Büchter, Andreas

Was ist wichtig im Mathematikunterricht (nicht nur) der Grundschule? : Mathematikdidaktische Antwortversuche aus der Perspektive der folgenden Bildungsabschnitte

In:

Steinweg, Anna Susanne (Hrsg.), Was ist wichtig? : Perspektiven auf den Mathematikunterricht in der Grundschule, Bamberg: University of Bamberg Press, S. 10-25. 2025. DOI: 10.20378/irb-110986

Beitrag im Sammelwerk - Verlagsversion

DOI des Beitrags: 10.20378/irb-111991

Datum der Veröffentlichung: 03.12.2025

Was ist wichtig im Mathematikunterricht (nicht nur) der Grundschule? Mathematikdidaktische Antwortversuche aus der Perspektive der folgenden Bildungsabschnitte

von Andreas Büchter 0000-0001-8411-1004

Von überzeugenden, aber noch nicht in der Breite umgesetzten Überlegungen und Konzepten für den Mathematikunterricht sowie subjektiven Erfahrungen und Sichtweisen ausgehend werden die Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts der Grundschule aus spiralcurricularer Perspektive hinsichtlich der Frage eingeschätzt, was „wichtig" ist. Dabei werden gewisse Akzentuierungen und eine curriculare Streichoption vorgeschlagen.

Schlüsselwörter: Allgemeine Lernziele, Anwendungs- und Strukturorientierung, Spiralcurriculum, Grundlegendes Wissen und Können, Arithmetik

1 Vorbemerkung

Mit der Wahl meines Vortragstitels, die deutlich vor der Ausarbeitung dieses Beitrags erfolgte, wollte ich das übergeordnete Thema („Was ist wichtig? – Perspektiven auf den Mathematikunterricht in der Grundschule") bestmöglich bedienen. Die anschließenden Bemühungen um eine solche Ausarbeitung haben schnell gezeigt, dass ich die angekündigten Antwortversuche nicht in einem üblichen wissenschaftlichen Text leisten kann, der von einem konsolidierten Stand des Diskurses ausgeht und an großer intersubjektiver Nachvollziehbarkeit der Folgerungen orientiert ist. Der hier vorliegende essayartige Text basiert auch auf *subjektiven* Erfahrungen und Sichtweisen sowie evtl. noch nicht ausgereiften Überlegungen, die zu *subjektiven* Antwortversuchen führen. Diese Antwortversuche sind keineswegs zwangsläufig, rufen vermutlich mal mehr und mal weniger Widerspruch von Kolleg:innen hervor, die näher am Mathematikunterricht der Grundschule forschen und entwickeln als ich, und sollen letztlich nur die fortgesetzte Reflexion über Mathematikunterricht anregen.

2 Ausgangsüberlegungen für Antwortversuche

Antwortversuche auf die Frage, was im Mathematikunterricht „wichtig" ist, benötigen einen normativen Rahmen und daher zunächst geeignete theoretische Überlegungen. Anschließend können auch empirische Untersuchungen ggf. klärend wirken, wenn sich z. B. Prädiktoren für das „Wichtige" identifizieren lassen. Falls dabei belastbare Befunde erzielt werden, können diese Prädiktoren „unterstützend wichtig“ werden, allerdings nur in „dienender“ Funktion und nicht als Selbstzweck. Der vorliegende Beitrag widmet sich den vorangehenden theoretischen Überlegungen.

Ein normativer Rahmen für Fragen des Mathematikunterrichts kann z. B. unter Rückgriff auf bildungstheoretische Konzepte, didaktische Grundposition und darin betonte didaktische Prinzipien, aber auch aus pragmatischen Überlegungen und Setzungen des Unterrichtsalltags in der Schule gewonnen werden. Ich gehe zusätzlich von meinen subjektiven Erfahrungen und Sichtweisen aus, um vor dem Hintergrund bewährter Suchrichtungen konkrete Antworten vorzuschlagen.

2.1 Eigene Ausgangsposition für Antwortversuche

Vor meinem Erfahrungshintergrund in der Lehrkräftebildung, aus der Tätigkeit im Landesinstitut für Schule sowie in Forschung und Entwicklung für die Sekundarstufe und die Studieneingangsphase gehe ich von folgenden Grundpositionen und Sichtweisen aus.

- Mathematikdidaktik soll konstruktiv auf die Praxis bezogen sein. Damit ist eine umfassende Betrachtung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse im Sinne eines Verständnisses von Curriculumforschung gemeint, die von der Praxis ausgeht, deren Rahmenbedingungen berücksichtigt und von Zielvorstellungen für Lernprozesse über Lehr-Lern-Materialien bis hin zur Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen (inkl. medialer und methodischer Fragen) geht. Dabei wird berücksichtigt, dass thematisierte Unterrichtsinhalte immer in Konkurrenz zu nicht-thematisierten stehen.
- Für effektive und effiziente Lernprozesse, die grundlegendes mathematisches Wissen und Können möglichst dauerhaft verfügbar machen sollen, ist ein spiralcurricularer Aufbau wesentlich (vgl. Büchter, 2014). Diese langfristige Unterrichtsplanung erfordert einen Aufbau entlang geeigneter stofflicher Entwicklungsstränge. Eine große Herausforderung dabei stellen in unserem gestuften und gegliederten Bildungssystem immer noch Übergänge zwischen einzelnen Abschnitten dar.
- Über grundlegendes mathematisches Wissen und Können hinaus sollen die Lernenden auch ein stimmiges Bild von Mathematik, meta-

mathematisches Wissen und positive Einstellungen zur Mathematik entwickeln können. Dafür muss der Mathematikunterricht auch tatsächlich mathematikhaltig sein und im Sinne einer „pädagogischen Leistungsschule“ mit „ermutigenden Rückmeldungen“ beim „Beurteilen und Fördern“ (Sundermann & Selter, 2006) gestaltet werden.

- Unterrichtsentwicklung kann nur als langfristig und tendenziell evolutionär gestalteter Prozess, der von der Praxis mitgestaltet wird, erfolgreich sein. Das „Modell der Didaktischen Rekonstruktion“ (Kattmann et al., 1997) betont, dass neben der Sachstruktur auch die möglichen Perspektiven der Schüler:innen berücksichtigt werden müssen. Dabei geht es um die „Lernbarkeit“. Der gleichberechtigte Einbezug von Lehrkräften in die Unterrichtsentwicklung soll auch die „Lehrbarkeit“ berücksichtigen. Dies könnte auch disruptive Reformen wie die Einführung der „Mengenlehre“ in den 1960er-Jahren in Westdeutschland (vgl. Hamann, 2018) oder die Einführung der Bildungsstandards vor gut 20 Jahren[1] vermeiden.

2.2 (Mögliche) Suchrichtungen für Antwortversuche

Aus Sicht der Curriculumforschung wird die Frage, was *heute* im Mathematikunterricht wichtig ist, üblicherweise unter Antizipation dessen beantwortet, was die nachwachsende Generation *morgen* und *übermorgen* bewältigen muss. Unter dieser Perspektive gibt es fortwährende mathematikdidaktische Reflexionen, z. B. während der Tagung des Arbeitskreises Grundschule vor drei Jahren (Steinweg, 2022). Es liegt nahe, übergeordnete Zielvorstellungen wie „17 Nachhaltigkeitsziele“ oder „21st Century Skills“ unter der Frage zu analysieren, ob und ggf. wie sie im Mathematikunterricht berücksichtigt werden sollen. Besonders intensiv wurde zuletzt diskutiert, welche Folgen die breite Verfügbarkeit KI-basierter Chatbots haben sollte. Das Fazit von Kortenkamp (2024) verstehe ich so, dass Schüler:innen nach wie vor eine fundierte mathematische Bildung benötigen, deren Kern kaum dem Wandel der Zeit unterliegt.

---

[1] Maßgeblich beteiligte Wissenschaftler:innen schreiben hierzu: „Die Einführung ... ist, damit sie rasch wirksam werden kann, i. w. ‚von oben‘ erfolgt, initiiert von der Politik und konzipiert von der Wissenschaft. Nun muss aber rasch die gesamte Lehrerschaft einbezogen werden“ (Blum et al., 2005). Die Ergebnisse der jüngsten „IQB-Bildungstrends“ (Stanat et al., 2022, 2025) lassen sich kaum im Sinne eines Erfolgs der „Reform von oben“ deuten.

Eine Überbetonung der Diskussion aktueller Herausforderungen kann ggf. dazu führen, dass der Kern mathematischer Bildung und darauf ausgerichteter Lehr-Lern-Prozess vernachlässigt wird. Ein Blick auf ältere Reformdiskussionen zeigt zudem, dass konzeptionelle Überlegungen nicht selten heute noch genauso aktuell sind wie zur Zeit ihrer Entstehung – und manchmal immer noch nicht umfassend eingelöst, wie die „Meraner Reformvorschläge" (Gutzmer,1905)[2]. Im westdeutschen Diskurs der 1970er- und 1980er-Jahre waren u. a. Überlegungen und Konzepte von Wittmann (1974) und Winter (1975, 1985, 1987) prägend, die nach der „gescheiterten Unterrichtsreform" (Hamann, 2018) mit „Mengenlehre" in der Grundschule der Verlockung neuer Vereinseitigungen als Reaktion widerstanden haben und die als Vorläufer jüngerer Reformabsichten gelten (vgl. Neubrand, i. Vorb.).

- *Mathematik als Prozess, genetisches Prinzip*: In „Grundfragen des Mathematikunterrichts" begründet Wittmann (1974) umfassend das „genetische Prinzip" („Der Mathematikunterricht soll nach der genetischen Methode organisiert werden."). Dabei bezieht er sich auf andere Protagonist:innen einer solchen Herangehensweise, die den Charakter von Mathematik als Tätigkeit bzw. als Prozess betonen:

  > Gemeinsam ist ... die Auffassung, daß die Mathematik nur über den *Prozeß* der Mathematisierung richtig verstanden und erlernt werden kann, nicht als Fertigfabrikat. (ebd., Herv. i. O.)

- *Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht*: Im Kontext der Curriculumforschung der 1960er- und 1970er-Jahre betont Winter (1975) die Bedeutung der „Artikulation von allgemeinen Lernzielen" für Fragen der Lehrplan- und Unterrichtsgestaltung. Er arbeitet heraus, dass der Unterricht den Schüler:innen die Möglichkeiten geben soll ...

  > (L1) ... schöpferisch tätig zu sein. [...]
  > (L2) ... rationale Argumentation zu üben. [...]
  > (L3) ... die ... Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren. [...]
  > (L4) ... formale Fertigkeiten zu erwerben. (ebd.)

[2] Krüger (2000) bilanziert dazu: „Im Zusammenhang mit der Erziehung zum funktionalen Denken werden ... grundlegende didaktische Prinzipien genannt, die auch heute noch oder wieder von Aktualität sind ...".

Die „Entfaltung schöpferischer Kräfte“ kann dabei im Mathematikunterricht dazu beitragen, dass Schüler:innen „heuristische Strategien lernen“ (ebd.).

- *Anwendungs- und Strukturorientierung*: Das in Winter (1987) dargelegte Konzept der „Anwendungs- und Strukturorientierung“ des Mathematikunterrichts hat (durch Winters prägende Mitarbeit) Eingang in den Grundschullehrplan in Nordrhein-Westfalen (KM NW, 1985) gefunden.[3] Damit wurden frühere Vereinseitigungen überwunden (vgl. Krauthausen, 2018). „Anwendungsorientierung“ wird dabei im Sinne der didaktischen „Funktionen des Sachrechnens“ (Winter, 1985) verstanden, mit „Sachrechnen als Lernstoff, ... als Lernprinzip, ... als Lernziel: Befähigung zur Erschließung der Umwelt.“

In Orientierung an diesen Überlegungen und Konzepten „scanne“ ich nun aus spiralcurricularer Sicht die Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts der Grundschule: Arithmetik, Geometrie, Sachrechnen.

3 Einige Antwortversuche

Ein erster Antwortversuch auf die große Frage („Was ist wichtig ...?“) ist scheinbar banal: *Im Mathematikunterricht ist wichtig, dass die Schüler:innen sich mathematisch mit Objekten der Mathematik beschäftigen.* Ein Unterrichtsbeispiel in Dexel (2024) zur Thematisierung der Zwei zeigt aber, dass dies nicht selbstverständlich ist. Dort sollen sich Schüler:innen in einem methodisch zeitgemäßen Unterricht mit der Ziffer Zwei auseinandersetzen, die entsprechende Figur zeichnen, gestalten, ihre Form verbalisieren usw., wobei weder die begrifflichen Eigenschaften der Zahl thematisiert werden, noch das Schreiben der Ziffer automatisiert wird. Eine mathematische Beschäftigung mit der Zahl würde die Beziehungen zu anderen Zahlen, ordinale und kardinale Eigenschaften usw. in den Blick nehmen. Für die Sekundarstufe lassen sich vergleichbare Beispiele angeben, bei denen höchstens die Oberfläche von Begriffen berührt wird, diese aber nicht mathematisch geklärt und in Beziehung zu anderen gesetzt werden.

[3] Weitere Eckpunkte dieses Lehrplans, die auf Winter zurückgehen (vgl. Neubrand, i. Vorb.), sind entdeckendes Lernen, produktives Üben und Differenzierung als „Grundsätze der Unterrichtsgestaltung“ (KM NW, 1985).

Aus Sicht der Sekundarstufe ist in naheliegender Weise wichtig, dass tragfähige Grundlagen für das Weiterlernen verfügbar sind. Bei grundlegendem Wissen und Können ist unter stofflicher Perspektive eine effektive und effiziente Arbeitsteilung zwischen den Schulstufen unter Beachtung des Spiralprinzips wichtig. Dies wird im Folgenden für die Inhaltsbereiche der Grundschule thematisiert. Darüber hinaus sind auch z. B. Interesse und Freude an Mathematik oder in altersangemessenem Grad erreichte allgemeine Lernziele wichtig.

3.1 Arithmetik ist wichtig!

Arithmetik spielt im Mathematikunterricht der Grundschule eine zeitlich hervorgehobene Rolle. Aus Sicht der Sekundarstufe sollte die Arithmetik noch deutlicher in den Vordergrund treten: *Wichtig ist ein tragfähiges Verständnis von Zahlen, Operationen und Relationen, sicheres und flexibles Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen sowie sicheres schriftliches Rechnen. Dies umfasst eine Vertrautheit mit den wichtigsten Darstellungen (im Stellenwertsystem und am Zahlenstrahl), die flexible Anwendung in außer- und innermathematischen Kontexten und die Anbahnung algebraischen Denkens.*

Die Arithmetik ist bis in die frühe Sekundarstufe so zentral wie später die Algebra und Funktionen/Abbildungen in der Oberstufe und der Hochschule. Warum ich der Arithmetik diesen Stellenwert zuschreibe und welche Bedeutung sie für das Weiterlernen in der Sekundarstufe haben kann, stelle ich für wichtige Teilbereiche konkreter dar.

3.1.1 Zahlen und Grundrechenarten

Für die Zahlbereichserweiterungen und die Grundrechenarten in den neuen Zahlbereichen ist ein tragfähiges Verständnis von natürlichen Zahlen und ihren verschiedenen Aspekten sowie der Grundrechenarten mit ihren verschiedenen Anwendungssituationen (oder Grundvorstellungen) unabdingbar. Dies gilt insbesondere für das Verstehen und Anwenden des strukturellen Zusammenhangs von Operation und Umkehroperation, der über die Zahlbereichserweiterungen hinaus zentral ist. An diese Grundlagen kann angeschlossen werden, indem überlegt wird, welche Aspekte, Vorstellungen und Zusammenhänge im neuen Zahlbereich tragfähig bleiben und warum die anderen nicht mehr tragfähig sind. Die Operationen im neuen Zahlbereich werden formal unter Rückgriff auf die Zahlen und Operationen im alten Zahlbereich festgelegt. Auch wenn dies unterrichtlich nicht explizit so betrachtet wird, bleibt der Sachverhalt implizit relevant.

Aufgrund dieser zentralen Bedeutung wird das Rechnen mit natürlichen Zahlen zwar zu Beginn der Sekundarstufe wiederholt (und im Zahlenraum ausgeweitet), die Verstehensgrundlage wird hier aber – auch aus Zeitgründen – häufig nicht mehr hinreichend betrachtet.

3.1.2 Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen

Sicheres und flexibles Kopfrechnen ist zentral für eine arbeitsökonomische Beherrschung späterer mathematischer Anforderungen, bei denen Zahlen involviert sind. Schon für halbschriftliches Rechnen sind das Einspluseins und das Einmaleins in gut automatisierter Form ebenso wichtig wie flexible Zahlzerlegungen. Neben dem prinzipiellen Verstehen und Können ist dabei eine gewisse Automatisierung wichtig, um kognitive Kapazitäten für die eigentliche Anforderung (vorteilhaftes halbschriftliches Rechnen) freizuhalten. Umgekehrt dürften umfassende Erfahrungen im halbschriftlichen Rechnen über Verinnerlichungsprozesse zu ausgeweiteten Fähigkeiten im Kopfrechnen jenseits des automatisierten Bereichs führen.

Große Bedeutung hat das Kopfrechnen in der Folge für schriftliche Rechenverfahren und in der Sekundarstufe z. B. für die Bruch- und Prozentrechnung, das Überschlagen von Wurzeln, das Anwenden von Lösungsformeln oder Ableitungsregeln usw. Zahlzerlegungen und Strategien halbschriftlichen Rechnens sind darüber hinaus ein Baustein für algebraisches Denken, weil hier Zahlen und Zahlenterme relational im Sinne der Gleichwertigkeitsrelation (vgl. Akinwunmi & Steinweg, 2024) betrachtet werden (z. B. $317 - 199 = 317 - 200 + 1$).

3.1.3 Zahldarstellungen und Relationen

Die Vertrautheit mit zentralen mathematischen Darstellungen (im Stellenwertsystem und am Zahlenstrahl) und der Ordnungsrelation sind ein weiterer grundlegender Bereich. Das Verständnis der Zahldarstellung im Dezimalsystem ist u. a. Grundlage für die schriftlichen Rechenverfahren und das Verstehen von Dezimaldarstellungen rationaler und irrationaler Zahlen. Bei nicht-ganzen Zahlen wird das Dezimalsystem dabei „nach rechts erweitert“ (um Zehntel, Hundertstel, Tausendstel …). Auch für eine Herleitung oder zumindest Plausibilisierung von Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen ist die Vertrautheit mit der Darstellung im Dezimalsystem eine wichtige Voraussetzung.

Der Zahlenstrahl und später die Zahlengerade als Träger der Zahlen sind weitere grundlegende Darstellungen. Am Zahlenstrahl wird die Ordnungsrelation in anderer Darstellung begreifbar („größer als" heißt dann „liegt rechts von"). Freudenthal (1973) weist der Zahlengerade eine wesentliche Rolle beim Aufbau des Zahlsystems im Mathematikunterricht zu: Sie ist anschaulich Trägerin der reellen Zahlen, wird aber erst schrittweise im Laufe der Sekundarstufe durch verschiedene Konstruktionen und Betrachtungen erforscht. Die mentale Platzierung reeller Zahlen auf der Zahlengerade, das interpretieren von (absoluten) Unterschieden von Zahlen als Abständen sowie das Verständnis der Ordnungsrelation würde noch vielen Studienanfänger:innen dabei helfen, Aufgaben wie die folgende zu lösen:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $|x - 5| < |x - 1|$.

Die Ungleichung lässt sich formal unter Rückgriff auf die Betragsdefinition mit einer Unterscheidung von drei Fällen lösen. Sie kann aber auch durch Darstellung an der Zahlengerade gelöst werden (Abb. 1).

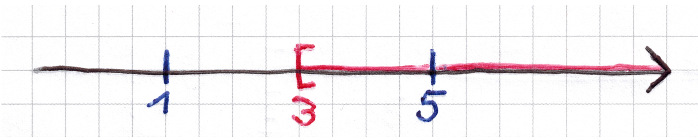

Abb. 1 Lösen einer Betragsungleichung

Die Ungleichung gilt für alle reellen Zahlen, deren Abstand von 5 kleiner ist als der Abstand von 1. In der Mitte liegt 3. Für reelle Zahlen größer als 3 gilt die Ungleichung somit.

Als weitere Relation ist die Gleichwertigkeitsrelation relevant. Es geht dabei um das bereits angesprochene Verständnis des Gleichheitszeichens im Sinne der Gleichwertigkeit von (i. d. R. verschiedenen) Termen, anstelle des Verständnisses als Handlungsaufforderung zum Ausrechnen. Dieses relationale Verständnis des Gleichheitszeichens ist ein weiterer Baustein für algebraisches Denken in der Sekundarstufe (vgl. Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2023).

3.1.4 *Schriftliches Rechnen*

Die schriftlichen Rechenverfahren im Stellenwertsystem sind etwa gegenüber dem Rechnen mit Zahlen in römischer Darstellung eine kulturelle Errungenschaft, die die Schüler:innen als solche kennenlernen sollten. Außerdem lernen sie hier Algorithmen kennen, die sie grundsätzlich verstehen ausführen können. In diesem Aspekt liegt vermutlich der größere bildende Wert als im Berechnen Können der Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten. Das Verstehen der Algorithmen (egal in welcher konkreten Form) basiert dabei auf dem Verstehen der Stellenwertdarstellung, die in der Grundschule intensiv thematisiert wird. Ein tieferes Verständnis des Divisionsalgorithmus kann später direkt klären, warum die Dezimaldarstellung von Brüchen endlich oder periodisch sein *muss* (vgl. Büchter & Donner, 2024).

Zwar werden die schriftlichen Rechenverfahren aktuell zu Beginn der Sekundarstufe erneut thematisiert, aber häufig vorrangig ausführungsorientiert. Die Unterrichtszeit genügt für tiefere Betrachtungen kaum und der Abstand zur intensiven Betrachtung der Dezimaldarstellung ist bereits zu groß. Wenn die Grundschule hier noch mehr Zeit investieren würde, könnte in der Sekundarstufe dafür ein anderes Thema der Grundschule erstmalig systematisch behandelt werden.

3.1.5 *Beiträge zur Prozess-, Anwendungs- und Strukturorientierung sowie zu allgemeinen Lernzielen*

Hinsichtlich einer erwünschten Unterrichtsgestaltung in Orientierung an den in 2.2 dargestellten Überlegungen und Konzepte kann die Arithmetik umfassende Beiträge leisten, die so kaum durch andere Inhalte geleistet werden können. *Mathematik als Prozess* wird erfahrbar, wo Entdeckungen ermöglicht werden, z. B. durch operativ strukturierte Übungen zu den Grundrechenarten, oder wo eigene Lösungswege geplant und realisiert werden können, z. B. beim halbschriftlichen Rechnen mit anschließendem Austausch in Rechenkonferenzen o. ä. Hinsichtlich der Anwendungs- und Strukturorientierung sei hier vor allem auf die Möglichkeiten der *Strukturorientierung* hingewiesen. Die Arithmetik bietet bereits in der Grundschule eine Vielzahl struktureller Eigenschaften und Zusammenhänge von Zahlen, Operationen und Relationen. Auf dieser

Basis können strenge Argumentationen geführt oder Probleme zweifelsfrei gelöst werden können. Hier gibt es also eine geeignete Grundlage für *allgemeine Lernziele*, insbesondere für das *rationale Argumentieren* und den *Erwerb formaler Fertigkeiten*.

3.2 Was ist noch wichtig?

Das bisherige Plädoyer würde tendenziell auf eine moderate Ausweitung der Unterrichtszeit für Arithmetik hinauslaufen, die an anderer Stelle gewonnen werden müsste. Es gibt aber im Bereich der Geometrie und des Sachrechnens ebenfalls unverzichtbare Beiträge zur mathematischen Bildung, auf die kurz eingegangen wird, bevor auch Einsparpotenzial gesucht wird.

3.2.1 Geometrie

In der Geometrie sind die Beiträge zur Entwicklung des *räumlich-figuralen Denkens* und des *geometrischen Strukturierens* besonders wertvoll. Hierzu zählt auch die Entdeckung und Nutzung von *Symmetrie*. Studien zeigen, dass sich die Raumvorstellung bei Kindern im Grundschulalter schnell entwickelt und gut fördern lässt (vgl. Heil, 2020). Die Materialien, Spiele und Aufgaben für die Grundschule sind hier besonders reichhaltig und sollten auch in der Sekundarstufe intensiver verwendet werden (ggf. in altersangepasster Form).

Geometrische Begriffsbildungen werden teilweise propädeutisch betrieben, teilweise aber auch systematisiert und formalisiert. Diese Systematisierung und Formalisierung ist auch mit Blick auf den aktiven Akt des Strukturierens wesentlich. Hier und im Bereich der *geometrischen Abbildungen* werden Beziehungen zwischen Begriffen bzw. Objekten systematisch betrachtet. Zu Beginn der Sekundarstufe wird in der Geometrie vieles (vermutlich aus Unkenntnis) mit großer Redundanz und teilweise weniger mathematischem Tiefgang wiederholt, was eigentlich (d. h. dem Lehrplananspruch nach) schon gefestigt vorhanden ist. Im Vergleich zur Arithmetik bietet die Geometrie dennoch weniger begrifflich geklärte strukturelle Zusammenhänge, sodass sie nicht die gleichen Beiträge (hinsichtlich Qualität und Umfang) zum mathematischen Argumentieren und Problemlösen leisten kann.

Mit Blick auf Längen sowie Flächen- und Rauminhalte leistet die Geometrie wichtige Beiträge zum Aufbau eines tragfähigen Verständnisses des *(mathematischen) Messens*. Durch das Messen von Größen von Figuren unter Zuhilfenahme von zugrundliegenden Gelegenheitsmaßen oder zunehmend standardisierten Maßen werden Messprinzipien erfahrbar, die durch das Zerlegen und Zusammenfügen von Figuren ergänzt werden. Hieran kann die Erarbeitung der Flächeninhaltsberechnung zu Beginn der Sekundarstufe nahtlos anknüpfen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Geometrie, der vor allem in der Sekundarstufe zu kurz kommt, ist das Potenzial zu *schöpferisch-kreativem Tun*, was hier weniger im Sinne des Problemlösens und mehr im Sinne des Gestaltens „schöner" Muster, vor allem ästhetisch ansprechender Bilder gemeint ist. Parkettierungen und Bandornamente sind typische Beispiele, aber nicht die einzigen. Die ästhetischen Erfahrungen, die hier möglich sind, sollten auch ermöglicht werden. Auch wenn es Beiträge gibt, die zeigen, dass ästhetische Erfahrungen auch in der Arithmetik möglich sind (z. B. Gerdiken & Steinweg, 1999; Winter, 2001), sind diese Erfahrungen in der Geometrie aufgrund der *visuell geprägten* Ästhetik unmittelbarer. In der Arithmetik handelt es sich um eine stärker geschulte Wahrnehmung der Ästhetik (von Punktmustern, Zahlenfolgen, „schönen" Formeln, „eleganten" Beweisen, ...).

3.2.2 Sachrechnen

Das Sachrechnen leistet die wesentlichen Beiträge zu *Anwendungsorientierung* im Mathematikunterricht. Über die Geometrie hinaus werden hier die *Größen* Geldwerte, Zeitspannen und Massen thematisiert, die auch in der Lebenswelt der Schüler:innen eine Rolle spielen und zur Umwelterschließung beitragen (*Funktion: Lernstoff*). Im Sachrechnen liegt der Umgang mit Daten sowie die Entwicklung von Konzepten und Darstellungen der *Beschreibenden Statistik* besonders nahe, da viele Fragen eine datenbasierte Beantwortung erfordern.

Zentral im Sachrechnen ist der aufklärerische Beitrag zur *Umwelterschließung*, wobei die Sache im Vordergrund steht und Mathematik genutzt wird, um etwas über die Sache zu lernen (*Funktion: Lernziel*). In der Anwendung wird das verfügbare Wissen und Können häufig flexibilisiert und manche Probleme regen zur Entwicklung neuer Konzepte oder zur

Entdeckung neuer Zusammenhänge in der Mathematik an. Aus meiner Sicht wird mit dieser zentralen Funktion im Konzept der Anwendungsorientierung und des Sachrechnens von Winter (1985, 1987) die Frage, wie Realitätsbezüge im Mathematikunterricht behandelt werden sollten, erheblich klarer beantwortet als in vielen Beiträgen der modernen Didaktik des mathematischen Modellierens.

Viele *mathematische Konzepte*, die in der Grundschule und der frühen Sekundarstufe thematisiert werden, wurzeln in Fragen der uns umgebenden Welt und lassen sich – gedanklich für Schüler:innen gut zugänglich – von hier aus entwickeln (*Funktion: Lernprinzip*). Neben Beispielen die typisch für arithmetische oder geometrische Konzepte sind, bieten gehaltvolle „Fermi-Probleme“ Anlass, sich datenbasiert mit der Gewinnung von Schätzwerten zu befassen, dabei intuitiv Verteilungen zu betrachten und Kennwerte zu entwickeln. So führt die Frage „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?“ (Peter-Koop, 2003) neben anderen Betrachtungen dazu, dass Schüler:innen (z. B. durch Messen) feststellen, dass Autos unterschiedlich lang sind (Variabilität von Daten) und es für die die Beantwortung der Frage sinnvoll ist, mit einem Durchschnittswert (Konzept des Kennwerts) zu arbeiten.

3.3 War das alles?

Mit Blick auf die Bildungsstandards für die Primarstufe lässt sich fragen, ob das alles war. Ist sonst nichts wichtig? Was ist mit „Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang“ oder „Daten und Zufall“?

Aus meiner Sicht muss „Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang“ sich als grundsätzliche Betrachtungsweise durch die diskutierten Inhaltsbereiche ziehen. Es gibt hierfür zahlreiche Untersuchungen, Reflexionen und konkrete Vorschläge, vor allem für „Muster und Strukturen“ (z. B. Lüken, 2012; Steinweg, 2014; Akinwunmi & Steinweg, 2024), aber auch für „funktionales Denken“ im Sinne der „Meraner Reformvorschläge“ (z. B. Büchter, 2011). Eine inhaltliche Separierung des Bereichs schadet ggf. mehr als sie nutzt.

Im Bereich „Daten und Zufall“ sehe ich die Möglichkeit die Thematisierung von Wahrscheinlichkeiten in die Sekundarstufe zu verlagern, wo sie curricular besser vorbereitet und angebunden ist. Zwar gibt es gehaltvolle Ausarbeitungen für Stochastikunterricht in der Grundschule (z. B. Sill &

Kurtzmann, 2019), aber die Elemente der Kombinatorik gehören eigentlich nicht zur Stochastik (vgl. ebd.), sondern als „systematisches“ oder „rechnendes Zählen“ in die Arithmetik. Der Umgang mit Daten (Beschreibende Statistik) ist gut im Sachrechnen verankert (unter Anwendung der Arithmetik und mit Entwicklung geeigneter Konzepte und Darstellungen). Die Wahrscheinlichkeit (von Ereignissen) tritt schließlich durch Reduktion merkwürdig zurechtgestutzt in den Standards auf. In der aktuellen Version wird (nicht überschneidungsfrei) zwischen „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ unterschieden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sicherlich nicht für sichere oder unmögliche Ereignisse entwickelt worden. Wenn alle anderen aber unter „möglich“ zusammenfallen, bleibt sie hohl. Es scheint mir deutlich sinnvoller zu sein, mit den expliziten begrifflichen Betrachtungen zu warten, bis in der Bruchrechnung eine Anteilsvorstellung ausgebildet wurde. Zwar gibt es Vorschläge für die qualitative und relative Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten (ebd.), aber diese Propädeutik ist aus meiner Sicht zeitlich kurz vor der Thematisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in Klasse 6 oder 7 besser aufgehoben.

4 Schlussbemerkungen

Im Mathematikunterricht sind mathematisch gehaltvolle Betrachtungen wichtig, die auch die Anwendung von Mathematik zur Umweltschließung umfassen. Mathematikdidaktisch erfundene Sprechweisen oder verselbständigte Aufgabenformate sind hingegen nicht wichtig. So gibt es z. B. gehaltvolle „Fermi-Probleme“ und andere, die i. W. zum wiederholten proportionalen Hoch- oder Runterrechnen führen.

Für die curriculare Frage, was wann wie und warum unterrichtet wird, ist wichtig, dass nicht alles, was grundsätzlich bereits früh gelernt werden kann, auch früh thematisiert wird. Auch wenn Untersuchungen zeigen, dass lineare Funktionen (Stern et al., 2018) oder das explizite Arbeiten mit Variablen (z. B. nach Davydovs Konzept, vgl. Reitz-Koncebovski, 2023; zur Kritik an diesen Ansätzen vgl. Steinweg, 2013) bereits in der Grundschule erfolgreich unterrichtet werden können, bedeutet dies nicht, dass hier der beste Platz dafür ist.

Schließlich sollte man noch fragen: *Wer ist wichtig im Mathematikunterricht?* Neben den Schüler:innen sind dies natürlich die Lehrkräfte. Die

Lehrkräftebildung und die kooperative Unterrichtsentwicklung (zwischen Lehrkräften sowie zwischen Wissenschaft und Praxis) sind wichtig. In der Lehrkräftebildung ist wichtig, dass mehr Wissen über den tatsächlichen und einen sinnvollen curricularen Aufbau von Mathematikunterricht vom Elementar- bis zum Tertiärbereich bereitgestellt und genutzt wird. Schließlich ist wichtig, dass Lehrkräfte (auf allen Stufen des Bildungssystems) über eine geeignete fachliche Ausbildung verfügen. Für die Grundschule sollte diese zeitlich hinreichend umfangreich und inhaltlich stark auf Arithmetik (und Zahlentheorie) und Geometrie fokussiert sein.

Literatur

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule. Muster entdecken – Strukturen verstehen.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-68701-7

Blum, W., Drüke-Noe, C., Leiß, D., Wiegand, B. & Jordan, A. (2005). Zur Rolle von Bildungsstandards für die Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(4), 267–274. https://doi.org/10.1007/BF02655814

Büchter, A. (2011). Funktionales Denken entwickeln – von der Grundschule bis zum Abitur. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Medien und Materialien* (S. 9–24). University of Bamberg Press. https://doi.org/10.20378/irb-352

Büchter, A. (2014). Das Spiralprinzip – Begegnen, Wiederaufgreifen, Vertiefen. *mathematik lehren*, Heft 182, 2–9.

Büchter, A. & Donner, L. (2024). Von 2 bis 100 – eine substanzielle Lernumgebung zur Dezimaldarstellung von Stammbrüchen. In B. Barzel, A. Büchter, C. Rütten, F. Schacht & S. Weskamp-Kleine (Hrsg.), *Inklusives Lehren und Lernen von Mathematik* (S. 159–174). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-43964-4

Dexel, T. (2024). Gesellschaft im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel? Mathematiklernen in der Grundschule zwischen Singularisierung und Superdiversität. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel*. (S. 9–24). University of Bamberg Press. https://doi.org/10.20378/irb-104036

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. 2 Bde. Klett.

Gerdiken, K. & Steinweg, A. S. (1999). Ästhetik im Mathematikunterricht der Primarstufe – Arithmetische und geometrische Strukturen. In C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science* (S. 86–94). Ernst Klett Grundschulverlag.

Gutzmer, A. (1905). Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 36, 543–553.

Hamann, T. (2018). *Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland*. Universitätsverlag Siegen.

Hefendehl-Hebeker, L. & Rezat, S. (2023). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl.) (S. 85–121). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3

Heil, C. (2020). *The Impact of Scale on Children's Spatial Thought. A Quantitative Study für Two Settings in Geometry Education*. Springer. Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32648-7

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H. & Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 3*(3), 3–18.

KM NW – Kultusministerium des Landes Nordrhein-Westfalen (1985*). Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*. Ritterbach.

Kortenkamp, U. (2024). Wieviel Mathe braucht der Mensch? Mathematische Kernkompetenz im Angesicht von KI. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel*. (S. 57–72). University of Bamberg Press. https://doi.org/10.20378/irb-104036

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Krüger, K. (2000). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte, 47*(2), 221–241. https://doi.org/10.1007/s005910070004

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Waxmann.

Neubrand, M. (i. Vorb.). Zwischen politischen Absichten und inhaltlicher Ausgestaltung: Zur Geschichte der deutschen Bildungsstandards und deren Begleitung durch die Mathematikdidaktik. In A. Büchter, R. Bruder, L. Donner, L. Hefendehl-Hebeker & R. Sträßer (Hrsg.), *Zur Geschichte der Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum*. Springer Spektrum.

Peter-Koop, A. (2003). „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?” Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen. In S. Ruwisch & dies. (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 111–130). Mildenberger.

Reitz-Koncebovski, K. (2023). Die Algebra auf den Kopf gestellt – Davydovs Ansatz für den Anfangsunterricht im Kontext Didaktik der Algebra. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022* (S. 57–60). http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-23487

Sill, H.-D. & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7

Stanat, P., Schipolowski, S., Schneider, R., Sachse, K. A., Weirich, S. & Hentschel S. (Hrsg.). (2022). *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich.* Waxmann. https://doi.org/10.31244/9783830996064

Stanat, P., Schipolowski, S., Gentrup, S., Sachse, K. A., Weirich, S. & Hentschel S. (Hrsg.). (2025). *IQB-Bildungstrend 2024. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der 9. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich.* Waxmann. https://doi.org/10.31244/9783818851002

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2738-0

Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends – Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51–66). University of Bamberg Press. https://doi.org/10.20378/irb-21023

Steinweg, A. S. (Hrsg.). (2022). *Mathematische Bildung heute und morgen: Herausforderungen und Perspektiven.* University of Bamberg Press. https://doi.org/10.20378/irb-55799

Stern, E., Felbrich, A. & Schneider, M. (2018). Mathematiklernen. In D. H. Rost, J. R. Sparfeldt & S. R. Buch (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (5. Aufl.) (S. 507–514). Beltz.

Sundermann. B. & Selter, C. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht.* Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7*(3), 106–116.

Winter, H. (1985). *Sachrechnen in der Grundschule.* Cornelsen.

Winter, H. (1987). *Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule.* Scriptor.

Winter, H. (2001). Quadrat und Zahl. Ästhetische Erfahrungen im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, Heft 106, 19–41.

Wittmann, E. (1974). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Vieweg.

Prof. Dr. Andreas Büchter
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Str. 9
45127 Essen
andreas.buechter@uni-due.de