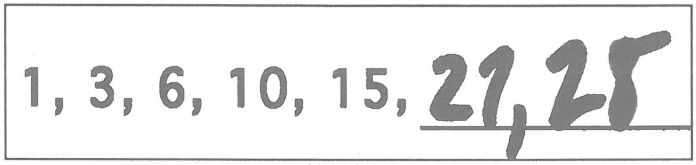


Abb. 3.51

8	S	1, 3, ... 6' 3 mal die 1 ... 2 mal die se ... 2 mal die 3 gleich 6 ... nein, dann kommts immer da nicht hin.
9	I	dann kommt es da nicht hin ... du hast vermutet, es hätte was mit Mal zu tun ...
10	S	mhm.
11	I	ja, hätte sein können. sollen wir es mal wieder mit Plus probieren' was man plusrechnen muss'
12	S	ok. 1 plus 3 = nee, 4 ... nee, 4.
13	I	wie viel wird denn von da bis da plus gerechnet' (*zeigt 1 und 3*)
14	S	1. von da bis da ... 2
15	I	und von der nächsten'
16	S	2.
17	I	von der 3 bis zur 6' (*zeigt*)
18	S	3 bis zur 6, 4 ... 3!
19	I	und von der 6 bis zur 10'
20	S	3, nee 4, 4 ... und dann wieder, hier 5 und dann immer weiter und jetzt kommt ...da müsste dann jetzt 6, 21 hinkommen.
21	I	und die nächste'
22	S	21 plus 7 ... 28.

(aus Interview 2./XV)

Ein Kind nutzte die gegebenen Zahlen als Zuwächse für die nächsten Folgenglieder (+1, +3, +6, +10; vgl. 2./XIV) und ein anderes Kind notiert nur die Zuwächse und keine Fortsetzung (2./III).

Im 3. Schuljahr waren die Rechteckszahlen in der Zahlenfolge (60%) öfter mit Antworten der Kategorie 1 gelöst worden als im Punktmuster (53,3%, vgl. Typ B). Oft wurden nur die Zuwächse notiert, z.B. die 8 als letzter Zuwachs, oder es wurde ein bestimmter Zuwachs auch generalisiert (40% Kategorie-2- Antworten). Das Kind im Interview 3./IX erkannte die Zuwächse einzeln nacheinander:

„es sind immer 2 mehr."

„nee, das sind 4 mehr und das sind 8 mehr." (3./IX)

Dennoch wurde hier wieder nur die 8 notiert. Das Kind in 3./XV ging noch einen Schritt weiter und erkannte

„weil das immer 4 und dann 6 und dann 8 und dann 10." (3./XV).

Die Beschreibungen dieser Kinder wurden alle der Stufe IIa zugeordnet. Die Kinder trennten sich in den Beschreibungen nicht von den konkreten Zahlwerten, sondern arbeiteten diese Werte in die Beschreibungen ein. Auch das Kind im folgenden Interview beschrieb erst die konkreten Zuwächse:

16	S	setze fort. 3, 3 ... (*flüstert*)
17	I	lies mal vor.
18	S	... und 12. plus 4, ...
19	I	ja, ist doch super, was du grad gesagt hast. du hast grad da geguckt, ne' (*zeigt 2. Folge*). sag mal noch mal laut, was du da rausgefunden hast.
20	S	mh, bei der 2 muss man dann erst mal zur 4 äh, bis zur 6 und bei der 6 wieder plus 6 und bei der 12 plus 8.
21	I	und wie geht es wohl weiter'
22	S	20 plus 10 ist 30. *(schreibt 30 auf)* ... plus 12 sind 42 *(schreibt 42 auf)*
23	I	das reicht auch, wenn du zwei Zahlen weiter machst.
24	S	14, ehm, *(schreibt nächste Zahl auf)* 14.
25	I	prima, wie heißt da die Regel'
26	S	man muss, man muss, also fängt mit 4 an, man muss immer 2 mehr, nee.
27	I	mhm.
28	S	nee, oder, ja doch, man muss immer 2 mehr, bis zur 20, dann muss man immer 2 mehr rechnen.

(aus Interview 3./II)

In der Zeile 28 wird jedoch deutlich, dass eine allgemeinere Beschreibung (Stufe IIb) gefunden wird, da hier erkannt wird, dass die Zuwächse immer um 2 anwachsen.

Nur im vierten Schuljahr zeigte ein einziges Kind, dass es wahrscheinlich den Zusammenhang zwischen dem Punktmuster (vgl. Typ B) und der Folge der 'Treppenzahlen' (Sonderform der Quadratzahlen) erkannte

> „eigentlich wie das andere Blatt mit den Punkten, da kommt immer ..." (4./X).

Leider irrte es sich jedoch dann mit der weiteren Fortführung der Folge. Der Transfer gelang nicht glatt.

66,7% setzten diese Folge mit Kategorie-1-Lösungen fort. Die Kinder beschrieben oft zunächst einzelne Zuwächse:

> „ach so. hier warens 3, 5, 7, 9. da sind immer zwei mehr." (4./I)
>
> „hier sind 3 Unterschied dazwischen ... immer zwei Zahlen dazu bei den Unterschied" „der Unterschied vermehrt sich immer um 2." (4./XV)

In anderen Fällen generalisierten die Kinder einen Zuwachs (4./VI und 4./XIII) (20% der Anworten beachteten nur Teilaspekte) oder begannen die

Zuwachsfolge wieder von vorn (4./XIV und 4./V). In der Beschreibung von 4./XV wurde der Sprung von Stufe IIa zu IIb insofern vollzogen, als im letzten Teil der Beschreibung nicht die Zuwächse selbst benannt wurden, sondern der Zuwachs der Zuwächse, der konstant bei 2 lag ('immer zwei Zahlen dazu bei den Unterschied' in Interview 4./XV).

Zahlenmauern

Die Zahlenmauern sind eng verwandt mit den Zahlenfolgen, jedoch komplexer. Eine Folge von Zahlenmauern ermöglicht den Kindern unterschiedliche Zugänge zur Lösungsfindung. Die Basissteine bilden wieder eine Art Folge, sodass die Ergebnisse der Reaktionen auf die Folgen hier wieder neu auftreten. Es war jedoch sehr interessant zu beobachten, dass viele Kinder gar nicht von den Basissteinen aus argumentierten, sondern über die Folge der Zielsteine und dann u.U. die weitere Mauer unabhängig von den gegebenen Mauern ausfüllten. Diese Besonderheit wird im Weiteren genauer dargestellt.

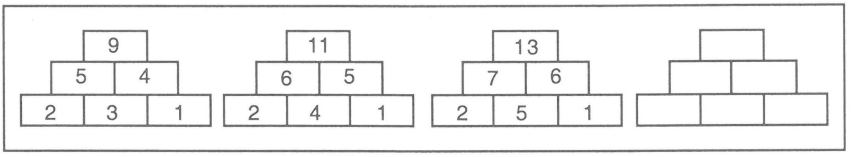


Abb. 3.52

Die Zusammenhänge der Zielsteinfolge als Folge der ungeraden Zahlen wurden im 1. Schuljahr (vgl. Abb. 3.52) wie folgt beschrieben:

> „15 kommt da oben hin." ... „weil hier fehlt die 10, hier fehlt die 12, hier fehlt die 14." (I./XI)

21	S	und hier muss jetzt die 7 hin, weil da die 6 ist und oben die 3, 9, 13, ach ne 11 und 13 und dann muss hier die 15.
22	I	aha, wie kommt denn das zustande, dass jetzt oben ne 15 hinkommt und keine 14'
23	S	ehm, weil hier ist ne 9 ... und das sind die ungeraden Zahlen. wir haben nämlich die 2 als Hauszahl und auf der anderen Seite ist jetzt die 11 oder ne 1 oder ne 5.

(aus Interview 1./XIII)

Während in 1./XI die Folge der ungeraden Zahlen als eine Abart der Folge der natürlichen Zahlen Glied für Glied definiert wurde ('hier fehlt die 10, hier fehlt die 12 ...'), gelang es dem Kind in 1./XIII, die Folge als die 'ungeraden

Zahlen' zu beschreiben. Natürlich haben beide Kinder das Aufbauprinzip richtig erkannt; insgesamt ergänzten 46,7% der Kinder die nächste Mauer nahe liegend. Der Unterschied bestand vielmehr darin, dass das Kind in 1./XIII über einen mathematischen Ausdruck verfügen konnte, der es ihm erleichterte, Beschreibungen zu finden, während in 1./XI mit wesentlich mehr Aufwand eine Beschreibung formuliert werden musste.

Die Kinder verwendeten in den Beschreibungen oft Ortsbezeichnungen unspezifischer ('hier') und spezifischer Art ('in der Mitte'):

„vielleicht das hier immer eine 2 ist' " „immer eine weiter nehmen." (mittlere Basissteine) „hier an den Seiten sind immer die 1." (1./I) oder

„hier sind immer so 2er." „und hier immer mehr in der Mitte." (1./XII).

Das Kind in dem folgenden Interview erkannte zwar das Muster des linken Basissteins (Zeile 11), ergänzte aber die weiteren Steine nach der Folge der natürlichen Zahlen:

	S liest Mauern komplett vor, nicht nur die unteren Reihen	
10	I	mhm.
11	S	immer ersten ist 2.
12	I	ja, super.
13	S	am Anfang (*trägt ein*).
14	I	und gibt es noch was'
15	S	da ist ne 3, da ist ne 4 und da ist ne 5. 3, 4, 5.
16	I	und was kommt dann jetzt wohl'
17	S	3, die 3'
18	I	was kommt als nächstes, was meinst du'
19	S	die 3 (*trägt die 3 ein*).
20	I	und ganz hinten'
21	S	da nehm ich die 4.
22	I	warum die 4'
23	S	weil das dann 1, 2, 3 ... nee, 2, 3, 4.

(aus Interview 1./XV)

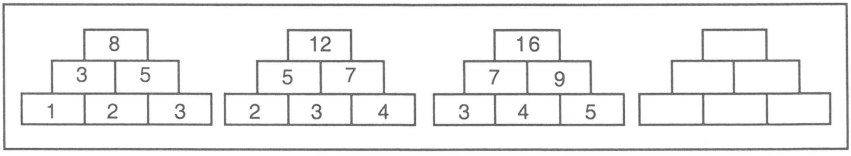


Abb. 3.53

Auch im zweiten Schuljahr (vgl. Abb. 3.53) wurde häufig über den Zielstein argumentiert:

„da rechnet man immer in 4er Schritten." (2./I) (Stufe IIb)

Wenn das Muster dann schließlich komplett erkannt wurde und 'aufging', konnte man die Freude darüber konkret miterleben:

„hier oben schreib ich erst mal hin." (2./XII)

Das Kind begann mit der Zielsteinfolge, ging dann in die mittlere Reihe und erkannte schließlich das Muster der Basissteine:

„4, 5, 6" *(strahlt)* (2./XII)

Auch wenn hier kein weiterer Kommentar darüber erfolgte, warum das Kind sich über das Muster freute, konnte deutlich werden, dass die 'Ordnung' und die 'Passung', die die letzten Basissteine bewirken, erkannt wurden und sich ein Gefühl für das Zahlenmuster bildete.

Das Kind in 2./III erkannte die Zahlenfolgenabschnitte in den Mauern:

„ich hab hier geguckt: 1, 2, 3, dann hier wieder 2, 3, 4. 3, 4, 5 und 4, 5, 6. und dann hier das Gleiche, überall das Gleiche." (2./III)

Demgegenüber nutzte das Kind in 2./IX eine andere Strategie. Es ergänzte jeden Basisstein separat, indem die Augen immer wieder über die Basissteine der gegebenen Mauern wanderten:

„dann kommt jetzt die 4 ... und hier die 5 und da die 6." (2./IX)

Die vierte Mauer wurde von 53,3% der Zweitklässler nahe liegend ergänzt, während 26,7% einen Teilaspekt beachteten. So wurde in 2./IV und 2./IV zwar erkannt, dass der Zielstein eine 20 trägt, aber das weitere Muster nicht beachtet:

„da muss 20 rauskommen." (2./XIV)

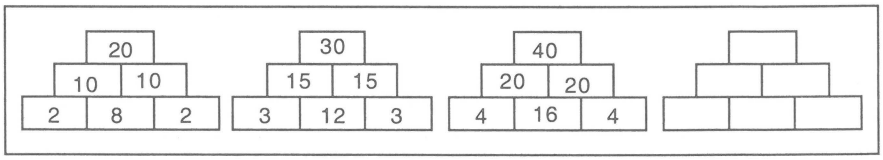


Abb. 3.54

Im dritten Schuljahr (vgl. Abb. 3.54) war eindeutig das Finden der Lösung vom Zielstein aus favorisiert. Dies wurde sicherlich durch die glatten

Zehnerzahlen begünstigt, die im Zielstein auftraten. Ein typisches Vorgehen vom Zielstein aus wurde in 3./V kommentiert:

> „einfach erst mal 50 genommen ... und dann hab ich die 25 durch 3 geteilt." (3./V)

Vermutlich war hier gemeint, dass beide Steine, die mit 25 belegt sind, auf die drei Basissteine verteilt werden müssen.

Einige Kinder beachteten auch in diesem Schuljahr wieder nicht die Zusammenhänge in den Basissteinen, sondern waren zufrieden, wenn sie eine Mauer mit dem Zielstein 50 gefunden hatten. Dadurch ergab sich der hohe Prozentsatz von Lösungen, die nur einen Teilaspekt - eben den Zielstein - beachteten (46,7%):

> „erst mal oben in 10er Schritten." (3./II)

> „weil hier 20, dann 30, 40 und 50" (3./III)

Ein Kind begann das Ausfüllen der Mauer vom zweiten Stockwerk ausgehend und kommentierte:

> „hier kommt 25 hin, weil 10, 15, 20, 25" (3./XIII)

Der Prozentsatz der Kategorie-1-Lösungen, die die gesamte Mauer in Zusammenhang zum Muster bearbeiteten, lag bei 53,3%.

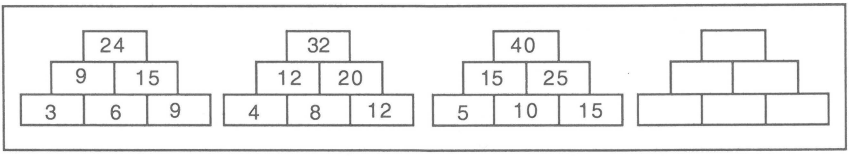


Abb. 3.55

Ob die Kinder die Zahlenmauer vom Zielstein aus ergänzen, hängt von der Zahlenfolge im Zielstein ab; dies ließ sich dadurch bestätigen, dass die Zahlen für diese Art des Vorgehens im vierten Schuljahr (vgl. Abb. 3.55) wieder rückläufig waren. Die Zielsteine zeigten keine glatten Zehnerzahlen - wie die im dritten Schuljahr - an, und ihre Werte bewegten sich oberhalb von 20. Bei Zahlwerten unterhalb von 20 war die Vertrautheit der Kinder mit diesen Zahlen größer, und Zusammenhänge wurden eher erkannt und genutzt. Nur ein Drittel der Kinder nahm den Weg über die Zielsteinfolge:

> „und oben, da kommt 48 raus." „weil, hier oben sind immer 8 mehr." (4./II)

„dass da immer ein 8ter Unterschied ist." (4./XIII)

Wenn die Folge in den Zielsteinen erkannt war, wurde oft auch die Folge der Steine der mittleren Ebene und die der Basissteine beschrieben:

„da is hier auch wie so ne Reihe wie vorhin, hier 24. der Unterschied ist 8 und hier wieder 8. das ist also die 8er-Reihe: 24, 32, 40, 48. und hier kommt immer 3 mehr bei der ersten Zahl: 3, 3 ach Quatsch, 9 plus 3 sind 12 und 12 plu... plus 3 sind 15, und 15 plus 3 sind 18. und hier sind immer 5 mehr: 15, 20, 25, 30 und deshalb kommt das auch hin und unten hier sind 1 mehr, da sind 2 mehr und da sind 3 mehr, 4, 5, 6 und hier sind 6, 8, 10, 12, hier 9, 12, 15, 18." (4./VII)

In diesem Kommentar wird das Gefühl dafür deutlich, dass die Folgen der Steine je Stockwerk wieder als Folge ('so ne Reihe wie vorhin') betrachtet werden können.

Natürlich waren Kinder im vierten Schuljahr eloquenter, sodass sie Zusammenhänge kürzer und präziser darstellen konnten. Die folgenden Beschreibungen wiesen auf die multiplikativen Zusammenhänge hin:

„also hier sind einfach 5, 1 mal 5 sind 5, 2 mal 5 sind 10, 3 mal 5 sind 15. das ist hier bei 4 genauso und bei 3 ebenfalls." (4./IV)

„weil das 6, 2 mal 6 sind 12 und 3 mal 6 sind 18. und weil das hier auch geht: 2 mal 3 ist 6 und 3 mal 3 sind 9." (4./X)

Diese Beschreibungen bemühten additive Zuwächse:

„ja, weil 3, 6 und 9 sind immer plus 3 muss ich rechnen. 3 plus 3 sind 6, 6 plus 3 sind 9. hier ist das 4 plus 4 sind 8 und 8 plus 4 sind 12, 5 plus 5 sind 10 und 10 plus 5 sind 15 dann muss ich das mit 6 machen." (4./VIII)

„hier vorne immer einer mehr, also 3, 4, 5, 6. hier sind immer zwei mehr, 6, 8, 10, 12. bei der letzten sind es immer drei mehr, 9, 12, 15, 18." (4./IX)

In einer Beschreibung wurde der Zusammenhang zwischen der Addition und der Mulitiplikation explizit aufgezeigt ('plus 3' und '3er-Reihe'):

„weil hier unten, da sind immer plus 3, also das ist die 3er-Reihe, aus der 3er-Reihe drei Zahlen, hier ist es bei der 4 genauso und bei der 5 ist es auch so. dann müsste das hier eigentlich mit der 6 so sein. und

hier da braucht man ja einfach nur zusammenrechnen bei den oberen Zahlen." (4./V)

Diese Beschreibungen gelangen jedoch nur, wenn das Muster komplett durchschaut wurde. Die Beschreibung von 4./IV ist eindeutig der Stufe IIb zuzuordnen, da die Beziehungen zwischen den Basissteinen einer Mauer mit dem multiplikativem Aufbauprinzip explizit in Verbindung gebracht wurden. Obwohl oft anhand des Beispiels der letzten, vorgegebenen Mauer (Mauer 4) unter Zuhilfenahme der konkreten Zahlen argumentiert wurde, gelang in dem zweiten Teil der Beschreibung eine Verallgemeinerung ('hier bei 4 genauso'). Dieser Teil zeigt an: Das Prinzip wurde mehr im Sinne eines allgemeinen Zusammenhangs erkannt, der sich algebraisch als 1x, 2x, 3x für x im ersten Basisstein darstellen lassen würde. Die Beschreibungen in 4./IX und 4./V deuten durch die Verwendung des Wortes 'immer' ebenfalls an, dass allgemeingültige Beziehungen beschrieben werden (Stufe IIb). Insgesamt setzten 80% die Mauernfolge mit der nahe liegenden nächsten Mauer fort.

Kombinatorische Mauern

Dieser Aufgabentyp wurde nur in den höheren Schuljahren eingesetzt, da eine größere Übersicht über alle Mauern erforderlich war, um die nahe liegende Lösung zu finden.

Etwa zwei Drittel (66,7 bzw. 60%) der Dritt- und Viertklässler konnten die fehlende *Mauer* finden, die in den Basissteinen kombinatorische Veränderungen von 3, 4, 5 bzw. 31, 41, 51 trägt. Der Anteil der Kinder, die von den Zielsteinen ausgingen, ist ebenso hoch wie der Anteil der Kinder, die von den Basissteinen aus vorgingen.

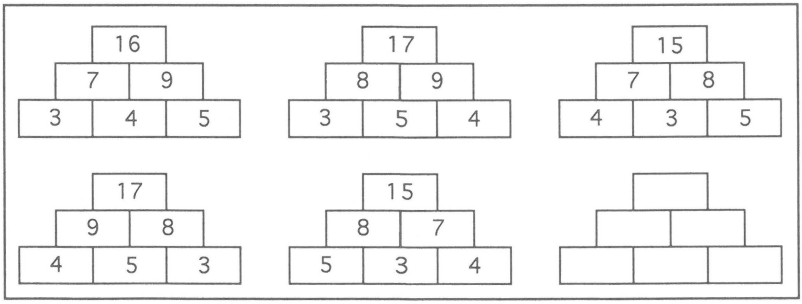


Abb. 3.56

In den Zielsteinen war auffällig, dass jeder Wert doppelt vorkommt (vgl. Abb. 3.56):

„das sind schon mal Zwillinge" (3./VII).

Obwohl dies oft erkannt wurde, wurde manchmal jedoch eine andere oder eine bereits in der Aufgabe notierte Basissteinfolge ergänzt (vgl. 3./VII). 26,7% der Drittklässler und 33,3% der Viertklässler gaben eine in Teilaspekten nahe liegende Lösung an.

Die Beschreibungen für die Permutation der Basissteine waren im dritten Schuljahr umgangssprachlich:

„umdrehen"(3./I)

„dann muss ich das andersrum schreiben." (3.X)

„die haben immer die gleichen Zahlen." (...) „die allermöglichsten Zahlen rausgemacht." (3./XI)

In dem letzten Kommentar waren alle Kombinationen gemeint, die mit den drei Basissteinen möglich sind.

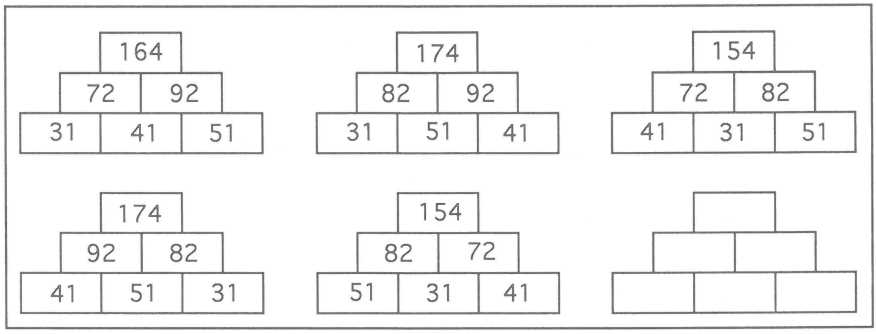


Abb. 3.57

Im vierten Schuljahr waren die Beschreibungen zu den kombinatorischen Mauern (vgl. Abb. 3.57) deutlich handlungsorientiert, als ob die unteren Steine wie bei einem Puzzle verschoben werden könnten (Stufe IIa):

„da oben waren 41, 31, 51. da hab ich da die 31 hingesetzt, weil sie haben die 31 dagelassen. und da haben sie sie eins weitergeschoben. da hab ich sie auch eins weitergeschoben, und die 41, wie war das' die war da in der Mitte, da ganz hinten, da ganz vorne. dann war da wieder

ganz vorne, da ganz hinten, dann habe ich gedacht, dann ist sie da wieder in der Mitte und die 51, die war halt noch über." (4./I)

„mhm, hier fällt mir noch etwas auf 31, 41, 51, hier ist das nur durcheinandergewirbelt 41, 51, 31, überall steht das so. dann müsste vielleicht 41 in der Mitte und 31 und 51, dann müsste ich hier noch 31 und 51." (4./III)

Eine komplette Analyse, die sowohl den Zielstein als auch die Basissteine beachtet, sah in einem vierten Schuljahr so aus:

7	I	wie hast du das gemacht'
8	S	also, die 41, die stand hier ja in der Mitte, weil, erstmal hab ich hier oben geguckt. von 154 sind 2 da, da eine und da eine und ganz unten in der Mitte da steht ne 31 und da steht ne 31, und die Zahlen daneben sind nur umgetauscht. bei 174 ist es auch so, und dann war die 164, da war nur eine von da, dann musste das hier so sein.
9	I	und wie hast du die unteren Zahlen gefunden'
10	S	die unteren Zahlen, ja also die 41 davon, die hab ich dann in die Mitte geschrieben, und die beiden, die 51 und die 31 hab ich hier einfach vertauscht.

(aus Interview 4./V)

Zahl&Partnerzahl

Das Aufgabenformat *Zahl&Partnerzahl* war für alle Kinder neu und ungewohnt. Im dritten Schuljahr wurde eine langsame Einführung durch eine rein additive Verknüpfung (f(x)=x+15) erreicht. In der zweiten Aufgabe sollte dann die Verknüpfung f(x)=2x+1 (Fastverdoppelung) erkannt werden. Im vierten Schuljahr lagen nur zwei kombinierte Verknüpfungen (f(x)=7x+1 und f(x)=10x-5) vor.

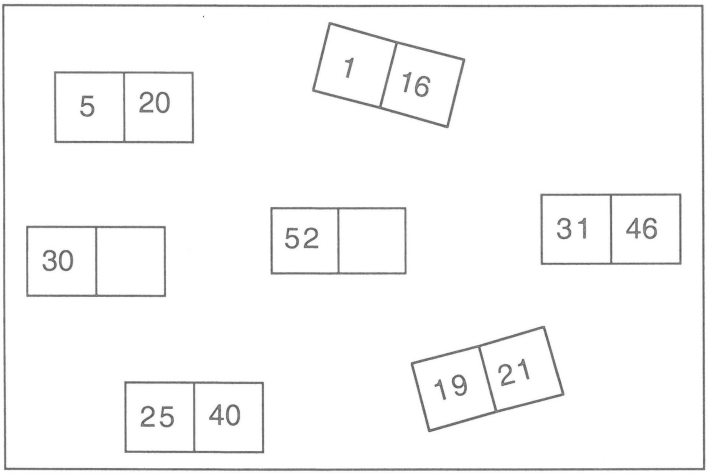


Abb. 3.58

Es zeigte sich, dass die additive Verknüpfung (f(x)=x+15) sehr leicht zu durchschauen war (vgl. Abb. 3.58). 80% der Kinder im 3. Schuljahr ermittelten sie richtig. Die funktionale Beziehung wurde oft von denjenigen Kindern nicht erkannt, die große Probleme beim Ermitteln der Differenzen der vorgegebenen Zahlenpaare hatten. Die Rechenfehler führten hier oft zu unterschiedlichen Lösungen, sodass die konstante Differenz von 15 nicht erkannt werden konnte. 20% der Antworten mussten somit der Kategorie 3 zugeordnet werden. Ein typisches Vorgehen spiegelt sich in diesem Interview wider:

3	I	genau, jede Zahl hat eine Partnerzahl, nur manche haben ihren Partner verloren, da musst du jetzt mal gucken, welcher Partner dazugehört. aber da steckt eine **einzige** Regel dahinter. welche Zahlen gehören denn schon zusammen, guck mal'
4	S	die 5 und die 20.
5	I	mhm.
6	S	die 25 und die 40, die 6 und die 21, die 1 und die 16 und die 31 und 46.
7	I	mhm.
8	S	immer 15, ...45. (*trägt die fehlenden Partnerzahlen ein*)
9	I	mhm.
10	S	67.
11	I	wie heißt also die Regel'
12	S	immer 15. (*schreibt die Regel auf*)

(aus Interview 3./I)

Scheinbar las dieser Interviewte die Zahlenpaare nur laut vor (Zeile 6), aber offensichtlich arbeitete es in ihm, da die Antwort, die das Muster beschreibt,

auch ohne weiteres Nachfragen der Interviewerin sofort gegeben wurde (Zeile 8). Woher diese Erkenntnis kam, blieb leider im Dunkeln.

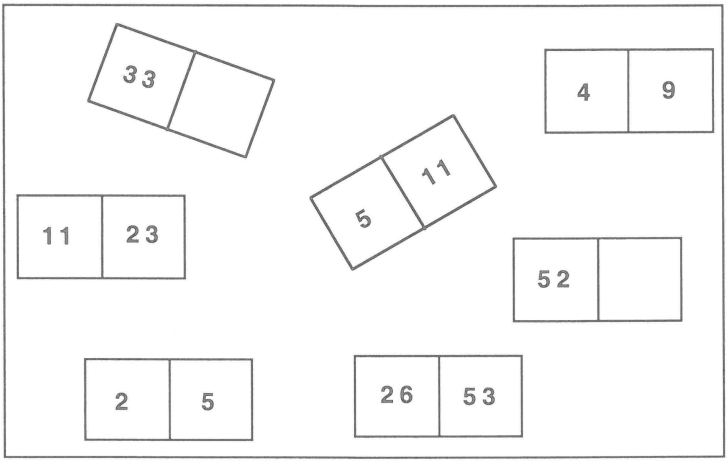


Abb. 3.59

Größer wurden die Schwierigkeiten (13,3% nahe liegende Lösungen) bei der Verknüpfung von zwei Operationen (vgl. Abb. 3.59):

„Wie soll das jetzt funktionieren?" (3./IV)

Das lag zumeist daran, dass die einzelnen Unterschiede zwischen einer Zahl und ihrem Partner errechnet wurden und dann kein Zusammenhang gefunden werden konnte, der die unterschiedlichen Differenzen in Beziehung gebracht hätte. 6,7% erkannten Teilaspekte, 26,7% boten unzusammenhängende Lösungen an und 53,3% gaben keine Lösung. Einigen gelang es jedoch, über die Differenzen, die Lösung zu ermitteln:

1	S	hier sind nur 3 mehr, da sind 6 mehr, hier sind 5 mehr ...
	S rechnet still weiter	
2	S	... da sind, ehm, 27 mehr.
3	I	mhm.
4	S	hier sind 12 mehr.
5	I	mhm.
6	S	das sind immer einer mehr von denen.
	S ergänzt die fehlenden Partner	
7	I	du hast grad gesagt, da ist einer mehr von denen. kannst du das, kannst du das noch mal genau erklären'
8	S	hier sind ja z.B. 2.
9	I	ja.
10	S	dann sind in der Mitte noch 3 bis zur 5.
11	I	ach so.
12	S	... und 3 kommt ja nach 2.

(aus Interview 3./VI)

Auffällig war hier wieder einmal der ungewohnte Sprachgebrauch. Das Kind rang nach einer Beschreibung dafür, dass der erste Partner einmal und noch eine Eins zusätzlich addiert wird. In der Alltagssprache ist dies kaum unmissverständlich möglich. Erst die Algebra erlaubt es zu zeigen, dass der Partner f(x) sich aus x+(x+1) oder 2x+1 ermitteln lässt. Der Ausdruck 'immer einer mehr von denen' nutzt die Beschreibung 'von denen' für x und 'einer mehr' für die Addition von Eins. So gelang es diesem Kind, im Kontext verständlich und allgemeingültig das Muster zu beschreiben (Stufe II b).

Ein anderer Drittklässler (vgl. 3./XII) brauchte für die Lösung dieser Aufgabe die längste Zeit (bezogen auf die Lösungszeiten für alle anderen Aufgaben), bis er schließlich erkannte:

> „ach, immer 26 plus 26 und dann plus 1." ... „immer der Unterschied und dann einen mehr." (3.(XII) (Stufe IIb).

Dennoch benannte er diese Aufgabe nachher als seine Lieblingsaufgabe:

> „die is am besten!" (3./XII)

Die Anstrengung bei der Lösung ging mit einer um so größeren Freude einher, wenn sich der 'Knoten im Kopf' löste.

Im vierten Schuljahr waren die Kombinationen der Form f(x)=7x+1 und f(x)=10x-5 kein großes Problem mehr (60,0% bzw. 46,7% nahe liegende Lösungen).

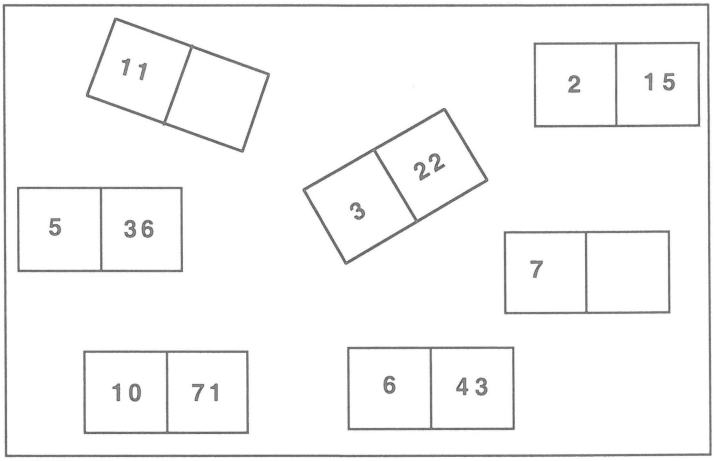


Abb. 3.60

Die besseren Vorkenntnisse im Einmaleins unterstützten die Lösungswahrscheinlichkeit hier sicher, sodass schnell erkannt werden konnte, dass die Zahlenpaare (vgl. Abb. 3.60) mit den Vielfachen der Zahl in Beziehung stehen:

„ungefähr, knapp daneben, einen oft." (4./XIV)

Dieses Kind bemerkte erst bei einem Paar und dann bei mehreren anderen, dass es sich um eine multiplikative Verknüpfung handeln müsse. Das 'oft' zeigt an, es war noch nicht sicher, ob es mit seiner Vermutung wirklich alle Zahl&Partnerzahl - Paare beschreiben könne. Ein Lösungsansatz musste auch nicht immer sofort zum Ziel führen, da sehr oft in diesem Schuljahr zunächst die einzelnen Unterschiede betrachtet wurden:

„...dass es hier verschiedene Unterschiede gibt." (4./XI)

Oft wurde dann wieder die Plötzlichkeit in der Erkenntnis deutlich:

„ach, jetzt weiß ich, das ist alles mal 7 genommen und dann plus 1 gerechnet." (4./XI)

In diesem Interview wurde sogar begründet, warum die Lösung gefunden wurde:

„weil ich hab mich früher mal für Mal interessiert." (4./XI)

Er berichtete hier also von einer ungeahnten Motivation für diese Aufgabe. Nebenbei bestätigte er die These, dass höhere Rechenkompetenzen die

Suche von Mustern erleichtern können und umgekehrt. Dadurch dass er die 1x1-Reihen offensichtlich gut beherrschte, konnte er sehr schnell die passende Reihe eruieren. In demselben Interview wurde das 1x1 auch für die zweite Zahl&Partnerzahl-Aufgabe benutzt, denn das Kind ging das

> „halbe 1x1 durch, was da stimmen könnte." (...) „ja! stimmt! das ist die 10erReihe minus 5." (4./XI).

Ungewöhnlich und dennoch kein Einzelfall war der Lösungsansatz, der im nächsten Zitat verfolgt werden kann:

> „weil, ich hab jetzt erstmal geguckt. die 2 und 3 und dann hab ich ausgerechnet 15 plus wie viel sind 22' das waren 7. und dann hab ich hier bei 5 und 6 auch noch mal geguckt, das waren auch 7. dann hab ich hier bei der 10, 71 plus 7 gerechnet, dann hab ich das bei der 11 als Partner hingeschrieben und bei der 6 hab ich dann 43 plus 7 gerechnet, sind 50, dann hab ich das hier bei der 7 als Partner hingeschrieben." (4./V)

Die Zahlenpaare wurden in eine operative Reihe gebracht, die die Ermittlung der fehlenden Partner ermöglicht.

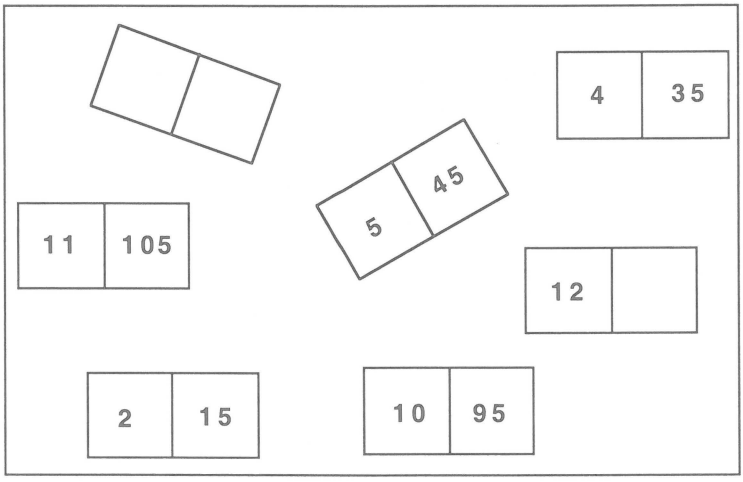


Abb. 3.61

Ein ähnliches Vorgehen zur zweiten Aufgabe (vgl. Abb. 3.61) fand sich in diesem Fall:

1	I	was hast du dir gedacht, dass diese Zahlen jetzt dahin kommen'
2	S	ich hab, zuerst hab, dacht ich hier beim plus gibts wieder den Unterschied, aber dann hab ich mir hier hinten das angeschaut, dann da, wenn man jetzt noch ne 3 hätte, von da sinds 20 mehr, und wenn man jetzt ne 3 nimmt, dann hätte man 10, 10 mehr. dann immer, weil hinten bei dem Ergebnis sind immer 10 mehr. wenn man jetzt die 3 hätte, dann wären das 25, 35, 45 dann bei der 6 wärns dann 55, bei der 7 sinds 65, bei der 8 wärns 75, bei der 9 wärns 85, bei der 10 wärns 95, bei der 11 sinds 105, und bei der 12 sinds 115.

(aus Interview 4./VII)

Ein anderes Kind versuchte (wiederum bei der ersten Aufgabe; vgl. Abb. 3.60), zunächst zu addieren, dann zu multiplizieren, bis es über die Division die Lösung ermittelte:

15	S	vielleicht, wenn man die nach Reihe liest' nee *(leise)*. *(Pause)* eigentlich fällt mir dazu nichts ein.
16	I	da gibt es ja vielleicht noch andere Möglichkeiten, du hast die beiden Zahlen addiert und multipliziert.
17	S	teilt'
18	I	könnte man auch mal probieren.
19	S	da würde 7 Rest 1 bleiben.
20	I	mhm.
21	S	da würde 7 Rest 1 bleiben. *(schmunzelt)* da bleibt aber 6 Rest 1, wenn man das teilen würde.
22	I	43 durch 6 hast du gerechnet'
23	S	ja, also, 42, (*rechnet*) ach so, 7 Rest 1.
24	I	mhm.
25	S	mhm, da fällt mir nichts ein.
26	I	hast du das denn bei den anderen, also hier war 7 Rest 1, hier war auch 7 Rest 1, hast du das nachgerechnet'
27	S	warte, da ist auch 7 Rest 1.
28	I	mhm, und bei den anderen, hast du das auch'
29	S	noch nicht. *(rechnet)* da bleibt auch 7 Rest 1. *(verwundert)*
30	I	mhm.
31	S	da bleibt auch 7 Rest 1. dann müsste ich hier bestimmt 11 geteilt durch was, muss dann 7 Rest 1 bleiben und das auch. *(zeigt auf den zweiten Stein)*
32	I	mhm.
33	S	dann müsste ich hier 50 hinschreiben. weil 49 durch 7 sind 7 und wenn ich jetzt 50 hinschreibe, dann sind das 7 Rest 1.
34	I	mhm.
35	S	und hier 11 durch (*rechnet: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77*) 78 muss ich hinschreiben.
36	I	also bei dir lassen alle Zahlen ...
37	S	7 Rest 1. *(S nickt)*

(aus Interview 4./III)

Auch wenn die Unterstützung durch Nachfragen der Interviewerin nicht geleugnet werden kann, ist doch festzuhalten, dass das Kind dieses Vorgehen auch bei der zweiten Aufgabe einhielt. Anscheinend lag ihm die Division näher als die Multiplikation. Die Division mit Rest wird im vierten Schuljahr im Unterricht explizit thematisiert. Im Gegensatz dazu, treten Verknüpfungen von Multiplikationen und Additionen sehr selten auf. Dies ist

vermutlich der Grund dafür, dass die Division mit Rest hier bevorzugt zur Lösung angewandt wurde.

Welche gedanklichen Überlegungen die Kinder machten, darüber gaben manche Kinder bereitwillig Auskunft. Andere reflektierten ihren Gedankengang gar nicht, sondern lösten die Aufgabe still für sich und gaben dann nur die Regel wieder:

Partnerzahlen I und II
S überlegt und rechnet still.
1 S jetzt.
S rechnet still und schreibt dann ihre Lösung auf.
2 I und kannst du es mal erklären, wie du das gemacht hast'
3 S ja, immer die Zahl mal 7 und 1 dazu.
4 I mhm, das war schwierig, oder'
5 S ja.
6 I ne richtige Knobelei, und jetzt kommt nochmal so etwas Knobeliges.
S überlegt und rechnet still, dann schreibt sie ihre Lösung auf.
7 S immer mit 10 malnehmen und dann minus 5.

(aus Interview 4./IX)

Der Gesprächsverlauf im Interview richtete sich nach dem Temperament der Kinder, das schon nach kurzer Zeit deutlich werden konnte. Wenn die Kinder sehr schüchtern reagierten und zaghaft Lösungen anboten, konnte und sollte in einem solchen Fall auch nicht weiter nachgefragt werden, da die Nachfragen u.U. als negative Kritik verstanden wurden und weitere Lösungen behindert hätten.

Insgesamt wurde aus den Kommentaren der Schülerinnen und Schüler der beiden Schuljahre nur bei zwei Kindern deutlich, dass sie eine Verbindung zwischen den Paaren suchen, die an ein Dominospiel erinnert (3./II und 4./XIII). Alle anderen versuchten Zugänge über die Unterschiede oder das Einmaleins.

Typ A - Zusammenfassung

Die Interviews sollten besonderen Einblick in die Beschreibungen der Zahlenmuster (Stufe II) ermöglichen. Es zeigte sich, dass die Typ-A-Aufgaben oft zu exemplarischem Darstellen (IIa) verleiteten. Dies gilt für alle vier Schuljahre. Im Laufe der Grundschulzeit wurden die Kinder jedoch zunehmend eloquenter und konnten Zusammenhänge allgemeinverständlicher darstellen. Die Kinder verwendeten oft

umgangssprachliche Beschreibungen. Die Anforderung, mathematische Muster fortzusetzen und zu beschreiben, war neu und ungewohnt und unterschied sich qualitativ von Mathematikaufgaben, die Kindern aus der Schule kannten. Es ist eine natürliche Reaktion der Kinder, keine mathematischen Fachausdrücke zu nutzen, da diese im üblichen Unterricht der Grundschule nicht thematisiert werden. Die allgemeine Sprachentwicklung spielt also für die Beschreibung von Zahlenmustern eine Rolle.

Bei den Lösungen wurden in den Anfangsklassen einmal erkannte Zusammenhänge eher generalisiert, ohne dass der Gesamtzusammenhang beachtet wurde (vgl. z.B. die Generalisierung des Zuwachses +3 bei den Quadratzahlen). Diese Tendenz nahm in den höheren Schuljahren ab, verschwand jedoch nicht ganz (vgl. hierzu auch HARGREAVES et al. 1999, 71 f.).

Oft wurden unerwartete und ungewöhnliche Lösungswege bei den Kindern beobachtet. Diese Wege führten durchaus über Umwege, waren für das einzelne Kind aber genau der richtige Weg, um sich eine logische Beschreibung des Musters aufzubauen. Besonders deutlich wurde dieser 'Umweg' beim Ausfüllen der Zahlenmauern, die vom Zielstein aus gelöst werden oder auch bei den komplizierten Überlegungen zu Zahl&Partnerzahl. Es gibt keinen 'Königsweg' bei der Auseinandersetzung mit Zahlenmustern.

Obwohl in den Interviews die Aufgaben weiter 'ausgerechnet' vorgegeben wurden als in den Paper-Pencil-Tests, konnten oft große Rechendefizite die Möglichkeit zur Lösung verbauen. Einigen Kindern schien es besonders schwerzufallen, Differenzen zu ermitteln, sodass bei den Zahlenfolgen, aber auch bei den Zahl&Partnerzahlen Probleme entstanden. Eine gute Rechenkompetenz unterstützt also das Zahlenmusterverständnis, da abrufbare Rechensätze genutzt (z.B. das Einmaleins) oder Ergebnisse (z.B. Differenzen zwischen Folgegliedern) fehlerfrei ermittelt und somit die Muster erkannt werden können.

3.4.2 Analyse der Reaktionen auf Typ-B-Aufgaben

	1. Schuljahr	2. Schuljahr	3. Schuljahr	4. Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	40,00	60,00	73,30	84,50
Teilaspekte des Musters beachtet	40,00	26,70	20,00	8,90
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	17,80	11,10	6,70	2,20
nicht bearbeitet	2,20	2,20	0,00	4,40
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent -

Abb. 3.62

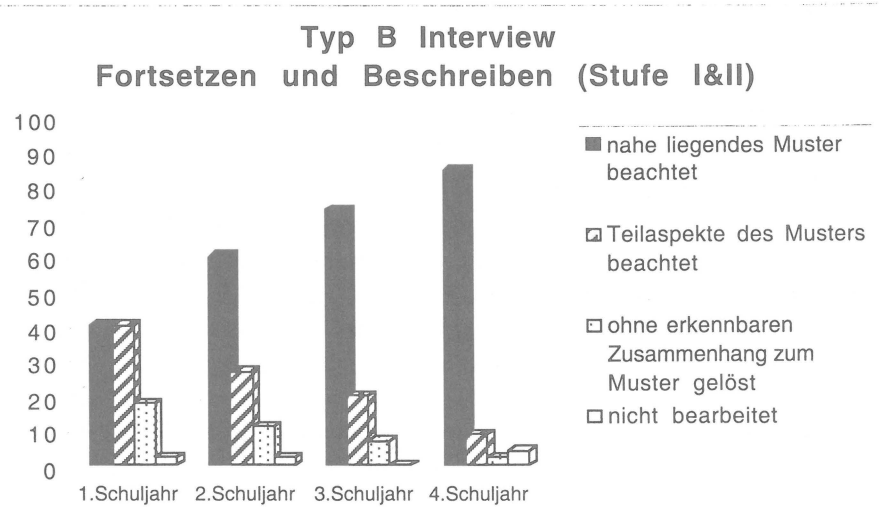


Abb. 3.63

Bei den Aufgaben zum Typ B (Fortsetzen und Beschreiben eines Musters mit geometrischen Objekten) lässt sich eine steigende Tendenz der Kategorie-1-Lösungen von Schuljahr zu Schuljahr beobachten. Die Antworten in der Kategorie 2 (Teilaspekt) und 3 (unzusammenhängend) sind rückläufig.

Bei den Nichtbeantwortungen gibt es keine einheitliche Tendenz. 80% der Kinder haben die Muster der Typ B Aufgaben, zumindest in Teilaspekten, auch im ersten Schuljahr erkannt. Im Laufe der Schulzeit steigt diese Zahl auf 86% bis über 90% an.

Die Antworten weisen darauf hin, dass mit zunehmendem Alter auch komplexere Aufgaben verstanden und beschrieben werden können. Dies kann besonders dann belegt werden, wenn verschiedene Teilaspekte, wie Färbung und gleichzeitig Anzahlveränderung im Muster, eine Rolle spielen (s.u. bei den jeweiligen Aufgaben und Schuljahren).

Da die Typ B Aufgaben in allen Schuljahren sehr ähnlich waren, werden im Weiteren zunächst die Reaktionen auf die figurierten Zahlen (Punktmuster) genauer betrachtet und dann die auf die Folgen mit geometrischen Objekten, wie Dreiecken, Kreisen etc.

Figurierte Zahlen: Quadrat-, Dreieck-, Rechteck-, Treppen-Zahl

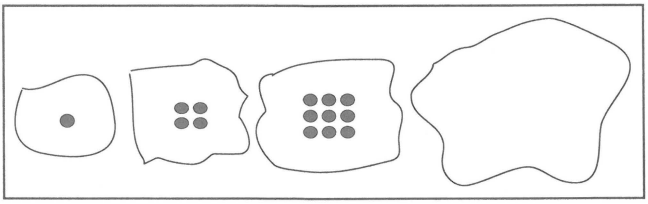


Abb. 3.64

Bei den figurierten Zahlen (Quadratzahlen, Abb. 3.64) war im ersten Schuljahr kein Kind in der Lage, das Muster nahe liegend fortzusetzen. Dies kann daran liegen, dass immer wieder beobachtet werden konnte, wie die Kinder einen arithmetischen Zusammenhang in den Punktanzahlen (Kardinalaspekt) gesucht haben, anstatt sich von dem Muster der Punkte leiten zu lassen. Das Gesamtbild, die Gestalt des Musters, schien nicht in den Vordergrund gerückt zu sein.

In den Antworten wurde vielfach die starke Präsenz der Folge der natürlichen Zahlen offensichtlich. Da das letzte gezeichnete Punktmuster 9 Punkte aufwies, meinten viele Kinder, das nächste Muster müsse 10 Punkte haben:

„weil nach der 9 kommt die 10." (1./XIV; vgl. auch 1./IX, 1./XIII, 1./XII)

Ein Erklärungsansatz liegt in der Darstellung der Zahlen, die üblicherweise innerhalb der ersten Wochen des ersten Schuljahres in vielen Schulbü-

chern zu finden ist. Abbildungen von realen Gegenständen, von Strichen, Kreisen oder anderen geometrischen Objekten in einer bestimmten Häufigkeit werden als Zählanlass angeboten. Den Kindern ist m.E. in vielen Fällen nicht klar, dass es sich hier um eine Abfolge von Abbildungen handelt, die auch untereinander in einem Zusammenhang stehen, und nicht um eine willkürliche Aneinanderreihung von 'Bildern'. Einige Kinder setzten den zusätzlichen Punkt einfach an das 3x3-Muster von Q_3 an. Ein Mädchen (vgl. Abb. 3.65) nutzte geschickt die Zwischenräume zwischen den drei Dreierreihen:

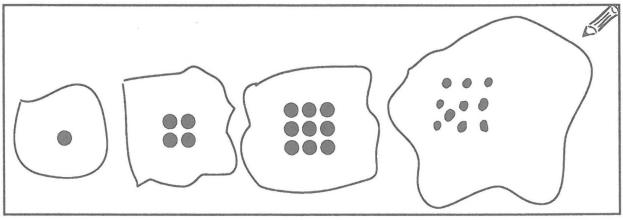
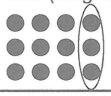


Abb. 3.65

Manchmal wurde ein Zuwachs (z.B. von $Q_1=1$ zu $Q_2=4$) auf alle weiteren übertragen, sodass als nächstes Folgenglied ein Muster gezeichnet wurde, das um 3 Punkte größer ist als 9 (vgl. 1./IV).

3	I	erzähl mal, was du siehst.
4	S	ja, da ist ein Punkt, dann sind 4 und da sind (*zählt*) ... da sind 1, da sind 4 und da sind 9.
5	I	mhm, sind die Punkte denn irgendwie gemalt'
	S	*schüttelt den Kopf*
6	I	wie denn'
7	S	nebeneinander.
8	I	was meinst du, wie geht es wohl weiter'
9	S	ja, hier muss man auch Punkte reinmalen.
10	I	mhm.
	S	*zeichnet ein 3·4-Punktefeld*
11	I	so'
12	S	mhm.
13	I	und wieso hast du die Punkte jetzt grad so gemalt'
14	S	die vermehren sich immer.
15	I	aha, um wie viel vermehren die sich denn'
16	S	um 3.
17	I	ja'

18	S	mhm.
19	I	wo sind denn die 3, die jetzt dazugekommen sind' kannst du mir die zeigen'
20	S	hier (*zeigt rechte Spalte des 3·4-Feldes*).



(aus Interview 1./IV)

Verständlich ist auch der immer wieder auftretende Zuwachs um 2 Punkte. Die Folge der natürlichen Zahlen weist von 1 bis 4 zwei Zahlen auf, die 'ausgelassen' werden. Da der Begriff der Differenz hier noch nicht gefestigt ist, wurden die zwei 'ausgelassenen' Zahlen mit einem Zuwachs um 2 verwechselt. Somit ergab sich nach der Q_3=9 ein Punktmuster aus 11 Punkten (vgl. 1./XI).

Das Muster der Punkte, das Quadrat, wurde dann bei der Lösung oft nicht beachtet. In dieser Zeichnung nutzte das Kind einen Zuwachs um 3 auf 12 Punkte (vgl. Abb. 3.66). Die Quadratform wurde vollkommen vernachlässigt:

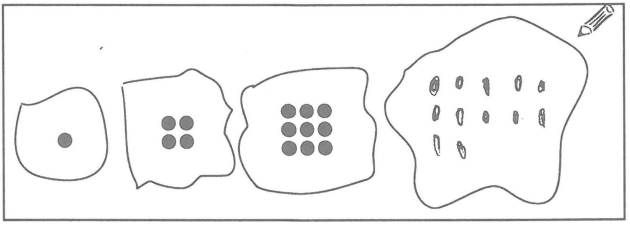


Abb. 3.66

Einige Kinder versuchten jedoch, eine Figur zu zeichnen, die einem Quadrat ähnlich sieht und gleichzeitig den Zuwachs aufweist, den das Kind im jeweiligen Fall vermutete (vgl. auch Abb. 3.65).

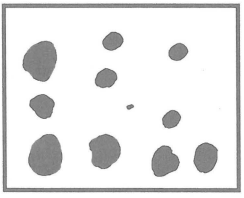


Abb. 3.67

Dieses Phänomen lässt sich im Interview 1./VI zeigen (vgl. Abb. 3.67). Das interviewte Kind zeichnete 10 Punkte (der kleine Punkt in der Mitte ist ein Farbklecks des Filzstiftes), die jedoch nicht ordentlich in Reihen aufgeführt sind, sondern sich einer Quadratform anpassen. Vielfach war eine gewisse Irritation zu spüren, wenn die Anzahl der Punkt, die das Kind als vermeintlich richtig ansah (z.B. 10 Punkte), in der Form nicht an das Muster anzupassen war. Die Form wurde dabei nicht so

genau analysiert, dass ein wirklicher kognitiver Konflikt hätte entstehen können. Es war mehr ein Unbehagen der optischen Störung zu bemerken, wenn das neue Punktmuster fertig gezeichnet auf dem Papier stand.

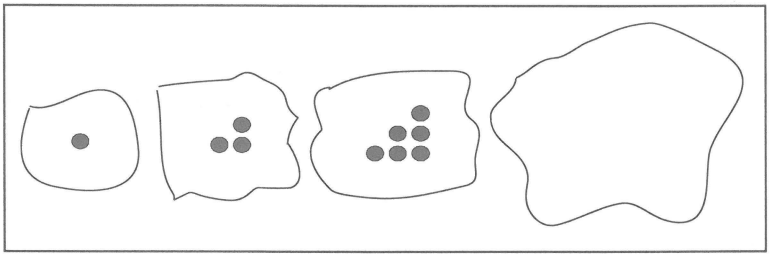


Abb. 3.68

Die Folge der Dreieckszahlen (vgl. Abb. 3.68) wurde im zweiten Schuljahr von 20% der Interviewten im nahe liegenden Muster fortgesetzt, weitere 40% erkannten Teilaspekte.

Das Mädchen im Interview 2./V generalisierte einen Zuwachs. Sie erkannte, dass die Folge zunächst um 2 und dann um 3 anwächst, und wählte deshalb 9 Punkte für die Fortsetzung. Ihr Muster hat keine Ähnlichkeit mit einem Dreieck (vgl. Abb. 3.69).

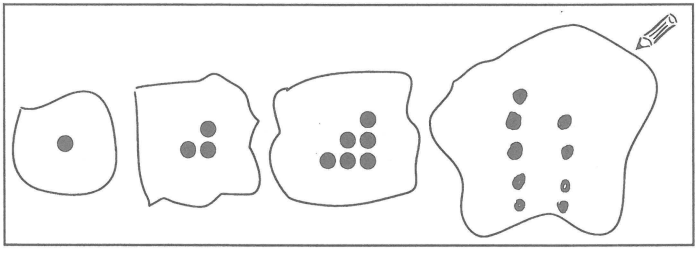


Abb. 3.69

Im Interview 2./V ließ sich nachvollziehen, wie sich das Kind von der Beobachtung eines Zuwachses zum anderen vortastete und die Entscheidung, welche Punktzahl jetzt folgen muss, sich jedes Mal änderte:

1	S	die soll ich dann weitermachen'
2	I	ja, die gehören jetzt alle zusammen in eine Reihe, und das nächste, das fehlt, da sollst du überlegen, wie das wohl weitergeht.
3	S	kann da ...da kommt 7 rein.
4	I	woran denkst du'
5	S	weil hier sind 6 und die nächste Zahl ist dann 7. weil hier ist auch 1 (*D_1 zu D_2*) ... nee, immer 2 weiter, kommt 8 rein.
6	I	meinst du 8'
7	S	weil da sind immer 1 dann kommt (...) da kommt 3, das sind immer 2 weiter.
8	I	da stimmt das auch' (*D_2 zu D_3*)
9	S	mhm (*ablehnend*), da stimmt's nicht. die, die beiden passen ganz gut (*deutet auf die ersten beiden Dreieckszahlen*), da fehlt ja nur einer ... und hier ist das ... da sind 3 mehr. also 2 mehr als sonst bei denen (*D_1 und D_2*).
10	I	mhm.
11	S	mh ... da kommt jetzt, wenn ich jetzt da 3 weitermache, von der 6 ... kommen da 9 rein'
12	I	wie du meinst.
		S zeichnet eine 5er Reihe und eine 4er Reihe

(aus Interview 2./V)

Oft wurde von den Zweitklässlern nur ein Zuwachs erkannt und auf alle anderen übertragen. Mehrfach vermuteten die Kinder im zweiten Schuljahr, die nächste Dreieckszahl müsse 12 Punkte haben, da sie die Verdopplung zwischen D_2 und D_3 generalisierten. Die Folge der Zuwächse zu erkennen war für Zweitklässler nicht einfach. Einige Kinder beschrieben sie jedoch passend:

„weil hier da einer ist, da 2, da 3 und da 4." (2./XV)

Diese Beschreibung verwendet die auftretenden Anzahlen und ist somit exemplarisch (Stufe IIa).

Es ist in den Interviews deutlich geworden, dass Dreieckszahlen als Figuren den Kindern nicht vertraut sind.

Folgendes Phänomen konnte auch schon bei den Antworten im ersten Schuljahr beobachtet werden: Der Großteil der Kinder legte sich zunächst auf eine Anzahl von Punkten fest und gestaltete dann ein Muster unabhängig vom Dreieck. Der arithmetische Aspekt stand im Vordergrund.

Nicht alle Kinder gingen jedoch in dieser Weise vor. Ein Kind erkannte sofort, dass die Form des Dreiecks gewahrt werden musste. Es zeichnete die letzte vorgegebene Dreieckszahl ab und ergänzte dann noch vier und dann fünf weitere Punkte. Das Kind ließ sich von der Gestalt inspirieren:

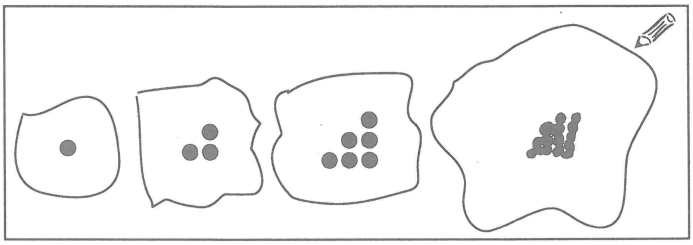


Abb. 3.70

Im Interview wurde deutlich, dass dieses Kind durch die Frage in Zeile 7 klären wollte, ob es nur die nächste Dreieckszahl oder eine beliebige weitere zeichnen dürfe. Da die Interviewerin keine Einschränkungen machte, zeichnete es nicht nur vier, sondern auch noch fünf weitere Punkte auf.

1	S	das sind auch so Punkte'
2	I	mhm, genau, das soll so weitergehen.
3	S	und was, wie viele Punkte und wie das Muster aussieht'
4	I	ja, das sollst du entscheiden. das sieht man ja an diesem Muster, das soll ja weitergehen.
5	S	mhm ... mh, also erst mal das malen (*zeigt das letzte gegebene Muster*) und dann weiter.
6	I	mhm, genau. das ist ein guter Trick.
7	S	ehm, vielleicht da einen hinsetzen ... dürfen wir auch immer ganz viele hinsetzen'
8	S	mhm.
	S zeichnet	
9	I	so richtig'
10	S	ehm, ich glaub da einen hinsetzen ...
11	I	mhm.
12	S	...und da und da (*ergänzt die Punkte bis D_5*).
13	I	ok. und woher wusstest du das jetzt wie das weitergeht'
14	S	weil es könnte, weil die hier ja so sind und dann immer einen drübersetzen, dann würde das so eine Gestalt.
15	I	ahh, was ist das für eine Form, kennst du die Form'
16	S	ungefähr so....(*deutet eine Dreiecksform an*)
17	I	jaaa, darfst du ruhig aufzeichnen. das ist alles dein Platz.
18	S	so' (*zeichnet ein Dreieck auf*)
19	I	jaja. ja, was ist das für eine Form'
20	S	mhm, ein Dreieck.

(aus Interview 2./X)

Ein Junge analysierte die Punktmuster sofort auf arithmetische Besonderheiten hin und erkannte alle Zuwächse als Musterfolge. Er nutzte eine leichte Abwandlung der Dreiecksform in seiner Zeichnung, die Zeichnung ließ aber weiterhin ein Dreieck erkennen.

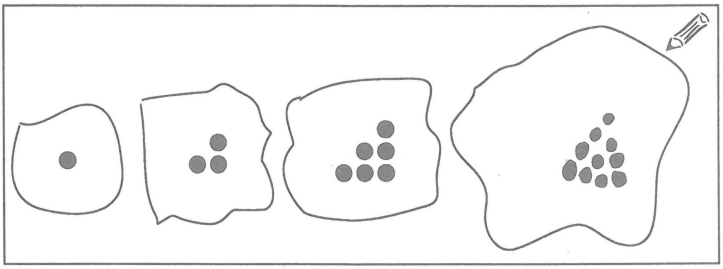


Abb. 3.71

1	S	jetzt kommen wieder da, jezt kommen da vier hin.
2	I	mhm.
3	S	hierhin oder hier (*zeigt auf das leere Kästchen und auf D_3*).
4	I	da in das nächste (*zeigt das leere Feld*).
		S zeichnet D_4
5	I	und woher wusstest du das jetzt so schnell'
6	S	ich dachte einfach, weil hier einer ist und da zwei, da da drei und da vier.

(aus Interview 2./XV)

Einige Kinder sahen ebenfalls sehr schnell ein Muster, da sie die Dreieckszahl in Spalten (oder 'Reihen', wie z.B. der Junge in 2./XV sagte) zerlegten. Auch im folgenden Interview 'sah' das Kind innerhalb der Dreiecksgestalt diese Spalten:

1	I	schau mal, was du siehst.
2	S	Punkte.
3	I	mhm.
4	S	und Linien.
5	I	das letzte Feld hier ist ja noch frei. und dann sollst du überlegen, wie das wohl weitergeht mit dem Punktmuster, welches Muster jetzt wohl als nächstes kommt.
6	S	mh, ich weiß!
7	I	ja'
8	S	... hier hinten kommen noch 4 hoch.

(aus Interview 2./IV)

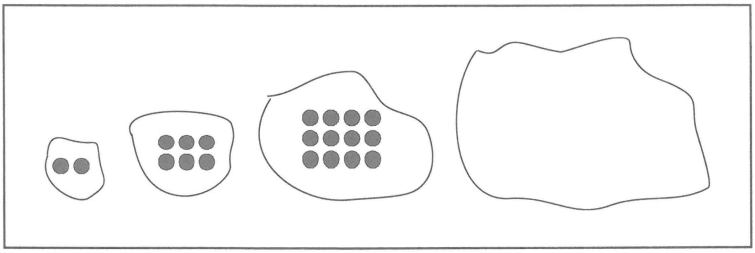


Abb. 3.72

Auch im dritten Schuljahr (Rechteckszahlen, vgl. Abb.3.72) kam es noch vor, dass ein Zuwachs für alle weiteren Muster generalisiert wurde. Mehr Kinder als im ersten Schuljahr erkannten das Muster jedoch und setzten es nahe liegend fort. 53,3% der Kinder gaben eine Kategorie-1-Lösung an, 40% eine Lösung, die Teilaspekte beachtete, und nur 6,7% eine Fortsetzung ohne erkennbaren Zusammenhang. In der Zahlenfolge (vgl. Typ A) setzten 40% der Kinder die Rechteckszahlen im nahe liegenden Muster fort.

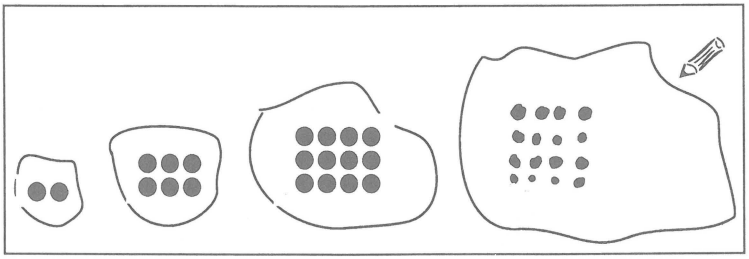


Abb. 3.73

Zwei Kinder gestalteten Muster, die eine 1x1-Aufgabe wiedergeben (5x3 oder 4x4; vgl. Abb. 3.73), die aber nicht in die Folge der Rechteckszahlen eingefügt werden konnten. Beide Muster sind Fortsetzungen des 3x4-Musters der letzten, gegebenen Rechteckszahl, das aber jeweils nur in der Zeile bzw. Spalte ergänzt wird und nicht in Zeile *und* Spalte.

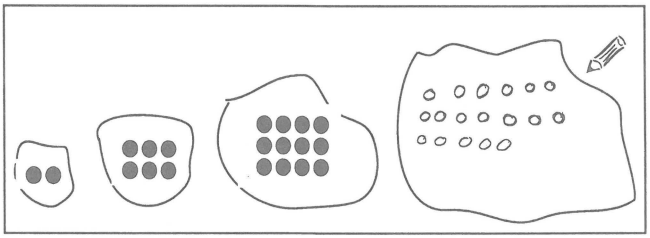


Abb. 3.74

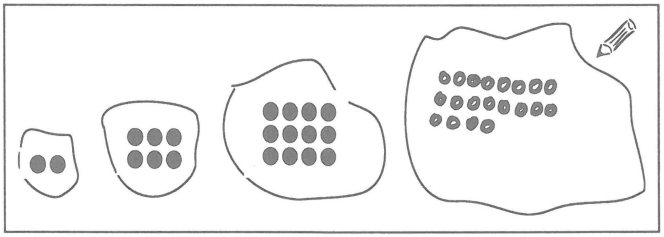


Abb. 3.75

Die hier aufgeführten Lösungen in Abb. 3.74 und 3.75 sind Fortsetzungen des Rechtecksmusters, die sich von der Rechtecksform ganz lösen. In der ersten Abbildung wurden 18 Punkte gezeichnet, in der zweiten 20 Punkte. Die letzte Punktzahl ergibt sich richtig aus der Beobachtung der Zuwächse und gibt die Anzahl der Punkte der gesuchten Rechteckszahl im üblichen Muster wieder, während die Lösung mit den 18 Punkten vielleicht dadurch zu erklären, dass die zweite und die dritte Rechteckszahl addiert wurden.

Der Großteil der Kinder löste diese Aufgabe im nahe liegenden Muster (53,3%), und auch die Beschreibungen wurden immer präziser:

> „hier sind 2 in einer Reihe, hier sind 3 in zwei Reihen und hier sind 4 in drei Reihen." (3./IV)

Oft waren sie handlungsorientiert, d.h. sie beschrieben das konkrete Weiterzeichnen des Musters:

> „ja, weil da sind erst 2, und da kommt da 1 zu und ne Reihe höher." (3./VI)

> „... immer muss man einen mehr dazutun." (3./VII)

Diese Beschreibungen werden der Stufe IIa zugeordnet. Die letzte Äußerung ist insofern typisch, als sie viele Nebenaspekte vernachlässigt und die Antwort nur im Vollzug des gleichzeitigen Zeichnens wirklich stimmig wurde.

Es wird nicht nur ein Punkt hinzugefügt, sondern jede Reihe wird um einen Punkt erhöht. Zusätzlich erhöht sich die Anzahl der Reihen.

In verschiedenen Interviews war nachzuvollziehen, wie sich die Zusammenhänge den Kindern langsam erschließen, so z.B. in diesem Interview:

1	I	ja, ..., in diesem Heft geht es um Zahlenmuster ... ja, musst du erst mal gucken, wie es da weitergeht. vielleicht kannst du das mal beschreiben, was du siehst.
2	S	mh, da isn, da nen Kästchen, da stehn jetzt zwei Punkte, und in der nächsten stehen sechs und in den anderen stehen 4, 12.
3	I	wie geht es wohl weiter'
4	S	mh, 2, auch so 2, 3, 2, 2, 3, 4, 5. *(zeichnet Punkte)* jetzt kommen die 5er.
5	I	mhm.
6	S	mh, 2, 5 ... 3, 4, 5. jetzt muss ich noch einen, 3, 4, ja, jetzt muss ich noch einen hierhin. ja.
7	I	wie viele 5er hast du jetzt gemacht'
8	S	fünf.
9	I	warum fünf 5er'
10	S	mh, nee, doch nicht, vier 5er müssen dahin. *(ändert das Punktmuster)* mhm. weil, ich hab das ja so gedacht, weil das so nach der Reihenfolge geht. jetzt erst mal mit den 5ern bin ich so drauf gekommen 2, ...
11	I	aha.
12	S	3, 4, 5. (*zeigt R_1, R_2, R_3 und leeres Kästchen*)
13	I	prima.
14	S	und hier sind ja dreie schon (*bei R_3*), da hab ich mir gedacht, da muss ich vier 5er malen. da sind 20.

(aus Interview 3./II)

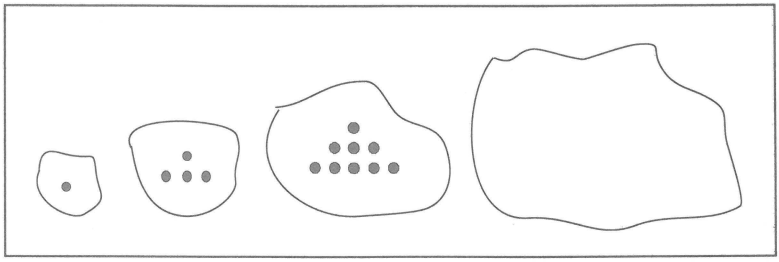


Abb. 3.76

Das Erfassen der figurierten Zahl ('Treppenzahl' als Sonderform der Quadratzahl, Abb. 3.76) war im vierten Schuljahr nicht mehr schwierig. In den Interviews, in denen eine direkte Antwort gegenüber dem Interviewer erwartet wurde, konnten viele die nahe liegende Lösung finden (66,7%). In der Zahlenfolge hatten 60% der Kinder eine nahe liegende Fortsetzung gewählt (vgl. Typ A).

Ein Kind ergänzte nur 6 statt 7 Punkte im nächsten Bild. Die Treppenzahlen wurden hier zwar Reihe für Reihe gesehen, aber es wurde nicht erkannt, dass immer die ungeraden Zahlen die Fortsetzung bilden.

Die merkwürdigste Lösung bot 4./III an (vgl. Abb. 3.77). Es wurden 19 Punkte gezeichnet. Dies entspricht weder der Summation aller gegebenen Treppenzahlen noch einem speziellen Zuwachs. Eine Erklärung für die Punktzahl 19 ergibt sich aus folgender Überlegung: Die Treppenzahlen 1 bis 3 werden summiert (1+4+9=14) und schließlich wird noch 5 addiert. Die Form der Treppe wurde hier nicht beachtet.

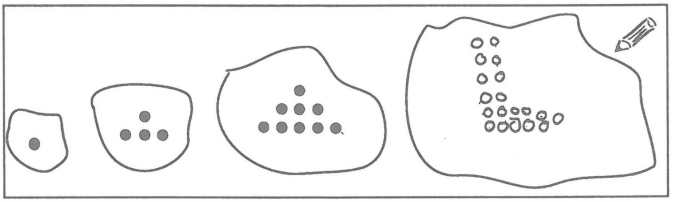


Abb. 3.77

Drei Kinder irrten sich in der Beschreibung insofern, als sie die Folge der Dreieckszahlen nannten. Zwei von ihnen gaben auch die sechste Dreieckszahl als Lösung an (4./VI und 4./XIV), während das dritte Kind (4./IX) sich in der Zeichnung korrigierte und die Treppenzahl dann doch erkannte.

Viele Kinder konnten in ihren Beschreibungen die Zuwächse benennen:

> „ungerade Zahl" (4./II)
>
> „schräge Zahl" (4./III)
>
> „ja, weil ich hier und so 3, dann ne 5, dann ne 7 dazu, dann 9, dann muss ich 11, immer die ungeraden Zahlen." (4./VIII)

Während die ersten beiden Kinder hier Begriffe für die ungeraden Zahlen nutzten, verwendete das Kind in 4./VIII zunächst nur Beispielzahlen in einer Art Aufzählung, bevor es eine allgemeine Beschreibung gab.

Sobald die Fortsetzung des Musters unabhängig von den gegebenen Beispielen gesehen (Stufe IIb) und mit der Folge der ungeraden Zahlen in Verbindung gebracht wird, sind auch theoretische Fortsetzungen möglich, die nur noch beschrieben (Stufe II), aber nicht mehr gezeichnet werden (Stufe I):

> „... und da kämen 9 dazu (...), weil immer 2 dazu müssen" (4./XII)

Der Konjunktiv deutet hier an, das Muster wurde vollständig gedanklich bearbeitet und keine Konkretisierung mehr benötigt.

Folge aus Dreiecken

a) 

Abb. 3.78

93,3% der Erstklässler führten die Folge aus Dreiecken (vgl. Abb. 3.78) im nahe liegenden Muster fort. Sie wurde auch von den Kindern als einfach eingestuft:

„ah, das weiß ich schon!" (1./IX.)

Einige Kinder hatten Schwierigkeiten, die Folge zu beschreiben, da sie sich in der Benennung der Dreiecke unsicher waren. Unterschiedliche und ungewöhnliche Bezeichnungen wurden verwendet:

„Viereck" (1./I)

„Kästchen" (1./V)

„Ruine" (1./XIV)

Die Bezeichnung Ruine leitet sich vielleicht von dem Symbol auf Landkarten ab: Dreiecke geben hier die Lage von Ruinen an.

Das Weiterzeichnen wurde oft rhythmisch-sprechend begleitet:

„da sind immer nen großes, 2 kleine, nen großes, 2 kleine ..." (1./IV)

„da ist nen großes, zwei kleine, nen großes, zwei kleine ... nen großes, zwei kleine." (1./XV)

Die Verwendung des Wortes 'wieder' verdeutlicht in den folgenden Beschreibungen, eine erste Ablösung vom konkreten Zeichenprozess:

„erst war da ein Dreieck, dann waren da wieder kleine, dann wieder ein großes, dann wieder zwei kleine ..." (1./II)

„da muss hier ein großer hin und dann wieder 2 kleine." (1./III)

Eine Beschreibung dieser Art wird auch in dem folgenden Interviewausschnitt deutlich:

1	S	da sieht man Dreiecke, Kreise, Vierecke (*zeigt beide Aufgaben*).
2	I	erst mal gibt es hier oben die Reihe mit den Dreiecken, wie die wohl weitergeht, die Reihe mit den Dreiecken'
Folge mit geometrischen Objekten I		
3	S	mh. darf ich die denn so hinmalen'
4	I	mhm, genau.
S zeichnet.		
5	I	ja, das reicht schon, danke. woher wusstest du das jetzt, wie man das weiterzeichnet'
6	S	das'
7	I	das mit den Dreiecken'
8	S	mhm.
9	I	woher wusstest du das'
10	S	weil hier sind 2, hier sind ein großes, 2 kleine und dann kann man ja leicht, dann weiß man, dass ein großes da kommt, dann 2 kleine und dann wieder ein großes.
11	I	sehr schön.

(aus Interview 1./XI)

Auch in diese Folge aus geometrischen Objekten wurden manchmal arithmetische Aspekte hineininterpretiert: Eine Schülerin vermutete, dass sie 14 weitere Dreiecke zeichnen muss, da bereits 12 Elemente vorgegeben sind (vgl. 1./I). Es ist unklar, warum sie nicht 13 Dreiecke ergänzen mochte. Vielleicht hatte sie sich unbewusst von dem Zweierrhythmus der kleinen Dreiecke inspirieren lassen - aber darüber gab sie keine Auskunft.

Die Zweitklässler hatten offensichtlich keine Schwierigkeiten das vorgegebene Muster in nahe liegender Weise fortzusetzen. Erst wurde oft wortlos fortgesetzt. Die Kommentare spiegelten dann eher die Einfachheit der Aufgabe wider:

„das ist leicht!" „groß und zwei kleine." (2./VIII)

Manchen schien das Muster vertraut:

„das kenn ich schon etwas länger." (2./XIV)

Auch im zweiten Schuljahr nutzten einige Kinder ein begleitendes Sprechen:

„groß, klein, klein" (2./XII)

Vielen nutzten das Wort 'wieder' zu Verdeutlichung der wiederkehrenden Abfolge.

„da müsste man hier nen großen, dann zwei kleine, dann wieder nen großen, dann zwei kleine." (2./III)

„wieder nen großen, dann wieder zwei kleine und wieder nen großes." (2./IV)

„da kommen wieder so große rein und dann kommen wieder zwei kleine." (2./I)

Wurde jedoch die Beschreibung durch 'immer so weiter' o.ä. verkürzt, konnte sie als allgemeinere Beschreibung (Stufe IIb) anerkannt werden:

„ein großer, zwei kleine, ein großer, zwei kleine und wieder immer so weiter." (2./V)

„weil da ein großen, zwei kleine, ein großen, zwei kleine, immer so weiter geht." (2./VII)

100% lösten diese Aufgabe im nahe liegenden Muster.

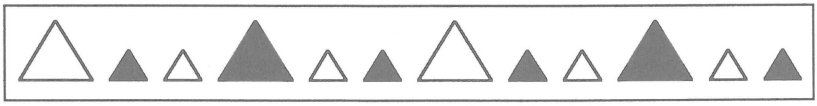
b) 

Abb. 3.79

Im dritten und vierten Schuljahr wurde die offensichtlich einfache Dreiecksfolge durch ein Farbelement erweitert (vgl. Abb. 3.79). Die Färbungen gehen keine Verbindung zur Größe der Dreiecke ein, sondern laufen unabhängig alternierend durch die Folge.

Im dritten Schuljahr ignorierte nur ein einziges Kind die Färbung der Dreiecke. Ein anderes Kind ließ sich u.U. durch die alternierende Färbung dazu verleiten, große und kleine Dreiecke auch abwechselnd zu zeichnen, ohne zu beachten, dass immer zwei kleine Dreiecke zwischen den großen stehen. Alle anderen setzten die Aufgabe mit dem nahe liegenden Muster fort (86,7%).

Die hohe Symmetrie, die in dieser Folge wiederzufinden ist, wurde handlungsorientiert in 3./XII beschrieben:

1	S	haha, habs! hier ist groß weiß, schwarz, weiß, schwarz. und wieder hier ist das genau umgedreht. wenn man die zusammenklappt (*zeigt mit beiden Händen die Klappbewegung*), in der Mitte durchschneidet und zusammenklappt, dann ist das hier schwarz und schwarz, weiß und weiß (*deutet auf die Seiten links und rechts der Symmetrieachse*). und das dann hier schwarz, weiß und hier ist dann weiß, schwarz, das ist dann genau umgedreht.

(aus Interview 3./XII)

Dieses Kind fand eine Symmetrieachse, die mitten durch eines der großen Dreiecke verläuft, und ergänzte dann die folgenden Glieder aus symmetrischen Gesichtspunkten. Vielleicht steckte eine ähnliche Überlegung hinter dem Kommentar:

„... das ist sozusagen wieder von schwarz auf weiß." (3./II)

Es kann hier aber auch sein, dass nur die wechselnde Färbung isoliert beschrieben wurde und die Größen der Dreiecke nur handelnd, d.h. während der konkreten Fortsetzung des Musters, beim Zeichnen, eine Rolle spielten und nicht in der Beschreibung. Andere Beschreibungen griffen die Größe der Dreiecke und die Färbung gleichzeitig auf:

„weil das hier auch so abgebildet wird." „weil hier schwarz und dann kommt hier groß weiß, wieder schwarz, klein weiß, wieder groß schwarz." (3.I)

„dann wieder groß." „das bleibt jetzt hell." (*zeichnet ein kleines Dreieck*) „das wird aber dunkel." (3./XI)

Einige Kinder nutzten auch im dritten Schuljahr nicht immer konsequent die richtigen Begriffe für die Dreiecke:

„da muss man die Pyramiden vertauschen." „jetzt muss hier wieder ein weißer hin, dann schwarzer Kasten, weiß, großer dann wieder." (3./V).

Es gab auch sehr unpräzise Beschreibungen, in denen die Dreiecke zwar als 'verschieden' gekennzeichnet wurden, aber keine detaillierte Beschreibung der Größe oder Form gegeben wurde:

„hier diese Dreiecke, die sind immer wieder verschieden." (3./VI)

Die Beschreibung der Färbungen konnte natürlich von den bereits gezeichneten Dreiecken abgelesen werden:

„weil das vorne so gemalt ist." (3./XIV)

Im vierten Schuljahr gab es mehrere Kommentare, die beide Aspekte, also die Größe der Dreiecke und den Wechsel der Farben, beschrieben:

> „weil hier immer weiß, schwarz, weiß, schwarz, weiß, schwarz und dann immer ein hohes, zwei niedrige, ein hohes, zwei niedrige." (4./I)

> „also hier da ist ein großes, weißes Dreieck, da hab ich hier auch ein großes, weißes Dreieck gemacht, hier ist ein großes schwarzes, da ist ein kleines weißes und das hab ich dann hier auch gemacht. und hier gehts dann weiter mit nem großes schwarzen Dreieck, und dann hab ich das hier weitergemacht." (4./V)

> „die ham immer abgewechselt: mal hell groß, dann zwei kleine, eins dunkel, dann hell, dann wieder groß schwarz, immer so abwechselnd." (4./VIII)

Ebenso wurden aber manchmal nur die Farben oder die Größen kommentiert:

> „dass immer zwei Kleine dazwischen Platz lassen." (4./IV)

Eine sehr unpräzise Beschreibung findet sich im Interview 4./II:

> „weil das hier immer so is." (4./II)

Ein Kind strukturierte das Muster in 3er-Blöcke und beschrieb:

> „immer 3 eigentlich. groß weiß, klein schwarz, klein weiß, klein schwarz, groß schwarz, klein weiß, klein schwarz." (4./X).

Die von diesem Kind selbst hineingedachte Struktur vereinfacht die Beschreibung.

100% der Kinder setzen diese Folge aus Dreiecken im nahe liegenden Muster fort.

Folge aus Kreisen und Quadraten

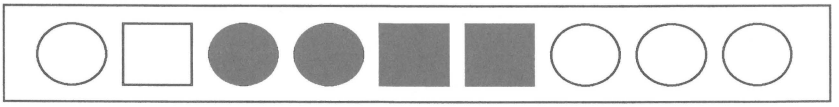


Abb. 3.80

In dieser Folge (vgl. Abb. 3.80) müssen zwei Aspekte beachtet werden. Zum einen nimmt die Anzahl der Kreise und Quadrate jeweils um 1 zu, zum

anderen sind die 'Blöcke' aus Kreisen und Quadraten alternierend eingefärbt.

26,7% der Kinder des 1. Schuljahres führten diese komplizierte Folge aus geometrischen Objekten im nahe liegenden Muster fort, und 46,7% erkannten Teilaspekte. Unter denen, die Teilaspekte beachten, wurden auch die Kinder eingeordnet, die z.B. die Färbung vernachlässigten. Im folgenden Interview wird deutlich, dass die Vernachlässigung der Farben nicht nur beim konkreten Fortsetzen (Stufe I), sondern auch bei der Beschreibung (Stufe II) durchgehalten wurde. Die Färbung schien - in den Gedanken dieses Kindes - überhaupt nicht zu existieren.

Einem Kind gelang die Beschreibung der Färbung, aber es nutzte sie dennoch nicht in der Fortsetzung des Muster:

„dann sind so welche hellen und dunklen." (1./V)

Im Interviewausschnitt kann eine weitere Lösung zur Folge aus Kreisen und Quadraten verfolgt werden:

12	I	und bei den Kreisen da unten'
13	S	da muss man, glaube ich, auch das Muster nachmachen.
14	I	mhm, genau.
15	S	fängt das denn wieder hier von vorne an'
16	I	meinst du'
S nickt und zeichnet die Vorlage ab, ohne Färbung		

(aus Interview 1./XI)

Dieses Phänomen war fast durchgängig bei allen Erstklässlern zu verzeichnen. Es zeugt m.E. von einem geschickten Vorgehen, welches das vorgegebene Muster stillschweigend vereinfacht. Ein Indiz dafür, dass diese Vereinfachung unbewusst vorgenommen wird, sind die Ernsthaftigkeit und Stringenz, mit der die Kinder bei der Fortsetzung und der Beschreibung vorgegangen sind.

Ein Kind äußerte explizit, dass es eine Beschreibung schwer liefern konnte:

„das ist schwer zu erklären." (1./X)

Dies lag wohl auch daran, dass es die Bezeichnungen für die beteiligten geometrischen Objekte nicht kannte:

„weil da so ein Dings ist, und da so weitergeht." (1./X)

Auch andere waren unsicher in der Bezeichnung der Objekte und wechselten die Bezeichnung auch innerhalb einer Beschreibung:

„hier ist ein Kreis und dann ein Kästchen und dann wieder 2 Punkte." (1./XIII)

Einige verdeutlichten nur, dass sie das Muster aus dem gegebenen Muster ableiteten:

„weil da auch so ist." (1./I)

„weil da das auch so war." (1./VI)

„so geht das." (1./IX)

Zwei Kinder zeigten in den Beschreibungen, dass sie die arithmetischen Veränderungen bewusst nutzten:

„nen runder Kreis, nen Viereck, 2 runde Kreise, 2 Vierecke, 3 runde Kreise ... 3 Vierecke." (1./XV)

6	I	und wie geht das unten wohl weiter'
	S zeichnet 4 Vierecke und 5 Kreise ohne Färbung	
7	I	aha, und was hast du da jetzt gezeichnet'
8	S	hier ist die 3 und hier ist dann die 4 und dann ist da die 5.

(aus Interview 1./XIV)

Im zweiten Schuljahr änderte sich dieses Bild. Nur noch vier Kinder beachten die Färbung nicht, die anderen nutzen die Färbung:

„... manche sind angemalt und manche weiß." (2./I)

„nach dem weißen muss ich, glaube ich, wieder schwarz machen." (2./V)

Einige hatten das Gefühl, das Muster 'zu Ende' führen zu müssen. Somit wurde manchmal die vorgegebene Reihe von Objekten rückwärts kopiert, wie im folgenden Fall:

1	I	und wie geht's da unten wohl weiter'
	S überlegt still und zeichnet dann 5 weiße Vierecke, 4 schwarze Kreise und 4 schwarze Vierecke	
2	I	mhm, woher wusstest du, dass das so weitergeht'
3	S	weil die hier waren ja schon fert... oh! hier hab ich mich verzählt irgendwie.
4	I	erzähl mal, was hast du denn gedacht.
5	S	ich hab hier gedacht, dass ich jetzt hier die vier noch mal weiterzeichnen kann, aber hier hab ich nen bisschen zu viele gemalt.
6	I	wie viele hast du denn zu viel gemalt'
7	S	bei denen hab ich 3 zu viel, bei denen hab ich 2 zu viel und bei denen hab ich auch 2 zu viel (*deutet auf 5 Vierecke, 4 Kreise und 4 Vierecke*).
8	I	du wolltest das genauso malen, wie es vorne ist'
9	S	ja, nur zu Ende machen.

(aus Interview 2./II)

Im zweiten und im dritten Schuljahr begann etwa die Hälfte der Kinder die vorgegebene Folge von vorn. Sie gingen davon aus, dass sich das gesamte Muster als Motiv ständig wiederholt, und sahen keine Veranlassung, eine Fortführung zu finden, die mit einer Erhöhung der Kreise und Quadrate einhergeht.

Nicht allen Kindern des zweiten Schuljahres gelangt eine genaue Beschreibung. Wie im ersten Schuljahr war auch hier die Schwierigkeit, dass die Bezeichnungen für die Objekte nicht klar waren. So mussten sie auf konkretes Zeigen der Objekte zurückgreifen:

> „noch mal einen von das hier, und dann kommt das und dann das und dann das" (2./VIII)

Ebenso wurden wechselnde Begriffe verwendet:

> „... hier waren 2, jetzt wieder 3" „3 Dreiecke nicht ausgemalt" (*zeichnet Vierecke*) „und jetzt 4 Kreise in schwarz" (2./XV)

1	I	und wie ist es unten bei dem Muster'
2	S	da ist ein runder, ein viereckiger, dann wieder zwei viereckige, drei runde ... ehm kommen da 3 Kreise, 3 Kästchen hin'
3	I	ja, super.
	S zeichnet 3 Vierecke.	
4	I	mhm. wüsstest du auch, was als nächstes noch kommt'
5	S	dann kommen da 4 Bälle hin.
6	I	prima, wollen wir die auch noch malen'
	S zeichnet	
7	I	mhm.
8	S	4. dann kommen da 5, ehm, Kästchen wieder hin.

(aus Interview 2./VI)

Wenn diese Idee des 'Kopierens' im dritten Schuljahr genutzt wurde, wurden auch die Färbungen konsequent übernommen. Die Prozentwerte der Kategorie-1-Lösungen liegen bei 60% im zweiten Schuljahr und 80% im dritten Schuljahr.

Die Färbung wurde jedoch nicht immer beschrieben, sondern stillschweigend genutzt. Beschreibungen bezogen sich eher auf die Kardinalzahl der Objekte als auf die Färbungen:

> „3 kommt hier eigentlich hin, und jetzt kommt da 4 hin" (3./XV)

In einzelnen Beschreibungen wurde aber auch die Färbungen erwähnt

„das geht dann so weiter, nach den Punkten, dann fängt man wieder vom Anfang und malt das aus." (3./II)

Ein Kind bezeichnete in der folgenden Beschreibung Anzahlaspekt und Färbung gemeinsam:

„hier ist 1, und dann gleich und dann 2 schwarze, hier ist 1 weißer Punkt und 2 schwarze und dann 3' " „3 weiße Kästchen, jetzt kommen, glaube ich, 4 schwarze Punkte." (3./XII)

Im vierten Schuljahr gaben genauso viele Kinder solche Antworten, in denen die Vorlage kopiert wurde, wie Antworten, in denen die Anzahl der Objekte in den Lösungen stetig erhöht wurde. Die Folge wurde immer unter Beachtung der Färbungen fortgesetzt. Die Beschreibungen schlossen ebenfalls oft beide Aspekte - die Färbung und die Anzahl der Objekte - ein, auch wenn nicht alle Viertklässler in der Beschreibung der Objekte immer konsequent waren (vgl. 4./XI):

„weil das immer eins, und dann zwei zwei, und dann drei drei und dann immer abwechselnd weiß und schwarz." (4./X)

„das wird immer einer mehr. und die Farbe wechselt." (4./II)

„und hier ist erst 1 Kugel, 1 Viereck, 2 Kugeln, 2 Vierecke, 3 Kugeln, 3 Vierecke und immer so weiter fortgesetzt." „die Vierecke hätte jetzt weiß und das Dreieck, der Kreis hätte jetzt schwarz." (4./XI)

„also, ein runder Kreis ist weiß, zwei ausgefüllte, dann zwei Vierecke, immer drei und drei, und dann ist es immer abwechselnd ausgefüllt und nicht ausgefüllt." (4./IX)

Im vierten Schuljahr lösten 86,7% diese Aufgabe im nahe liegenden Muster.

Typ B - Zusammenfassung

Bei diesem Typ von Aufgaben zeigte sich eindeutiger als bei Typ A, dass die Kinder mit zunehmendem Alter immer besser in der Lage sind, verschiedene Aspekte eines Musters gleichzeitig bei der Fortsetzung zu beachten und zusammenhängend zu beschreiben.

In den Anfangsklassen war eine typische Reaktion auf verschiedene Aspekte, die in einem Muster zusammenspielen, dass ein Teilaspekt in der

Fortsetzung einfach ausgeblendet wurde (vgl. auch MEYER 1977). Dieser ausgeblendete Aspekt schien für die Kinder nicht mehr zu existieren.

Der Prozentanteil der Antworten, in denen eine erkannte Musteridee generalisiert wird, nahm in den höheren Schuljahren ebenfalls ab.

Ein Zusammenhang zwischen den Lösungen der figurierten Zahlen in Punktmusterdarstellung und als Zahlenfolge ließ sich nicht nachweisen. Die Kinder der verschiedenen Schuljahre haben einmal die Punktmuster und ein anderes Mal die Zahlenfolgen (vgl. Typ A) eher im nahe liegenden Muster gelöst. In folgenden Fällen konnten die Antworten zu den figurierten Zahlen und zu der zugehörigen Zahlenfolge derselben Kategorie zugeordnet werden: Vier Erstklässler, drei Zweitklässler, zwei Dritt- und ein Viertklässler lösten sowohl die Punktmuster als auch die Zahlenfolge in Teilaspekten. Beide Darstellungen setzten 3 Zweitklässler, zwei Drittklässler und sieben Viertklässlern nahe liegend fort. Da die Stichproben je Schuljahr mit 15 Kindern sehr klein waren, kann die Beziehung zwischen figurierten Zahlen im Punktmuster und in der Zahlenfolge nicht abschließend geklärt werden (vgl. Graphiken im Anhang).

Erstaunlicherweise wurden die Musterbeschreibungen zu den Punktmustern oft mit dem Kardinalaspekt der gezeichneten Punktmengen in Verbindung gebracht. Die geometrische Form wurde besonders von den jüngeren Kindern sehr oft vernachlässigt. Es ist anzunehmen, dass diese Art von Muster im Unterrichtsalltag sehr wenig Entsprechungen findet und deshalb in den Interviews oft unberücksichtigt blieb.

3.4.3 Analyse der Reaktionen auf Typ-C-Aufgaben

Aufgaben zum Typ C forderten von den Kindern, das Muster eines Aufgabenpäckchens zu sehen, eine unpassende Aufgabe herauszufiltern und diese durch eine passende Aufgabe zu ersetzen. Eine erste Übersicht über die Lösungen (Reparieren und Beschreiben) zum Typ C in den verschiedenen Schuljahren bietet die folgende Tabelle:

	1. Schuljahr	2. Schuljahr	3. Schuljahr	4. Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	40,00	60,00	53,30	80,00
Teilaspekte des Musters beachtet	0,00	23,35	30,00	13,35
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	46,70	6,65	3,30	0,00
nicht bearbeitet	13,30	10,00	13,40	6,65
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent -

Abb. 3.81

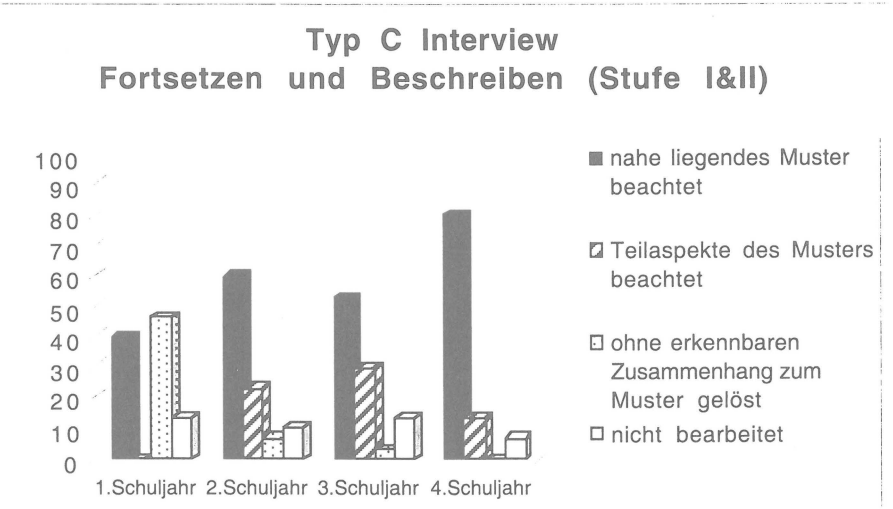


Abb. 3.82

Im ersten Schuljahr ist die Besonderheit zu beobachten, dass die Kinder entweder die Aufgabe im nahe liegenden Muster oder ohne Zusammenhang zur Aufgabenstruktur lösten. Dieses Phänomen kann so erklärt werden: Die Kinder im ersten Schuljahr korrigierten das Muster richtig, sobald sie die 'falsche' Aufgabe identifiziert hatten. In den folgenden Schuljahren konnte hingegen beobachtet werden, dass zwar die richtige Aufgabe markiert, dennoch eine unpassende Ersatzaufgabe gefunden wurde Die Bearbeitungen im zweiten Schuljahr waren jedoch wesentlich 'besser' (im Sinne der Kategorie 1) als im ersten. Auch im dritten Schuljahr fanden über 50% eine Kategorie-1-Lösung, und über 80% konnten die intendierte Aufgabe im Päckchen kennzeichnen. Im vierten Schuljahr konnten über 90% diese Aufgabe ermitteln, und keiner gab eine Lösung an, die mit der innermathematischen Struktur der Aufgabe in keinem Zusammenhang steht.

Es lässt sich auf Grund der rein quantitativen Daten keine durchgängige Entwicklung von Schuljahr zu Schuljahr erkennen. Immerhin 80 bis 90% der Kinder der Schuljahre 2 bis 4 ermittelten die unpassende Störaufgabe. Die hohe Anzahl der Kategorie-1-Lösungen im vierten Schuljahr kann mit der gewachsenen Rechenkompetenz in Verbindung gebracht werden. Diese Erklärung überzeugt aber nicht, da die Päckchen jeweils den Zahlenraum des Schuljahres nicht überschritten und keine vom Lehrplan abweichenden Anforderungen stellten. Es ist festzuhalten: Viertklässler haben offensichtlich einen leichteren Überblick über alle Aufgaben gleichzeitig und können somit eher die Störaufgabe ermitteln als die Kinder, die die Aufgaben ohne Zusammenhang betrachten - so wie viele Kinder der Anfangsklassen es zunächst tun.

Um eine genauere Analyse der Lösungen zu ermöglichen, werden im Folgenden einzelne Interviewausschnitte wiedergegeben und von Schuljahr zu Schuljahr fortlaufend dokumentiert und interpretiert.

1. Schuljahr

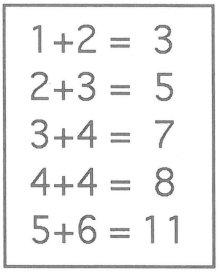


Abb. 3.83

Die Prozentwerte der Kategorien zeigten, dass die Kinder im 1. Schuljahr die Aufgabe (vgl. Abb. 3.83) entweder im nahe liegenden Muster bearbeiteten (40%) und die Summe 4+4 durch 4+5 ersetzten oder eine 'unpassende' Lösung anboten (Kategorie 3; 46,7%). Auch diese letztgenannten Lösungen folgen jedoch einer Logik, die aus der Sicht der Kinder oft verständlich ist.

Eine dieser typischen Reaktionen von Erstklässlern wird im nächsten Interviewausschnitt deutlich:

29	I	... aber eine einzige Aufgabe ist da drin, die ist nen bisschen anders als die anderen ...
30	S	mh, das sieht man ja gleich, das ist die Nummer 11!
31	I	meinst du'
32	S	mhm.
33	I	warum'
34	S	weil 11 ham wer noch gar nicht.
35	I	aha, ihr habt erst bis 10.

(aus Interview 1/IX)

Einige Kinder lernen im ersten Schuljahr zunächst den Zahlenraum bis 10 kennen. In ihm werden auch zunächst alle Rechenarten ausgeführt, bevor der Zahlenraum erweitert wird. Dieser Schülerin war die Zahl 11 nicht unbekannt, auch zweifelt sie nicht an, dass die Aufgabe richtig gerechnet ist, dennoch markierte sie die Aufgabe als 'etwas Besonderes', weil sie den Rahmen des ihr bekannten Unterrichtsmaterials sprengte.

Manchmal fiel die Entscheidung auch auf die Aufgabe 5+6, weil keine weitere 6 im Päckchen zu finden war (vgl. 1./V), weil das Ergebnis höher war als alle anderen Ergebnisse (vgl. 1./VIII) oder, wie ein Kind es beschrieb,

„weil das mit zwei Zahlen geschrieben ist." (1./X)

oder weil ein Rechenfehler vermutet wurde (vgl. 1./VI).

Ähnliches schien auch die nächste Schülerin zunächst anzunehmen, da sie sich nicht ganz sicher war, ob die Aufgabe 5+6 überhaupt korrekt gelöst wurde. Später jedoch erkannte sie das Muster:

1	S	hier die.
2	I	die letzte' warum meinst du das'
3	S	weil 6 plus ... ehm 5 plus 6 ist 9 ... ach, nee, ehm.
4	I	guck noch mal ganz in Ruhe, wir haben ja Zeit. guck dir mal alle Aufgaben in Ruhe an. die sind alle richtig gerechnet, daran liegt es nicht.
5	S	naa, das kapier ich nicht.
6	I	lies mir mal die Aufgaben vor, ohne die Ergebnisse (*deckt die Ergebnisse mit einer Hand ab*), nur die Aufgaben, lies mal vor.
7	S	ehm, 1 plus 2, 2 plus 3, 3 plus 4, 4 plus 4, 5 plus 6.
8	I	mhm. fällt dir da irgendwas auf'
9	S	ach ja, hier ist ne 1 und dann kommt ne 2, und 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6.
10	I	und' war da irgendwo nen Fehler drin'
11	S	ehm, ja, hier sind 2 mal die 4.
12	I	und was müsste da eigentlich sein'
13	S	hier müsste ne 3 sein (*1. Summand*) ... ach nee, hier müsste ne 5 sein (*2. Summand*).

(aus Interview 1./XIII)

In den vorangegangenen Interviews wurde immer wieder deutlich, dass die Ergebnisse - obwohl sie auch ein Muster zeigen, nämlich die Folge der ungeraden Zahlen - eher störend wirkten, wenn die unpassende Aufgabe gesucht wurde. Zu sehr konzentrierten sich die Kinder darauf, ob vielleicht doch ein Rechenfehler in den Aufgaben versteckt sei. Dieses Dilemma stellte sich in den Paper-Pencil-Tests anders dar, da dort die Aufgaben zunächst von den Kindern selbst ausgerechnet werden mussten. Die Fehlerwahrscheinlichkeit führte jedoch auch in diesem Fall immer wieder dazu, dass viele Kinder die unpassende Aufgabe nicht identifizieren konnten.

Natürlich gab es auch Schüler, die dem Interviewer die Antwort zu entlocken versuchten. Auch das Kind im folgenden Interview vermutete die unpassende Aufgabe zunächst hinter 5+6. Als es aber mehrfach danach gefragt wurde, diese Vermutung auch zu begründen, wechselte seine Aufmerksamkeit zwischen Ergebnisfolge und Summandenfolge hin und her:

38	S	bei der hier, glaube ich. (*zeigt letzte Aufgabe*)
39	I	warum vermutest du das'
40	S	weil ... ich versteh das nicht.
41	I	guck dir die Aufgaben mal alle nach der Reihe an (...) lies sie mir vielleicht mal vor, vielleicht fällt dir dann was auf.
42	S	(*liest vor 1 plus 2 gleich 3 ... 3 plus 4 gleich 7*) bin ich da schon vorbei an der falschen'
43	I	weiß ich nicht.
44	S	(*liest weiter*) die falsch ist, soll ich hier reinschreiben'
45	I	welche denkst du denn, dass die falsch ist'
46	S	diese hier (*zeigt wieder auf die letzte*).
47	I	die letzte' warum denkst du das'
48	S	weil das die höchste ist.
49	I	mhm. und sonst sehen alle Aufgaben ziemlich ähnlich aus' oder gibt es eine, die was Besonderes hat'

50	S	ich guck noch mal. ach ja! jetzt kenn ich das: 3, 5, 7, 8, 11 (*zeigt auf die Ergebnisse*)
51	I	mhm.
52	S	so zusammen gehört das, die Zahlen, ne' soll ich die alle hier reinschreiben, hintereinander'
53	I	ja, wir haben immer noch nicht die eine Aufgabe gefunden, die falsch ist, meinst du immer noch, es ist die letzte'
54	S	siehst du die'
55	I	ja. die nen bisschen anders aussieht ...
56	S	umph!! guck mal hier: 1, 2, 3, 4, 5. (*zeigt auf die ersten Summanden*) meinst du die'
57	I	1, 2, 3, 4, 5 ... ja, das ist vorne. und wie ist es in der Mitte'
58	S	ach ja, 2, 3, 4, 4, 6 ... da fehlt die 5!
59	I	wo müsste denn die 5 sein'
60	S	hier da. soll ich die dahinmalen, dahinter'

(aus Interview 1./II)

Der Hinweis der Interviewerin in Zeile 57 ist zunächst als Wiederholung der Kinderantwort zu werten. Das Kind hatte bereits die Folge der Summen und der ersten Summanden nach der Störung durchsucht. Eine konsequente Fortführung dieses speziellen Verhaltens war es nun, die Aufmerksamkeit auf die Folge der zweiten Summanden zu lenken. Das Kind erkannte dann sofort, das unpassende Muster in dieser Folge. Die Erkenntnis selbst wurde nicht von der Interviewerin in das Gespräch gebracht, sondern wurde vom Kind erbracht. Dieser Schüler war stark beeindruckt von den Zahlenfolgen, die ihm unter Typ A begegnet waren. Er erkannte richtig, dass die Ergebnisse wieder eine Zahlenfolge darstellen. Allerdings half ihm diese Erkenntnis nicht, die unpassende '8' in dieser Folge der ungeraden Zahlen zu sehen.

Typisch für die Entdeckung von Zahlenmustern - gerade im Bereich des Typs C - war die Plötzlichkeit, mit der die Erkenntnis eintrat. In Zeile 56 sieht man an dem Ausruf des Schülers, dass ihm ganz unvorhergesehen eine neue Sicht auf die Dinge möglich wird. Seine Bitte, die Interviewerin möchte sich das auch genau anschauen („guck mal hier"), zeugt davon, dass er sein neues Wissen mitteilen möchte.

In diesem Gespräch wurde allerdings auch klar, nur die Auseinandersetzung mit einem Gegenüber, mit der Interviewerin, drängte den Schüler dazu, weiter nach der unpassenden Aufgabe zu suchen. Hätte er die Aufgabe allein lösen müssen, hätte er vermutlich eine unzureichende Antwort gegeben, obwohl er in der Lage war, die verschiedenen Aspekte dieses Musters zu erkennen.

Bei manchen Kindern genügte eine kurze Nachfrage aus, sie in ihrem Urteil zu verunsichern. Diese Frage sollte sie dazu anregen, ihre Entscheidung (erneut) zu begründen oder, zumindest, ihre Beweggründe zu beschreiben:

17	I	... aber eine Aufgabe, die hat sich da reingemogelt, die passt eigentlich gar nicht in das Muster ...
18	S	die 6!
19	I	meinst du die 6' guck dir mal alle Aufgaben in Ruhe an.
20	S	ach, die 4.
21	I	warum die 4'
22	S	weil, äh, 2, 3, 4 (*zeigt auf zweiten Summanden*), da müsste eigentlich die 5 hin.

(aus Interview 1./XI)

Die Beschreibungen der Erstklässler konnten immer der Stufe IIa zugeordnet werden, d.h. die Summandenreihe wurde wiederholt - wie auch im Beispiel oben. Bei den Kindern des ersten Schuljahres ließ sich nicht beobachten, dass eine allgemeinere Sprache gefunden wurde, die von den konkreten Zahlen abstrahiert und z.B. nur den Zuwachs der Zahlen thematisiert (Stufe IIb).

2. Schuljahr

23 + 32 = 55
36 + 36 = 72
25 + 52 = 77
42 + 24 = 66
18 + 81 = 99

Abb. 3.84

Die Summanden sind in diesem Päckchen (vgl. Abb. 3.84) eine zweistellige Zahl und ihre Umkehrzahl (gleiche Ziffern des ersten Summanden, jedoch an umgekehrter Einer- bzw. Zehnerstelle). Die Ergebnisse folgen keiner Musterfolge, auch wenn diese u.U. vermutet werden kann, da die erste Aufgabe mit 55 das kleinste und die letzte Aufgabe mit 99 das größte Ergebnis aufweist. Alle Ergebnisse der 'richtigen' Aufgaben sind Zahlen aus zwei gleichen Ziffern, sogenannte 'Schnapszahlen'.

Oft vermuteten die Kinder auch im zweiten Schuljahr Rechenfehler (vgl. 2./II oder 2./III). Dies kann daran liegen, dass sie noch keine Geläufigkeit beim Rechnen im Hunderterraum hatten.

Die besondere Struktur der Ergebnisse führte manche Kinder auf den richtigen Weg (vgl. 2./VII). Die Ergebniszahlen waren auch besondere Zahlen; das war vielen klar. Bei der Suche nach der richtigen Formulierung tauchten allerdings natürlich umgangssprachliche Beschreibungen:

„weil das hier immer die gemeinsamen Zahlen sind." (2./X)

Das Kind in Interview 2./IV beschrieb die Ergebniszahlen aus gleichen Ziffern genauer:

„weil hier sind immer gleiche Zahlen." (2./IV)

Die Beschreibung der Umkehrzahlen fiel den Kindern keineswegs leicht, da ihnen oft die nötigen Fachausdrücke fehlten, die Stellenwerte kennzeichnen können. Typisch war diese Antwort:

„da ist das immer doppelt und nicht so anders." (2./VII)

Es wurden aber auch präzisere Beschreibungen benutzt, die die Umkehrung der Zehner- und Einerstelle beschrieben:

„rückwärts" (2./XV)

„umgetauscht" (2./VIII)

„umgekehrt" (2./IX oder 2./X)

Allerdings kam es in dieser Aufgabe vor, dass die Ergebnisse so dominant waren, dass eine Ersatzaufgabe gesucht wurde, deren Ergebnis zwar wieder eine 'Schnapszahl' ergibt, die aber mit dem Muster der Summanden nicht im Zusammenhang steht. So gab der Junge in 2./IV z.B. die Ersatzaufgabe 40+48=88 an. Andererseits wurde zwar u.U. das Muster erkannt, dann aber eine Aufgabe gesucht, die wieder 72 ergibt (vgl. 2./V).

Insgesamt wurden 66,7% der Antworten als nahe liegend kategorisiert.

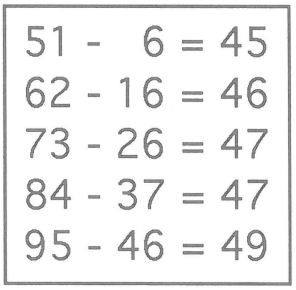


Abb. 3.85

Im zweiten operativen Päckchen (vgl. Abb. 3.85) konnte ähnlich wie im ersten Schuljahr an dem doppelten Auftreten der Zahl 47 erkannt werden, wo die unpassende Aufgabe versteckt ist.

Zudem war der Zuwachs des Subtrahenden um 10 zu erkennen. Der Minuend wächst von Aufgabe zu Aufgabe um 11, wodurch sich eine Ergebniserhöhung von 1 ergibt. 66,7% der Kinder bearbeiteten dieses Päckchen in nahe liegender Weise.

Die erste Aufgabe in diesem Päckchen hatte die Besonderheit, dass der Subtrahend nur aus einer Ziffer besteht, während die anderen zweistellig waren. Diese Augenfälligkeit konnte dazu führen, die erste Aufgabe als 'unpassend' zu identifizieren (vgl. 2./XI und 2./II).

Aber auch über die Ergebnisse konnte die Störaufgabe ermittelt werden. Es wurde von den Kindern erkannt, dass die Störaufgabe wieder das Ergebnis 47 hat, obwohl in der Ergebnisfolge eine 48 auftreten müsste:

„eine von diesen beiden passt hier nicht rein." (2./XIII)

„hier passt die 47 nicht rein. zweimal 47" „hier sind alle Zahlen 45, 46, 47, 47 und 49." (2./XIV)

Die Kinder vermuteten hier in keinem Fall, dass die Differenz von 84 und 37 doch 48 sein könne und somit nur ein Rechenfehler vorliegen würde. Die Interviewerin wies auch mehrfach darauf hin, dass keine Rechenfehler in den Päckchen zu suchen seien, sondern Fehler im Muster.

Der Junge im Interview 2./XV entdeckte die unpassende Aufgabe ebenfalls durch das doppelte Vorkommen von 47 als Ergebnis:

34	S	hier da. (*zeigt vorletzte Aufgabe*)
35	I	aha.
36	S	weil hier wegen dem Ergebnis, kommt das gleiche raus wie drüber, da müsste eigentlich 48 rauskommen.
37	I	mhm.
38	S	dann müsste die auch nicht stimmen oder die. (*zeigt letzte Aufgabe*)
39	I	mhm.
40	S	die passen eigentlich gut hin.
41	I	ja, irgendwas muss ja faul sein, irgendwas muss ja nicht stimmen.
42	S	mh, vielleicht, wenn da ne 8 hinkommt' (*zeigt Einerstelle des Subtrahenden*)
43	I	warum denkst du dass da ne 8 hin muss'
44	S	ja, weil dann würde das einen mehr geben.
45	I	ja' wenn man einen mehr hier hinschreibt, dann gibt es hinten auch ...
46	S	... ach ja, das ist ja jetzt minus. 84-37 ... nee, hier einen weniger, macht da einen mehr, dann muss da ne 6 hin.
47	I	mhm.
48	S	ach ja klar, sieht man da ja.
49	I	(*lacht*) ... jetzt hastes gesehen, ne' erzähl noch mal, was hast du gerade entdeckt'
50	S	da habe ich gesehen, dass da immer Sechsen hinmüssen.

(aus Interview 2./XV)

Im Prozess der mathematischen Überlegungen über die Korrektur der Aufgabe in eine passende nutzt er seine Kenntnisse zur Subtraktion aus (vgl. Zeile 42 ff.). Erst als er die Aufgabe isoliert betrachtet korrigiert hatte, fiel im das zweite Muster des Päckchens auf (Zeile 48). Und er konnte die Stimmigkeit mit diesem zweiten Phänomen als Bestätigung für seine neue Aufgabe benutzen.

Im Interview 2./IX zeigte sich eine erstaunliche Besonderheit: Obwohl die Schülerin hier genau beschrieb, dass

„dreimal 6, 7 und noch mal die 6." (2./IX)

als Einerziffern des Subtrahenden auftreten, beendete sie ihre Entdeckungen mit:

„da fällt mir nix auf." (2./IX).

Sie beschrieb genau, was sie sah, aber ignorierte die Konsequenz. In ihrer Beschreibung ging sie weit darüber hinaus, die Zahlen nur vorzulesen. Sie gruppierte die ersten drei Einerstellen zu „dreimal 6" und nahm dennoch keinen Anstoß an der herausragenden 7. Diese Besonderheit trat noch einmal in Interview 2./XIV auf:

1	S	mh, mit minus ...
2	I	ausgerechnet ist es ja schon, das brauchen wir ja nicht zu rechnen.
3	S	mhm. hier passt die 47 nicht rein, zweimal 47.
4	I	mhm.
5	S	weil, weil, da sind alle Zahlen 45, 46, 47, 47, 49.
6	I	mhm. können wir an der Aufgabe wieder erkennen, was da an der Aufgabe falsch ist'
7	S	nee!
8	I	können wir nicht sehen'
9	S	nee.
10	I	guck dir mal die anderen Aufgaben an, was da immer passiert.
11	S	ah, 62, 16, 2 ... und dann haben sie hier 62 und dann ham sie hier hinten ist ne 2 und vorne ne 1.
12	I	mhm.
13	S	und das ist vorne ... da ist vorne ne 6 und hinten ne 6.
14	I	mhm.
15	S	und hier muss das 4 und ... 84, 48, 48 muss da hin.
16	I	ja, das ist ja nen anderes Muster als in dem Päckchen davor. es kann sein, dass das nen bisschen anders ist. welche Zahlen werden denn immer minus gerechnet' lies mal die Zahlen vor, die minus gerechnet werden.
17	S	mh.
18	I	welche werden abgezogen'
19	S	6, 16, 26, 37, 46.
20	I	mhm. fällt dir da was auf'
21	S	mhm. das ist immer hier 0, 1, 2, 3, 4.
22	I	mhm ... und hinten'
23	S	und hier 6, 6, 6, 7, 6.
24	I	mhm, ok.

S notiert keine Ersatzaufgabe

(aus Interview 2./XIV)

Die Beschreibung in diesem Interview blieb auf der Stufe IIa, da nur die beteiligten Ziffern in einer Art Aufzählung wiedergegeben werden.

In den Interviews wurden ab dem zweiten Schuljahr zwei Aufgaben dieses Formats (Päckchen 1 und 2) bearbeitet. Dies ermöglichte es den Kindern, die Aufgabe des Reparierens zunehmend zu verstehen. Es konnte aber auch zu Verwirrungen führen: Das Kind in 2./VIII zeigt das mit dem Kommentar:

„da ist gar keine." (2./VIII)

Es wunderte sich, dass keine der Ergebniszahlen eine 'Schnapszahl' ist. Auch der Schüler in 2./VI wollte den Subtrahenden 37 dem Minuenden 73 zuordnen, da er so das Muster des ersten Päckchens wieder herstellen konnte.

3. Schuljahr

352 + 523 = 875
516 + 165 = 681
421 + 214 = 635
628 + 286 = 914
219 + 129 = 348

Abb. 3.86

In dem ersten Päckchen des dritten Schuljahres (vgl. Abb. 3.86) bestand eine Schwierigkeit darin, dass an den Ergebnissen kein Muster abgelesen werden konnte. Das Zahlenmuster liegt allein in der Besonderheit der Summandenwahl. Die Summanden tragen jeweils die gleichen Ziffern. Der erste Summand unterscheidet sich vom zweiten Summanden in der Art, dass die Ziffern zyklisch vertauscht sind. Die Zehner- und Einerziffer 'rücken' in der Stellentafel nach links auf die Position der Hunderter- und Zehnerstelle, die Hunderterziffer auf die Einerstelle. Dieses Muster ist komplizierter als das Muster der Umkehrung der zweistelligen Zahlen (vgl. 2. Schuljahr) oder das Muster der ANNA-Zahlen (vgl. 4. Schuljahr). Den Umkehrungen und diesem Muster ist gemeinsam, dass die beteiligten Summanden bzw. Minuend und Subtrahend in jeder einzelnen Aufgabe aus den gleichen Ziffern gebildet werden.

Dass die Ergebnisse keinem Muster folgen, wurde von den Kindern in den Interviews nicht als Nachteil empfunden (53,3% der Antworten wurden der Kategorie 1 zugeordnet). Diese Einschränkung ermöglichte es den Kindern sogar, sich (leichter) nur auf die beteiligten Summanden konzentrieren zu können:

26	S	(*liest die Aufgabenstellung vor:*) eine der Aufgaben passt nicht. schreibe dafür die passende Aufgabe dahinter. die stimmt. *(zeigt auf letzte Aufgabe)*
27	I	ja, richtig ausgerechnet sind die **alle**. aber man ..., die Aufgaben haben was Besonderes, die Zahlen vorne haben was Besonderes, gehören immer wieder zusammen.
28	S	1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
29	I	ach, du guckst jetzt so im ganzen Päckchen. mhm. ich mein aber, die und die Zahl, die gehören zusammen, die und die Zahl gehören zusammen. *(zeigt jeweils zwei Summanden)*
30	S	mhm.
31	I	mhm, was haben die denn Besonderes'

32	S	die, ehm, sind hier wo das Plus sind die einen Zahlen sind immer gleich, nur umgedreht manchmal.
33	I	aha, wie sind die denn umgedreht worden'
34	S	ehm, einmal 352 und einmal 523. sind ehm, ist der 300er als ein Einer geworden.
35	I	mhm, prima, ist das bei jeder Aufgabe so' guck mal'
36	S	mhm.
37	I	überall' eine Aufgabe passt ja nicht, bei einer Aufgabe muss es ja irgendwie ...
38	S	hier die. (*zeigt vorletzte Aufgabe*) doch nicht, passt doch. bei der letzten.
39	I	mhm, wie müsste die denn richtig umgedreht sein'
40	S	100 ... 192.
41	I	darfst du einfach durchstreichen und da hinschreiben.
42	S	drunterschreiben'
43	I	mhm. *S schreibt veränderte Zahl darunter* prima. kannst du das noch aufschreiben, was du grad gesagt hast'
44	S	mhm. *(schreibt ihre Regel auf „Die hunderter werden bei der Nächsten Zahl zu Einer.")*
45	I	prima.
Päckchen II		
46	S	diese Aufgabe passt nicht. *(zeigt vorletzte Aufgabe)*
47	I	warum'
48	S	weil, das, weil da eigentlich müsste da stehen 523. *(verändert die Zahl)* soll ich auch aufschreiben'
49	I	kannst du mir noch mal sagen, ...
50	S	die ehm, die T, was soll ich sagen. die, die Hunderter, werden bei der nächsten Aufgabe immer als Einer.

(aus Interview 3./I)

In Zeile 28 ist diese Aufmerksamkeit jedoch noch nicht auf den Summanden selbst gerichtet, sondern auf alle beteiligten Ziffern, die sich finden lassen. Es wurde 'irgendein' Muster gesucht, das die Interviewerin eventuell zufrieden stellte. Als diese jedoch den Hinweis auf die Summandenpaare gab, erkannte das Kind sofort, dass diese Zahlen in einer Beziehung zueinander stehen. Sein Ausdruck (Zeile 32), „die Zahlen sind immer gleich", bedeutet nicht, dass es die Zahlen nicht als unterschiedlich erkannte. Der Ausdruck bezog sich höchstwahrscheinlich auf die gleichen Ziffern, die in den Zahlen auftreten, da der Zusatz „nur umgedreht manchmal" keinen Sinn macht, wenn das Kind mit 'Zahlen' im ersten Halbsatz die gesamte Zahl gemeint hätte. Es veränderte den unpassenden Summanden im nahe liegenden Sinn.

Auch im 2. Päckchen (vgl. Abb. 3.87) konnte es eine Regel beschreiben. Als es gefragt wurde, die Regel dieses Zahlenmusters zu formulieren, beschrieb es: „die, die Hunderter, werden bei der nächsten Aufgabe immer als Einer." Natürlich meint es mit der „nächsten Aufgabe" den zweiten

Summanden. Wenn man dies bedenkt, dann ging seine Formulierung weit über die Alltagssprache hinaus. Es griff nicht auf ein spezifisches Beispiel zurück, sondern formulierte eine allgemeingültige Regel (Stufe IIb). Wieder gebrauchte es eine allgemeine Sprache mit mathematischen Fachausdrücken (Zeile 50).

Andere Kinder fanden die unpassende Aufgabe zumeist auch, aber die Beschreibungen des Musters blieben auf einer anderen Ebene (Stufe IIa):

41	I	kannst du an den Zahlen was Besonderes entdecken' den und den. *(zeigt Summanden)*
42	S	mhm.
42	I	ja'
43	S	jaa, der hier, der, der hier, der ist zweiter, der wird dann als erstes, der zweite wird als letztes und der dritte und der letzte wird als dritter.
44	I	super. ist das überall so' *S nickt.* ja'
45	S	mhm.
46	I	oder gibt es eine Aufgabe, wo das nicht ganz stimmt' eine Aufgabe muss ja irgendwie falsch sein.
47	S	das stimmt auch *(geht die Aufgaben durch)* ... das auch ... das auch ... da stimmt die nicht. *(zeigt auf vorletzte Aufgabe)*
48	I	mhm.
49	S	weil, ehm, weil da die 2 ist da muss die 2 nach hinten.
50	I	mhm.
51	S	und die 9, hier muss die 2 nach hinten und die 9 hierhin.
52	I	mhm.
53	S	und die 1 muss hierhin.
54	I	mhm, kannste mal durchstreichen und richtig drunterschreiben'
55	S	*(schreibt auf)* ... und jetzt hier die 1 hin, die 9, 2.

(aus Interview 3./III)

An keiner Stelle wurden von dem Kind in 3./III allgemeine oder abstrakte Ausdrücke benutzt. Dem Kind gelingt es, der Interviewerin sein Vorgehen umgangssprachlich mitzuteilen (vgl. Zeilen 43 und 49, 51).

957	846	524	694
- 759	- 648	- 325	- 496
198	198	199	198

Abb. 3.87

Das zweite Päckchen in diesem Schuljahr (vgl. Abb. 3.87) gibt Umkehrzahldifferenzen (vgl. STEINWEG 1997) mit dem Ergebnis 198 vor. Hunderter- und Einerstelle unterscheiden sich also um 2. Wie beim ersten Päckchen in diesem Schuljahr reparierten 53,3% der Kinder die Aufgabe nahe liegend.

Die unpassende Aufgabe wurde in den Interviews in einigen Fällen in 523-325 (der Minuend wird um Eins verringert) geändert. Diese Lösung war auch intendiert. In anderen Fällen änderten die Kinder die Aufgabe in 524-326 (der Subtrahend wird um Eins erhöht). Der erste Fall mit einer nahe liegenden Beschreibung auf Stufe IIb wurde schon im Interviewausschnitt zum ersten Päckchen (3./I) wiedergegeben. Andere Beschreibungen blieben den konkreten Zahlen verhaftet (Stufe IIa). Die Kinder, die sich auf konkrete Zahlen bezogen, konnten aber auch auf diese Weise eine Lösung und eine verständliche Beschreibung finden:

1	S	das ist die 9 am Anfang, da ist die 9 am Ende. die 5 ist in der Mitte, die 5 ist auch in der Mitte. das ist die 7 am Anfang und da, da ist sie am Ende.
2	I	mhm, bei den anderen auch'
3	S	da ist die 8 am Anfang, da ist die 8 am Ende. da ist die 6 am Ende, da ist die 6 am Anfang. und die 4 ist in der Mitte.
4	I	die bleibt, ne'
5	S	ja. die 5 ist am Schluss und sie ist am Anfang ... (*lächelt*) ... die ist falsch!
6	I	ja, können wir die denn reparieren, können wir sie richtig machen. welche Zahl müssen wir ändern'
7	S	die 4.
8	I	was muss denn die 4 sein für eine Zahl'
9	S	die 3.

(aus Interview 3./XI)

In den Fällen, in denen der Subtrahend verändert wurde, versuchten die Kinder, das Ergebnis wieder an die anderen Ergebnisse anzugleichen, ohne zu beachten, dass die Ziffern der jeweiligen Minuenden und Subtrahenden in einer Beziehung zueinander stehen. Dieses Vorgehen fand sich in 3./XII. Das Kind erkannte allerdings, dass die Zehnerzahlen in Minuend und Subtrahend gleich sind:

„... die Zehner sind genau gleich." (3./XII)

Obwohl auch das Mädchen im folgenden Interview die unpassende Aufgabe über die Störung in den Ergebnissen ermittelte, gab sie dennoch eine Ersatzaufgabe an, die nur 99 zum Ergebnis hat:

1	S	hier hat sich aber schon ein Ergebnis reingemogelt ... also muss diese Zahl ja auch ...
2	I	mhm, das ist anders'
3	S	weil, wenn das Ergebnis auch anders ist, muss ja auch die Zahl anders sein.
4	I	mhm.
5	S	hier, die beiden, die sind so vertauscht. (*zeigt auf Subtrahenden und Minuenden der letzten Aufgabe*)
6	I	warum'
7	S	ja, hier, hier sind, hier ... muss ne 5 hin, 6, 7 (*beschreibt jeweils die Hunderterzahl der Subtrahenden der Aufgabenreihe)*
8	I	ja (*unverständlich)* ... guck dir mal die Aufgabe allein an, wie die zusammenhängt. (*zeigt auf letzte Aufgabe*)
9	S	hier, sind die hier, ist oben die, hier ist ... jetzt weiß ich.
10	I	ja'
11	S	hier, hier muss die 4 hin. (*Hunderterstelle des Subtrahenden wird korrigiert)*

(aus Interview 3./XIII)

Während das Mädchen in 3./XIII die letzte Aufgabe gedanklich analysierte, entdeckte sie das Muster (Zeile 9) und korrigierte die unpassende Aufgabe sofort (Zeile 11). Sie beachtete nicht, dass die Differenz jetzt nur 99 und nicht 198 beträgt. Ihr wurde dieser 'Fehler' nicht bewusst, da sie nicht dazu angefordert wurde, die Ersatzaufgabe auch auszurechnen.

In insgesamt fünf Interviews wurde als Ersatzaufgabe 524-425 angegeben. Die Kinder in diesen Interviews wendeten das Prinzip der Umkehrzahl korrekt an. Dies wird z.B. in 3./IV ersichtlich: 'da ist die erste Zahl hinten und die letzte Zahl vorne'.

Ein Kind fand, vermutlich aus dem eben genannten Grund (vgl. 3./XIII), eine Umkehrzahlaufgabe, die ebenfalls nicht zum Ergebnis 198 führt: 259-952. Dieses Kind beachtete nicht, dass der Minuend größer sein muss als der Subtrahend. Das Prinzip der Umkehrung wurde jedoch erfasst. Das Kind beschrieb:

„... weil im Viereck so." (3./XIII),

und bezog sich dabei auf die untereinander notierten Stellen, deren Ziffern vertauscht wurden. Tatsächlich fanden sich die Umkehrungen in einer Art 'Viereck' in der Schreibweise der schriftlichen Subtraktion, die Hunderter- und Einerzahl jeweils untereinander notiert.

Bemerkenswert ist: In 53,3% der Interviews wurde eine Kategorie-1-Lösung gefunden. Dieser Wert unterscheidet sich nicht von den Prozentwerten der

Kategorie-1-Lösungen des ersten Päckchens, obwohl im zweiten Fall ein Zugang über die Ergebnisse möglich war und im ersten Fall nicht.

4. Schuljahr

Als erste Aufgabe vom Typ C (vgl. Abb. 3.88) wurde ein Reihe von besonderen ANNA-Zahlen-Aufgaben mit der gleichen Differenz mit einer Störung angeboten:

7447	4114	6336	8558
- 4774	- 1414	- 3663	- 5885
2673	2700	2673	2673

Abb. 3.88

Obwohl die Unregelmäßigkeit der Ziffern des Subtrahenden in einer Aufgabe auch das Ergebnis veränderte, war diese Besonderheit nicht sofort so offensichtlich wie erwartet. Auch bei dieser Aufgabe fühlten sich viele Kinder dazu veranlasst, die Differenzen nachzurechnen und einen vermeintlichen Rechenfehler zu entdecken (vgl. auch 4./III).

1	S	hier steht, dass irgendeine Aufgabe da nich reinpasst.
2	I	mhm. hast du eine Idee, welche das sein könnte'
3	S	die hier.
4	I	warum'
5	S	mm, weil die Aufgabe nicht stimmen kann.
6	I	warum stimmt die Aufgabe nicht'
7	S	von der 6 hier muss man über den Zehner gehen, und du muss dann hier 1 zurechnen und das sind dann 7- oh...
8	I	mhm' stimmt die Aufgabe nicht'
9	S	die'
10	I	welche du grad eben nanntest, du sagtest ja, dass diese Aufgabe nicht stimmt, dass die nicht in diese Reihe hineinpasst.
11	S	mhm, die passt nicht rein.
12	I	und warum nicht'
13	S	weil, alle anderen haben das Ergebnis 2673 und die nicht.
14	I	mhm. hast du ne Idee, woran das liegen könnte' ist das der einzige Grund, warum die Zahl das ... oder die Aufgabe nicht in die Reihe passt'
15	S	und die beiden andern Aufgaben sind dann hier oben zum Beispiel da is 6336 und die Minusaufgabe is dann 3663, das is dann immer umgekehrt, die beiden Zahlen, die außen stehen, die stehen dann innen.
16	I	mhm.
17	S	und bei der is das nich.
18	I	was is bei der anders'

19	S	die 1, die müsste ja, wo die 4 steht, stehen.
20	I	mhm. wie würde die Aufgabe denn deiner Meinung nach richtig aussehen' damit sie wieder in die Reihe hineinpasst'
21	S	wenn sie 4114 minus 1441 heißen würde.
22	I	mhm. kannst du das Ergebnis denn schon für diese Aufgabe nennen' ohne sie zu rechnen'
23	S	ja.
24	I	und wie lautet das'
25	S	2700, nee 2673.
26	I	mhm. dann schreib die Aufgabe mal da drunter.
S schreibt		

(aus Interview 4./II)

In Zeile 7 wird klar, dass die Schülerin hier die Aufgabe nachrechnete und einen Übertragsfehler vermutete. In der Zeile 13 begründet sie die Entscheidung für die Fokussierung auf diese Aufgabe damit, dass hier nicht 2673 als Ergebnis auftritt. Dies kann einerseits immer noch darauf hinweisen, dass sie einen Rechenfehler vermutete, oder es zeigt, dass sie das Muster der ANNA-Zahlen schon erkannt hatte. Die Nachfrage der Interviewerin forderte sie jedoch auf, weitergehend zu argumentieren. In Zeile 15 gab dann die Schülerin eine komplette Aufbauanalyse dieses Musters. Dabei nutzte sie als Illustration zunächst konkrete Zahlen eines Beispiels (Stufe IIa) und verallgemeinerte dann ihre Aussage (Stufe IIb). Sie wusste auch, dass das Ergebnis nun 2673 ist (Zeile 25). Leider bestand die Interviewerin hier nicht auf einer näheren Erklärung, warum dieses Ergebnis entstehen musste.

Einen Rechenfehler vermutete auch das Kind in 4./XIV. Es konnte die unpassende Aufgabe ermitteln, aber keine Ersatzaufgabe finden, da es sich von der Idee nicht löste, einen Fehler in der vorliegenden Rechnung zu finden:

> „sind genau die gleichen Zahlen bei jeder Aufgabe." „ah, hier!" (*entdeckt die Aufgabe*) „da finde ich keinen Fehler!" (4./XIV)

Insgesamt zeigten die Interviews, dass die ANNA-Zahlen ein relativ offensichtliches Muster haben. Der Großteil der Antworten wurde der Kategorie 1 zugeordnet (93,3%). Die Beschreibungen der Kinder ähnelten sich sehr, wenn sie von

> „umgedreht" (vgl. z.B. 4./VII),
>
> „getauscht" (vgl. z.B. 4./VIII),
>
> „außen und in der Mitte" (vgl. z.B. 4./V)

sprachen. Diese Sprache war im Kontext des Interviewgespräches verständlich, kann jedoch, ohne die Aufgaben im Blick zu haben, missverstanden werden. Im Interview 4./I fand sich ebenfalls ein Satz, der erst im Kontext verständlich wird (Zeile 4):

1	I	hier passt eine Aufgabe nicht. schau sie dir alle mal in Ruhe an und welche könnte wohl nicht passen'
2	S	die! *(Schülerin zeigt auf die richtige Aufgabe)*
3	I	warum'
4	S	die passt nicht da rein. weil, da haben sie immer außen eine Zahl und innen zwei, und dann haben sie das minus, das Gegenteil davon genommen. und hier haben sie die 1 nicht nach außen gesetzt, sondern vertauscht. *(zeigt auf die hinteren beiden Ziffern des Subtrahenden)*
5	I	und wie müsste sie dann richtig aussehen, die Aufgabe'
6	S	*(überlegt)* 1441.
7	I	dann schreib sie mal auf.
		S notiert die richtige Zahlenfolge.
		und schau dir mal alle Ergebnisse an.
8	S	2673, 2673, 2673, ... es ergibt immer das Gleiche ...

(aus Interview 4./I)

Das Gegenteil einer Zahl kann in anderen Kontexten den Kehrwert eines Bruchs, den Zahlenwert als Minuswert, das inverse Element usw. bedeuten. Hier wurde die Sprache nur deshalb verständlich, weil gleichzeitig auf die Aufgabe und die betreffenden Ziffern gedeutet werden konnte.

Auch im vierten Schuljahr fand sich noch häufig eine Argumentation, die sich direkt auf die vorliegenden Ziffern bezog und keinerlei sprachliche Abstraktion deutlich werden ließ:

„oben sind immer z.B. hier 7, 4, 4, 7 ..." (vgl. 4./IV) (Stufe IIa)

Bei der zweiten Zahlenmusterserie (vgl. Abb. 3.89), die in Form eines operativen Päckchens gegeben wurde, ergab sich eine zweite Schwierigkeit.

77 · 13	77 · 26	77 · 38	77 · 52
770	1540	2310	3850
231	462	616	154
1001	2002	2926	4004

Abb. 3.89

Einige Kinder hatten zum Zeitpunkt des Interviews das Verfahren der schriftlichen Multiplikation im Unterricht noch nicht durchgenommen, sodass

sie die Darbietung der Aufgaben zunächst verwirrte. Diese Problematik hatte jedoch auch positive Auswirkungen, da sich die Schülerinnen und Schüler nun leichter auf die beteiligten Faktoren konzentrieren konnten und nicht, wie bei den ANNA-Zahlen, Rechenfehler vermuteten. Sie konnten die Aufgaben nicht nachrechnen und vertrauten der Interviewerin, die die rechnerische Richtigkeit der Aufgaben bestätigte.

Es war im Weiteren verwunderlich, dass es vielen Kindern gelang, die passende Aufgabe zu ermitteln, ohne vorher die schriftliche Multiplikation im Unterricht erlernt zu haben (66,7% der Lösungen im nahe liegenden Muster). Dabei zeigten sie ganz unterschiedliche Vorgehensweisen:

38	I	hier weiß ich, dass ihr das noch nicht gemacht habt im Unterricht, aber du kannst vielleicht trotzdem etwas herausfinden, wenn du dir die Aufgaben wieder anguckst, ob dir da etwas auffällt. du brauchst das also nicht nachzurechnen, es ist wieder richtig gerechnet.
S überlegt		
39	S	also, das ist eine Malaufgabe'
40	I	ja. kannst du etwas sehen, etwas erkennen'
41	S	ich, vielleicht, ist es so, dass bei diesen Zahlen, das will ich gerade rechnen, das .... *(rechnet)* 770 dann da 770 darauf tun und da 770 darauf und das dann immer so, aber das mhm,...
42	I	also, du guckst dir immer diese Zahlen unter dem Strich an, 770, 1440'
43	S	ja. oder das irgendwie, mir fällt etwas auf, irgendwie das, da ist 1001, da ist 2002, mhm; da ist 4004, dann müsste da 3003 herauskommen, so eine Regel. jetzt habe ich gerade schon gemerkt, wenn man auf die Zahl *(13)* 13 drauftut, wird das die Zahl *(26)*.
44	I	ja, wenn man darauf aber 13 drauftut, dann würde eine 52 hinkommen. mhm, vielleicht schreibst du deine Aufgabe dann mal hin.
S schreibt 77 mal 39		
		warum die 77 als erste Zahl'
45	S	weil überall 77 steht.
46	I	okay.
47	S	wenn man da 13 drauftut, dann würde das 52 ergeben, das wäre dann eine Regel. und wenn man das dann ausrechnet, würde da vielleicht auch 303, 3003 herauskommen. jetzt weiß ich natürlich nicht, wie man das rechnet, wir haben das ja noch nicht gerechnet. *(Da die schriftliche Multiplikation von zwei zweistelligen Zahlen im Unterricht noch nicht besprochen wurde, die Schülerin aber großes Interesse an dem Ergebnis hat, errechnen wir dieses gemeinsam.)* ja, dann würde das passen, dann würde da 3003 herauskommen.

(aus Interview 4./III)

Hier wurde zunächst Interesse an den Zwischenergebnissen der Multiplikation gezeigt und richtig erkannt, dass sich das erste Zwischenergebnis um 770 erhöht. In der nächsten Äußerung (Zeile 43) schwenkte die Aufmerksamkeit schnell auf die Ergebnisse über, und es wurde unverzüglich vermutet, dass die 3003 in der Reihe fehlt. Immer noch in dieser Äußerung machte das Kind die Entdeckung ('jetzt habe ich gerade schon gemerkt'),

dass der zweite Faktor sich um 13 erhöht. Diese Erkenntnis führte zu der Ersatzaufgabe 77·39. Da die Aufgabe ohne Lösung aber nicht befriedigend war, errechneten die Interviewerin und das Kind zusammen die Lösung und bestätigten die richtige Wahl der Ersatzaufgabe.

Auch das Kind in dem jetzt folgenden Interview hatte keine Vorerfahrungen zur schriftlichen Multiplikation. Es fand die passende Aufgabe wieder durch den Zuwachs des zweiten Faktors. Die Zusatzfrage der Interviewerin, ob sie denn auch das Muster über die letzte gegebene Aufgabe hinaus fortsetzen könne, beantwortete das Kind schnell und ohne Zögern unter Angabe der Aufgabe und des Ergebnisses.

1	S	mhm. die is wieder anders, weil die ham hier immer ham immer dieses plus das Gleiche hingeschrieben, also einhun, 1001 sind 2002, und da ham die das nicht gemacht und das is dann hier falsch.
2	I	und was muss dahin'
3	S	mhm, zweiun..., 52.
4	I	fällt dir denn noch was anderes auf bei diesen Aufgaben'
5	S	ja, 13 plus 13 sind 26.
6	I	mhm.
7	S	aber, wenn ich 26 plus 26 rechne, das sind dann 52. das sind ...
	S überlegt	
8	I	wie viel werden denn dann immer mehr von der ersten Aufgabe zur zweiten Aufgabe'
9	S	immer dr..., 13.
10	I	mhm, und von der zweiten zur dritten'
11	S	39.
12	I	wie kommst du jetzt darauf'
13	S	weil 13 plus 26 sind 39.
14	I	und wie passt das dann mit der vierten Zahl'
15	S	ja, wenn ich jetzt noch mal 13 dazupacke, sinds 52. mhm. *(streicht etwas durch)* und jetzt kommt immer 1, 2, 1001, 2002, 3003, 4004.
16	I	was meinst du denn, wie die nächste Aufgabe heißen würde'
17	S	mhm 77 mal 65.
18	I	wie kommst du darauf'
19	S	man muss jetzt da wieder 13 dazurechnen.
20	I	und was meinst du, was da für ein Ergebnis stehen würde'
21	S	5005.
22	I	mhm.
23	S	muss ich das jetzt dahin schreiben'
24	I	wenn du möchtest.

(aus Interview 4./VIII)

Wie bei der Aufgabe zu den ANNA-Zahlen fanden sich auch bei diesen Multiplikationen mitunter 'kryptische' Ausdrucksweisen der Kinder. Erst bei genauerer Analyse der Antworten wird deutlich, was in dem folgenden Interview diskutiert wird:

1	I	... jetzt können wir die nächste Aufgabe machen. ohne jetzt auszurechnen, kannst du dir mal wieder das Ergebnis angucken.
2	S	mhm.
3	I	ja' wo denn'
4	S	1001, 2002, 4004. dann müsste da 3003 hin.
5	I	mhm. und wenn du dir mal die Multiplikationsaufgabe anguckst, was müsste denn da stehen, damit da wirklich 3003 rauskommt' was stimmt denn da nicht' kannst ja drunterschreiben. 3003 soll da herauskommen, das hast du ja richtig erkannt.
6	S	soll ich mir jetzt die angucken'
7	I	genau.
8	S	oder die'
9	I	nee, die obere.
10	S	3, 6, dann muss hier 9 hin!
11	I	die 9' wieso'
12	S	weil da immer 3, 6, 9, 12.
13	I	ja genau. kannst ja mal eine durchstreichen und die 9 hinschreiben. mhm, hm. ja, das wars schon zu der (*Aufgabe*).

(aus Interview 4./X)

Dieses Kind richtete sein ganzes Augenmerk nur auf die Einerziffern des zweiten Faktors. Ohne die Folge der Einerziffern mit der unpassenden Ziffer jedoch weiter zu beschreiben, begründete es sofort mit Zeile 12 „weil da immer 3, 6, 9, 12.", dass es die 38 in eine 39 verwandelt sehen möchte. In seiner Beschreibung wechselte es seine Sicht von den Einerziffern auch über die Einerstelle hinaus und beschrieb bei der 52 als zweiten Faktor die 12, die sich in 40+12 wiederfinden lässt. Obwohl das Kind die Zahlen in seiner Beschreibung für seine Zwecke veränderte, kann seine Beschreibung als Stufe IIa (exemplarisches Beschreiben) eingestuft werden, da es nicht von den konkret gegebenen Zahlen abrückte. Die Interviewerin folgte diesem Gedankengang ohne weiteres Nachfragen. Die Sprachebene schien für beide hier gleich zu sein, sodass sie sich in dieser Verkürzung verständigen können. In einem Gespräch mit mehr als zwei Teilnehmenden, z.B. in einem Klassengespräch, wäre es u.U. zu einer breiteren Diskussion dieser Begründung gekommen (vgl. auch PIMM 1991, 21).

In dem folgenden Interview wurde ein neues, nicht vorher intendiertes, durchaus logisches Muster gefunden. Die unpassende Aufgabe wurde zunächst wieder schnell und präzise herausgefunden. Im weiteren Gespräch wurde aber deutlich, dass die Aufgabe in den Augen des Kindes ganz gestrichen werden müsse:

15	S	aah, die ist falsch.
16	I	warum'
17	S	weil 13 plus 26 38 ist und ehm ...
18	I	13 plus 26'
19	S	das sind achtun ... das sind 39. Auf jeden Fall - die ist falsch, weil 26 - wenn man zwei mal 26 rechnen würde, da würde 52 rauskommen.
20	I	mhm.
21	S	und bei der kann man nichts machen. 38 plus 38 ist ja nicht 52.
22	I	also, wenn die verkehrt ist, kannst du sie ja auf jeden Fall schon mal durchstreichen oder ein Kreuzchen daran machen. müsste man jetzt hier für eine andere Aufgabe schreiben, oder willst du die dann ganz weglassen'
23	S	ganz weglassen.
24	I	ach so, und keine andere mehr hinschreiben' oder könnte man noch eine andere schreiben'
25	S	ja, ehm ... 26, wenn man 26 plus 36 rechnen würde ...
26	I	warum 36'
27	S	weil, dann 52 rauskommt.
(...)		
28	I	fällt dir denn bei den Malaufgaben noch was auf'
29	S	ja, dass überall 77 steht.
30	I	ja, und jetzt hast du ja dann wieder die Aufgabe 77 mal 52, die hast du ja schon da stehen, die brauchst du nicht nochmal dazu schreiben. willst du das dann so lassen'
31	S	ja.
32	I	na gut. also streichst du nur die Aufgabe raus'
33	S	ja.

(aus Interview 4./VI)

In dieser Vermutung wurde ein originelles neues Muster beschrieben, bei dem der zweite Faktor von Aufgabe zu Aufgabe verdoppelt wird. Konsequenterweise musste dann die Aufgabe 77·38 (oder auch 77·39) gestrichen werden, um die Folge des zweiten Faktors 13, 26, 52 ... nicht zu stören.

Typ C - Zusammenfassung

Die Bezeichnung der unpassenden Aufgabe als 'falsche' Aufgabe stellte sich in den Interviews als problematisch dar. Die Kinder versuchten verstärkt, einen Rechenfehler zu finden, da aus dem Unterricht solche Übungstypen bekannt waren, in denen ein Fehler aufgedeckt und beseitigt werden muss. Durch die konsequente Beschreibung des 'Fehlers' als Störung, könnte die Verständigung über diesen Typ C der Zahlenmuster erleichtert werden. Eine Vereinfachung der Kommunikation ist aber auch zu erwarten, wenn den Kindern der Typ der Aufgabe immer bekannter wird und sie wissen, dass sie ihr Augenmerk nicht nur auf die Ergebnisse lenken müssen.

Es ist festzuhalten: Ein Muster in den Ergebnissen von operativen Päckchen des Typs C führte nicht zwingend zu besseren Leistungen im Auffinden des

Musters. Wenn dies so wäre, müssten die Leistungen im dritten Schuljahr erheblich schlechter sein als im zweiten oder vierten, da eine der Aufgaben in diesem Schuljahr keine Musterfolge im Ergebnis aufwies. Auch innerhalb des dritten Schuljahres waren die Ergebnisse zum ersten Päckchen mit 53,33% Kategorie-1-Lösungen genau so hoch wie die zum zweiten Päckchen (53,33%). Manchmal konnte jedoch über die Ergebnisse und ihre Musterfolge ein Weg zu der Aufgabe gefunden werden, obwohl die Aufgabe an sich so noch nicht im Unterricht behandelt worden war (vgl. Ausführungen zum 4. Schuljahr).

3.4.4 Zusammenfassung der Interviewstudie

Die Auswertung der *quantitativen* Daten (Fortsetzung und Beschreibung) der Interviewstudie ermöglicht folgende Erkenntnisse:

(1) Die Prozentanteile der Kategorie-1 und -2-Lösungen (nahe liegendes Muster und Teilaspekte des Musters beachtet) stiegen für die Typ-A und -B-Aufgaben im Laufe der Grundschulzeit an. Bei den Typ-C-Aufgaben stiegen sie vom ersten zum zweiten Schuljahr, sanken dann wieder ab und stiegen erneut vom dritten zum vierten Schuljahr an.

(2) Die Anteile der Nichtbeantwortungen (Kategorie 4) zeigten keine einheitliche Tendenz bei den verschiedenen Aufgabentypen. Für den Typ A nahmen sie vom ersten bis zum vierten Schuljahr zu. Beim Typ B blieben sie durchgängig auf sehr niedrigem Niveau. Für den Typ C lagen sie insgesamt auf einem höheren Niveau und nahmen im vierten Schuljahr leicht ab.

(3) Eine Korrelation zwischen der Fortsetzung der figurierten Zahlen im Punktmuster und der Fortsetzung der zugehörigen Zahlenfolge konnte nicht festgestellt werden.

ad (1): Die Ergebnisse der Interviews legten den Schluss nahe, dass die Typ-A- und B-Aufgaben mit zunehmendem Alter eher im nahe liegenden Muster gelöst werden. Es bleibt letztlich jedoch unklar, ob hier von einer

natürlichen Genese des Zahlenmusterverständnisses auszugehen ist. Die Anteile der im nahe liegenden Muster oder in Teilaspekten gelösten Aufgaben des Paper-Pencil-Tests stiegen nicht mit dem Alter der Kinder an. In den Interviews konnten hingegen bei den Typen A und C Anstiege verzeichnet werden. Gäbe es jedoch eine natürliche Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses, so müsste sie sich in jeder Stichprobe und in jeder Form von Befragung niederschlagen. Es ist davon auszugehen, dass gewisse Faktoren die älteren Schülerinnen und Schüler bei den Lösungen unterstützen konnten. Diese Faktoren, die implizit die Ergebnisse zu den Zahlenmusteraufgaben beeinflussen können, werden in der vermeintlich höheren Sprach- und größeren Rechenkompetenz gesehen (s.u. qualitative Ergebnisse). Schülerinnen und Schüler der höheren Grundschuljahre haben jedoch auch weitreichende Erfahrungen als Lernende in der Institution Schule. Dies kann mit 'fortgeschrittener Sozialisation als Schüler' bezeichnet werden. Diese hilft ihnen u.U. in der Interviewsituation und auch in dem schriftlichen Test, die 'erwarteten' Antworten, besser zu antizipieren. Grundsätzlich müsste jedoch eine noch weitergehende Entwicklung im Unterricht gefördert werden.

ad (2): Die Prozentsätze der nicht beantworteten Aufgaben sind im Vergleich zu den schriftlichen Tests in 5 von 12 Fällen höher (Typ C im 1. - 3. Schuljahr und Typ B im 1. und 4. Schuljahr). Die Interviewsituation ermöglichte nicht jedem Kind, eine Lösung zu den Aufgaben zu finden.

Grundsätzlich kann die Interviewsituation zwei Auswirkungen haben: Zum einen konnte die Gesprächssituation die Schülerinnen und Schüler dazu ermutigen, alle Aufgaben zu lösen. Die direkte Konfrontation mit der Interviewerin konnte aber auch dazu führen, dass die Kinder eine vermeintlich falsche Lösung verschwiegen, weil sie sich nicht bloß stellen wollten. Zum anderen konnte das Zögern oder Schweigen der Interviewten die Interviewerin dazu verleiten, zu einer anderen Aufgabe überzugehen.

ad (3): In den Interviews wurde in jedem Schuljahr eine bestimmte Folge von figurierten Zahlen jeweils als Punktmusterfolge und später als Zahlenfolge dargeboten. Durch dieses Design konnte untersucht werden, ob die Lösung der einen Darstellungsform die andere beeinflusst. Diese Beziehung zwischen der Folge der figurierten Zahlen in Form von Punktmustern und

als Zahlenfolge ließ sich jedoch nicht eindeutig nachweisen. Die einzelnen Kinder haben einmal die eine und einmal die andere Form eher im nahe liegenden Muster gelöst. Ein Kind äußerte sich zu dem Zusammenhang dieser beiden Aufgaben. Dennoch waren seine Lösungen zu den Punktmustern und zu der zugehörigen Zahlenfolge unterschiedlich.

Die Interviews stellten an die Kinder höhere Ansprüche als der Paper-Pencil-Test, da sie neben der Fortsetzung des Musters (Stufe I) auch eine Beschreibung (Stufe II) einforderten. Somit ist es nicht erstaunlich, dass die Kategorie-1 und -2-Lösungen in ihren Prozentanteilen manchmal unter den erzielten Anteilen in der Paper-Pencil-Test-Untersuchung lagen. Insbesondere wurden die Unterschiede im 1. Schuljahr bei Typ A und C deutlich. Obwohl die Aufgaben im Interview ausgerechnet vorgegeben wurden, zeigte sich, dass die Prozentwerte der nahe liegenden Lösungen des Paper-Pencil-Tests in 7 von 12 Fällen manchmal weit höher lagen als in der Interviewstudie. Eine Ursache ist neben dem grundsätzlich höheren Anspruch (Fortsetzen und Beschreiben) in der ambivalenten Wirkung der Interviewsituation zu vermuten (vgl. hierzu oben ad (2) zu Nichtbeantwortungen).

Die Interviewstudie ermöglichte einen vertieften Einblick in die Vorgehensweise der Kinder und lieferte auch Ergebnisse in *qualitativer* Hinsicht:

(1) Ältere Kinder nutzten für die Beschreibungen der Zahlenmuster und der beobachteten Auffälligkeiten zunehmend generalisierende Beschreibungen (Stufe IIb), während jüngere Kinder vor allem exemplarische Beschreibungen anboten (Stufe IIa).

(2) Die Kinder waren mit zunehmenden Alter besser in der Lage, gleichzeitig auftretende, unterschiedliche Aspekte eines Musters, z.B. Form und Farbe, zu erfassen und für ihre Fortsetzungen zu nutzen.

(3) Die Rechenkompetenz der Kinder beeinflusste die Lösungsfindung.

(4) Obwohl die Lösungswege der Kinder erwartet vielfältig waren, konnten auch bei den nicht nahe liegenden Lösungen 'typische' Vorgehensweisen erkannt werden.

(5) Die Muster, die Erwachsene als 'offensichtlich' bezeichnen würden, wurden von den Kindern nicht öfter im nahe liegenden Muster fortgesetzt als andere.

ad (1):

> *At every stage of mathematical education we find that new discoveries demand the development of a language that gives the neatest expression to the relations and operations that are being considered. The way is then open for further discoveries through the use of the ideas expressed in language.* (WILLIAMS/SHUARD 1982, 9)

Die Beschreibungen der Erstklässler zu den Typ-A-Aufgaben konnten grundsätzlich der Stufe IIa des Zahlenmusterverständnisses zugeordnet werden. Mit zunehmendem Alter ermöglicht die gewachsene Sprachkompetenz eine Ablösung von der exemplarischen Beschreibung hin zu einer generalisierenden (Stufe IIb). Ältere Kinder beschrieben aber nicht grundsätzlich generalisierend, sondern griffen insbesondere bei den Typ-A-Aufgaben auf exemplarische Beschreibungen zurück. Das Verwenden von Zahlen und Ziffern (die direkt in der Aufgabe auftraten) in der Beschreibung deutet jedoch nicht zwingend auf die Stufe IIa hin. Die Zahlen konnten von den Kindern umgedeutet werden und für andere Zahlen (als eine Art Variable) oder gleiche Muster gleichzeitig exemplarisch wie auch generalisierend stehen.

ad (2): In den Interviews wurde deutlich, dass Kinder mit zunehmendem Alter besser in der Lage waren, Muster in ihrer Ganzheit zu überschauen. Insbesondere wurde dieses deutlich an den Typ-B-Aufgaben, in denen Aspekte der Form und der Farbe kombiniert auftraten. Ebenso wurden die kombinierten Folgen im ersten Schuljahr tendenziell so gesehen, dass ein Muster (zumeist die konstante Folge) in der Fortsetzung ignoriert wurde. Gezielte Nachfragen, die einen Konflikt zwischen der 'vereinfachten' Lösung und der gegebenen Folge auslösen sollten, förderten keinen neuen Lösungsansatz. In der Tendenz neigten die Kinder der Anfangsklassen eher dazu, einen erkannten Teilaspekt des Musters zu generalisieren.

ad (3): Eine gute Rechenkompetenz konnte für die Lösungsfindung hilfreich sein. So konnten Zahlenfolgenmuster einfacher erkannt werden, wenn die

Differenzen richtig berechnet werden konnten. Eine gewisse Geläufigkeit von arithmetischen Fertigkeiten (z.B. des Einmaleins) ermöglichte einen schnelleren Überblick über mögliche Beziehungen.

Die Rechenkompetenz ist jedoch keine notwendige Bedingung dafür, eine Lösung zu finden. Dies wurde besonders bei der Aufgabe zum Muster in schriftlichen Multiplikationen deutlich. Obwohl die Kinder den Algorithmus nicht beherrschten, konnten sehr viele das nahe liegende Muster erkennen und die Störaufgabe ermitteln. Die fehlende Rechenkompetenz war in einigen Fällen sogar hilfreich, da diese Kinder keine Rechenfehler in der Aufgabe suchten, sondern die Beziehungen der Faktoren gezielt analysierten.

ad (4): Trotz kleinster Unterschiede tauchten einzelne individuelle Lösungsansätze auch bei anderen Kindern erneut auf. Diese Lösungen durch nicht nahe liegende Überlegungen konnten deshalb manchmal als 'typisch' identifiziert werden. Insbesondere galt dies für die Lösung der Zahlenmauernaufgabe durch Betrachtung des Zielsteins und nicht über die Folge der Basissteine. Die Darstellung zu diesem typischen Vorgehen war jedoch abhängig von der gegebenen Aufgabe, da sie verstärkt (bei ca. der Hälfte der Lösungen) dann auftrat, wenn die Zielsteinfolge durch glatte Zehnerzahlen gebildet wurde (s.o. Typ A 'Zahlenmauern').

'Typisch' war auch die Identifikation der Aufgabe 5+6 als unpassende Aufgabe in der Typ-C-Aufgabe im ersten Schuljahr. Obwohl diese Aufgabe das Muster nicht stört, wurde sie von mehr Kindern als unpassend empfunden als die eigentliche Störaufgabe 4+4 (s.o. Typ C 'Päckchen').

Die Kinder gingen in ihren Lösungen manchmal 'Umwege', da sie in Rechenfertigkeiten, wie z.B. den Einmaleinsreihen, unsicher waren. Auffällig war die bei mehreren Kindern vorzufindende Tendenz bei den Zahl&Partnerzahlen, nicht die multiplikative Struktur zu untersuchen, sondern durch die Umkehroperation (Division) die Lösung zu ermitteln (s.o. Typ A 'Zahl&Partnerzahl').

ad (5): In den Zahlenmusterinterviews wurde bestätigt, dass Muster, die Lehrerinnen oder Erwachsene als 'offensichtlich' empfinden, z.B. die äußere Form bei figurierten Zahlen oder das Erkennen einer unpassenden

Störaufgabe an dem einzig herausfallenden Ergebnis, für Kinder keineswegs auch offensichtlich sind. Die Aufmerksamkeit der Kinder richtete sich mitunter auf ganz andere Spezifika und ließ so die Leistungen bei den vermeintlich 'leichten' Aufgaben stark absinken (vgl. die geringen Forsetzungen im nahe liegenden Muster bei figurierten Zahlen im Paper-Pencil-Test).

Die Auswertung der Typ-C-Aufgaben des dritten Schuljahres zeigt außerdem eindeutig, dass ein Muster in den Ergebnissen eines Päckchens, das das Muster auf den ersten Blick offensichtlicher machen würde, keine Auswirkungen auf die Prozentanteile der nahe liegenden Lösungen hat.

3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse beider Studien

Der Paper-Pencil-Test und die Interviewstudie sollten einen Einblick in das Zahlenmusterverständnis von Kindern liefern. Die Ergebnisse dürfen dabei nur als erste grobe Einschätzung gesehen werden. Die Stichprobe von 257 Tests und 60 Interviews ist verhältnismäßig klein und nur ansatzweise repräsentativ. Zusätzlich ist zu beachten: Die Antworten und Reaktionen geben zwar Auskunft darüber, welche Idee das betreffende Kind im Moment für adäquat hält, aber es kann keine Sicherheit darüber bestehen, dass dasselbe Kind bei einer anderen Gelegenheit nicht eine völlig andere Lösung angeben würde.

> *...that he did not use a particular strategy or concept merely indicates a choice of strategy. It does not indicate an inability to use alternatives.* (LITHERLAND 1997, 13)

Viele Faktoren, wie kognitive Kompetenzen, die Motivationsproblematik oder der Kontext des Tests bzw. der Interviewsituation (vgl. LITHERLAND 1997), die einen Test oder ein Interview beeinflussen, entziehen sich einer Bewertung.

Aussagekräftig bleiben die Ergebnisse jedoch, um erste Trends in den Reaktionen der Kinder auf die Aufgaben aufzuzeigen.

> *... every particular is also a sample of a larger class. In this sense, what has been learned about a particular can have relevance for the class to which it belongs.* (EISNER 1998, 103)

EISNER sieht den Wert von qualitativen Studien darin, dass sie für weitere Forschungen hilfreich sein können, hilfreich in dem Sinne, dass sie zwar keine garantierten Aussagen über die Reaktion der Kinder in ähnlichen zukünftigen Situationen machen können, aber eine Leitlinie geben können („... provides us with a guide, not a guarantee" EISNER 1998, 105). Diese Leitlinie verweist weniger auf die wirklich zu erwartenden Reaktionen der Kinder, als auf die Stellen im Lehr-Lernprozess, denen weiterhin besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden soll (vgl. EISNER 1998, 98 ff.). Die

Ergebnisse der vorliegenden Studien können demnach Anhaltspunkte für die zukünftige Untersuchungen liefern.

Beide Studien stellten eine Erstbegegnung der Kinder mit Zahlenmustern dar. Es bleibt also vorab festzuhalten, dass die Kinder keine Berührungsängste mit den Aufgaben gezeigt haben. Die Lösungen konnten mit ca. 60 bis 88% (Paper-Pencil-Test) und 40 bis über 94% (Interviewstudie) den Kategorien 1 und 2 zugeordnet werden; d.h. weit mehr als die Hälfte der Kinder fand einen geeigneten Zugang zu den Zahlenmustern. Die Ansätze der Kinder deuten auf ein hohes Potential hin, zielgerichtet, aktiv und motiviert an Zahlenmustern zu arbeiten. Den Aufgaben selbst konnte ebenfalls ein großes Entdeckungspotential bescheinigt werden. Sie boten vielfältige Anknüpfungspunkte für individuelle Lösungen und Überlegungen. Somit lässt sich feststellen, dass eine Grundlage für eine produktive, vertiefte Auseinandersetzung mit Zahlenmustern gegeben ist.

Die Kinder akzeptierten die Aufgaben grundsätzlich in der dargebotenen Form, und versuchten, den mathematischen Strukturen auf die Spur zu kommen. Dabei waren Erstklässler eher mehr motiviert als Kinder der höheren Grundschuljahre. Es bedurfte keiner extrinsischen Motivation oder einer Anlehnung an die sogenannte 'Lebenswirklichkeit' der Kinder. Strukturorientierte Aufgaben benötigen somit keine vermeintlich motivationsfördernde Einkleidung, sondern wecken bei den Kindern von sich aus Interesse.

Die Antworten zu den verschiedenen Aufgaben zeigten klar, dass komplexe Zusammenhänge, z.B. von zwei Musteraspekten innerhalb einer Aufgabe, mit zunehmendem Alter leichter erfasst werden (vgl. Typ B Interviewstudie; MEYER 1977). Ältere Kinder zeigten, bedingt durch die höhere Sprachkompetenz, gute Ansätze von generalisierenden Beschreibungen, die noch weiter ausgebaut werden können.

Der individuelle Zugang der Kinder zu den Aufgaben wurde häufig durch einen nicht erwarteten Fokus der Aufmerksamkeit bestimmt. Besonders auffällig waren hier die Lösung der Zahlenmauern von der Zielsteinfolge aus oder die ungewöhnlichen, fast umständlichen Erklärungen für die Lösung der Zahl&Partnerzahl-Aufgaben.

Lösungsprozesse zu Zahlenmusteraufgaben können, wie andere Problemlösungen der Mathematik auch, auf mehreren Wegen gefunden werden, und sind von individuellen Strategien abhängig. Zudem können zu einer Aufgabe oft verschiedene denkbare Ergebnisse gefunden werden. Für die weitere Beschäftigung mit Zahlenmustern im Unterricht mahnen diese Ergebnisse dazu, die unerwarteten und nur scheinbar umständlichen Denkwege der Kinder nicht nur zu akzeptieren, sondern im Unterricht selbst zu thematisieren. In der interaktiven Reflexion kann Bewusstheit für verschiedene Vorgehensweisen und das eigene Denken entwickelt werden. Kinder, die ähnliche Vorgehensweisen genutzt haben, können so bestätigt werden, andere können neue Zugangsweisen erfahren.

DONALDSON erinnert daran, dass manche Kinder schon durch ihre Eltern auf gewissen Gebieten gefördert werden. So kennen viele von uns die Lernsituationen beim Sprachlernprozess, bei dem scheinbar beiläufig die Metaebene der Sprache integriert und erfahrbar gemacht wird: „Manche Eltern reden mit ihren Kindern *über* Wörter, spielen Wortspiele mit ihnen und ähnliches mehr“ (DONALDSON 1982, 101). Diese Chancen gilt es auch im Mathematikunterricht wahrzunehmen (vgl. auch DONALDSON 1982, 118).

> *Bewußtheit entsteht in der Regel dann, wenn wir stutzig werden, und, anstatt sofort zu handeln, innehalten, um die verschiedenen Verhaltensmöglichkeiten im Geiste durchzugehen.* (DONALDSON 1982, 105 f.)

Die abstrakte Struktur der Zahlenmuster ist es gerade, die ein ‘Stutzigwerden’ erlaubt und somit einen Lernfortschritt ermöglicht (vgl. auch DEWEY 1974). Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen weisen darauf hin, dass die Entdeckungspotentiale, die die Zahlenmusteraufgaben bereithalten, und die Potentiale der Kinder, die ohne unterrichtliche Vorbereitung eine hohe Bereitschaft und Qualität der Auseinandersetzung mit Zahlenmustern zeigten, eine fruchtbare und lohnenswerte Aktivität im Mathematikunterricht der Grundschule grundlegen.

Es ist davon auszugehen, dass ein Verständnis für Muster gezielt unterrichtet werden muss. Dies konnten auch die englischen Forschungen in Leeds insbesondere zum Bereich der Zahlenfolgen festhalten:

> *It could not be expected to occur ‘naturally’ in all classrooms, and would have to be taught more actively.* (THRELFALL 1999, 27)

Beide in dieser Arbeit vorliegenden Studien liefern keine Ergebnisse zum Begründungsverhalten der Kinder (Zahlenmusterverständnis Stufe III). Es konnten keine spontanen Begründungsäußerungen, die auf ein inneres Begründungsbedürfnis schließen ließen, ausgemacht werden. Dies deute darauf hin, dass das Begründen eine Fähigkeit ist, die im sozialen Kontakt mit Erwachsenen entwickelt werden muss. Aufschlüsse darüber können nur Interaktionsstudien liefern:

> *Der Anlaß für die Konstruktion neuer mathematischer Beziehungen wird letztlich durch eine externe Aufforderung an das Individuum in der sozialen Interaktion herangetragen.* (STEINBRING 2000b; vgl. auch STEINBRING 2000a)

4 Resümee und Ausblick

> Das «staubtrockene Zeug» hat mit dem Leben, wie wir es kennen, außerordentlich viel zu tun. Denn paradoxerweise verhält es sich so, daß unsere erfolgreichsten praktischen Aktivitäten - wie beispielsweise in allen Bereichen der Technik - nicht möglich wären, wollten wir das mühevolle Unternehmen aufgeben, auch ohne den stützenden Raum vertrauter Ereignisse folgerichtig zu denken und zu handeln. Um uns mit größtmöglichem Erfolg mit der Umwelt auseinandersetzen zu können, ist es erforderlich, sich an der *Struktur* der Dinge zu orientieren. Es ist unumgänglich sich die Fähigkeit zur Handhabung von *Systemen* und die Abstraktion von Formen und Mustern anzueignen.
>
> DONALDSON (1982, 86)

In dieser Arbeit wurde versucht, die Auseinandersetzung von Kindern mit Zahlenmustern im Mathematikunterricht der Grundschule mathematisch, pädagogisch und psychologisch zu begründen. Abschließend sollen die wichtigsten Ergebnisse kurz zusammengefasst werden.

Mathematische Grundlage

Aus heutiger Sicht ist die Mathematik als 'Wissenschaft von den Mustern' zu verstehen (vgl. Kap. 1.1). Die Muster kennzeichnen die innere Struktur des Faches sowie seine Anwendungen, und sie begründen seine Ästhetik. Verständnis für Mathematik erschließt sich nicht durch passive Rezeption, sondern ist an die eigenaktive Auseinandersetzung mit Mustern geknüpft (vgl. Kap. 1.2, 1.3 und 1.4).

Die heutige Sicht des Faches ist tief in der Geschichte verwurzelt, und sie bezieht sich nicht etwa nur auf die höhere Mathematik, sondern gerade auch auf die elementare Mathematik, die eine ganz besondere Reichhaltigkeit an Mustern aufweist (vgl. Kap. 1.5).

Wenn die Mathematik in der Grundschule unverfälscht unterrichtet werden soll, muss arithmetischen und geometrischen Mustern schon auf dieser frühen Stufe zentrale Bedeutung eingeräumt werden.

Mathematik ist als Wissenschaft von den Mustern naturgemäß abstrakt. Dieser Besonderheit darf und braucht sich der Mathematikunterricht der Grundschule nicht zu entziehen.

Pädagogische Grundlage

Eine tiefere Analyse zeigte, dass die Auffassung von der Mathematik als Wissenschaft von Mustern in höchstem Maße pädagogisch bedeutsam ist.

Anhand der Interpretation eines Schülerdokuments konnte die mathematische Aktivität mit Zahlenmustern als 'Spiel' im besten pädagogischen Sinn nachgewiesen werden, in klarer Abgrenzung zu den oberflächlichen 'Lernspielen', von denen die Schule heute überflutet wird (vgl. Kap 2).

Die aktive Auseinandersetzung mit Zahlenmustern ist geprägt durch ein Wechselspiel des Kindes mit Mustern: Der aktiv Handelnde nimmt Muster wahr, wirkt auf sie ein und baut sie aus. Umgekehrt wirken die Muster auf den Handelnden zurück und beeinflussen die nächsten Handlungsschritte. Dies lässt sich pädagogisch als exploratives Spiel beschreiben (vgl. Kap. 2.3) und unter Bezug auf SCHILLERS Anthropologie bildungsphilosophisch vertiefen: Der spielerische Umgang mit Mustern schafft den notwendigen Ausgleich zwischen der formalen Gesetzmäßigkeit der Mathematik und der ungebundenen Spontaneität des Menschen (vgl. Kap. 2.4). Die hohe Beziehungshaftigkeit der inneren mathematischen Strukturen und die Gestaltungskraft des Mathematiktreibenden lassen sich kognitiv nicht erschöpfend beschreiben. Ästhetische Aspekte haben in der Arbeit mit Mustern konstitutive Bedeutung (Ästhetik als Performance - Unterricht als Performance; vgl. Kap. 2.5).

Psychologische Grundlage

Durch einen Paper-Pencil-Test (vgl. Kap. 3.1 und 3.2) und durch eine Interviewstudie (vgl. Kap. 3.3. und 3.4) wurde im Rahmen dieser Arbeit versucht, dem Verständnis von den Zahlenmustern, das Grundschulkinder in verschiedenen Schuljahren aufweisen, auf die Spur zu kommen.

Hauptergebnisse dieser Untersuchung sind (vgl. Kap. 3.5):

Die in Zahlenmusteraufgaben liegenden Entdeckungspotentiale sind sehr hoch und ermöglichen unterschiedliche Zugangsweisen und verschiedene Lösungen.

Obwohl die beteiligten Kinder keine unterrichtliche Vorerfahrungen zum Thema Zahlenmuster hatten, war weit über die Hälfte von ihnen in der Lage, Zahlenmuster zu erkennen und zu beschreiben. Bei einzelnen Aufgaben reichte der Anteil der nahe liegenden Lösungen über 90%. Damit ist nachgewiesen, dass für eine systematische Behandlung von Zahlenmustern im Unterricht eine gute Grundlage besteht.

Bei der Darbietung der Testaufgaben wurde bewusst auf Einkleidungen und Beziehungen zur realen Lebenswelt der Kinder verzichtet. Dass sich die Kinder motiviert mit den Aufgaben befassten, ist ein klares Indiz dafür, dass Mathematik auch in ihrer reinen Form kindgemäß ist. Für das weithin akzeptierte Dogma, Mathematik müsse immer mit der Lebenswelt der Kinder in Verbindung gebracht oder künstlich verpackt werden, gibt es keine empirische Bestätigung.[45]

Die höheren Anteile an nicht bearbeiteten Aufgaben bei älteren Kindern lassen sich nicht auf die Ablehnung der Aufgaben, sondern auf andere Faktoren (Vermeidung von falschen Lösungen etc.) zurückführen (vgl. Kap. 3.3 und 3.5).

Der kindliche Zugang zu Zahlenmustern ist allerdings oft anders, als von Erwachsenen erwartet. So wurde z.B. die 'Offensichtlichkeit' der Muster der figurierten Zahlen von den Kindern nicht als solche gesehen.

In den Tests konnte keine spontane Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses im Laufe der Grundschulzeit nachgewiesen werden. Jedoch wurden qualitative Unterschiede in den Antworten der jüngeren und älteren Kinder deutlich. Ältere Kinder konnten auf Grund fortgeschrittenerer Sprachkompetenz eher generalisierende Beschreibungen liefern als jüngere.

Ebenso konnte der positive Einfluss einer guten Rechenkompetenz beobachtet werden, die jedoch keineswegs notwendig zur Lösungsfindung ist. Auch Kinder, die 'schlecht' rechnen oder gewisse Rechenverfahren noch nicht beherrschen, können durchaus Muster erkennen und beschreiben.

---

[45] Vgl. hierzu auch DEWEY 1974, 30 und KRAUTHAUSEN 1998, 39.

Folgerungen für den Unterricht

Die Tests haben gezeigt, dass das Zahlenmusterverständnis der Stufen I (Erkennen) und II (Beschreiben) spontan deutlich wird. Ein Begründungsbedürfnis (Stufe III) konnte nicht festgestellt werden.

Daraus ist zu schließen, dass sich ein vertieftes Verständnis für Zahlenmuster, das auch Begründungen einschließt, erst in einer durch den Unterricht angeleiteten Auseinandersetzung mit Zahlenmustern entwickelt (vgl. STEINBRING 2000b).

Zahlenmuster gehören zu den 'nicht-privilegierten' Unterrichtsinhalten (vgl. STERN 1998). Sie bedürfen daher einer gezielten Förderung. Der heutige aktiv-entdeckende Mathematikunterricht bietet hierfür geeignete Rahmenbedingungen und ermöglicht sowohl Kindern als auch Lehrerinnen und Lehrern einen unverfälschten Zugang zur Mathematik als Wissenschaft von Mustern, der geeignet ist, die Sperren gegenüber diesem Fach aufzubrechen: Wie HUIZINGA beschreibt (vgl. Kap. 2.3), kann von Wissen eine 'Zaubermacht' ausgehen. Aber ebenso kann das Wissen eine 'Machtverschiebung' ermöglichen und die Mathematik in ihrer Unnahbarkeit und Undurchschaubarkeit 'entzaubern'.

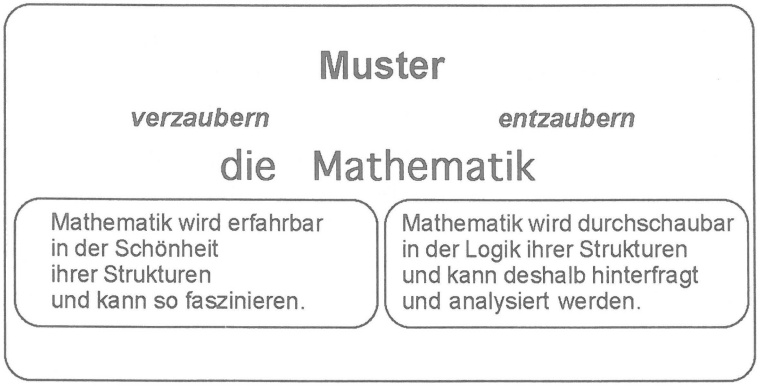


Abb. 4.1

Der weit verbreitete Glaube, man könne Kindern die reine Mathematik nicht zumuten, sondern müsse das Fach erst pädagogisch zubereiten, ist unberechtigt. Ganz im Gegenteil: Erst die bewusste Auseinandersetzung mit ihrer Struktur ermöglicht die Entzauberung der 'Übermacht' Mathematik und bereitet gleichzeitig auch den Boden für 'bezaubernde Momente' bei der Erforschung von Mustern.

Eine echte - im Sinne von wahrhaftig - Auseinandersetzung mit echter, authentischer Mathematik findet auf der Basis des Spiels statt. Die mathematischen Fragestellungen tragen umso weiter, je mehr versucht wird, ein wirkliches Spiel zu ermöglichen. Das ist so zu verstehen, dass nur die Mathematik in ihrer eigenen Strukturhaftigkeit wirklich ein Anlass zu echter - im Sinne von authentisch - Exploration sein kann. Diese Auseinandersetzung erlaubt es erst, der Struktur auf die Spur zu kommen, den dahinter liegenden Mustern Geheimnisse zu entlocken und nicht zuletzt das Kind als aktiven Lernenden ernst zu nehmen.

Die Voraussetzung für die mathematische Tätigkeit als Spiel ist, dass Mathematik nicht in festgelegten und festlegenden Aufgabenformen erscheint, sondern durch Muster lebendig gestaltet wird und sich lebendig gestalten lässt. Das „Zahlenmauerbuch" konnte Tim nur deshalb gestalten, weil er das Übungsformat der Zahlenmauern kennen gelernt hatte (vgl. Kap. 2). Tim wurde nicht durch eine rezeptive und lineare Übungsform inspiriert, sondern durch ein *Format*, das Raum für Eigenproduktionen und Schöpfungen bot. Die 'Öffnung des Unterrichts' hin zu einer mathematischen Tätigkeit als Spiel kann nur in vom *Fach* aus entwickelten Lernumgebungen gelingen. Die hohe Flexibilität bzgl. der Schwierigkeitsgrade der einzelnen Aufgaben, der Voraussetzungen, Mittel und Niveaustufen der Bearbeitung, die aus der mathematischen Substanz und dem Entdeckungspotential der Aufgaben erwächst, ermöglicht es, dass *ein* Übungsformat für *alle* Kinder gleichermaßen Anlass zum Spielen mit mathematischen Mustern werden kann (vgl. WITTMANN 1996).

Spiel ermöglicht eine Verbindung von Mathematik und Ästhetik. Im Spiel lässt sich die abstrakte Welt der Mathematik erleben. Die Aufgaben ergeben einen Sinn, wenn sie spielerisch durchdrungen werden, die Zusammenhänge werden durchschaut, wenn nach einiger Exploration in einem 'Aha-Erlebnis' (vgl. BURTON in Kap. 1.2 und auch ROTA in Kap. 1.4) die Muster erkannt und als schön empfunden werden. Das Theoriegebilde

Mathematik nimmt im Spiel 'lebende Gestalt' an (vgl. SCHILLER in Kap. 2.4) und ermöglicht hier einen Zugang auch und gerade für Kinder.

Wie in der Arbeit gezeigt, ist ein solcher Ansatz nicht nur mathematisch, sondern vor allem pädagogisch wohlbegründet. Lehrerinnen und Lehrern der Grundschule diese Einsicht zu vermitteln, wird eine fundamentale *gemeinsame* Aufgabe von Mathematikdidaktik und Pädagogik im 21. Jahrhundert sein.

> *Mathematik ist ein grandioses Spiel des Geistes, und als solches müßte sie in den Schulen erscheinen.* (RUPRECHT in HISCHER 1998)

Literatur

Almy, Millie (1988). Das freie Spiel als Weg der geistigen Entwicklung. in *Das Kinderspiel*. Andreas Flitner (Hrsg.). München: Piper & Co.: 205 – 221

Baltzer, Eduard (1983). *Pythagoras der Weise von Samos: Ein Lebensbild, Nachdruck von 1868.* Heilbronn: Verlag Heilbronn

Becker, Oskar (1964). *Grundlagen der Mathematik in der geschichtlichen Entwicklung. Zweite, erweiterte Auflage.* Freiburg, München: Karl Alber

Becker, Oskar (1965). *Zur Geschichte der griechischen Mathematik.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Becker, Oskar und Joseph Hofmann (1951). *Geschichte der Mathematik.* Bonn: Athenäum

Boydston, Jo Ann (1985). *"How we think" and selected Essays 1910–1911. The Middle Works of John Dewey 1899–1924. Band 6.* Carbondale, Edwardsville: Southern Illinois University Press

Bruner, Jerome S. (1973). Der Akt der Entdeckung. in *Entdeckendes Lernen*. Heinz Neber (Hrsg.). Weinheim, Basel: Beltz: 15 – 27

Bunk, Gerhard P. (1996). "Innovationsorientierte Aus– und Weiterbildung." *Beiträge zur Gesellschafts– und Bildungspolitik. Istitut der deutschen Wirtschaft Köln* 206(1): 16 –28

Burton, Leone (1999). "The Practices of Mathematicians: What do they tell us about coming to know Mathematics?" *Educational Studies in Mathematics* 37: 121 – 143

Capelle, Wilhelm (1935). *Die Vorsokratiker: Die Fragmente und Quellenberichte*. Leipzig: Alfred Körner

Conway, John H. und Richard K. Guy (1997). *Zahlenzauber: Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser

Courant, Richard und Herbert Robbins (1992). *Was ist Mathematik? 4., unveränderte Auflage*. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest: Springer

Czwalina, Arthur (1952). *Arithmetik des Diophantos aus Alexandria*. Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht

Damerow, Peter und Wolfgang Lefèvre (1981). *Rechenstein, Experiment, Sprache: Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften*. Stuttgart: Klett–Cotta

Davis, Philip J. und Reuben Hersh (1996). *Erfahrung Mathematik. Aus dem Amerikanischen von Jeannette Zehnder, zweiter, korrigierter Nachdruck der Sonderausgabe*. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser

Devlin, Keith (1997). *Mathematics: The Science of Patterns. Second Printing*. New York: Scientific American Library

Dewey, John (1974). *The Child and the Curriculum and The School and Society. 12. Auflage*. Chicago, London: The University of Chicago Press

Dewey, John (1993). *Demokratie und Erziehung: Eine Einleitung in die philosophische Pädagogik*. Weinheim, Basel: Beltz

Diels, Hermann (1966). *Die Fragmente der Vorsokratiker: griechisch und deutsch. 12. unveränderte Auflage. Erster Band*. Dublin, Zürich: Weidmann

Donaldson, Margaret (1982). *Wie Kinder denken*. Bern, Stuttgart, Wien: Huber

dtv (1987). *Wörterbuch zur Psychologie. W. D. Fröhlich*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag

Eisner, Elliot W. (1998). *The Enlightened Eye: Qualitative Inquiry and Enhancement of Educational Practice*. Upper Saddle River (New Jersey), Columbus (Ohio): Prentice Hall

Euklid (1969). *Die Elemente: Buch I–XIII (übersetzt von Clemens Thaer)*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Feynman, Richard P. (1995). What is Science? in *Internalizing physics: Making Physics Part of One's Life: Eleven Essays of Nobel Laureates.* D.K. Nachtigall (Hrsg.). Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization: 99 – 112

Flitner, Andreas (1996). *Spielen – Lernen: Praxis und Deutung des Kinderspiels. 10., überarbeitete Auflage.* München, Zürich: Piper

Freudenthal, Hans (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe: Band 1 und 2.* Stuttgart: Klett

Freudenthal, Hans (1981). "Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics?" *For the Learning of Mathematics* 2(1): 30 – 33

Galling, Kurt (1962). *Religion in Geschichte und Gegenwart. 3. Auflage, Band VI.* Tübingen: JCB Mohr

Gellert, Uwe (1998). *Von Lernerfahrungen zu Unterrichtskonzeptionen: Eine soziokulturelle Analyse von Vorstellungen angehender Lehrerinnen und Lehrer zu Mathematik und Mathematikunterricht.* Berlin: Verlag für Wissenschaft und Forschung

Gellert, Uwe (1999). "Vorstellungen angehender Grundschullehrerinnen von Schülerorientierung. Eine Analyse von Unterrichtskonzeptionen im Kontext universitärer Lehrerbildung." *Journal für Mathematik–Didaktik* 20(2/3): 113 – 137

Gericke, Helmuth (1996). *Mathematik in Antike und Orient, 4.Auflage.* Wiesbaden: Fourier

Giesecke, Hermann (1998). *Pädagogische Illusionen: Lehren aus 30 Jahren Bildungspolitik.* Stuttgart: Klett–Cotta

Gow, James (1884 (reprint 1968)). *A Short History of Greek Mathematics.* New York: Chelsea Publishing Company

Gray, Eddie und David Tall (1992). "Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept." *Mathematics Teaching*(142): 6–10

Grundschulverband (1999a). "BundesGrundschulkongress1999." *Aktuell Grundschulverband* II. Quartal(66): 5 – 13

Grundschulverband (1999b). "BundesGrundschulKongress." *Aktuell Grundschulverband* III. Quartal(67): 12 – 16

Hadamard, Jacques (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover

Hargreaves, Melanie, John Threlfall et al. (1999). Children's Strategies with Linear and Quadratic Sequences. in *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. Anthony Orton (Hrsg.). London, New York: Cassell

Hasse, Helmut (1952). *Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht*. Baden–Baden: Verlag für angewandte Wissenschaften

Heath, Sir Thomas (1921 (reprint 1965)). *A History of Greek Mathematics: Vol. I From Thales to Euclid.* Oxford: Clarendon Press

Hefendehl–Hebeker, Lisa (1998). "Mathematik erleben zwischen Faszination und Fremdheit." *mathematik lehren* 86: 4 – 7

Heintz, Bettina (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Wien, New York: Springer

Henningsen, Jürgen (1983). Spieltheorie. in *Enzyklopädie Erziehungswissenschaft: Handbuch und Lexikon der Erziehung in 11 Bänden: 1. Band*. Dieter Lenzen (Hrsg.). Stuttgart: Klett–Cotta: 214 – 231

Hersh, Reuben (1997). *What is Mathematics, Really?* London: Jonathan Cape

Heuvel–Panhuizen, Marja van den (1990). Realistic Arithmetic/Mathematics Instruction and Tests. in *Contexts, Free Productions, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*. K. Gravemeijer, M. van den Heuvel–Panhuizen und L. Streefland (Hrsg.). Utrecht: 53–79

Heuvel–Panhuizen, Marja van den (1994). Leitungsmessung im aktiv – entdeckenden Mathematikunterricht. in *Am Rande der Schrift. Zwischen*

Sprachenvielfalt und Analphabetismus. Hans Brügelmann und et al. (Hrsg.): Libelle: 87–107

Heuvel–Panhuizen, Marja van den (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD–ß Press, Center for Science and Mathematics Education

Hirschberger, Johannes (1965). *Geschichte der Philosophie: Altertum und Mittelalter. Band 1*. Base, Freiburg, Wien

Hischer, Horst (1998). "Zur Zielorientierung für einen künftigen Mathematikunterricht – oder anders gesehen: Mensch, Technik, Spiel und Irrtum." *Manuskript zum Vortrag im Mathematikdidaktischen Kolloquium der Universität Dortmund am 25.06.1998*

Huizinga, Johan (1987). *Homo Ludens: Vom Ursprung der Kultur im Spiel*. Reinbeck bei Hamburg

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1969). *Gesammelte Werke: Band 1*. New York: Chelsea Publishing Company

Jansen, Huub (1996/97). "Toetsen en realistisch reken – wiskunde – onderwijs." *willem bartjens* 16(2): 4 – 12

Kenney, Patricia Ann, Cathy G. Schloemer et al. (1993). Communicating about Alternative Assessment beyond the Mathematical Classroom. in *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Mogens Niss (Hrsg.). Dodrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers: 187 –196

Kerslake, Daphne (1994). "Pattern Power?" *Micromath* 10(1): 23–24

Kline, Morris (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press

Kooij, Rimmert van der (1991). Pädagogik und Spiel. in *Pädagogik: Handbuch für Studium und Praxis*. Leo Roth (Hrsg.). München: Ehrenwirth: 241 – 253

Krauthausen, Günter (1998). *Lehren – Lernen – Lehren Lernen: Zur mathematikdidaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe*. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago, London: The University of Chicago Press

Kühnel, Johannes (1925a). *Neubau des Rechenunterrichts. Band 1.* Leipzig: Julius Klinkhardt

Kühnel, Johannes (1925b). "Hauptgedanken des neuen Rechenunterrichts." *Württembergische Lehrerzeitung*: 34 – 36

Kultusministerium des Landes Nordrhein–Westfalen (1991). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in NRW: Mathematik (unveränderter Nachdruck von 1985)*. Frechen: Ritterbach

Lakatos, Imre (1979). *Beweise und Widerlegungen*. Braunschweig: Vieweg

Legler, Wolfgang (1978). "Ästhetische Erziehung und Lerntheorie." *Zeitschrift für Pädagogik* 24(5): 709 – 727

Legler, Wolfgang (1980). *Von der motorischen Aktivität zur kritischen Praxis: Untersuchungen zur Bedeutung gegenständlicher Tätigkeiten in der ästhetischen Erziehung*. Hamburg

Legler, Wolfgang (1983). "Allgemeindidaktische Modelle und ihre Folgen für die Fachdidaktik der Ästhetischen Erziehung." *Zeitschrift für Pädagogik* 29(4): 579 – 593

Legler, Wolfgang (1992). Kunstpädagogik und Soziokultur. in *Kunstpädagogik und Soziokultur: Perspektiven für Netzwerke kultureller Bildung*. Wolfgang Legler und Raimund Lehmann (Hrsg.). Hannover: Bund Deutscher Kunsterzieher: 29 – 52

Legler, Wolfgang (1995). "'... weil es die Schönheit ist, durch welche man zu der Freiheit wandert' Anmerkungen zum historischen verständnis und zur Aktualität von Friedrich Schillers Briefen 'Über die ästhetsiche Erziehung des Menschen' aus dem Jahre 1795 (Teil I – III)." *BDK–Mitteilungen*(2 – 4): 10 – 14, 18 – 26, 3 – 8

Leontjew, Alexejew Nikolajew (1988). Realistik und Phantasie im Spiel. in *Das Kinderspiel*. Andreas Flitner (Hrsg.). München: Piper & Co.: 133 – 138

Litherland, Barry (1997). "Reflections on the Assessment of Mathematics." *The Mathematics Teacher* 159: 10 – 14

Litt, Theodor (1929). *«Führen» oder «Wachsenlassen»: Eine Erörterung des pädagogischen Grundproblems. Zweite verbesserte Auflage.* Leipzig, Berlin: Teubner

Lümkemann, Tim (1995). Das Zahlenmauerbuch. in *Mit Kindern rechnen.* Gerhard N. Müller und Erich Ch. Wittmann (Hrsg.). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule: 81 – 83

Malik, Fredmund (1996). *Strategie des Managements komplexer Systeme: Ein Beitrag zur Management–Kybernetik evolutionärer Systeme. 5., erw. und erg. Auflage.* Bern: Haupt

Meschkowski, Herbert (1984). *Problemgeschichte der Mathematik.* Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut

Meyer, Hermann (1977). Das Strukturieren von Reizen und Informationen. in *Gestalttheorie und Fachdidaktik.* Kurt Guss (Hrsg.). Darmstadt: Steinkopf: 84–102

Müller, Gerhard N. und Erich Ch. Wittmann (1990). "Beschreiben und Begründen im Rahmen von Rechenübungen." *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker:197 – 200

Müller, Gerhard N. und Erich Ch. Wittmann (1995). *Mit Kindern rechnen.* Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule

Müller, Gerhard N., Heinz Steinbring et al. (1997). *10 Jahre "mathe 2000": Bilanz und Persepktiven.* Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett

Neill, Alexander Sutherland (1970). *Theorie und Praxis der antiautoritären Erziehung: Das Beispiel Summerhill.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt

Neugebauer, Otto (1973). *Mathematische Keilschriftentexte. Zweiter/Dritter Teil. Reprint.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer

Nicomachus, of Gerasa (1926). *Introduction to Arithmetic. Übersetzung von Martin Luther D'ooge.* London: Macmillan

Niss, Mogens (1993). *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dodrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers

Orton, Anthony (1999). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London, New York: Cassell

Otto, Gunter (1998). *Lehren und Lernen zwischen Didaktik und Ästhetik: Band 3: Didaktik und Ästhetik*. Seelze: Kallmeyer

Otto, Gunter (2000). Ästhetik als Performance – Unterricht als Performance? (Vorabdruck). in *Fachdidaktik als Wissenschaft und Forschungsfeld in der Schweiz: Aktuelle Lage und Zukunftsperspektiven in internationaler Sicht*. Hans Badertscher, Hans–Ulrich Grunder und Armin Hollenstein (Hrsg.). Bern: Paul Haupt

Otto, Gunter und Maria Otto (1986a). "Ästhetisches Verhalten: Ein Plädoyer für eine vernachlässigte Erkenntnisweise." *Kunst+Unterricht*(107): 13 – 19

Otto, Gunter und Maria Otto (1986b). "Ästhetisches Verhalten lehren als Aufgabe der Grundschule." *Grundschule*(6): 14 – 19

Peiffer, Jeanne und Amy Dahan–Dalmedico (1994). *Wege und Irrwege: Eine Geschichte der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Piaget, Jean (1972). *Theorien und Methoden der modernen Erziehung*. Wien, München, Zürich

Pimm, David (1991). Communicating mathematically. in *Language in mathematical education*. Kevin Durkin und Beatrice Shire (Hrsg.). Milton Keynes, Philadelphia: Open University Press: 17 – 23

Platon (1950). *Der Staat: Über das Gerechte. eingeführt von Gerhard Krüger, übertragen von Rudolf Rufener*. Zürich: Artemis

Reidemeister, Kurt (1972). *Das exakte Denken der Griechen: Beiträge zur Deutung von Euklid, Plato, Aristoteles*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Robbins, Frank Egelston und Louis Charles Karpinski (1926). *Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic*. London: Macmillan Company

Röhrs, Hermann (1981). Das Spiel – ein Urphänomen des Lebens. in *Gesammlte Schriften: Band 6*. Hermann Röhrs (Hrsg.). Weinheim: Deutscher Studien Verlag: 384 – 409

Röhrs, Hermann (1983). Das Spiel – eine Grundbedingung des Lebens. in *Gesammelte Schriften: Band 6*. Hermann Röhrs (Hrsg.). Weinheim: 335 – 361

Röhrs, Hermann (1984). Vom Sinn des Lebens–Spiels. in *Gesammelte Schriften: Band 6*. Hermann Röhrs (Hrsg.). Weinheim: Deutscher Studien Verlag: 362 – 383

Rota, Gian–Carlo (1996). *Indiscrete Thoughts*. Basel: Birkhäuser

Sallwürk, Ernst von (1911). *Adolf Diesterweg: Darstellung seines Lebens und seiner Lehre. 1. Band*. Langensalza: Hermann Beyer & Söhne

Scherer, Petra (1996). "Evaluation entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Quantitative oder qualitative Forschungsmethoden?" *Heilpädagogische Forschung* XXII(2): 76 –88

Scheuerl, Hans (1994). *Das Spiel: Untersuchungen über sein Wesen, seine pädagogischen Möglichkeiten und Grenzen: Band 1*. Weinheim, Basel: Beltz

Schiller, Friedrich (1956). *Über die ästhetische Erziehung des Menschen: Schillers Briefe und Historische Schriften – eine Auswahl von Ruth Bunge*. Schwelm: Schule und Nation

Schiller, Friedrich (1967a). Über die ästhetische Erziehung des Menschen in einer Reihe von Briefen. in *Sämtliche Werke. Fünfter Band. 4., durchgesehene Auflage*. Gerhard Fricke und Herbert G Göpfert (Hrsg.). München: Carl Hanser Verlag: 570 – 669 und 1136 – 1157

Schiller, Friedrich (1967b). Über Anmut und Würde. in *Sämtliche Werke. Fünfter Band. 4., durchgesehene Auflage*. Gerhard Fricke und Herbert G Göpfert (Hrsg.). München: Carl Hanser Verlag: 433 – 488

Seidl, Horst (1984). *Aristoteles: Zweite Analytiken. Mit Einleitung, Übersetzung und Kommentar: griechisch – deutsch*. Würzburg: Königshausen und Neumann

Selter, Christoph (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe: grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem zweiten Schuljahr*. Wiesbaden, Deutscher Universitäts Verlag

Selter, Christoph (1995). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht: Grundsätzliche Bemerkungen und Unterrichtsbeispiele zum Einmaleins. in *Mit Kindern rechnen*. Gerhard N. Müller und Erich Ch. Wittmann (Hrsg.). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule

Selter, Christoph und Hartmut Spiegel (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett

Singh, Simon (1997). *Fermat's Last Theorem: The story of a riddle that confounded the world's greatest minds for 358 years*. London: Fourth Estate

Skemp, Richard R. (1976). "Realtional Understanding and Instrumental Understanding." *Mathematics Teaching*(11): 20 – 26

Steinbring, Heinz (1997). Unterrichtsforschung. in *10 Jahre "mathe 2000": Bilanz und Persepktiven*. Gerhard N. Müller, Heinz Steinbring und Erich Ch. Wittmann (Hrsg.). Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett

Steinbring, Heinz (2000a). "Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung." *Journal für Mathematik–Didaktik* 21(1): 28 – 49

Steinbring, Heinz (2000b). "Die Entstehung mathematischen Wissens im Unterrichtsprozess – Folge individueller Erkenntnis oder Ergebnis einer sozialen Konstruktion?" *Beiträge zum Mathematikunterricht*

Steinweg, Anna Susanne (1997). "'Die 7, 3 und 5 – und dann ist das ganz umgekehrt!' Beschreiben und Begründen von Zahlenmustern mit Umkehrzahlen." *Grundschulzeitschrift* 11(110): 22, 43 –44

Stern, Elsbeth (1998). Schneisen im Dschungel wissenschaftlicher Fragestellungen. in *Jahrbuch Grundschule: Fragen der Praxis – Befunde der*

Forschung. H. Brügelmann, M. Fölling–Albers und S. Richter (Hrsg.). Seelze: Friedrich: 123 – 127

Szabó, Arpád (1958). "'Deiknymi' als mathematischer Terminus für 'Beweisen'." *Maia* 10: 1 – 26

Taylor, Richard und Andrew Wiles (1995). "Ring–theoretic properties of certain Hecke algebra." *Annals of Mathematics*(141): 553 – 572

Threlfall, John (1999). Repeating Patterns in the Early Primary Years. in *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. Anthony Orton (Hrsg.). London, New York: Cassell: 18 – 30

Waerden, Bartel Leendert van der (1977). *Die vier Wissenschaften der Pythagoreer*. Opladen: Westdeutscher Verlag

Waerden, Bartel Leendert van der (1979). *Die Pythogoreer: Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Zürich, München: Artemis

Wiles, Andrew (1995). "Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem." *Annals of Mathematics*(141): 443 – 551

Williams, Elizabeth May und Hilary Shuard (1982). *Primary Mathematics Today. 3rd edition for the age of the calculator*. Harlow: Longman

Winter, Heinrich (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. 2. verbesserte Auflage*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg

Wittmann, Erich Ch. (1983a). "Wissenschaftsorientierung: schon Dewey wußte die Antwort." *SchulPraxis* 5(3): 8 – 10

Wittmann, Erich Ch. (1983b). "Von Punktmustern zu quadratischen Gleichungen." *mathematik lehren*(83): 50 – 53

Wittmann, Erich Ch. (1984). *Clinical Interviews Embedded in the "Philosophy" in Developing Teacher's Attitudes and Skills*. Mini Conference at ICME 5, Adelaide, Royal Danish School Education: Dep. of Mathematics

Wittmann, Erich Ch. (1985). "Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik." *mathematik lehren* 11: 7 – 11

Wittmann, Erich Ch. (1994). "Legen und Überlegen – Wendeplättchen im aktiv–entdeckenden Rechenunterricht." *Die Grundschulzeitschrift*(72): 44 – 46

Wittmann, Erich Ch. (1996). "Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus." *Grundschulunterricht* 43(6): 3 –7

Wittmann, Erich Ch. (1997). *Operative Proofs in Primary Mathematics. Proccedings of Topic Group 8: Proofs and Proofing: Why, when and how?* 8th International Congress on Mathematical Education, Seville, Spain, Centrahill Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA)

Wittmann, Erich Ch., Gerhard N. Müller et al. (1996). *Das Zahlenbuch: Mathematik im 1. Schuljahr*. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag

Wittmann, Erich Ch., Gerhard N. Müller et al. (1997). *Das Zahlenbuch: Mathematik im 4. Schuljahr*. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag

Wittmann, Erich Ch. und Gerhard N. Müller (1988). "Wann ist ein Beweis ein Beweis?" in *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*. Peter Bender (Hrsg.). Bielefeld: Cornelson: 237 – 257

Wittmann, Erich Ch. und Gerhard N. Müller (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Band 1*. Stuttgart, Düsseldorf: Klett

Wittmann, Erich Ch. und Gerhard N. Müller (1991). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Band 2*. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett

Wußing, Hans et al. (1997). *Vom Zählstein zum Computer: Mathematik in der Geschichte: 1. Überblick ud Biographien*. Hildesheim

Zankov, Leonid Vladimirovic (1973). *Didaktik und Leben*. Hannover: Schroedel

Quellen der Abbildungen

Abb. 2.1 LÜMKEMANN in MÜLLER/WITTMANN 1995, 81

Abb. 2.2 LÜMKEMANN in MÜLLER/WITTMANN 1995, 83

Abb. 2.5 WITTMANN et. al. 1996b, 51

Abb. 2.7
bis 2.19 computererzeugte Abschriften der Abbildungen
aus Tim LÜMKEMANNs Zahlenmauerbuch
(teilweise veröffentlicht in MÜLLER/WITTMANN 1995, 81 - 83)

Abb. 3.1 KRUTESKII 1976, 74

Alle anderen Abbildungen, Tabellen und Graphiken wurden von der Verfasserin selbst erstellt oder geben Lösungen der Kinder wieder, die an den Forschungsstudien beteiligt waren.

Anhang A

- **Überlegungen zum mathematischen Hintergrund der Aufgaben des Paper-Pencil-Tests und der Interviewstudie**

Mathematischer Hintergrund

1 Figurierte Zahlen[1]

Inhalt sind die ersten Dreieckszahlen, die ersten Rechteckszahlen, die Quadratzahlen und die Trapezzahlen. Die Darstellung in Punktmustern ermöglicht ein Auffinden der Muster, ohne die Zahlen zuvor als spezielle Zahlen erkannt zu haben.

So wird z.B. eine Fortsetzung der ersten Rechteckszahlen in dieser Aufgabenstellung erwartet:

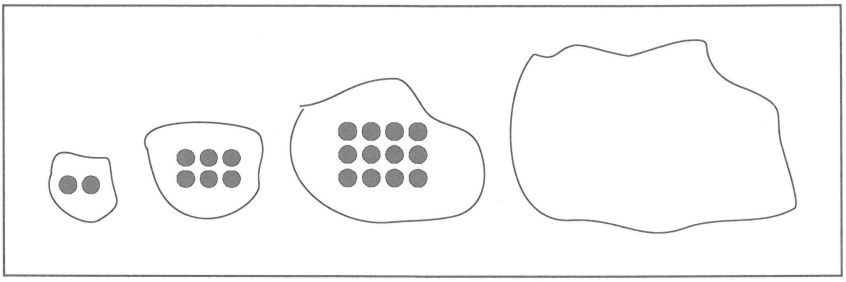


Abb. A1

Die Beschreibung der dahinter liegenden Fortsetzungsregel führt dazu, dass die Rechteckszahl $R_n = n \cdot (n+1)$ an sich definiert werden kann.

Die Quadratzahlen n^2 können in unterschiedlicher Punktmusterform wiedergegeben werden. Einerseits als Punktmusterquadrate, dann als Treppen, die aus zwei benachbarten Dreieckszahlen zusammengefügt ist, und als Summe von zwei Dreieckszahlen, die wiederum zu einem Quadrat ergänzt werden.

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad Q_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

Trapezzahlen, die im vierten Schuljahr des Paper-Pencil-Test auftreten, sind ebenfalls als Zusammenfügung von zwei anderen figurierten Zahlen zu

[1] Vgl. auch Ausführungen in Kap. 1.5.

beschreiben. Trapezzahlen bestehen aus einer bestimmten Quadratzahl und einer zugehörigen Dreieckszahl der Form:

$$T_n = Q_n + D_n = n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

2 Zahlenfolgen

Mathematisch unterscheidet man zwei Arten von Folgen. Bei den arithmetischen Folgen wird fortlaufend dieselbe Zahl addiert.

$a_0 = x$ und $a_1 = x + b$ und $a_2 = x + 2b = a_1 + b$ usw.

Innerhalb dieser Forschung gilt: $x \in \mathrm{N}, b \in \mathrm{Z}$

Bei den geometrischen Folgen wird fortlaufend multipliziert:

$g_0 = x$ und $g_1 = x \cdot b$ und $g_2 = x \cdot b \cdot b = x \cdot b^2 = g_1 \cdot b$ usw.

Für diese Folgen gilt hier: $x \in \mathrm{N}, b \in \mathrm{N}$

Die Folgenglieder lassen sich immer durch das erste Folgenglied darstellen (explizite Darstellung). Der Zuwachs kann auch von Glied zu Glied verfolgt und somit das nächste Folgenglied gefunden werden (rekursive Darstellung).

Beispiele für sogenannte Grundfolgen:

- 1, 2, 3, 4, 5, ... (Folge der natürlichen Zahlen)
- 1, 3, 5, 7, 9, 1, 13, ... (Folge der ungeraden Zahlen)
- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... (Folge der geraden Zahlen)
- Einmaleinsreihen (z.B. 3, 6, 9, ...; 5, 10, 15, 20, ...), die natürlich auch über das Zehnfache hinaus fortgesetzt werden können

Durch Variation dieser Muster und Kombination zweier Folgen (eine Folge auf geraden, die andere auf ungeraden Plätzen) lässt sich eine unendliche Vielfalt von Folgen erzeugen.

Bei der Fortsetzung von Folgen ist zu beachten, dass der Anfang einer Folge diese Folge *keineswegs eindeutig* definiert. Auch wenn die hier behandelten Folgen durch Variation einiger weniger Grundelemente konstruiert sind, sind auch andere Regeln denkbar und mathematisch möglich, die den gleichen Folgenanfang erzeugen.

So kann z.B. diese Folge 3, 5, 6, 5, 9, 5, 12, ... (2. Schuljahr Interviewstudie) einerseits im nahe liegenden Muster fortgesetzt werden: 3, 5, 6, 5, 9, 5, 12, 5, 15, 5, 18, 5, 21, 5 ... ; andererseits aber z.B. auch mit 3, 5, 6, 5, 9, 5, 12, 5, 9, 6, 5, 3, ... Selbst für die Fortsetzung 3, 5, 6, 5, 9, 5, 12, 0, 0, 0, ... ließe sich eine mathematische Regel finden.

Die Aufgabe muss daher lauten, *eine* (nicht *die*) Regel zu finden, welche den Folgenanfang richtig beschreibt, und die Folge nach dieser Regel fortzusetzen.

Fibonacci-Folgen

Fibonacci-Folgen (4. Schuljahr) werden gewonnen, indem man die ersten beiden Zahlen beliebig wählt und die nächsten Zahlen durch Addition der jeweils vorhergehenden bestimmt (vgl. WITTMANN/MÜLLER et al. 1997, 85).

Beispiele: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

2, 0, 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, ..

Sei $a_o = x$ und $a_1 = y$, so ergibt sich $a_2 = x + y$ und weiter $a_3 = x + y + y = x + 2y$ usw. Werden Fibonacci-Folgen in der Grundschule thematisiert, werden x und y immer mit natürlichen Zahlen belegt.

In den hier vorliegenden Aufgaben wird jeweils die Grundfolge mit den ersten beiden Gliedern gleich 1 benutzt.

3 Folgen mit geometrischen Objekten

Diese Art der Muster ist eng verknüpft mit dem Bereich Geometrie. Durch die Art und Weise der Anordnung der geometrischen Objekte kann sie jedoch nahtlos an die Zahlenfolgen angeschlossen werden. Die Anzahlen der Objekte spielen eine größere Rolle als ihre geometrische Anordnung im Raum. Diese Anordnung ist nur linear. Durch Verknüpfung von unterschiedlichen Objekten und Einfärbungen in schwarz und weiß werden Kombinationen geschaffen, die den schon aufgeführten Zahlenfolgen stark ähneln. Die geometrischen Objekte selbst stehen nicht im Fokus der Aufmerksamkeit.

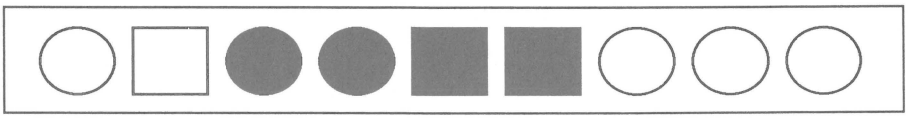


Abb. A2

So muss z.B. in der hier aufgeführten Folge, neben der alternierenden Färbung erkannt werden, dass die Anzahl der Kreise der Folge der natürlichen Zahlen folgt. Auch die Anzahl der Quadrate folgt dieser Folge. Arithmetisch 'übersetzt' könnte z.B. 1, 1, 2, 2, 3, 3, usw. diese Folge beschreiben, oder auch 1+1, 2+2, 3+3, usw., um deutlicher zu machen, dass jeweils zwei Gruppen ein Pärchen bilden, welches eine Farbe trägt. Stets spielt der Kardinalzahlaspekt eine Rolle.

4 Zahl&Partnerzahl (Funktionen)

In diesem Aufgabentyp wird einer Zahl jeweils eine Partnerzahl nach einem bestimmten Muster zugeordnet. Innerhalb der Untersuchungen werden drei verschiedene Typen der Aufgabe Zahl und Partnerzahl genutzt, die sich wie folgt darstellen lassen.

I $f(x) = x + b$ mit $x \in N, b \in Z$

II $f(x) = ax$ mit $x \in N, a \in N$

III $f(x) = ax + b$ mit $x, a \in N, b \in Z$

Im ersten Fall wird jeder Zahl ein bestimmter Wert zugezählt. Da b Element der ganzen Zahlen ist, kann auch eine Verminderung von x um den Wert b erreicht werden.

Zahl	2	4	5
Partner	5	9	

Abb. A3

Im ersten Teil der Forschung (Paper-Pencil-Test) treten diese Aufgaben in Form von Wertetabellen auf. Abb. A3 zeigt das Beispiel von f(x)=2x+1.

In den Interviews werden keine Wertetabellen benutzt, da sie die Aufmerksamkeit der Kinder zumeist auf eine Folgenstruktur innerhalb einer Zeile lenken. Diese Folge hilft jedoch nur dann weiter, wenn sie lückenlos vorgegeben ist für alle x, d.h. für die Folge der natürlichen Zahlen. Diese Lückenlosigkeit kann auch mental erzeugt werden. So kann der Wert für x=6 ermittelt werden,

wenn x=5 und x=7 angegeben sind. Dafür muss jedoch der Funktionszusammenhang schon durchschaut worden sein.

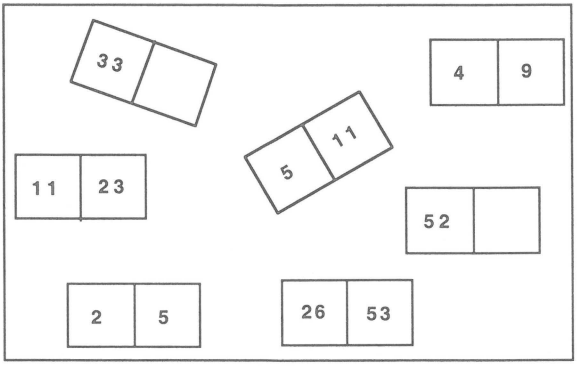


Abb. A4

Die Zahl und ihr Funktionswert (die Partnerzahl) werden in der Interviewstudie als Pärchen auf einer Art „Dominostein" (Abb. A4) den Kindern vorgelegt.

Die Abbildung zeigt die Aufgabenstellung zu f(x)=2x+1 in dieser neuen Darstellungsform.

So ist es möglich, jedes Pärchen separat zu betrachten und einen möglichen Zusammenhang zu vermuten, der dann an den anderen Pärchen verifiziert werden muss. Im Beispiel kann z.B. vermutet werden, dass für x=2 durch Addition von 3 das Ergebnis 5 erzielt wird; f(2)=5. Wenn diese Idee jedoch an den anderen Paaren überprüft wird, zeigt sich, dass eine andere Regel (f(x)=2x+1) gefunden werden muss, um zur Lösung zu kommen, die alle Pärchen erklärt.

Mehrere Zahlenpaarsteine gehören jeweils zu einer bestimmten Funktion. Durch die Ergänzung des fehlenden Funktionswertes von einigen Zahlen („Wie heißt der Partner?") kann die mathematische Struktur beschrieben werden. Ebenso kann eine allgemeine Regel formuliert werden, die ohne Variablen auskommt aber dennoch den Funktionsterm beschreibt (z. B. „Immer mal 5 plus 10" usw.).

5 Operative Päckchen

Operative Päckchen sind Aufgabenkolonnen, die Beziehungen innerhalb der beteiligten Aufgaben, und oft auch zwischen den Aufgaben und ihren Ergebnissen aufweisen (vgl. 'Schöne Päckchen' in WITTMANN/MÜLLER 1990 und 1991). Hierzu zählen Aufgabenreihen, die z.B. in den beteiligten Summanden eine Zahlenfolge darstellen oder auch Aufgaben, die ein bestimmtes Muster in den beteiligten Summanden oder Minuenden und Subtrahenden zeigen. Die Aufgabe für die Kinder im ersten Schuljahr (1+2, 2+3, 3+4, ...) ist den Folgen verwandt. Die Summanden folgen der Folge der natürlichen Zahlen, die Summen der Folge der ungeraden Zahlen.

Aufgaben können schnell erzeugt werden, wenn die Gesetze der Konstanz der Summe, Differenz, des Produkts oder des Quotienten ausgenutzt werden (vgl. 2. Schuljahr Paper-Pencil-Test). Eine Abart dieser Gesetze wird ausgenutzt, wenn die Ergebnisse in der Aufgabenreihe konstant um einen bestimmten Wert ansteigen (vgl. 3. Schuljahr Paper-Pencil-Test).

Die hier vorliegenden Aufgaben wurden schwerpunktmäßig durch Muster erzeugt, die sich aus der Vertauschung der Ziffern im Stellenwertsystem ergeben.

Im einfachsten Fall (2. Schuljahr) ergeben sich durch die Ausnutzung des Stellenwertsystems zwei Summanden, die sich durch zwei verschiedene Ziffern und deren Tausch der Einer- bzw. Zehnerstelle ergeben: z.B. 36+63, 45+54, 27+72 usw. Die Aufgaben wurden so gewählt, dass die Summe der beteiligten Ziffern stets kleiner als neun ist, sodass keine Überträge auftreten und die Summe somit immer aus einer zweistelligen Zahl mit zwei identischen Ziffern besteht:

$ab + ba = cc$, wenn a und b natürliche Zahlen sind und $a + b = c \leq 9$.

In den höheren Klassen wurden drei bzw. vier Stellenwerte ausgenutzt. Im dritten Schuljahr ergibt sich die eine Aufgabe aus dem Muster abc+bca und die andere aus abc-cba (vgl. 'Umkehrzahlen' in STEINWEG 1997). Während die erste Aufgabe kein stringentes Muster in den Ergebnissen zeigt, werden in der zweiten Aufgabe stets nur Vielfache von 99 erzeugt. Durch die Auswahl bestimmter Ziffern ergibt sich immer die Differenz 198.

Es muss gelten $a > c$ und $a - c = 2$.

Eine Veranschaulichung bietet z.B. die Betrachtung auf der Stellentafel. Die Zahlen werden durch Plättchen ersetzt. Die Differenz lässt sich auf der

Stellentafel dergestalt darstellen, dass z.B. vom Plättchenbild der kleineren Zahl eine Veränderung der Plättchen vorgenommen wird, bis die größere Zahl sich darstellt (Ergänzen).

H	Z	E
OO	OOOOOOO ...	OOOO
zwei Plättchen wandern von der Einerstelle in die Hunderterstelle		
$2 \cdot 100 - 2 \cdot 1 = 198$		
OOOO	OOOOOOO ...	OO

Algebraisch gedeutet ergibt sich:

H	Z	E
a	b	c
- c	b	a
a - (c + 1)	10 + b - (b + 1)	10 + c - a
$[a - (c + 1)] \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 10 + (c - a)$		
$= (a - c)\ 100 - 100 + 100 + (c - a)$		
$= (a - c) \cdot 100 + c - a$		

Für a - c = 2 ergibt sich somit 200 - 2 = 198.

Im vierten Schuljahr werden vier Stelle für die Differenzen von ANNA-Zahlen (WITTMANN/MÜLLER et al. 1997, 83) benutzt.

Grundsätzlich sind die Ergebnisse von Aufgaben interessant, die durch alternierende, additive Kombination der Stufenzahlen 1000 bis 1 erreicht werden (1000±100±10±1). Es ergeben sich acht Kombinationsmöglichkeiten mit den Ergebnisse:

1111	1089	
1109	911	891
1091	909	und 889

Es soll nun versucht werden, diese Ergebnisse und Vielfache von ihnen durch Subtraktionen von vierstelligen Zahlen zu erzielen, die immer nur aus

zwei Ziffern bestehen. Minuend und Subtrahend lassen sich dadurch ermitteln, dass die Ziffern jeweils an jeder Stelle vertauscht sind.

So ergibt sich z.B. bei ANNA-Zahlen folgendes Bild:

5445
-4554

Es lassen sich für alle acht Ergebnisse solche besonderen Zahlen finden, wie in der folgenden Übersicht deutlich gemacht werden kann. Es gilt A>N:

Ergebnis	Zahlenmuster	Beispielaufgabe
1111	AAAA	5555 -4444 1111
1109	AAAN	3332 -2223 1109
1091	AANA	6626 -2262 4364
1089	AANN	7755 -5577 2178
911	ANAA	9699 -6966 2733
909	ANAN	2121 -1212 909
891	ANNA	8778 -7887 891
889	ANNN	4222 -2444 1778

Dass sich jeweils nur diese Ergebnisse bzw. ganzzahlige Vielfache von ihnen ergeben, lässt sich für jeden Fall sehr leicht zeigen. (Der erste Fall mit AAAA ist trivial und wird hier vernachlässigt.) Für den einfachsten Fall gilt A>N und N=A-1.

Damit ergibt sich für AAAN-NNNA unter Beachtung der Überträge folgendes Phänomen:

A	A	A	(A-1)
- (A-1)	(A-1)	(A-1)	A
A-(A-1)	A-(A-1)	A-[(A-1)+1]	10+(A-1)-A
1	1	0	9

Dieses Ergebnis kann sich bei Veränderung der Differenz von A und N nur insofern ändern, als dass Vielfache in jedem Stellenwert auftreten bzw. obiges Phänomen mehrmals hintereinander ausgeführt auftritt, sodass sich insgesamt nur Vielfache von 1109 ergeben.

Analog kann diese Überlegung für alle Fälle gezeigt werden.

Die Verdeutlichung an der Stellentafel ist sehr elegant, wenn die Zahlen aus jeweils zwei Ziffern einer Art bestehen und dann eine reine Vertauschung der Plättchen stattfinden kann, ohne dass weiter Plättchen hinzugezogen werden müssen. So z.B. bei ANNA-Zahlen:

T	H	Z	E
O	OO	OO	O
ein Plättchen wandert in den Tausender (+1000 - 100)		ein Plättchen wandert in den Einer (-10 + 1)	
OO	O	O	OO

Hier ergibt sich eine Bilanz von 891. Unterscheiden sich die Ziffern um mehr als Eins, so wird dieser Verschiebungsvorgang mehrfach wiederholt, wodurch sich nur Vielfache von 891 als Differenz ergeben können.

Es gibt im Bereich der natürlichen Zahlen Multiplikationen, die besonders bemerkenswerte Ergebnisse aufweisen. Insbesondere ergeben die Vielfachen von 1001(=7·11·13) im dekadischen System diese Produkte. Die Kombination der Primteiler von 1001 und ihrer Vielfachen erzeugt Faktoren, die im Test für die Multiplikationsaufgabe im vierten Schuljahr benutzt wurden: 13 · 77, 26 · 77 usw.

6 Zahlenmauern[2]

Bei der Berechnung einer Zahlenmauer gehen die Grundsteine der untersten Reihe mit unterschiedlicher Gewichtung in die Größe des Zielsteins ein.

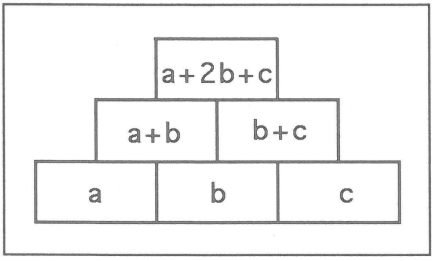


Abb. A5

So ergeben sich bei dreistöckigen Mauern, die hier ausschließlich thematisiert wurden, eine Gewichtung der Randsteine von 1 und des Mittelsteins von 2 (wie in der Abb. A5 gezeigt).

In den Aufgaben werden unterschiedliche Folgen in den Basissteinen vorgegeben, die in der letzten 'freien' Mauer ergänzt werden müssen:

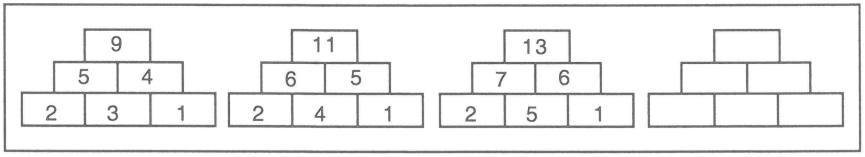


Abb. A6

Die Muster der Basissteine ergeben Muster in den Steinen des zweiten Stockwerks und wirken sich auf den Zielstein aus. Da die Basissteine der folgenden Mauern zueinander in Beziehung stehen, ergeben sich auch Muster über alle Mauern hinweg, die im zweiten Stockwerk oder in der Zielsteinfolge ablesbar sind.

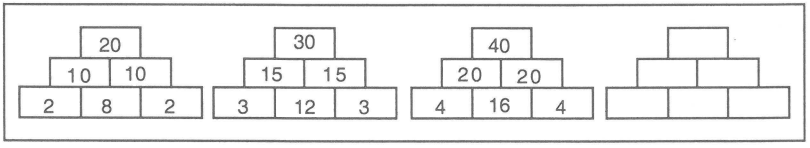


Abb. A7

[2] Vgl. Kap. 2 (Tims Zahlenmauern).

Je nach Wahl der Basissteine können auch Beziehungen zwischen Zielstein und Basisstein erzeugt werden (vgl. Abb. A7). So ist der Zielstein z.B. das 10-fache der unteren Randsteine, wenn die Basissteine mit a, $4 \cdot a$ und a belegt werden und sich somit für den Zielstein $a + 8 \cdot a + a = 10 \cdot a$ ergibt. Die Zahlen im zweiten Stock sind 5-fache der Randsteine der Basis, wegen $a + 4 \cdot a = 5 \cdot a$.

Als Variante werden sechs Mauern gegeben, die in den Basissteinen die möglichen Permutationen von drei Zahlen aufweisen.

Bei drei Zahlen ergibt sich eine Permutationsanzahl von 6. Dies folgt daraus, dass sich die Permutation einer Anzahl von k Elementen durch k! bestimmen lässt.

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

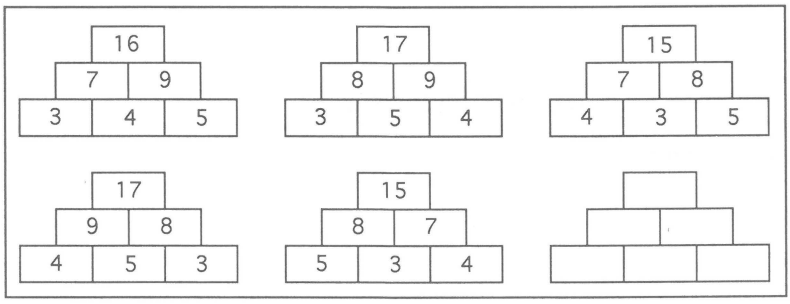


Abb. A8

Die Permutationen sind lexikographisch geordnet (vgl. 1, 2, 3 / 1, 3, 2 / 2, 1, 3 / 2, 3, 1 / 3, 1, 2 und 3, 2, 1). Die sechste Mauer ist wieder nicht ausgefüllt und soll von den Schülerinnen und Schülern ergänzt werden.

Anhang B

- Übersicht über die Aufgaben im Paper-Pencil-Test

- Übersicht über die Aufgaben in den Interviews

Übersicht über die Aufgaben im Paper-Pencil-Test

In den unterschiedlichen Schuljahren wurden die Themen wie folgt gefüllt:

	1. Schuljahr	2. Schuljahr
Figurierte Zahlen	Quadratzahlen	Dreieckszahlen
Zahlenfolgen	gerade Zahlen nat. Zahlen mit eingeschobener 5 als jedes zweites Glied	ungerade Zahlen Zweierpotenzen Vielfache von 3 mit eingeschobener 5 als jedes zweite Glied
Folge mit geometrischen Objekten	ein großes und zwei kleine Dreiecke	helle und dunkle Kreise (Plättchen), wobei die dunklen Kreise in der Anzahl immer verdoppelt werden und die hellen Kreise der Folge der nat. Zahlen folgen

	1. Schuljahr	2. Schuljahr
Operative Päckchen	erster und zweiter Summand erhöhen sich jeweils um 1, der erste Summand beginnt bei 1 (Folge der nat. Zahlen) der zweite bei 2	Umkehrzahlsummen (zweiziffrige Zahlen) Differenzen mit dem gleichen Ergebnis, da sich Minuend und Subtrahend jeweils um 10 erhöhen
Zahlenmauern	Mittelstein erhöht sich um 1, wobei die erste Basissteinfolge 2, 3, 1 lautet	die Basissteine der Mauern folgen der Folge der nat. Zahlen (die erste Mauer beginnt mit 1, 2, 3 und die zweite mit 2, 3, 4 usw.)

	3. Schuljahr	4. Schuljahr
Figurierte Zahlen	Rechteckszahlen	Trapezzahlen
Zahlenfolgen	Dreieckszahlenfolge Verdopplungsfolge mit dem ersten Glied 3 mit eingeschobener 5 als jedes zweite Glied Folge der nat. Zahlen rückwärts ab 20, wobei nach zwei genannten Gliedern wieder zwei ausgelassen werden	Folgenglieder nehmen jeweils um 6 ab Folge der nat. Zahlen vorwärts ab 50, wobei jeweils drei Glieder genannt werden und dann bei der Hälfte des dritten Gliedes fortgefahren wird Fibonacci-Folge mit den ersten zwei Gliedern gleich 1
Wertetabelle mit Zahlenpaaren	zugeordneter Wert ergibt sich durch Addition von 15 zugeordneter Wert ergibt sich durch Verdoppelung plus 1	zugeordneter Wert ist die zugehörige Dreieckszahl zugeordneter Wert ergibt sich aus Multiplikation mit 7 plus 1

	3. Schuljahr	4. Schuljahr
Operative Päckchen	Summen mit konstantem Zuwachs, da sich der erste Summand um 10 und der zweite um 100 erhöht Umkehrzahldifferenzen (immer das gleiche Ergebnis)	Differenzen von ANNA-Zahlen (immer das gleiche Ergebnis) Multiplikation im Tausenderraum, bei der die Ergebnisse ein Muster aufweisen (1001, 2002 usw.)
Zahlenmauern	Mittelstein der drei Basissteine ist jeweils das Vierfache der beiden gleichen Randsteine und die Randsteine erhöhen sich von Mauer zu Mauer um 1 Basissteine zeigen mögliche Permutationen von drei Ziffern auf: eine Permutation fehlt	Basissteine sind jeweils die ersten drei Glieder der Dreier-, Vierer-, Fünferreihe usw. Basissteine zeigen mögliche Permutationen von drei Zahlen auf: eine Permutation fehlt

Übersicht über die Aufgaben in den Interviews

In der folgenden Übersicht werden die gegenüber dem Paper-Pencil-Test geänderten Stellen im Fettdruck angegeben:

	1. Schuljahr	2. Schuljahr
Figurierte Zahlen	Quadratzahlen	Dreieckszahlen
Zahlenfolgen	gerade Zahlen nat. Zahlen mit eingeschobener **10** als jedes zweites Glied **Quadratzahlenfolge**	Zweierpotenzen Vielfache von drei mit eingeschobener 5 als jedes zweite Glied **Dreieckszahlenfolge**
Folge mit geometrischen Objekten	ein großes und zwei kleine Dreiecke **zunächst ein Kreis und ein Quadrat, dann jeweils zwei Quadrate, zwei Kreise (alternierend eingefärbt)**	**ein großes und zwei kleine Dreiecke** **zunächst ein Kreis und ein Quadrat, dann jeweils zwei Quadrate, zwei Kreise (alternierend eingefärbt)**

	1. Schuljahr	2. Schuljahr
Operative Päckchen	erster und zweiter Summand erhöhen sich jeweils um 1, der erste Summand beginnt bei 1 (Folge der nat. Zahlen) der zweite bei 2	Umkehrzahlsummen (zweiziffrige Zahlen) Differenzen mit **um 1 steigendem** Ergebnis, da sich Minuend und Subtrahend jeweils um 10 erhöhen und der **Minuend um 1 erhöht wird**
Zahlenmauern	Mittelstein erhöht sich um 1, wobei die erste Basissteinfolge 2, 3, 1 lautet.	die Basissteine der Mauern folgen der Folge der nat. Zahlen (die erste Mauer beginnt mit 1, 2, 3 und die zweite mit 2, 3, 4 usw.)

	3. Schuljahr	4. Schuljahr
Figurierte Zahlen	Rechteckszahlen	**Treppenzahlen**
Zahlenfolgen	Verdopplungsfolge mit dem ersten Glied 3 und eingeschobener 5 als jeweils zweites Glied **Rechteckszahlenfolge** Folge der nat. Zahlen rückwärts **ab 40,** wobei abwechselnd ein Schritt um 1 zurück und dann um 5 gemacht wird	**Treppen(Quadrat)-zahlenfolge** Folge der nat. Zahlen vorwärts **ab 18**, wobei jeweils drei Glieder genannt werden und dann bei der Hälfte des dritten Gliedes fortgefahren wird Fibonacci-Folge mit den ersten zwei Gliedern gleich 1
Folge mit geometrischen Objekten	**ein großes und zwei kleine Dreiecke (alternierend eingefärbt)** **zunächst ein Kreis und ein Quadrat, dann jeweils zwei Quadrate, zwei Kreise (alternierend eingefärbt)**	**ein großes und zwei kleine Dreiecke (alternierend eingefärbt)** **zunächst ein Kreis und ein Quadrat, dann jeweils zwei Quadrate, zwei Kreise (alternierend eingefärbt)**
Zahl & Partnerzahl	zugeordneter Wert ergibt sich durch Addition von 15 zugeordneter Wert ergibt sich durch Verdoppelung plus 1	**zugeordneter Wert ergibt sich durch Multiplikation mit 10 minus 5** zugeordneter Wert ergibt sich aus Multiplikation mit 7 plus 1

	3. Schuljahr	4. Schuljahr
Operative Päckchen	**Summe mit dreiziffrigen Zahlen, wobei der zweite Summand aus dem ersten entsteht, indem die Hunderterstelle an die Einerstelle verschoben wird** Umkehrzahldifferenzen (immer das gleiche Ergebnis)	Differenzen von ANNA-Zahlen (immer das gleiche Ergebnis) Multiplikation im Tausenderraum, bei der die Ergebnisse ein Muster aufweisen (1001, 2002 usw.)
Zahlenmauern	Mittelstein der drei Basissteine ist jeweils das Vierfache der beiden gleichen Randsteine und die Randsteine erhöhen sich von Mauer zu Mauer um 1 Basissteine zeigen mögliche Permutationen von drei Ziffern auf: eine Permutation fehlt	Basissteine sind jeweils die ersten drei Glieder der Dreier-, Vierer-, Fünferreihe usw. Basissteine zeigen mögliche Permutationen von drei Zahlen auf: eine Permutation fehlt

Anhang C

- **Vorbemerkungen zu Transkripten der Interviewstudie**
- **exemplarisches Transkript des 4. Schuljahres (4./III)**

Vorbemerkungen zu den Transkripten der Interviewstudie

Die Interviews wurden auf der Grundlage der ebenfalls im Anhang vorliegenden Aufgaben (Anhang B) geführt. Die Datenerhebung stützt sich einerseits auf die vorliegenden Arbeitsbögen, d.h. die schriftlich fixierten Lösungen und Kommentare der Teilnehmenden, andererseits auf die Transkription der Videodokumentation des Interviews, die eine Fixierung der mündlichen Kommentare erlaubt.

Die Transkripte geben dabei nicht durchgängig das Gespräch zwischen Interviewerin und Kind wieder, sondern sollen eine Übersicht über das geführte Interview ermöglichen. Die schriftliche Fixierung orientiert sich an den gegebenen Aufgaben und nicht an der Reihenfolge der Bearbeitung durch die teilnehmenden Kinder, die in ganz seltenen Fällen von der Aufgabenreihenfolge abwich.

Um eine größtmögliche Transparenz und Lesbarkeit der Interviews zu ermöglichen, werden die Aufgabenformate im Weiteren oft mit Abkürzungen benannt.

PM	Figurierte Zahl im **P**unkt**m**uster
1.F	**1.** Zahlen**f**olge
2.F	**2.** Zahlen**f**olge
3.F	**3.** Zahlen**f**olge
FGI	**1. F**olge mit **g**eometrischen Objekten
FGII	**2. F**olge mit **g**eometrischen Objekten
PaI	**1.** Aufgaben zu Zahl&**Pa**rtnerzahl
PaII	**2.** Aufgaben zu Zahl&**Pa**rtnerzahl
Päl	**1.** strukturiertes **Pä**ckchen mit Störaufgabe
PälI	**2.** strukturiertes **Pä**ckchen mit Störaufgabe
MAI	Zahlen**ma**uerfolge
MAII	Zahlen**ma**uern mit kombinatorischer Basissteinauswahl

In der ersten Verlaufsbeschreibung der Interviews, sind wörtliche Antworten der Kinder sind durch doppelte Anführungszeichen („...“) gekennzeichnet, während annähernd wörtliche, sinngemäße Zitate durch einfache Anführungszeichen ('...') kenntlich gemacht sind. Alle anderen Bemerkungen zu den jeweiligen Aufgaben sind als Kommentare der Autorin zu verstehen, die den Interviewverlauf widerspiegeln. Das Zeichen √ deutet in den betreffenden Fällen an, dass die Aufgabe im nahe liegenden Muster gelöst wurde. Abweichende, interessante Lösungen werden durch die Kommentare oder durch die Wiedergabe des Gesprächs offensichtlich.

Werden komplette Passagen des Interviews aufgenommen, so sind sie zunächst im Verlaufsplan durch *siehe Transkript unten* angekündigt und werden anschließend an den Verlauf angehängt. In diesen Transkripten wird auf Anführungszeichen verzichtet. Die Äußerungen sind durchnummeriert. Die interviewleitende Person wird durch den Buchstaben **I**, das beteiligte Kind durch **S** benannt. Das Transkript orientiert sich an der möglichst wörtlichen Wiedergabe des Verlaufs, d.h. das grammatikalische Fehler und ungewöhnliche Wortwahlen nicht weiter gekennzeichnet werden. Wortverkürzungen werden abweichend von der Rechtschreibregelung nicht apostrophiert (z.B. 'nen wird mit nen wiedergegeben). Satzanfänge werden innerhalb der Transkripte und wörtlichen Wiedergaben klein geschrieben. Die Satzzeichen geben die Hebung oder Senkung am Satzende wieder. Ein Punkt (.) deutet ein Satzende mit einer Stimmsenkung an, während ein Apostroph (') eine Stimmhebung in einer Frage angibt. Ausrufe sind durch (!) kenntlich gemacht. Sind Handlungen des Kindes oder der Interviewerin für das Verstehen des Transkriptes wichtig, so sind sie *kursiv* in Klammern angemerkt.

Als Beispiel wird in dieser Veröffentlichung ein Transkript des vierten Schuljahres dargestellt.

Interview 4./III

Verlaufsskizze

PM erfindet ein kurioses Punktmuster ohne erkennbaren Zusammenhang „ja, also ich dachte, hier, mhm, also das verdoppeln und da ist ja dann noch einer übrig und den darauf, das verdoppeln und den darauf." zeichnet 2 Spalten mit 7 Punkten, 2 Spalten mit 2 Punkten und ein Punkt dahinter

1.F nicht bearbeitet

2.F √ *siehe Transkript unten*

3.F √ zögert zunächst „ach, vielleicht doch, 1 plus 1 ist 2, 2 plus 1 sind 3, 3 plus 2 sind 5, 5 plus 3 sind 8, 8 plus 5 sind 13, *(stockt)*, 13 plus 8 sind 21, und 21 plus 13 sind 34, 34 plus 21 sind 55 und 55 plus 34 sind ... 89 würde ich dahin schreiben; 89 plus 55 sind 144."

FGI √ erkennt das Muster anscheinend sofort „also, das soll weiß bedeuten, ein kleines schwarzes und ein kleines weißes. so würde ich das machen."

FGII √ erkennt die Struktur ebenfalls sofort „drei weiße Kästchen dazu." „weil hier ist ein weißer Punkt und ein weißes Kästchen, hier sind zwei schwarze Punkte und zwei schwarze Kästchen, hier sind drei weiße Punkte und dann kommen drei weiße Kästchen. und jetzt würde ich hier vier schwarze Punkte hinmachen."

PaI *siehe Transkript unten*

PaII analoges Vorgehen wie bei der vorherigen Aufgabe „wenn man hier, 9 Rest 5, und wenn man da 5 dazu tut, wäre das 10."

Päl √ „also, in dieser und in dieser Zahl sind immer zwei gleiche Zahlen und hier da, die Zahlen oben außen sind in der Mitte unten und die oben in der Mitte sind außen unten."

Päll *siehe Transkript unten*

MAl √ löst zunächst vom Zielstein aus „ja, hier ist immer drei draufgelegt (9, 12, 15) da muss ich 18, so.... da ist auch einer draufgelegt (3, 4, 5) *(schreibt 6)*, zwei draufgelegt (6, 8, 10) *(schreibt 12)*. dann gibt 6 plus 12 sind 18 wieder."

MAll √ „mhm, hier fällt mir noch etwas auf 31, 41, 51, hier ist das nur durcheinandergewirbelt 41, 51, 31, überall steht das so. dann müsste vielleicht 41 in der Mitte und 31 und 51, dann müsste ich hier noch 31 und 51."

Ausschnitte zu ...

2. Folge

1 I schwierig'

2 S ja.
ja, zum Beispiel jetzt wieder 1, 2, 3, oder so.

3 I mhm, also 1, 2, 3 würdest du jetzt als nächstes hinschreiben'

4 S oder, 3, 4, 5.

5 I und warum'

6 S das passt auch nicht wieder, weil 6, die Hälfte 3, dann, ne, mhm *(überlegend)*, aber wieder drei Zahlen hintereinander kommen also, wie 1, 2, 3 oder 5, 6, 7 *(ist sich sicher)*.

7 I mhm. also müsste man immer die Zahl wissen, ne, die als erstes kommt'

8 S mhm.

9 I du hast ja drei Päckchen von drei aufeinanderfolgenden Zahlen 18, 19, 20, 10, 11, 12 und 6, 7, 8.

10 S ja.
ach, 3, 4, 5 würde ich hinschreiben.

11 I mhm, dann schreib das hin.

12 S ach ne, weil, mhm, *(mit fester Stimme)* 18, 19, 20, von 20 die Hälfte ist 10, 10, 11, 12, von 12 die Hälfte ist 6, von 6, also 3, 4, 5.

13 I mhm, aber vorhin hast du doch was anderes gesagt, also von der letzten Zahl die Hälfte. von 20 die Hälfte ist 10, zwei weiterzählen, 11, 12 ...

14 S wenn von der hinteren Zahl die Hälfte kommt, dann..., dann müsste hier auch von der hinteren, stimmt, also 4, 5, 6.

Partnerzahlen I

15 S vielleicht, wenn man die nach Reihe liest' nee *(leise)*. *(Pause)* Eigentlich fällt mir dazu nichts ein.

16 I da gibt es ja vielleicht noch andere Möglichkeiten, du hast die beiden Zahlen addiert und multipliziert.

17 S teilt'

18 I könnte man auch mal probieren.

19 S da würde 7 Rest 1 bleiben.

20 I mhm.

21 S da würde 7 Rest 1 bleiben. *(schmunzelt)* da bleibt aber 6 Rest 1, wenn man das teilen würde.

22 I 43 durch 6 hast du gerechnet'

23 S ja, also, 42, (*rechnet*) ach so, 7 Rest 1.

24 I mhm.

25 S mhm, da fällt mir nichts ein.

26 I hast du das denn bei den anderen, also hier war 7 Rest 1, hier war auch 7 Rest 1, hast du das nachgerechnet'

27 S warte, da ist auch 7 Rest 1.

28 I mhm, und bei den anderen, hast du das auch'

29 S noch nicht. *(rechnet)* da bleibt auch 7 Rest 1. *(verwundert)*

30 I mhm.

31 S da bleibt auch 7 Rest 1. dann müsste ich hier bestimmt 11 geteilt durch was, muss dann 7 Rest 1 bleiben und das auch. *(zeigt auf den zweiten Stein)*

32 I mhm.

33 S dann müsste ich hier 50 hinschreiben. weil 49 durch 7 sind 7 und wenn ich jetzt 50 hinschreibe, dann sind das 7 Rest 1.

34 I mhm.

35 S und hier 11 durch (*rechnet: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77*) 78 muss ich hinschreiben.

36 I also bei dir lassen alle Zahlen....

37 S 7 Rest 1. *(S nickt)*

Päckchen II

38 I hier weiß ich, dass ihr das noch nicht gemacht habt im Unterricht, aber du kannst vielleicht trotzdem etwas herausfinden, wenn du dir die Aufgaben wieder anguckst, ob dir da etwas auffällt. du brauchst das also nicht nachzurechnen, es ist wieder richtig gerechnet.

S überlegt

39 S also, das ist eine Malaufgabe'

40 I ja. kannst du etwas sehen, etwas erkennen'

41 S ich, vielleicht, ist es so, dass bei diesen Zahlen, das will ich gerade rechnen, das .... *(rechnet)*
770 dann da 770 darauf tun und da 770 darauf und das dann immer so, aber das mhm,...

42 I also, du guckst dir immer diese Zahlen unter dem Strich an, 770, 1440'

43 S ja. oder das irgendwie, mir fällt etwas auf, irgendwie das, da ist 1001, da ist 2002, mhm; da ist 4004, dann müsste da 3003 herauskommen, so eine Regel. jetzt habe ich gerade schon gemerkt, wenn man auf die Zahl *(13)* 13 drauftut, wird das die Zahl *(26)*.

44 I ja, wenn man darauf aber 13 drauftut, dann würde eine 52 hinkommen.
mhm, vielleicht schreibst du deine Aufgabe dann mal hin.

S schreibt 77 mal 39

warum die 77 als erste Zahl'

45 S weil überall 77 steht.

46 I okay.

47 S wenn man da 13 drauftut, dann würde das 52 ergeben, das wäre dann eine Regel. und wenn man das dann ausrechnet, würde da vielleicht auch 303, 3003 herauskommen. jetzt weiß ich natürlich nicht, wie man das rechnet, wir haben das ja noch nicht gerechnet.

(Da die schriftliche Multiplikation von zwei zweistelligen Zahlen im Unterricht noch nicht besprochen wurde, die Schülerin aber großes Interesse an dem Ergebnis hat, errechnen wir dieses gemeinsam.)

ja, dann würde das passen, dann würde da 3003 herauskommen.

Anhang D

Tabellen und Graphiken

- **Paper-Pencil-Test (Stufe I)**
  - **Ergebnisse Typ A - C**
  - **Ergebnisse 1. Schuljahr - 4. Schuljahr**
  - **Einzeldaten zu allen Aufgaben**

- **Interviewstudie (Stufe I und II)**
  - **Ergebnisse Typ A - C**
  - **Ergebnisse 1. Schuljahr - 4. Schuljahr**
  - **Einzeldaten zu allen Aufgaben**

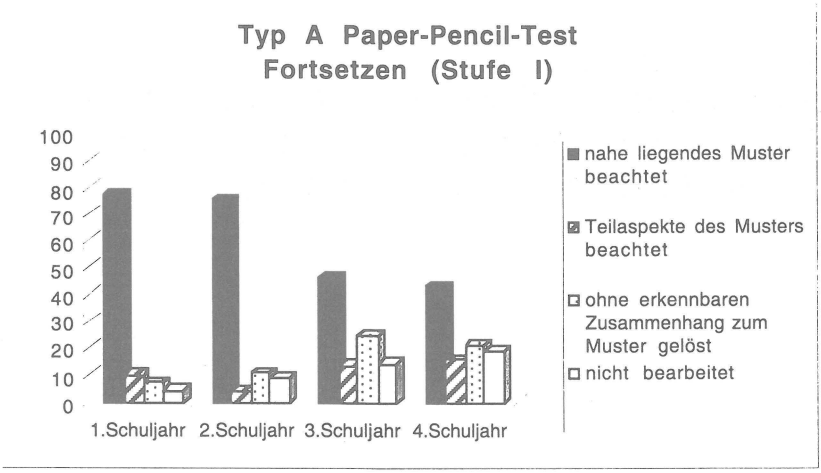
- **Streudiagramme zur Korrelation der Ergebnisse zu figurierten Zahlen im Punktmuster und in der Zahlenfolge (1. - 4. Schuljahr Interviewstudie)**

Typ A Paper-Pencil-Test Ergebnisse 1. bis 4. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

n=257

	1.Schuljahr	2.Schuljahr	3.Schuljahr	4.Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	77,60	75,50	46,80	43,30
Teilaspekte des Musters beachtet	10,40	4,20	13,80	15,70
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	7,60	11,00	24,80	21,40
nicht bearbeitet	4,40	9,30	14,60	19,60
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-



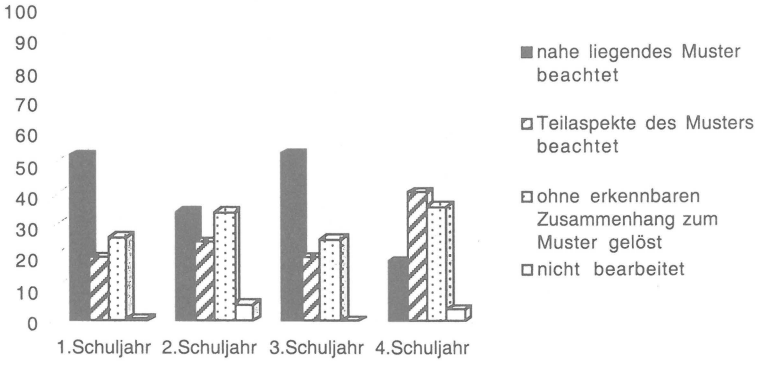
Typ B Paper-Pencil-Test Ergebnisse 1. bis 4. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

n=257

	1.Schuljahr	2.Schuljahr	3.Schuljahr	4.Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	52,85	34,75	53,80	19,00
Teilaspekte des Musters beachtet	20,00	25,40	20,00	41,30
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	26,45	34,75	26,20	36,50
nicht bearbeitet	0,70	5,10	0,00	3,20
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

Typ B Paper-Pencil-Test Fortsetzen (Stufe I)

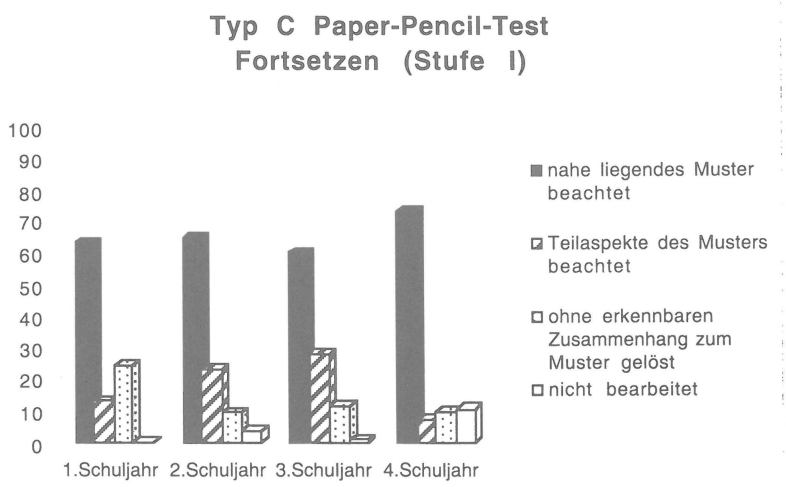


Typ C Paper-Pencil-Test Ergebnisse 1. bis 4. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

n=257

	1.Schul-jahr	2.Schul-jahr	3.Schul-jahr	4.Schul-jahr
nahe liegendes Muster beachtet	62,90	64,40	60,00	73,00
Teilaspekte des Musters beachtet	12,90	22,85	27,75	7,15
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	24,20	9,35	11,50	9,55
nicht bearbeitet	0,00	3,40	0,75	10,30
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-



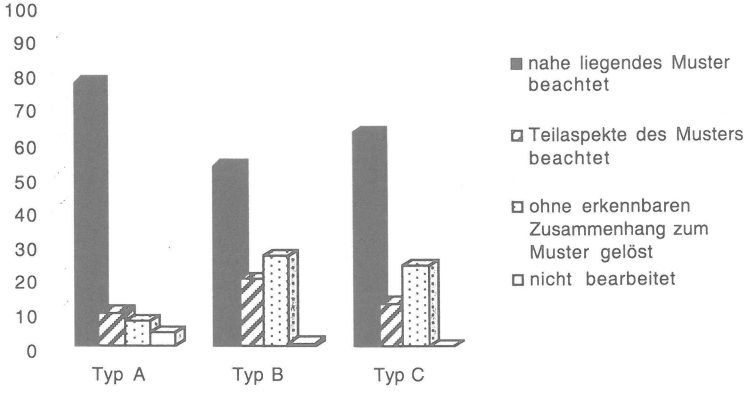
Paper-Pencil-Test Ergebnisse 1. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

n=70

	Typ A	Typ B	Typ C
nahe liegendes Muster beachtet	77,60	52,85	62,90
Teilaspekte des Musters beachtet	10,40	20,00	12,90
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	7,60	26,45	24,20
nicht bearbeitet	4,40	0,70	0,00
total	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

Paper-Pencil-Test 1. Schuljahr Fortsetzen (Stufe I)

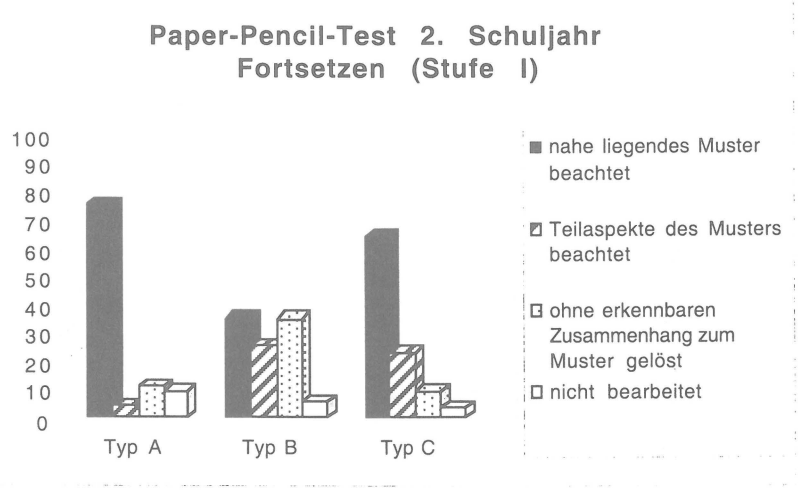


Paper-Pencil-Test Ergebnisse 2. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

n=59

	Typ A	Typ B	Typ C
nahe liegendes Muster beachtet	75,50	34,75	64,40
Teilaspekte des Musters beachtet	4,20	25,40	22,85
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	11,00	34,75	9,35
nicht bearbeitet	9,30	5,10	3,40
total	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

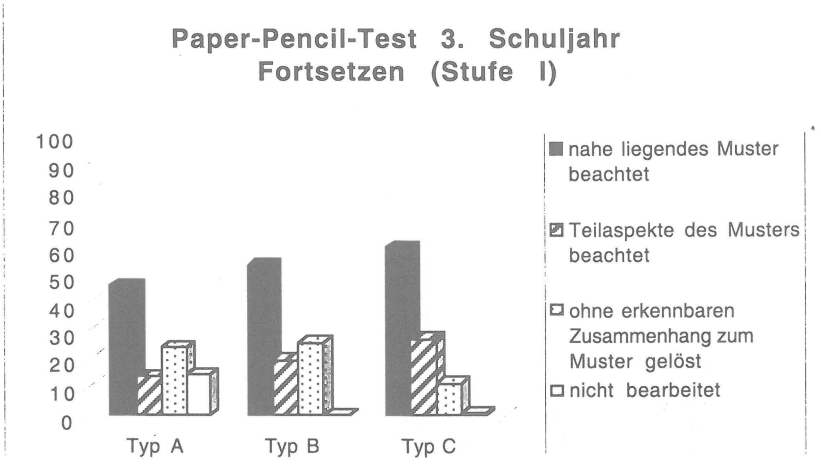


Paper-Pencil-Test Ergebnisse 3. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

n=63

	Typ A	Typ B	Typ C
nahe liegendes Muster beachtet	46,80	53,80	60,00
Teilaspekte des Musters beachtet	13,80	20,00	27,75
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	24,80	26,20	11,50
nicht bearbeitet	14,60	0,00	0,75
total	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-



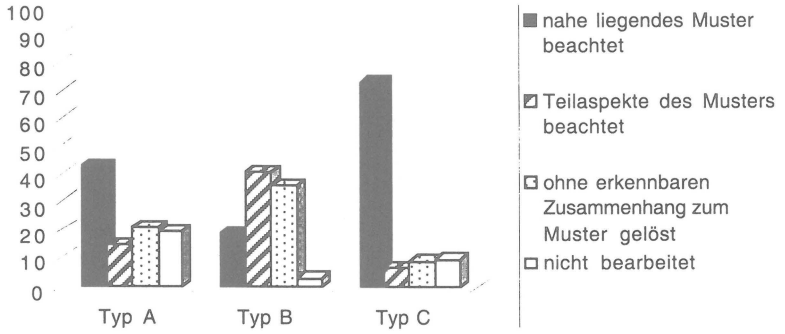
Paper-Pencil-Test Ergebnisse 4. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

n=63

	Typ A	Typ B	Typ C
nahe liegendes Muster beachtet	43,30	19,00	73,00
Teilaspekte des Musters beachtet	15,70	41,30	7,15
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	21,40	36,50	9,55
nicht bearbeitet	19,60	3,20	10,30
total	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

Paper-Pencil-Test 4. Schuljahr Fortsetzen (Stufe I)



Häufigkeiten Paper-Pencil- Test 1. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

	Figurierte Zahlen	Folge 1	Folge 2	Folge mit geom. Objekten	Päckchen	Mauern
nahe liegendes Muster beachtet	20,0 %	91,4 %	62,9 %	85,7 %	63,8 %	78,6 %
Teilaspekte des Musters beachtet	38,6 %	1,4 %	14,3 %	1,4 %	13,0 %	15,7 %
kein Zusammenhang zum Muster erkennbar	40,0 %	7,1 %	11,4 %	12,9 %	23,2 %	4,3 %
nicht bearbeitet	1,4 %	-	11,4 %	-	-	1,4 %

Häufigkeiten Paper-Pencil- Test 2. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

	Figurierte Zahlen	Folge 1	Folge 2	Folge 3	Folge mit geom. Objekten	Päckchen 1	Päckchen 2	Mauern
nahe liegendes Muster beachtet	30,5 %	94,9 %	64,4 %	55,9 %	39,0 %	64,4 %	64,4 %	84, 7%
Teilaspekte des Musters beachtet	33,9 %	-	11,9 %	1,7 %	16,9 %	22,0 %	23,7 %	3,4 %
kein Zusammenhang zum Muster erkennbar	32,2 %	5,1 %	18,6 %	16,9 %	37,3 %	11,9 %	6,8 %	5,1 %
nicht bearbeitet	3,4 %	-	5,1 %	25,4 %	6,8 %	1,7 %	5,1 %	6,8 %

Häufigkeiten Paper-Pencil- Test 3. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

	Figu-rierte Zahlen	Folge 1	Folge 2	Folge 3	Part-ner 1a	Part-ner 1b	Part-ner 2a	Part-ner 2b	Päck-chen 1	Päck-chen 2	Mau-ern 1	Mau-ern 2
nahe liegendes Muster beachtet	53,8 %	66,2 %	33,8 %	56,9 %	64,6 %	49,2 %	20,0 %	13,8 %	95,4 %	24,6 %	66,2 %	50,8 %
Teilaspekte des Musters beachtet	20,0 %	16,9 %	15,4 %	12,3 %	3,1%	-	10,8 %	9,2 %	3,1 %	52,3 %	24,6 %	32,3 %
kein Zusammen-hang zum Muster erkennbar	26,2 %	12,3 %	26,2 %	10,8 %	26,2 %	38,5 %	41,5 %	43,1 %	1,5 %	21,5 %	9,2 %	15,4 %
nicht bearbeitet	-	4,6 %	24,6 %	20,0 %	6,2 %	12,3 %	27,7 %	33,8 %	-	1,5 %	-	1,5 %

Häufigkeiten Paper-Pencil-Test 4. Schuljahr (Stufe I, Fortsetzen)

	Figu-rierte Zahlen	Folge 1	Folge 2	Folge 3	Part-ner 1a	Part-ner 1b	Part-ner 2a	Part-ner 2b	Päck-chen 1	Päck-chen 2	Mau ern 1	Mau ern 2
nahe liegendes Muster beachtet	19,0 %	85,7 %	14,3 %	12,7 %	38,1 %	60,3 %	17,5 %	50,8 %	85,7 %	60,3 %	71,4 %	39,7 %
Teilaspekte des Musters beachtet	41,3 %	4,8 %	42,9 %	3,2 %	19,0 %	11,1 %	7,9 %	3,2 %	12,7 %	1,6 %	7,9 %	38,1 %
kein Zusammen-hang zum Muster erkennbar	36,5 %	6,3 %	25,4 %	19,0 %	31,7 %	15,9 %	46,0 %	23,8 %	1,6 %	17,5 %	14,3 %	11,1 %
nicht bearbeitet	3,2 %	3,2 %	17,5 %	65,1 %	11,1 %	12,7 %	28,6 %	22,2 %	-	20,6 %	6,3 %	11,1 %

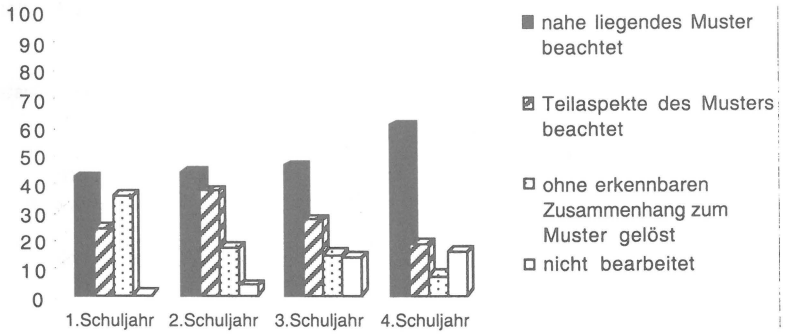
Typ A Interview Ergebnisse 1. bis 4. Schuljahr (Stufe I&II, Fortsetzen und Beschreiben)

n=60

	1.Schuljahr	2.Schuljahr	3.Schuljahr	4.Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	41,65	43,30	45,70	60,00
Teilaspekte des Musters beachtet	23,35	36,70	26,70	18,10
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	35,00	16,70	14,30	6,70
nicht bearbeitet	0,00	3,30	13,30	15,20
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

Typ A Interview
Fortsetzen und Beschreiben (Stufe I&II)

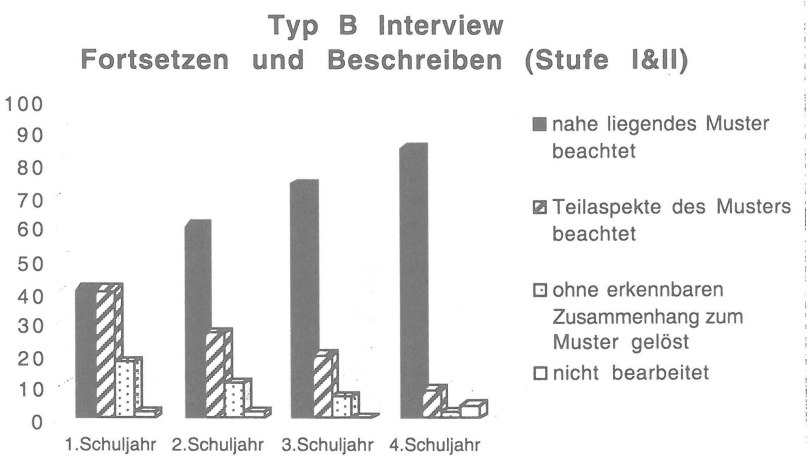


Typ B Interview Ergebnisse 1. bis 4. Schuljahr (Stufe I&II, Fortsetzen und Beschreiben)

n=60

	1.Schuljahr	2.Schuljahr	3.Schuljahr	4.Schuljahr
nahe liegendes Muster beachtet	40,00	60,00	73,30	84,50
Teilaspekte des Musters beachtet	40,00	26,70	20,00	8,90
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	17,80	11,10	6,70	2,20
nicht bearbeitet	2,20	2,20	0,00	4,40
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-



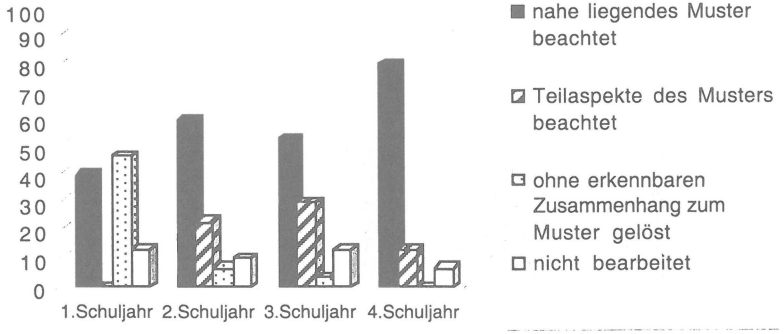
Typ C Interview Ergebnisse 1. bis 4. Schuljahr (Stufe I&II, Fortsetzen und Beschreiben)

n=60

	1.Schul-jahr	2.Schul-jahr	3.Schul-jahr	4.Schul-jahr
nahe liegendes Muster beachtet	40,00	60,00	53,30	80,00
Teilaspekte des Musters beachtet	0,00	23,35	30,00	13,35
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	46,70	6,65	3,30	0,00
nicht bearbeitet	13,30	10,00	13,40	6,65
total	100,00	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

Typ C Interview Fortsetzen und Beschreiben (Stufe I&II)



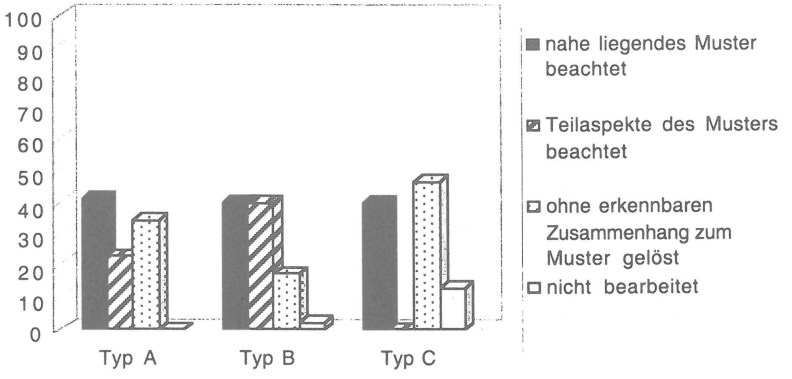
Interview Ergebnisse 1. Schuljahr (Stufe I&II, Fortsetzen und Beschreiben)

n=15

	Typ A	Typ B	Typ C
nahe liegendes Muster beachtet	41,65	40,00	40,00
Teilaspekte des Musters beachtet	23,35	40,00	0,00
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	35,000	17,80	46,70
nicht bearbeitet	0,00	2,20	13,30
total	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

Interview 1. Schuljahr
Fortsetzen und Beschreiben (Stufe I&II)

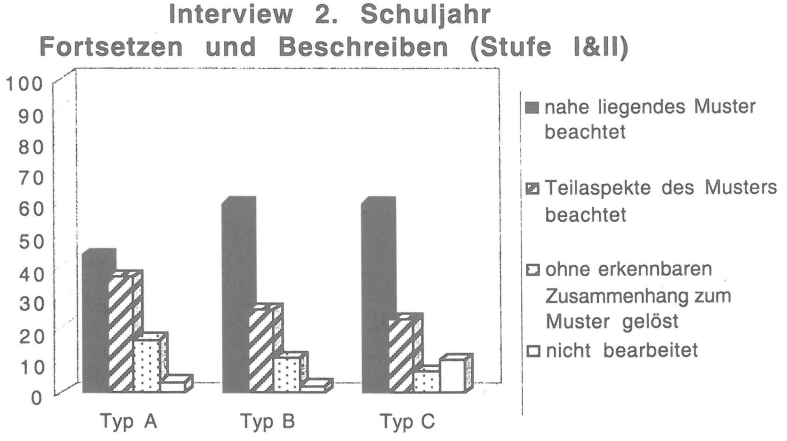


Interview Ergebnisse 2. Schuljahr (Stufe I&II, Fortsetzen und Beschreiben)

n=15

	Typ A	Typ B	Typ C
nahe liegendes Muster beachtet	43,30	60,00	60,00
Teilaspekte des Musters beachtet	36,70	26,70	23,35
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	16,70	11,10	6,65
nicht bearbeitet	3,30	2,20	10,00
total	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

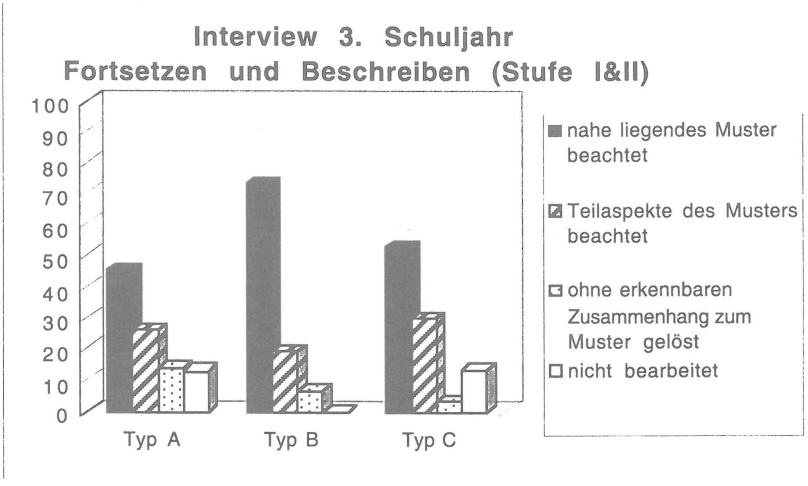


Interview Ergebnisse 3. Schuljahr (Stufe I&II, Fortsetzen und Beschreiben)

n=15

	Typ A	Typ B	Typ C
nahe liegendes Muster beachtet	45,70	73,30	53,30
Teilaspekte des Musters beachtet	26,70	20,00	30,00
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	14,30	6,70	3,30
nicht bearbeitet	13,30	0,00	13,40
total	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-

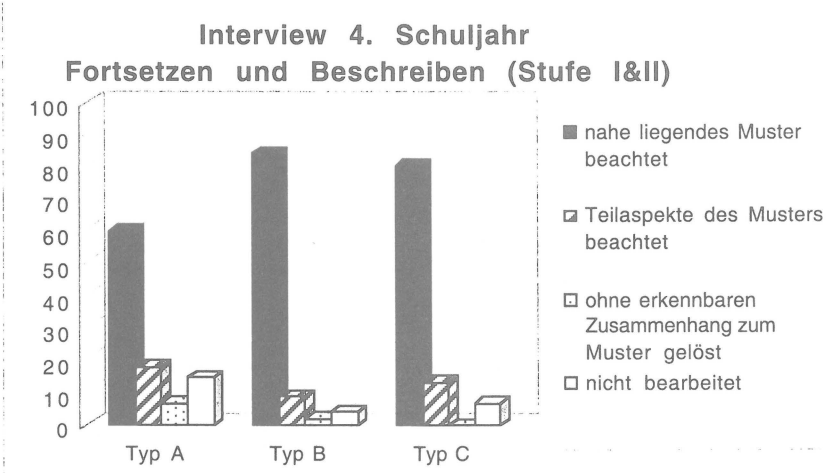


Interview Ergebnisse 4. Schuljahr (Stufe I&II, Fortsetzen und Beschreiben)

n=15

	Typ A	Typ B	Typ C
nahe liegendes Muster beachtet	60,00	84,50	80,00
Teilaspekte des Musters beachtet	18,10	8,90	13,35
ohne erkennbaren Zusammenhang zum Muster gelöst	6,70	2,20	0,00
nicht bearbeitet	15,20	4,40	6,65
total	100,00	100,00	100,00

- alle Angaben in Prozent-



Häufigkeiten Interviewstudie 1. Schuljahr (Stufe I und II, Fortsetzen und Beschreiben)

	Figurierte Zahlen	Folge 1	Folge 2	Folge 3	Folge mit geom. Objekten 1	Folge mit geom. Objekten 2	Päckchen	Mauern
nahe liegendes Muster beachtet	-	60,0 %	60,0 %	-	93,3 %	26,7 %	40,0 %	46,7 %
Teilaspekte des Musters beachtet	66,7 %	6,7 %	13,3 %	46,7 %	6,7 %	46,7 %	-	26,7 %
kein Zusammenhang zum Muster erkennbar	26,7 %	33,3 %	26,7 %	53,3 %	-	26,7 %	46,7 %	26,7 %
nicht bearbeitet	6,7 %	-	-	-	-	-	13,3 %	-

Häufigkeiten Interviewstudie 2. Schuljahr (Stufe I und II, Fortsetzen und Beschreiben)

	Figurierte Zahlen	Folge 1	Folge 2	Folge 3	Folge mit geom. Objekten 1	Folge mit geom. Objekten 2	Päckchen 1	Päckchen 2	Mauern
nahe liegendes Muster beachtet	20,0 %	40,0 %	26,7 %	53,3 %	100 %	60,0 %	66,7 %	53,3 %	53,3 %
Teilaspekte des Musters beachtet	40,0 %	53,3 %	33,3 %	33,3 %	-	40,0 %	26,7 %	20,0 %	26,7 %
kein Zusammenhang zum Muster erkennbar	33,3 %	6,7 %	26,7 %	13,3 %	-	-	-	13,3 %	20,0 %
nicht bearbeitet	6,7 %	-	13,3 %	-	-	-	6,7 %	13,3 %	-

Häufigkeiten Interviewstudie 3. Schuljahr (Stufe I und II, Fortsetzen und Beschreiben)

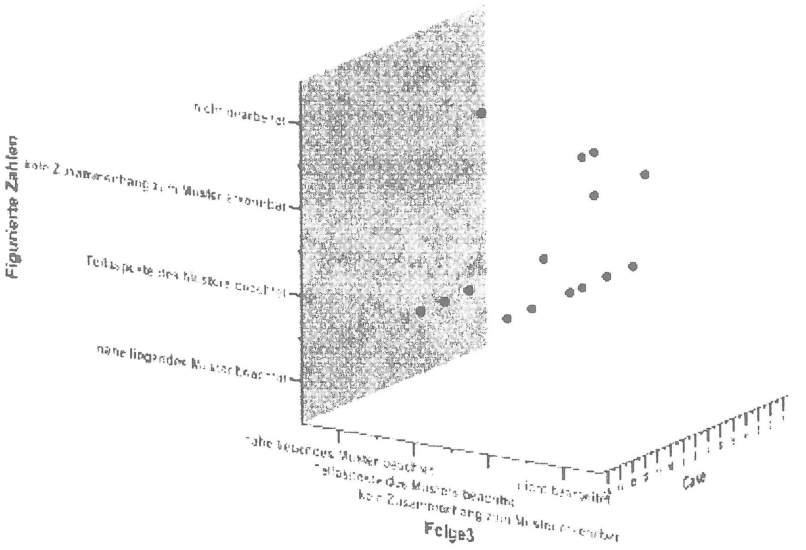
	Figurierte Zahlen	Folge 1	Folge 2	Folge 3	Folge mit geom. Objekten 1	Folge mit geom. Objekten 2	Partner 1	Partner 2	Päckchen 1	Päckchen 2	Mauern 1	Mauern 2
nahe liegendes Muster beachtet	53,3 %	13,3 %	40,0 %	53,3 %	86,7 %	80,0 %	80,0 %	13,3 %	53,3 %	53,3 %	53,3 %	66,7 %
Teilaspekte des Musters beachtet	40,0 %	46,7 %	26,7 %	33,3 %	13,3 %	6,7 %	-	6,7 %	26,7 %	33,3 %	46,7 %	26,7 %
kein Zusammenhang zum Muster erkennbar	6,7 %	20,0 %	20,0 %	6,7 %	-	13,3 %	20,0 %	26,7 %	-	6,7 %	-	6,7 %
nicht bearbeitet	-	20,0 %	13,3 %	6,7 %	-	-	-	53,3 %	20,0 %	6,7 %	-	-

Häufigkeiten Interviewstudie 4. Schuljahr (Stufe I und II, Fortsetzen und Beschreiben)

	Figurierte Zahlen	Folge 1	Folge 2	Folge 3	Folge mit geom. Objekten 1	Folge mit geom. Objekten 2	Partner 1	Partner 2	Päckchen 1	Päckchen 2	Mauern 1	Mauern 2
nahe liegendes Muster beachtet	66,7%	60,0 %	60,0%	53,3 %	100 %	86,7 %	60,0 %	46,7 %	93,3 %	66,7 %	80, 0%	60,0 %
Teilaspekte des Musters beachtet	20,0 %	20,0 %	26,7 %	6,7 %	-	6,7 %	6,7 %	13,3 %	6,7 %	20,0 %	20,0 %	33,3 %
kein Zusammenhang zum Muster erkennbar	6,7 %	6,7 %	-	6,7 %	-	-	26,7 %	6,7 %	-	-	-	-
nicht bearbeitet	6,7 %	13,3 %	13,3 %	33,3 %	-	6,7 %	6,7 %	33,3 %	-	13,3 %	-	6,7 %

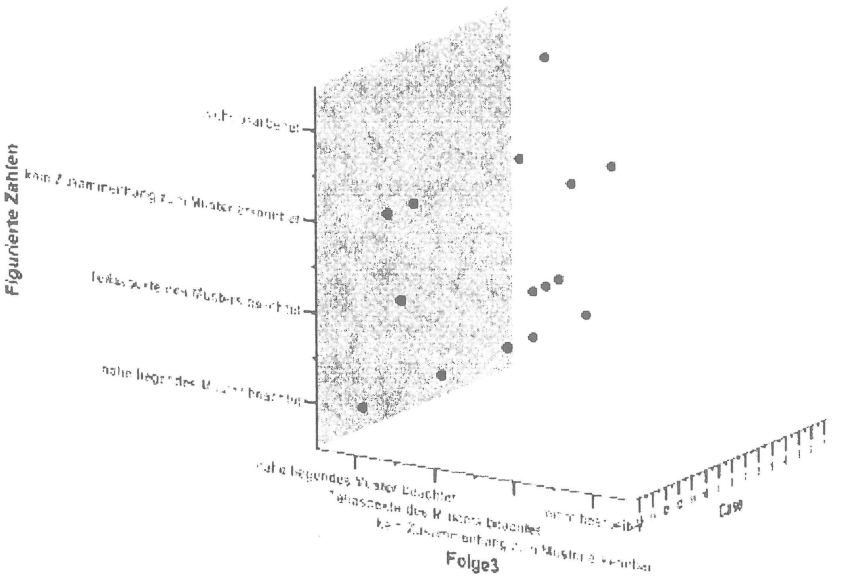
Streudiagramm zur Überprüfung einer möglichen Korrelation zwischen der Darstellung der figurierten Zahlen in Punktmustern oder in Zahlenfolgen

(1. Schuljahr)



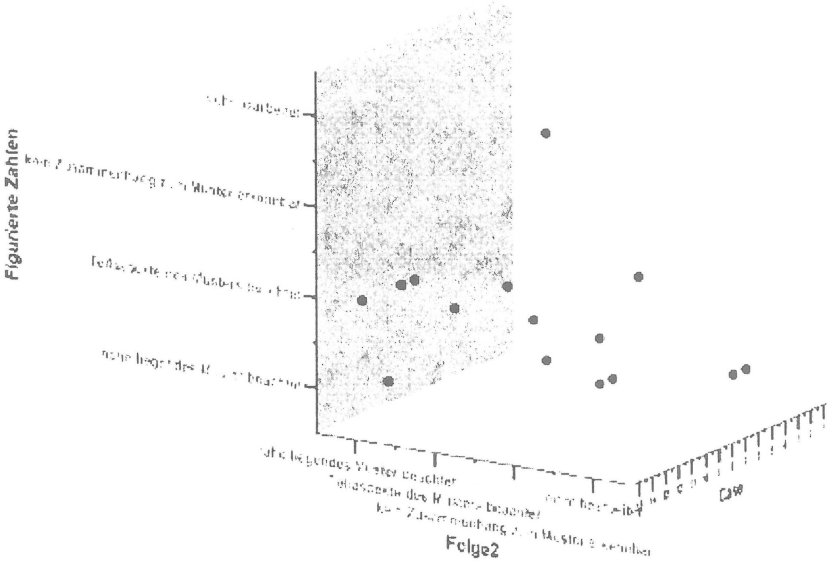
Streudiagramm zur Überprüfung einer möglichen Korrelation zwischen der Darstellung der figurierten Zahlen in Punktmustern oder in Zahlenfolgen

(2. Schuljahr)



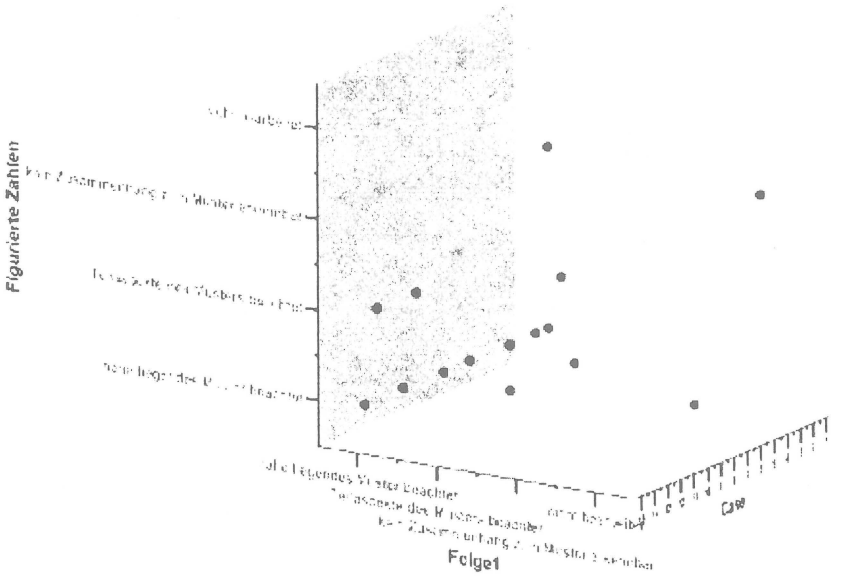
Streudiagramm zur Überprüfung einer möglichen Korrelation zwischen der Darstellung der figurierten Zahlen in Punktmustern oder in Zahlenfolgen

(3. Schuljahr)



Streudiagramm zur Überprüfung einer möglichen Korrelation zwischen der Darstellung der figurierten Zahlen in Punktmustern oder in Zahlenfolgen

(4. Schuljahr)



Pädagogik und Zeitgeschehen
Erziehungswissenschaftliche Beiträge

herausgegeben von
Prof. Dr. Kurt-Ingo Flessau (Universität Dortmund)

Wenn Mathematik nicht als fertiges Produkt, sondern als menschliche Aktivität verstanden wird, kann sie in ihrer Schönheit und besonders in ihren Mustern auch schon Kinder faszinieren. Muster müssen interaktiv erschlossen und produktiv entwickelt werden. Eine solche Begegnung von Kindern mit mathematischen Mustern kann als "Spiel" im besten pädagogischen Sinn der Bildungstheorie und der Ästhetik aufgefasst werden. Kinder bringen die dafür erforderlichen Voraussetzungen mit.

LIT 3-8258-5515-5