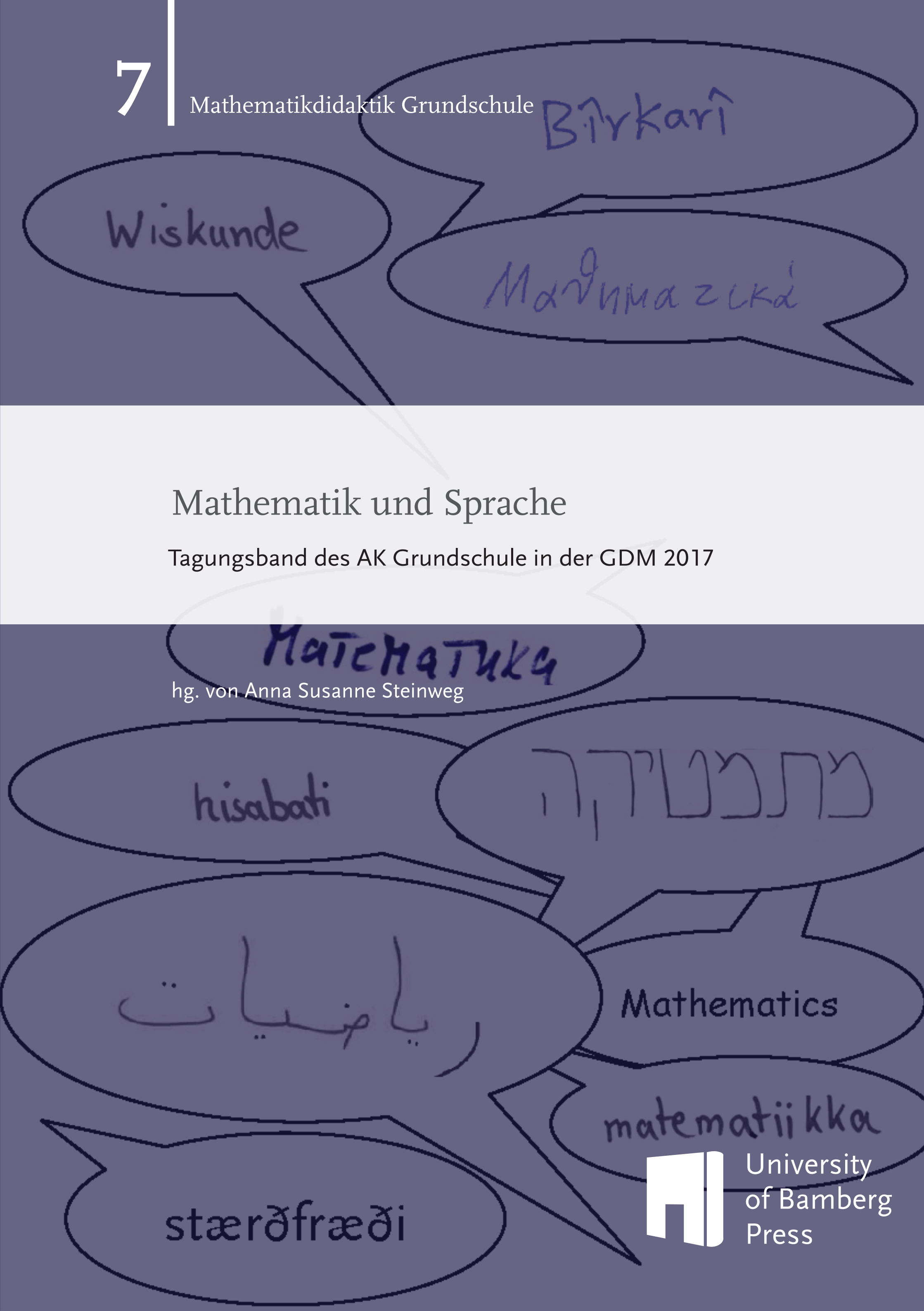
7 | Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematik und Sprache

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2017

hg. von Anna Susanne Steinweg



University of Bamberg Press

7 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

hg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 7

University
of Bamberg
Press
2017

Mathematik und Sprache

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2017

hg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press
2017

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

Herstellung und Druck: Digital Print Group, Nürnberg
Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press, Larissa Günther
Umschlagfoto: © A. Steinweg

http://www.uni-bamberg.de/ubp/

ISSN: 2193-2905
ISBN: 978-3-86309-511-6 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-86309-512-3 (Online-Ausgabe)
URN: urn:nbn:de:bvb:473-opus4-503259
http://dx.doi.org/10.20378/irbo-50325

Inhaltsverzeichnis

... aus den Arbeitsgruppen

Vorwort

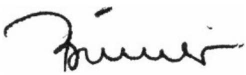
In dem hier vorliegenden siebenten Band der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ sind die Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM zusammengefasst. Die Tagung fand vom 3. bis 5. November 2017 in Bad Salzdetfurth (Niedersachsen) statt. Das diesjährige Tagungsthema „Mathematik und Sprache“ wurde mit großem Interesse unter verschiedenen Blickwinkeln diskutiert.

Das Thema Sprachbildung ist in der wissenschaftlichen, bildungspolitischen und praxisorientierten Diskussion allgegenwärtig. Untersuchungen zeigen, dass es einen positiven Zusammenhang zwischen fachintegrierter Sprachförderung und der Entwicklung sprachlicher und fachlicher Kompetenzen der Kinder gibt (vgl. Rösch & Stanat, 2011). In mathematischen Lernprozessen sind Kinder auf bildungs- und fachsprachliche Kompetenzen angewiesen. Das bedeutet, Kinder sind gefordert Aufgabenstellung zu lesen und zu verstehen, eigene Überlegungen zu äußern, Lösungswege darzustellen bzw. schriftlich zu dokumentieren. In den Bildungsstandards der Mathematik ist eigens ein Kompetenzbereich *Kommunizieren* ausgewiesen, der eng mit den anderen Bereichen *(mathematisches) Argumentieren, Problemlösen, Modellieren* und *Darstellen* vernetzt ist. Sprachliche Kompetenzen sind somit von großer Bedeutung für den Lernerfolg in Mathematik. (vgl. Heinze, Herwartz-Emden & Reiss, 2007).

Die Tagung leistete einen Beitrag dazu, aktuelle Forschung zu dieser Thematik vorzustellen, Ergebnisse zu diskutieren und Anregungen weiterzugeben. In den Hauptvorträgen wurden verschiedene Aspekte zum Themengebiet Sprachbildung im Fach in den Blick genommen. So ging Melanie Maske-Loock (Dortmund) im von Lilo Verboom (Düsseldorf) vorbereiteten Vortrag auf die Strukturierung und Gestaltung von Lernprozessen zum Erwerb eines mathematischen Fachwortschatzes ein. Die Besonderheiten in der Entwicklung der Fachsprache für Mathematik betrachtete Heinz Steinbring (Duisburg-

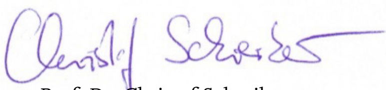
Essen). Kerstin Tiedemann (Bielefeld) nahm Kontexte in den Blick und ging auf deren Herausforderungen und Chancen für Sprachentwicklung im Mathematikunterricht ein. Susanne Prediger und Daniela Götze (Dortmund) stellten praktische Ansätze eines Konzepts der Sprachbildung im Mathematikunterricht und empirische Befunde dazu vor.

Auch in diesem Jahr haben wieder viele Kolleginnen und Kollegen ihre Arbeiten aus der aktuellen mathematikdidaktischen Grundschulforschung im Rahmen der Arbeitsgruppen vorgestellt und somit neue Denkanstöße geboten. Der Sprecherrat bedankt sich dafür herzlich bei allen Vortragenden. Unser Dank gilt auch den Koordinatorinnen und Koordinatoren der Arbeitsgruppen. Durch ihr kontinuierliches Engagement ist es möglich, dass u. a. auch Nachwuchsforscherinnen und -forscher Gelegenheit zur Präsentation und Diskussion ihrer Projekte bekommen.



Elke Binner

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger



Prof. Dr. Christof Schreiber

Prof. Dr. Sebastian Wartha

Literatur

Heinze, A., Herwartz-Emden, L., & Reiss, K. (2007). Mathematikkenntnisse und sprachliche Kompetenzen bei Kindern mit Migrationshintergrund zu Beginn der Grundschulzeit. *Zeitschrift für Pädagogik, 53,* 562-581.

Rösch, H., & Stanat, P. (2011). Bedeutung und Form (BeFo): Formfokussierte und bedeutungsfokussierte Förderung in Deutsch als Zweitsprache. In N. Hahn, T. Roelcke (Hrsg.), *Grenzen überwinden mit Deutsch. Beiträge der 37. Jahrestagung DaF an der PH Freiburg. MatDaF Bd. 58* (S. 149-161). Göttingen: Universitätsverlag.

Webseite des Arbeitskreises http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/

Sprachbildung als langfristige Entwicklungsaufgabe - Praktische Ansätze und ihre empirische Fundierung am Beispiel Algebra

von Susanne Prediger und Daniela Götze

Eine langfristig konzipierte Sprachbildung im Mathematikunterricht fokussiert diejenigen Sprachhandlungen und Sprachmittel, die für die mathematische Bildung zunehmend wichtig werden, zum Beispiel die Sprachhandlungen beim Verallgemeinern und Erklären von Bedeutungen. Im Beitrag wird an Beispielen aus Arithmetik und Algebra aufgezeigt, wie langfristige algebraische Vorstellungsentwicklung durch Sprachbildung unterstützt werden kann und muss.

Schlüsselwörter: Sprachliches und fachliches Lernen, Sprache als ungleich verteilte Lernvoraussetzung und Lerngegenstand, allgemein beschreiben, Bedeutung erklären

0 Einleitung

Sprache ist im Mathematikunterricht nicht nur *Lernmedium*, sondern auch *ungleich verteilte Lernvoraussetzung*, über die nicht alle Kinder im gleichen Maße verfügen. Damit sie auch *Lerngegenstand* werden kann, muss zunächst spezifiziert werden, welche sprachlichen Anforderungen tatsächlich für das fachliche Lernen relevant sind. Wir plädieren dafür, dabei nicht nur die aktuelle Lernsituation, sondern auch die langfristigen Anforderungen im Spiralcurriculum zu berücksichtigen. Dabei rücken zwei Sprachhandlungen in den Fokus, die jahrgangsübergreifend bedeutsam sind: *Bedeutungen erklären* und *allgemeine Zusammenhänge beschreiben*.

1 Identifizieren fachspezifischer sprachlicher Anforderungen zum Umgang mit Variablen, Termen und Formeln

1.1 Nicht Textaufgaben, sondern inhaltliches Verständnis

Bildungssprachliche Kompetenz ist entscheidend für die Mathematikleistung, dies haben verschiedene Studien gezeigt (Stanat, 2006; Prediger et al., 2015). Die häufig artikulierte Zuweisung, dass die Sprachprobleme lediglich auf Textaufgaben zurückzuführen seien, erweist sich als empirisch nicht haltbar: Zwei Tests in Klasse 7 und 10 (Prediger et al., 2015; Pöhler et al., 2017) zeigen, dass

1. sprachlich Schwache tatsächlich erheblich schwächere Mathematikleistungen erzielen (in den Zentralen Prüfungen 10 um 1,5 Noten bzw. mit 14 % Varianzaufklärung),

2. dies jedoch nicht an den Textaufgaben liegt (denn die Differenz zwischen Textaufgaben und anderen Aufgaben ist bei sprachlich Schwachen nicht größer als bei sprachlich Starken),
3. stattdessen schneiden die sprachlich Schwachen jeweils bei denjenigen Items am schwächsten ab, die inhaltliches Verständnis der mathematischen Konzepte erfordern.

Daher musste die kognitive Funktion der Sprache beim Aufbau des inhaltlichen Verständnisses selbst genauer untersucht werden (vgl. Prediger, im Druck).

1.2 Sprachliche Anforderungen in algebraischen Lernsituationen der Klasse 8 – Fallbeispiel Ayla und Gözden

Ayla und Gözden besuchen eine nachträgliche Förderung, weil sie die Einführung in die Algebra nicht erfolgreich bewältigt haben. Darin bearbeiten sie die in Abbildung 1 abgedruckte Aufgabe.

Stellen	1.	2.	3.	4.	...	42.	...	x-beliebige Stelle
Bilderfolge								 x - mal
Zahlenfolge	8 = $2 + 1 \cdot 6$	14 = $2 + 2 \cdot 6$	20 = $2 + 3 \cdot 6$	$2 + 4 \cdot 6$		$2 + 42 \cdot 6$		$2 + x \cdot 6$

Abb. 1 Bilderfolgen als Zugang zur Variable als Unbestimmte (Prediger & Krägeloh, 2015 nach Mason et al., 1985)

Nachdem Ayla und Gözden die 3., die 4., und auch die 42. Stelle für die Zahlenfolge bestimmt haben, lautet die Aufgabenstellung: „Kannst du auch die Zahl an einer x-beliebigen Stelle bestimmen?“. Die Förderlehrerin fragt nach:

97 I Was heißt überhaupt x-beliebig? Habt ihr ne Idee?
98 A Nee, das sagt unsere Mathelehrerin auch, aber was das heißt wissen wir nicht.
…
110 G Ich weiß nur noch, dass bei, bei den Termen x ist
111 A Ja, aber das soll eine Stelle von den Zahlen hier sein... (zeigt auf das Blatt) Das sagt man im Deutschen so. (lacht)
112 FL (lacht) Stimmt das sagt man im Deutschen so.hm, aber- hm was bedeutet denn beliebig‘
113 A Irgendeine Stelle von den Zahlen (zeigt flüchtig auf das Blatt)
114 FL Joa.

115 A Aber welche weiß man ja nicht.
116 FL Joa genau. Und damit habt ihr de den Begriff totgeschlagen. Das ist der Begriff x-beliebig. Das bedeutet irgendeine Stelle. Mehr nicht.
117 A Dann können wir uns eine Stelle aussuchen und dann-

Ayla und Gözden haben das Wort x-beliebig schon gehört und wissen, dass es irgendwie mit Variablen verbunden ist, doch sie können es nicht mit Bedeutung füllen. Aylas „Das sagt man im Deutschen so“ verweist auf ein „anderes Deutsch“, nämlich die Bildungssprache, die sie als ihr fremde Sprache wahrnimmt. Der Ansatz der Lernumgebung, über den Ausdruck x-beliebig eine Bedeutungskonstruktion zu ermöglichen, schlägt also fehl, wenn dieser nicht im Repertoire der Lernenden ist.

Dies ist ein typisches Beispiel, in dem fachsprachliche Elemente (hier das x in seinem Variablenaspekt der Unbestimmte, vgl. Malle, 1993) angeknüpft werden an eine vermeintliche *Lernvoraussetzung* der Lernenden. Für sprachlich schwache Jugendliche ist dieser bildungssprachliche Ausdruck allerdings nicht Teil ihrer Lernvoraussetzungen, sondern ebenfalls erst zu lernen, ein *heimlicher Lerngegenstand*, der erst als solcher erarbeitet werden muss.

Auch wenn in Zeile 115-117 die Bedeutung durch „irgendeine Zahl“ erarbeitet zu sein scheint und die Mädchen dies auch schriftlich nutzen, stellt sich in der nächsten Fördersitzung heraus, dass das Problem noch tiefer liegt: nicht nur im Wort x-beliebig, sondern in der Tätigkeit des Verallgemeinerns an sich:

In der nächsten Fördersitzung arbeiten die Mädchen mit einem Variablenterm und versuchen ihn zu deuten:

102 A Wieso, also. [...] Da kann man doch jede Zahl, die man will, einsetzen. Aber wie soll man dann wissen, was man da rechnen soll?

Auch wenn Ayla das Wort *irgendeine* in der Sitzung vorher benutzt hat, ist ihr die Sprach- und Denkhandlung des Verallgemeinerns immer noch nicht klar. Hier zeigt sich die enge Verknüpfung von Sprechen und Denken: Feilke (2012) erklärt es gerade zum Charakteristikum der Bildungssprache, dass sie Verallgemeinerungen mit ihren vom Konkreten abstrahierenden Sprachmitteln erst ermöglicht. Ayla, deren bildungssprachliches Repertoire diesbezüglich noch nicht ausgebaut ist, verpasst diese Möglichkeiten und kann deswegen die symbolsprachlichen Mittel x nicht anknüpfen.

Das Fallbeispiel zeigt mehrere Phänomene, die auch in anderen Studien immer wieder auftauchen (für einen Überblick Prediger, im Druck):

- zwischen Alltags- und Fachsprache gibt es als weitere Ebene die sogenannte *Bildungssprache*, die bildungssoziologisch hochbedeutsam als diejenige beschrieben werden kann, und die Lehrkräfte oft implizit voraussetzen, obwohl sie vielen Lernenden unvertraut ist.
- Bildungssprache umfasst nicht allein Wörter wie „x-beliebig“ oder „irgendein“. Eine Fokussierung allein auf die *Wort- und Satzebene* würde zu kurz greifen. Analytisch wichtiger ist die *Diskursebene*, die relevante Analyseeinheit für sprachliche Anforderungen sind demnach die *Sprachhandlungen*: Während Ayla und Gözden (wie viele andere sprachlich Schwache) durchaus das
  - Erläutern von Rechenwegen

  gelernt haben, fallen ihnen zwei Sprachhandlungen schwer, die in mehreren empirischen Analysen als zentral für den Aufbau inhaltlicher Vorstellungen identifiziert wurden:
  - Erklären von Bedeutungen (mathematischer Konzepte und Operationen)
  - Beschreiben allgemeiner Zusammenhänge.

Auch wenn Ayla und Gözden ihre Lücken in den Fördersitzungen etwas aufarbeiten konnten, werden sie am Ende der Sek. 1 ihren Lernrückstand nur noch begrenzt aufholen. Gerade für Risikoschülerinnen und -schüler ist es daher wichtig, die fachlichen und sprachlichen Lernpfade längerfristig anzulegen und schon in den ersten Lernjahren die Voraussetzungen für erfolgreiches späteres Lernen zu schaffen. Denn gerade, weil Sprachlernprozesse in der Regel nur langfristig gestaltbar sind und keine kurzfristigen Erfolge zeigen, müssen sie stufenübergreifend konzipiert werden.

1.3 Schulstufenübergreifende Lernpfade hin zur Algebra

Die Konstruktion langfristiger, sogar schulstufenübergreifender Lernpfade wird seit Bruners (1966) Formulierung des Spiralprinzips immer wieder gefordert. Wie wenig fachdidaktische Substanz allerdings zuweilen in ihrer *Umsetzung* steckt, zeigt das Beispiel des Lehrplans von Berlin und Brandenburg (LISUM, 2015), der bewusst entlang langfristiger Lernpfade von Klasse 1 bis 10 konstruiert wurde. Im Strang „Terme und Gleichungen“ wird dabei für die ersten sechs Stufen vorgeschlagen:

A Mengen mit vorgegebener Anzahl von Objekten legen
B Terme und Gleichungen mit einer Rechenoperation darstellen
C Terme und Gleichungen darstellen (auch mit mehreren Rechenoperationen)
D Terme und Gleichungen darstellen (auch im Bereich der gebrochenen Zahlen)
E Terme und Gleichungen darstellen (auch im Bereich der rationalen Zahlen)
F Terme und Gleichungen darstellen (auch für lineare Gleichungssysteme)

Diese Stufung ist insofern fachdidaktisch problematisch, als sie vorwiegend nach Kompliziertheit der involvierten Zahlbereiche stuft, aber den algebradidaktischen Kern verpasst. Denn es werden weder die einschlägigen Grundvorstellungen für Terme noch für Variable überhaupt erwähnt. In einer gerade beginnenden Zusammenarbeit mit dem Landesinstitut wird statt der Strukturierung nach „Term und Gleichung darstellen“ / „Gleichung lösen“ eine Strukturierung in fünf Stränge vorgenommen (Usiskin, 1988; Bednarz, Kieran & Lee, 1996):

- Problemlösen / Unbekannte suchen
- Allgemeine Zusammenhänge / Muster erfassen
- Funktionale Zusammenhänge erfassen
- Termstrukturen erfassen & nutzen
- Kalkülisieren & Kalkül nutzen

Zu diesen Strängen gehören jeweils unterschiedliche Grundvorstellungen der Variable und Terme: Der Strang „allgemeine Zusammenhänge erfassen“ fokussiert die Variable als Unbestimmte und Terme als Beschreibungsmittel. Die Grundvorstellung der Variable als Unbekannte dagegen ist im Strang „Problemlösen / Unbekannte suchen“ zentral, die Terme als Handlungsanweisung und die Variable im Kalkülaspekt beim „Kalkülisieren und Kalkül nutzen“ (Malle, 1993). Terme in ihren Teilstrukturen auch strukturell zu untersuchen, ermöglicht den Übergang von der operationalen zur relationalen Sicht, d.h. Terme nicht mehr allein als Handlungsanweisung zu begreifen, sondern als Beschreibungsmittel, als neue Objekte, die selbst mathematisch untersucht werden. Abbildung 2 zeigt eine erste Strukturierung des langfristigen Lernpfades im Bereich „allgemeine Zusammenhänge erfassen“. Dieser Strang hat sich bei sprachlich schwachen Lernenden als der Herausfordernste herausgestellt (MacGregor & Price, 1999), daher wird er hier fokussiert.

Strang	**Allgemeine Zusammenhänge / Muster erfassen**
Kl. 1-2	• konkrete **Muster** strukturieren und strukturiert zählen • konkrete Muster strukturiert zählen und mit **Term als Rechenanweisung** beschreiben (**operationale Sicht**) • allgemeine Muster mit Termen mit generischen Zahlen beschreiben (**Term als Beschreibungsmittel in relationaler Sicht**) • Zahlenterme interpretieren in Sachzusammenhängen
zusätzlich in Kl. 3-6	• allgemeine Muster mit **Wortvariablen** verbal beschreiben • allgemeine Muster durch Terme mit **Quasivariablen** und beschreiben (**Term als Beschreibungsmittel**) • generische Zahlenterme aufstellen in zunehmend komplexer **Termstruktur** • allgemeine Muster graphisch generisch oder mit Wortvariablen begründen
zusätzlich in Kl. 7-8	• allgemeine Muster in verschiedenen Darstellungen begründen • allgemeine Zusammenhänge mit **Variablentermen** beschreiben (**Variable als Unbestimmte**) • funktionale Zusammenhänge beschreiben (**Variable als Veränderliche und Abhängige**)
zusätzlich in Kl. 9-10	• allgemeine Zusammenhänge algebraisch beschreiben und damit **formal argumentieren**

Abb. 2 Konzeptueller Lernpfad hin zum Erfassen allgemeiner Zusammenhänge

Dazu werden in einem weiteren Fallbeispiel der Sekundarstufe 1 die konzeptuellen und sprachlichen Anforderungen aufgezeigt, auf die bereits die Klassen 3-6 vorbereiten sollten, damit die notwendige Sprache langfristig aufgebaut werden kann.

1.4 Formeln verstehen – Fallbeispiel aus Klasse 9

In der Gymnasialklasse 9 haben Schülerinnen und Schüler die Formel für Oberflächeninhalten von Körpern erarbeitet, wie z.B. die des Zylinders als $Oz = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h$. Als Selim damit die Oberfläche einer leeren Klopapierrolle ausrechnen soll, rechnet er wie in Abbildung 3 abgedruckt.

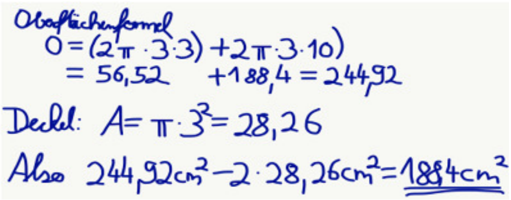


Abb. 3 Selims nicht interpretierender Umgang mit Formeln

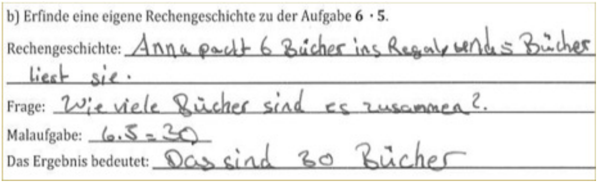
Angesichts des rechnerisch richtigen, aber bemerkenswert umständlichen Lösungswegs (der auch in der ZP10 häufig beobachtet werden konnte), fragt der Lehrer nach:

Lehrer: Wie hast du das gerechnet?
Selim: Zuerst hab ich die Oberfläche eines vollen Zylinders gerechnet, denn für nur die Rolle hatte ich keine Formel. Dann ziehe ich die fehlenden Flächen ab.
Lehrer: Hättest du dir das leichter machen können? Was bedeutet denn die Formel?
Selim: r ist der Radius, h die Höhe, und wenn man das einsetzt, kann man halt die Oberfläche berechnen.
Lehrer: Super, aber was ist das plus, was wird da addiert? Und was bedeuten die Malzeichen?
Selim: Ja, hm, mal rechnet man immer bei Fläche.

Selim entgeht, dass die Formel gerade diejenigen Teilflächen zusammensetzt, die er nachträglich wieder abzieht. Sein Rechenweg zeigt, dass er durchaus über Grundvorstellungen des Zusammenfügens und Wegnehmens verfügt, doch zur Interpretation der Formel selbst aktiviert er sie nicht. So wie Selim geht es vielen Lernenden:

- sie können zwar erfolgreich rechnen und verfügen über die dazu gehörende Sprachhandlung des Erläuterns von Rechenwegen,
- dass sie die Formel nicht verständiger und flexibler anwenden können, liegt auch daran, dass sich ihre Interpretationen auf Variablen beschränken und Operationen ausklammern,
- damit korrespondiert die Sprachlosigkeit beim Erklären der Bedeutung der Operationen in der Formel.

Dieses Phänomen kennen wir bereits aus Klasse 4, wenn für Rechengeschichten der Fokus nur auf den Zahlen, aber nicht auf der Interpretation der Operationen liegt (vgl. Abb. 4).


b) Erfinde eine eigene Rechengeschichte zu der Aufgabe 6 · 5.

Rechengeschichte: Anna packt 6 Bücher ins Regal und 5 Bücher liest sie.

Frage: Wie viele Bücher sind es zusammen?

Malaufgabe: 6.5 = 30

Das Ergebnis bedeutet: Das sind 30 Bücher

Abb. 4 Fokus nur auf Zahlen statt Operationen (aus Selter et al., 2014)

Sprach- und fachintegrierte Förderungen müssen daher gerade auch die Interpretation der Operationen unterstützen, Teilstrukturen in Termen identifizieren und für beides geeignete Sprachmittel anbieten (vgl. Abb. 2). Dies beginnt bereits bei der Multiplikation: $F = a \cdot b$ ist eben nicht nur „Länge mal Breite“ (formalbezogene Sprachmittel), sondern muss auch immer wieder bedeutungsbezogen interpretiert werden als „a Reihen der Breite b, z.B. drei 5er Blöcke“. Entsprechend besteht die (ganzzahlige) Mantelfläche aus h (1 cm dicken) Ringen des Umfangs $2\,\pi\,r$, also h mal $2\,\pi\,r$.

Fachliches Teilaspekt	Sprachhandlung	Sprachmittel
Formeln rechnerisch anwenden	**Sequenzierende Sprachhandlungen**	**Formalbezogene und *sequenzierende* Sprachmittel:**
In Variable einsetzen	• Erläutern des Einsetzvorgangs	• „für r nehme ich den Radius“ • „im zweiten Schritt…“
Rechenoperationen ausführen	• Erläutern des Rechenwegs	• „zuerst, … dann“ • „Länge mal Breite“ • „multipliziert mit“
Formel interpretieren und aufstellen	**Integrierende Sprachhandlungen**	**Bedeutungsbezogene und integrierende Sprachmittel**
Variable als Unbestimmte verstehen	• Erklären der Bedeutung der Variable	• „a *steht für jede* beliebige Höhe“
Teilterme identifizieren	• Einheit zeigen (graphisch und deiktisch)	• „dieses Ganze hier steht für die Deckelfläche“
Operationen interpretieren	• Erklären der Bedeutung der Operationen	• „das Plus *bedeutet*, dass ich die Flächen zusammennehme“ • „3 · 5, *denn* ich nehme drei 5er“
Passung von Darstellungsvernetzung begründen	• Begründen über Erklären der Bedeutungen	• „dies passt zu dem, weil…“

Abb. 5 Zusammenhang von fachlichen Teilzielen, Sprachhandlungen und Sprachmitteln, die langfristig gelernt werden sollte

Die Zusammenstellung in Abbildung 5 zeigt:

- zu den einzelnen fachlichen Teilzielen gehören unterschiedliche Sprachhandlungen,

- die jeweils zugehörigen Sprachmittel umfassen sequenzierende oder integrierende Sprachmittel, die themenübergreifend erarbeitet und eingeübt werden können,
- sie enthalten stets aber auch themenspezifisch formal- und bedeutungsbezogene Sprachmittel, die es zu identifizieren gilt,
- viele Sprachhandlungen und Sprachmittel, die für das Interpretieren von Formeln in Klasse 9 hoch relevant sind, können bereits in der Grundschule gebraucht werden.

1.5 Zwischenfazit zur Spezifizierung sprachlicher Anforderungen

Mit diesen Fallbeispielen und den längerfristigen curricularen Überlegungen zu stufenübergreifenden Strängen der Algebra sind die sprachlichen Anforderungen einer langfristigen Förderung der Algebra deutlich genauer als bislang spezifiziert. Zwar betonen viele Forschende immer wieder, dass den Kindern die Sprache fehlt (z.B. Cooper & Warren, 2011), doch fehlten bislang Ausdifferenzierungen, welche Anforderungen genau zu bewältigen sind.

2 Exemplarische Einblicke in eine sprach- und fachintegrierte Förderung in Klasse 3 und 4

Abschnitt 1 hat argumentiert, dass das Beschreiben und Begründen allgemeiner Zusammenhänge und Muster nicht erst in der Sekundarstufe beginnen darf, zugleich aber gezielt sprachlich unterstützt werden muss. Der skizzierte Lernpfad in Abbildung 2 enthält für Klasse 3-6 eine Reihe von fachlichen Teilaspekten, Sprachhandlungen und damit verbundenen Sprachmittel, die über das langfristige Spiralcurriculum hinweg aufgebaut und vertieft werden sollten.

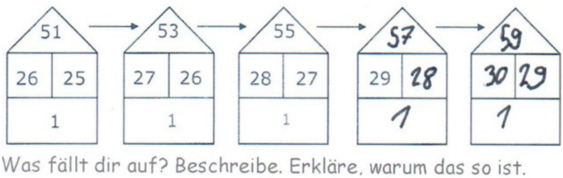


Abb.6 Beispiel einer bewährten operativen Aufgabenserie zu Rechenhäusern

So sollen Grundschulkinder ab Klasse 1 an auf vielfältige Art und Weise Muster in mathematischen Aufgaben erkennen, beschreiben und erklären. Vor allem operative Aufgabenserien im Kontext substantieller Aufgabenformate wie z.B. die Rechenhäuser (vgl. Abb. 6 nach Wittmann & Müller, 1994) werden hierzu herangezogen.

2.1 Vielfalt der Sprachhandlungen und damit adressierter fachlicher Teilaspekte

Der Arbeitsauftrag, Entdeckungen zu beschreiben und die entdeckten Zusammenhänge zu begründen, wird von Kindern allerdings unterschiedlich verstanden. Die Vielfalt der dadurch aktivierten Sprachhandlungen in Abbildung 7 zeigt, dass dabei unterschiedliche fachliche Teilaspekte adressiert werden. Daher ist die gezielte Förderung der Sprachhandlungen wichtig für die in Abbildung 2 formulierten Lernziele.

Fachliche Teilaspekte	Sprachhandlung der Kinder	Sprachmittel der Kinder
Beispiele untersuchen und Rechenvorschrift im Aufgabenformat erkennen	• (rein numerisch, Häuser berechnen) • Rechenvorschrift beschreiben (numerisch oder mit Worten)	• (Die Zahlen im Haus werden nach Rechenvorschrift ausgerechnet) • „Die Zahlen in der Mitte werden addiert und subtrahiert. Das Ergebnis kommt ins Dach.“
Beispiele untersuchen und Zusammenhang zur Musterfortsetzung erkennen	• (rein numerisch, Muster fortsetzen)	• (Muster wird fortgesetzt)
Zusammenhang einzelner Zahlen in der Musterabfolge formulieren, auf Einzelzahlen fokussierend	• beispielgebundenes Beschreiben des Zusammenhangs einzelner Zahlen • allgemeines Beschreiben des Zusammenhangs einzelner Zahlen	• „Die Zahl oben ist 51, 53, 55, 57 und 59.“ • „Die Zahlen oben werden immer um 2 größer.“
Zusammenhang aller Zahlen in der Musterabfolge formulieren, ohne Zusammenhang der Zahlen im Aufgabenformat zu beschreiben	• beispielgebundenes Beschreiben des Zusammenhangs einzelner Zahlen • allgemeines Beschreiben des Zusammenhangs einzelner Zahlen mit Sprachmitteln, die auf den Kontext „Haus“ fokussieren • allgemeines Beschreiben des Zusammenhangs einzelner Zahlen mit Sprachmitteln, die auf mathematischen Kontext fokussieren	• „Oben wird es 51, 53, 55, 57, 59. Darunter links wird es 26, 27, 28, 29, 30. Rechts wird es 25, 26, 27, 28, 29. Unten 1, 1, 1, 1, 1.“ • „Oben wird es immer +2, in der Mitte dann immer +1, im Keller stehen immer 1.“ • „Die linke Rechenzahl wird immer um 1 größer und die rechte Rechenzahl auch. Die Summe (im Dach) wird immer um 2 größer. Die Differenz (im Keller) bleibt gleich.“

Zusammenhang in der Musterabfolge und im Aufgabenformat beschreiben	• allgemeines Beschreiben des Zusammenhangs	• Mittel zum Verweisen auf Zusammenhänge („addiert man die Rechenzahlen, erhält man die Summe im Dach.“) • Ausdrücken der Allgemeinheit („wenn … dann“)
Begründen des allgemeinen Zusammenhangs (oder eines Teils)	• Begründen des allgemeinen Zusammenhangs	• mehrere Verweisungszusammenhänge koordinieren: „Weil die erste Rechenzahl ..., deshalb wird die Summe ...“

Abb. 7 Zusammenhang von fachlichen Teilzielen, Sprachhandlungen und Sprachmitteln zum Beschreiben operativer Muster in Klasse 3/4, gemäß einer Analyse von 482 Forscherheften (Götze, eingereicht)

Im Folgenden wird daher eine Intervention vorgestellt, in der gerade die herausfordernden Sprachhandlungen gefördert werden sollen.

2.2 Sprachsensible Intervention zum Allgemeinen Beschreiben und Begründen

Bei der Konzeption der fünfstündigen Lernumgebung „Wir beschreiben und begründen Muster in Rechenhäusern“ wurde darauf geachtet, die Kinder zunehmend darin zu unterstützen, die zugrundeliegenden Strukturen in dem operativen Muster möglichst vollständig aber auch sprachlich allgemein zu erfassen und die Zusammenhänge der Zahlen im Aufgabenformat auch zu begründen.

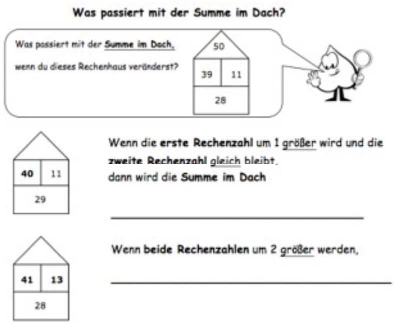


Abb. 8 Zusammenhänge konditional beschreiben lernen (aus Götze, 2015)

Hierzu wurden gängige Unterstützungsmaßnahmen realisiert (Götze, 2015, eingereicht und Abb. 8):

a) Wortspeicher,
b) sprachliche Vorbilder,
c) Arbeit mit (konditionalen) Satzphrasen sowie

d) über Kriterien für gute Beschreibungen nachdenken.

In insgesamt 20 dritten Klassen wurde die Lernumgebung in drei Varianten erprobt und in ihren Wirkungen beforscht (Götze, eingereicht): In Variante A wurden fünf Lehrkräfte vorab zur Bedeutung der Versprachlichung allgemeiner Zusammenhänge sensibilisiert und darin geschult, im Diskurs verallgemeinernde Versprachlichungen und Visualiserungen immer wieder einzufordern. Weitere zehn Lehrkräfte in Variante B wurden nur zu den mathematischen Zusammenhängen, nicht jedoch zur Relevanz der zugehörigen Sprachhandlungen geschult. Die letzten fünf Klassen der Variante C dienten als Kontrollgruppe, die zwar die Lernumgebung bearbeiteten, in der sie zum Beschreiben und Begründen der operativen Muster aufgefordert wurden, allerdings ohne sprachliche Unterstützung.

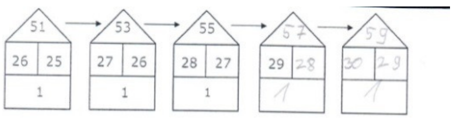
2.3 Fallbeispiel: Leon und Lena ringen um Zusammenhänge

Die in Abbildung 9 abgedruckten Dokumente geben Einblicke in die Lernwege von zwei Kindern: Leon und Lena besuchen zwei verschiedene dritte Klassen, in denen gemeinsam mit der geschulten Lehrkraft um Bedeutungen und Zusammenhänge gerungen wurde.

Die Texte zu Beginn der Lernumgebung wurden noch ohne Sprachunterstützung verfasst. Leon und Lena beschreiben dabei Teilstrukturen im operativen Muster schon recht allgemein, kaum mit Zahlenbeispielen, sondern eher mit verallgemeinerten lokalen Angaben wie z.B. oben, unten, die Zahl oder im Dach. Allerdings beschreiben beide noch nicht, wie Summen und Differenzen im Rechenhaus zusammenhängen, sondern nur Muster der Einzelzahlen-Folgen.

1. Aufgabenstellung und Bearbeitung zu Beginn

Aufgabe:
Setze fort. Beschreibe.
Was bleibt gleich?
Was verändert sich?
Erkläre, warum das so ist.



Leon

Das unten die Zahl gleich bleibt. Das oben im +2 gerechnet wird.

Lena

Entdeckt habe ich das die eins immer gleich bleibt. Von 26-30 ist die reihenvolge immer Lings und von 25-29 ist die reihenwolge Rechs. Im Dach oben ist es immer +2.

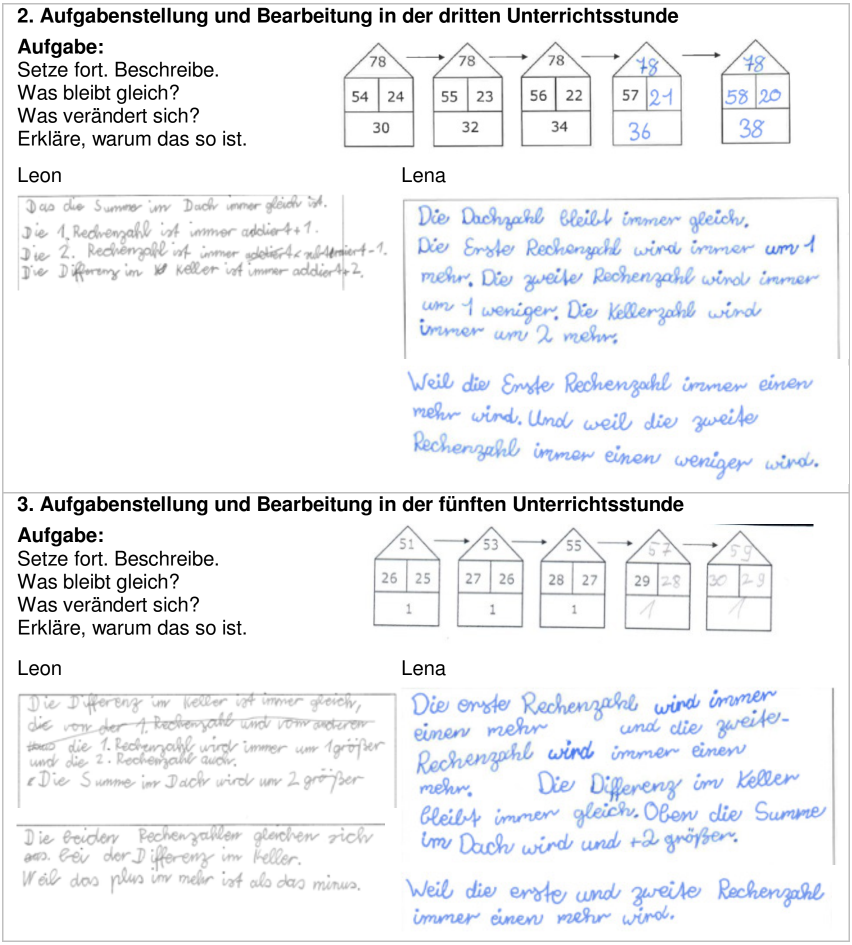


Abb. 9 Beschreibungen und Begründungen von Leon und Lena

In den drei nächsten Unterrichtsstunden wurden den Kindern Sprachmittel angeboten, mit denen die Muster beschrieben werden können, diese unterstützten auch den Prozess der Aushandlung von Bedeutungen. Danach zeigen sich andere Aspekte in den Kinderdokumenten: Leon scheint das operative Muster möglichst mit fachsprachlichen Ausdrücken wie Summe, Differenz, addieren und subtrahieren umschreiben zu wollen. Seine allgemeine Beschreibung nutzt Wortvariablen. Gleichwohl begründet er die Zusammenhänge in der Entwicklung der Einzelzahlen noch nicht explizit. Lena hingegen benutzt auch Wortvariablen, wenn auch aus dem Kontext „Haus“ (Dach- und Kellerzahlen). Unklar bleibt, ob sie verstanden hat, dass sie sich mathematisch mit der Veränderung von Summen und Differenzen beschäftigt. Zwar formuliert sie am Ende einen Begründungssatz, der einen Zusammenhang zwischen Rechenzahlen und weiteren Teilen des Rechenhauses adressiert, doch expliziert sie nicht, welchen Teil sie genau meint, Summe oder Differenz.

In der letzten Stunde beschreiben die Kinder das operative Muster der ersten Stunde noch einmal. Hier zeigen sich Unterschiede nicht nur in der Vollständigkeit und Allgemeinheit der Beschreibungen, sondern vor allem auch im Erkennen von Zusammenhängen. Die Beschreibung des Musters erfolgt von Leon und Lena mit fachsprachlichen Sprachmitteln. Im letzten Abschnitt werden Zusammenhänge in den Begründungen expliziert. Während Lena mit der gleichen Satzstruktur wie im Dokument zuvor die operative Veränderung beider Rechenzahlen im Zusammenhang mit der Veränderung der Summe (oder Differenz oder beiden) erklärt, fokussiert Leon auf die Differenz. Mit dem Verb „ausgleichen“ will er vermutlich ausdrücken, dass die Erhöhung des Minuenden um Eins durch die Erhöhung des Subtrahenden um Eins wieder ausgeglichen wird. Eine weitere Explizierung erscheint ihm jedoch nicht nötig oder nicht möglich. Dies zeigt, dass Sprachangebote oft kontextspezifisch und sehr individuell notwendig werden, insbesondere beim Aushandeln von Bedeutungen.

Die Lernwege von Leon und Lena unterscheiden sich deutlich von denen der Klassen, in denen die Lehrkräfte nicht auf das allgemeine Beschreiben und Aushandeln von Bedeutungen vorbereitet wurden: In den Klassen mit schriftlicher Sprachunterstützung in Variante B kamen nur wenige Kinder über das Beschreiben der Zusammenhänge auf einer reinen Zahlenebene hinaus.

Diese Unterschiede lassen sich auch quantitativ nachweisen: Begründungen für Zusammenhänge in den Rechenhäusern sind signifikant häufiger in den Klassen der Variante A anzutreffen als in den Klassen der Variante B und C (Götze, eingereicht). Damit gibt es erste Evidenzen, dass wenn Lehrkräfte darauf vorbereitet werden, die Sprachhandlungen zu elizitieren und zu unterstützen, dies Auswirkungen auf die erzielten Kinderdokumente haben kann.

3 Fazit

Sprachbildung ist eine langfristige Aufgabe, die entlang eines konzeptuellen Lernpfads über viele Schuljahre hinweg geplant werden muss. Dabei ist nicht allein auf einzelne Fachwörter zu achten, denn sonst besteht immer Gefahr der Verselbständigung der Vokabelarbeit (Moschkovich, 2013).

Wer dagegen den Zusammenhang zwischen fachlichen Teilaspekten, Sprachhandlungen und Sprachmitteln jeweils im Blick hat, der kann – so zeigen mehrere Dortmunder Interventionsstudien - mit sprachbildenden Förderungen auch anspruchsvolle fachliche Lernziele für mehr Kinder erreichen (Götze, eingereicht; Prediger, im Druck).

Literatur

Bednarz N., Kieran, C. & Lee, L. (Hrsg.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Boston: Kluwer.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: MA: Harvard University Press.

Cooper, T.J. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. J. Cai & E. Knuth (Hrsg.), *Early algebraization* (S. 187-214). Heidelberg: Springer.

Feilke, H. (2012). Bildungssprachliche Kompetenzen - fördern und entwickeln. *Praxis Deutsch*, 39(233), 4-13.

Götze, D. (2015). *Sprachförderung im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Götze, D. (eingereicht). Förderung des Beschreibens und Begründens operativer Muster – Ergebnisse einer Grundschulstudie zum Scaffolding. *Journal für Mathematikdidaktik*.

LISUM - Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (2015). Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10 - Mathematik. Berlin / Potsdam: Salzland.

MacGregor, M. & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 449–467.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to / Roots of Algebra*. Milton Keynes: University Press.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Moschkovich, J. (2013). Principles and Guidelines for Equitable Mathematics Teaching Practices and Materials for English Language Learners. *Journal of Urban Mathematics Education, 6*(1), 45-57.

Pöhler, B., George, A. C., Prediger, S. & Weinert, H. (2017, im Druck). Are word problems really more difficult for students with low language proficiency? *International Electronic Journal of Mathematics Education.*

Prediger, S. (im Druck). Welche Forschung kann Sprachbildung im Fachunterricht empirisch fundieren? B. Ahrenholz et al. (Hrsg.), *Sprache im Fach* (Arbeitstitel). Berlin: De Gruyter.

Prediger, S. & Krägeloh, N. (2015). „x-arbitrary means any number, but you do not know which one". A. Halai & P. Clarkson (Hrsg.). *Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms* (S. 89-108). Rotterdam: Sense.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Benholz, C. & Gürsoy, E. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 36*(1), 77-104.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, St. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können. Diagnose- und Förderkonzept*. Berlin: Cornelsen.

Stanat, P. (2006). Disparitäten im schulischen Erfolg: Forschungsstand zur Rolle des Migrationshintergrunds. *Unterrichtswissenschaft, 36*(2), 98-124.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12.* Reston: NCTM.

Wittmann, E. Ch. & Müller, N. G. (1994). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band* 1. Stuttgart: Klett.

Prof. Dr. Susanne Prediger & Dr. Daniela Götze
TU Dortmund
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de
daniela.goetze@math.uni-dortmund.de

Von Dingen, Worten und mathematischen Symbolen

von Heinz Steinbring

Mit Worten werden Dinge der Realität benannt. Schon in der frühen Sprachentwicklung verbleibt diese scheinbar grundlegende Verknüpfung zwischen Sprache und Welt nicht auf der Ebene einer fixierten und unwandelbaren Zuordnung. Worte und Dinge treten zueinander in eine flexible und reichhaltige Wechselbeziehung. Worte als Bezeichnungen für Dinge können in unterschiedlichen Rollen genutzt werden. Ein Bilderbuch kann z.B. zu einem Hut werden. Diese im Alltag wandelbare symbolische Funktion von Worten erfährt bei mathematischen Symbolisierungen eine radikale Neuerung. Mathematische Symbole benötigen keinen metaphorischen oder ikonischen Bezug zu dem, was sie symbolisieren. Sie sind frei von allen konkreten Eigenschaften und analogisierenden Verweisen auf reale Merkmale, sie existieren als systemische Beziehungen aus sich selbst.

Schlüsselwörter: Mathematik als Sprache, alltagsnahe Symbolisierung, systemische Symbolisierung

1 Einleitung: Mathematik *als* Sprache

Mathematik und Sprache ist ein in der Mathematikdidaktik aktuell viel diskutiertes Forschungsproblem (siehe z.B. Leiss u.a., 2017). „Der Zusammenhang von Sprache und Mathematik kann in unterschiedlichen Dimensionen und mit verschiedenen Zielsetzungen untersucht werden“ (Becker-Mrotzeck 2017, S. 213). Exemplarisch werden etwa die folgenden verschiedenen Dimensionen sowie Zielsetzungen genannt: Fachsprache, fachbezogene Kommunikation, sprachlich-kommunikative Besonderheiten und Herausforderungen für den Lerner, individuelle mathematische und sprachliche Leistungen bzw. Kompetenzen, fachliche und allgemeinsprachliche Fähigkeiten, sprachliche Merkmale didaktischer Interventionen und (mathematische) Lernleistungen, sprachliche Fähigkeiten von Lehrpersonen und Lernenden, ... (z.B. zu finden in Becker-Mrotzeck, 2017).

In diesem Beitrag wird das Verhältnis von Sprache und Mathematik unter einem anderen Fokus betrachtet. Die vielfältigen semiotischen Mittel der Mathematik werden als Bestandteile einer besonderen Sprache, also eines besonderen Kommunikationssytems aufgefasst. Mathematik wird kurz gesagt selbst als eine besondere Sprache verstanden.

Diese Sicht auf Mathematik *als* Sprache ist schon in der Geschichte der Wissenschaften betont worden. So geht folgende Aussage auf

Galileo Galilei zurück: „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“ (Galileo Galilei, vor fast 400 Jahren, siehe Behrends, 2013, S. 140). Und der Mathematiker Dantzig nennt sein Buch z.B.: „Number, the Language of Science“ (Dantzig, 1954).

In der Schulmathematik ist der Übergang von den mit der Zeit vertraut gewordenen natürlichen Zahlen und ihren Operationen zur elementaren Algebra (siehe z.B. Steinweg 2013) eine schwierige Bruchstelle, die mathematische Zeichenketten zu einer (Geheim)-Sprache machen können. Die auffälligsten Merkmale der Algebra sind die neuen Zeichen – die Buchstaben, die Variablen, die Operationszeichen und die Gleichungen.

Der Mathematiker und Philosoph Alfred N. Whitehead stellt die Herausforderung einer mathematischen Zeichensprache so dar:

> Die Mathematik wird oft wegen ihrer zahlreichen Zeichen, die sie verwendet, als eine schwierige und geheimnisvolle Wissenschaft betrachtet. Es gibt natürlich nichts Unfassbareres, als eine Zeichensprache, die wir nicht verstehen. Desgleichen ist einer Zeichensprache schwer zu folgen, die wir nur teilweise verstehen und deren Gebrauch wir nicht gewohnt sind. ... in der Mathematik (bedeutet) die Zeichensprache eine unbedingte Vereinfachung, vorausgesetzt, dass wir ihren Begriffen einigermaßen ernstlich unsere Aufmerksamkeit schenken. Sie ist nicht nur von praktischem Nutzen, sondern von großer Wichtigkeit. Denn sie stellt eine Analyse der Begriffe des zu behandelnden Gegenstandes und eine beinahe anschauliche Darstellung ihrer Beziehungen untereinander dar. (Whitehead, 1948, S. 35)

An dieser Stelle soll schon der wesentliche Punkt von Mathematik *als* Sprache hervorgehoben werden: Das was mit den kommunikativen mathematischen Elementen und Mitteln (den Zeichen, Symbolen, Diagrammen, Formeln usw. usf.) benannt bzw. bezeichnet wird, das sind nicht wie im Alltag Dinge und Ereignisse der realen Welt. Nein, es sind letztlich Beziehungen und Strukturen, auf die die mathematischen semiotischen Mittel abzielen.

Eine Gegenüberstellung von Alltagssprache und der dort verwendeten Worte mit mathematischen Zeichen (-systemen) ist hilfreich, erste Unterschiede und Besonderheiten zu erkennen. Im Vergleich zur natürlichen Sprache nutzt die mathematische Sprache weitere eigene, teils ganz besondere Zeichen. So wird im Laufe der Schulzeit die Umgangssprache allmählich durch Fachtermini und vor allem durch mathematische Symbole (Rechenzeichen, Ziffern, Variable, Gleichungen, Funktionsterme, geometrische Zeichnungen, Graphiken, Diagramme ...; siehe Abb. 1) erweitert.

Zum Beispiel:

$$0, 1, 2, \ldots \quad +, -, \cdot, :, = \quad \ldots\ 39 + \_ = 100, <, >, \square, \triangledown, \bigcirc$$

$$1{,}435,\ {}^{3}/_{4}, a, b, c, x, y, \ldots\ 39x + 12y = 28,\ f(x) = 7x^2 - 3$$

Abb. 1 Mathematische Symbole

Mathematische Begriffe mit ihren Fachworten bezeichnen besondere mathematische ‚Dinge'. In den einzelnen mathematischen Gebieten der Grundschule lassen sich viele Beispiele finden:

- in der Arithmetik: gerade und ungerade Zahl, Primzahl, Stellenwert.
- in der Geometrie: Eigenschaften geometrischer Formen und Körper, Punkte, Ecken, Gerade, Fläche, Parallele, Höhe, Mittellinie.
- in Anwendungs- und Sachkontexten: Dinge, Eigenschaften und Ereignisse aus der Alltagswelt.

Man muss jedoch achtgeben! Die in der Mathematik verwendeten fachlichen Wortbezeichnungen funktionieren nicht wie in der Alltagssprache. Es werden hiermit nicht vordergründig Dinge einer realen Erfahrungswelt benannt. Die fachlichen Benennungen von mathematischen ‚Dingen' erweisen sich oft als pseudo-konkreter Ersatz für nicht direkt sichtbare Strukturen und Beziehungen!

Was macht z.B. einen wesentlichen Unterschied aus zwischen ‚12,37 km' und ‚Tisch' oder ‚Garten'? Die Elemente des mathematischen Zeichensystems, die Zahlzeichen, das Komma und das Kürzel km stehen zueinander in einer strukturellen Wechselbeziehung. Das Komma legt fest, wo im Stellenwertsystem der Einer (E) steht, die weiteren Positionen links und rechts vom Einer ergeben sich durch die operative Beziehung ‚mal 10' bzw. ‚durch 10'; die Abkürzung ›km‹ bedeutet die Maßeinheit Kilometer für die Größe Länge und bewirkt hier die Deutung der Zahl als Maßzahl. Alle Elemente dieses exemplarischen mathematischen Zeichensystems stehen in Beziehungen zueinander. Jedes Zahlzeichen erhält erst durch seine Stellung im gesamten System seine Bedeutung. Stünde die Ziffer 2 an einer anderen Stelle, hätte sie eine andere Bedeutung; würde das Komma verschoben, dann ändert sich das gesamte System. Würde die konventionelle Abkürzung ‚km' in ‚kg' geändert, dann würde auf eine andere Größe Bezug genommen.

Die einzelnen Elemente – die Buchstaben – in den beispielhaften sprachlichen Zeichensystemen ‚Tisch' oder ‚Garten' verändern nicht ihre individuelle Bedeutung, wenn sie an einer anderen Stelle im Zeichensystem auftauchen würden. T bleibt t! Es könnte höchstens sein, dass bei einer Umordnung der Buchstaben ein anderes Wort mit einer anderen Bedeutung entstehen würde: ‚Stich' oder ‚tragen'.

Dieser fundamentale Unterschied zwischen einem sprachlichen, durch Worte gebildeten Zeichensystem und einem mathematischen Zeichensystem soll an einem zweiten Beispiel beleuchtet werden. Die Zahl-Worte EINS, VIER und FUENF sind einerseits Worte, die auch im Alltag eine Bedeutung zur Benennung von Zahlen haben – als Ziffern geschrieben 1, 4 und 5. Im Alltag wird damit häufig auf eine Anzahl konkreter Dinge zum Zählen referiert: 1 Tisch, 4 Tische und 5 Tische. Man kann so auch elementar die Addition VIER plus EINS gleich FUENF (4 Tische + 1 Tisch = 5 Tische) beschreiben und verstehen.

Jetzt (siehe Abb. 2) werden die Buchstabensysteme VIER, EINS und FUENF in einen neuen Darstellungskontext übertragen:

$$\begin{array}{cccccc} & & \mathrm{V} & \mathrm{I} & \mathrm{E} & \mathrm{R} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} & \\ \hline \mathrm{F} & \mathrm{U} & \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{F} & \\ \hline\hline \end{array}$$

Abb. 2 Zahlworte und Variable

Ist die wortbasierte Gleichung ‚VIER plus EINS gleich FUENF' – wenn auch etwas anders notiert – nicht wesentlich dieselbe geblieben? Wenn man für diese Notation z.B. die konventionelle Darstellung der schriftlichen Addition im Stellenwertsystem zu Grunde legt, dann ändern sich die Bedeutungen von VIER, EINS und FUENF. Die einzelnen Buchstaben werden zu Variablen für natürliche Zahlen. VIER bedeutet nicht die Zahl 4, es stellt eine unbekannte vierstellige Zahl dar. Deutungen können nicht länger direkt zugeschrieben werden, sie verschwinden. Die unbekannten Zahlen – versteckt in VIER, EINS und FUENF – können nur über die Beziehungen im System der schriftlichen Addition aufgedeckt werden (siehe Abb. 3).

Zum Beispiel: Warum kann der Buchstabe F nur als 1 begründet werden? Eine ›Lösung‹ (von 24 insgesamt) könnte so aussehen:

$$\begin{array}{rccccc} & & 6 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 9 & 4 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 5 & 9 & 0 & 1 \\ \hline\hline \end{array}$$

Abb. 3 ‚Schriftliche Addition'

Die Deutung von *Mathematik als Sprache* nimmt eine spezielle Perspektive ein. Mit ihren eigenen Zeichensystemen, Diagrammen, Formeln, Gesetzen etc. wird Mathematik zu einem theorie-basierten kommunikativen System, mit dessen Hilfe die Welt in ihren vielfältigen konkreten, abstrakten und imaginären Aspekten in besonderer – nämlich mathematischer – Weise erkundet und erforscht werden kann.

2 Verbale und non-verbale Kommunikation

Häufig wird die Auffassung vertreten, dass die Wörter einer Sprache sich in unzweideutiger Weise auf Dinge, Ereignisse und Abläufe der realen Welt beziehen. Worte bilden somit die Realität in eindeutiger Weise ab. Eine solche Auffassung wird aus sprachphilosophischer Perspektive kritisiert. Es wird dabei grundsätzlich in Frage gestellt, dass Wörter und Satzkonstruktionen in der Sprache in präziser Weise den Objekten der Wirklichkeit korrespondieren.

Lakoff und Johnson (2014) kritisieren diese Haltung als den Mythos ‚Objektivismus', der sich zusammenfassend so charakterisieren lässt (siehe: Lakoff & Johnson, 2014, S. 213ff):

- Die Welt setzt sich aus Objekten zusammen. Diese Objekte weisen unabhängig von Menschen ganz bestimmte Eigenschaften auf.
- Menschen erfahren die Objekte und lernen, welche Eigenschaften sie besitzen.
- Menschen verstehen die Objekte der Welt in Kategorien und Konzepten, die den Eigenschaften der Objekte entsprechen.

- Es gibt eine objektive Realität und über diese können wir Aussagen machen, die objektiv, absolut und unabdingbar wahr oder falsch sind.
- Wörter haben feste Bedeutungen. Das heißt, dass wir in unserer Sprache die Konzepte und Kategorien ausdrücken, in denen wir denken. Um Realität korrekt beschreiben zu können, brauchen wir Wörter, deren Bedeutungen klar und präzise sind, Wörter also, die mit der Realität übereinstimmen.

Entgegen der Auffassung des Objektivismus wird im Folgenden davon ausgegangen, dass Sprache – und auch die mathematische Symbol- und Zeichensprache – eigenständige, lebendige Kommunikationssysteme sind. Diese kommunikativen Mittel dienen der autonomen Erkundung und Konstruktion von konkreten und abstrakten Welten.

Interessant ist in dieser Sicht, wie Novalis (Friedrich von Hardenberg, 1772 – 1801, Schriftsteller und Philosoph) die Wesensart von Sprache sowie Mathematik umreißt.

> Es ist eigentlich um das Sprechen und Schreiben eine närrische Angelegenheit; das rechte Gespräch ist ein bloßes Wortspiel. Der lächerliche Irrthum ist nur zu bewundern, daß die Leute meinen – sie sprächen um der Dinge willen. Gerade das Eigenthümliche der Sprache, daß sie sich bloß um sich selbst bekümmert, weiß keiner. Darum ist sie ein so wunderbares und fruchtbares Geheimniß, – daß wenn einer blos spricht, um zu sprechen, er gerade die herrlichsten, originellsten Wahrheiten ausspricht. Will er aber von etwas Bestimmtem sprechen, läßt ihn die launige Sprache das lächerlichste und verkehrteste Zeug sagen. ...Wenn man den Leuten nur begrifflich machen könnte, daß es mit der Sprache wie mit den mathematischen Formeln sei – Sie machen eine Welt für sich aus – Sie spielen nur mit sich selbst. (Novalis, 1978, S. 438f.)

Die lebendige Eigenständigkeit von Sprache – und auch von mathematischer Sprache – zeigt sich z.B. in Metaphern, Metonymien, oder in Sprachspielen. Worte sind nicht durch einen präzisen Gebrauch fixiert und festgelegt. Schon in der Grundschulmathematik finden sich dazu Beispiele: ‚Dezimalzahlen sind natürliche Zahlen mit Komma', ‚Die kleine Eins', ‚Die Null ist Nichts', ‚Diese Zehner sind ein geborgter Hunderter' ... Sobald kleine Kinder zu sprechen lernen, benutzen sie viele Wörter mit Bezug auf ganz unterschiedliche Dinge oder Ereignisse der Welt. Zum Beispiel enthält ein Bilderbuch viele schöne, bunte Darstellungen, man kann es aber auch aufklappen und auf den Kopf setzen, so dass es zu einem Hut wird. Kinder können zudem im Spiel mit vielen kleinen Spielzeugfiguren diesen ganz verschiedene Rollen zuweisen. Die in unterschiedlichen Kontexten verwendeten Wörter behalten nicht stur eine einzige, eine objektive Referenz, schon Kinder wissen in flexibler und eigenständiger Weise Referenzen für Wörter vielfältige zu verwenden.

Sprache als aktives und eigenständiges kommunikatives Mittel hat eine herausragende Bedeutung für die Entwicklung des Kindes.

> Sprache gestaltet die Erfahrung des Kindes ... um. .... Durch Sprache. . . kann man [das Kind] einführen in die rein symbolische Sphäre von Vergangenheit und Zukunft, von fernen Gegenden, ideellen Relationen, hypothetischen Ereignissen, von utopischer Literatur, Wesen, imaginären Entitäten - vom Werwolf bis zu Ψ–Mesonen... (Church, 1971, S. 96)

Sprache ist ein eigenständiges, sich entwickelndes Gestaltungsmittel der Wirklichkeit und nicht vordergründig eine feste Beschreibung oder Verdopplung der Wirklichkeit. Am Beispiel der Gebärdensprache von Gehörlosen (und Taubstummen) lässt sich dies gut verdeutlichen (vgl. Sacks, 1990). Bei Gebärden- und Zeichensprachen ist man häufig von der Vorstellung ausgegangen, dass für die Gehörlosen entsprechend den gesprochenen ‚Zeichen', den Worten der Sprechenden, Gebärden–Zeichen entwickelt werden müssten; im Hintergrund steht somit wieder eine Art ‚Objektivismus', dass die Zeichen der Gebärdensprache nur der direkten Übersetzung in eine andere Sprache bzw. der Codierung von Dingen der Wirklichkeit dienen.

Aus dem Buch ‚Stumme Stimmen' (Sacks, 1990) kann man interessante Einsichten über die historische Entwicklung der Gebärdensprache gewinnen, und daraus im Vergleich mit der natürlichen Sprache und auch bezogen auf die mathematischen kommunikativen Mittel differenziertere Bewertungen vornehmen. Vielfach ist man von der Vorstellung ausgegangen, dass es für die Gehörlosen die Teilnahme am sozialen Leben aller Menschen – also insbesondere der hörenden und sprechenden Menschen – das Beste sei, sie würden dazu angehalten, Sprechen und Lippenlesen zu lernen. Dies war nicht nur ein sehr zeitaufwendiger und mühsamer Prozess, dieses Vorgehen negierte auch, dass Gebärdensprachen – die sich häufig spontan über

Generationen in Gemeinschaften von Gehörlosen herausgebildet haben – selbst vollständige Sprachen sind.

Eine von Gehörlosen gemeinsam benutzte Gebärdensprache ist keine bloße zeichenweise Übersetzung.

> Echte Gebärdensprachen sind jedoch in sich vollständig: Ihre Syntax, Grammatik und Semantik bedürfen keiner Ergänzung, aber sie unterscheiden sich in ihrem Wesen von denen aller anderen artikulierten oder geschriebenen Lautsprachen. Es ist daher nicht möglich, eine gesprochene Sprache Wort für Wort, Satz für Satz in die Gebärdensprache zu übersetzen - ihre Strukturen sind grundsätzlich verschieden. (Sacks, 1990, S. 53)

Und mit der Gebärdensprache – genau wie mit der gesprochenen Sprache – kann man sich aktiv zur Welt verhalten, sich seine Welt konstruieren, in die symbolische Welt eindringen, durch metaphorischen Gebrauch von Gebärden sich die Welt differenzieren und umgestalten. Gehörlose und Taubstumme sind mit ihrer Gebärdensprache in der Lage, „... mit Bildern, mit Hypothesen, mit Möglichkeiten zu spielen oder das Reich der Phantasie oder der Metaphern zu betreten“ (Sacks, 1990, S. 65). Dazu ist es aber erforderlich, die Gebärdensprache nicht als „... Pantomime oder ein Gesten-Code oder vielleicht auch als eine Art gebrochenes Englisch in Handzeichen...“ (Sacks, 1990, S. 108) zu verstehen.

Aus der Geschichte der Gebärdensprache und den meist gescheiterten Unternehmungen den Gehörlosen das Sprechen beizubringen kann man auch Folgendes lernen: Der Erwerb kommunikativer Fähigkeiten, sei es in der natürlichen Sprache, sei es in der Gebärdensprache, erfolgt über wechselseitige Interaktionen mit anderen Personen. Dabei kommt es entscheidend darauf an, dass man zur Entwicklung, Änderung, Präzisierung usw. seiner kommunikativen Mittel die von den Beteiligten in der Interaktion geäußerten kommunizierten Reaktionen versteht und entsprechend selbst korrigierend verarbeiten kann.

Kinder, die in natürlicher Sprache kommunizieren, können die verbalen Mitteilungen anderer Personen hören, und so eigene sprachliche Mittel weiterentwickeln. Gehörlose, die mittels Gebärden mit einander kommunizieren, sehen und verstehen die Gebärden anderer und können korrigierend ihre Gebärden differenzieren und entwickeln.

Gehörlose, die Sprechen lernen sollen, können die sprachlichen Mitteilungen anderer Personen hingegen nicht auditiv wahrnehmen und diese somit nicht zur Entwicklung und sprachlichen Verbesserung der von ihnen geforderten ausgesprochenen Wörter einsetzten.

Der Erwerb und das Lernen kommunikativer Mittel in wechselseitiger Interaktion macht es erforderlich, dass diese kommunikativen Mittel im Austausch mit anderen Personen unmittelbar zugänglich sind. Verbale Äußerungen von Sprechenden können von Gehörlosen nicht direkt auditiv erfasst werden, und daher ist das Sprechen lernen bei Gehörlosen oft auf die Nutzung einzelner Wörter (z.B. zu direkten Bezeichnung von Dingen) beschränkt und kann sich nicht zu einem lebendigen, eigenständigen Kommunikationssystem entwickeln.

Des Weiteren ist für die Entwicklung einer ‚vollständigen' Sprache – sei es die natürliche Sprache, sei es eine Gebärdensprache – eine möglichst in früher Kindheit einsetzende Interaktion mit anderen Personen wesentlich. Wenn der Erwerb der Gebärdensprache erst spät beginnt – etwa nach dem 5. Lebensjahr – dann ist oft keine Entwicklung der vollständigen kommunikativen Möglichkeiten mehr beobachtbar (vgl. Sacks, 1990, S. 115).

In einer vollständigen Sprache sind die benutzten kommunikativen Mittel nicht komplett festgelegt und determiniert. Sie sind partiell offen und vielfältig sowie vieldeutig nutzbar. Verbleibt die Sprache auf der Ebene einer Codierung mit Wörtern zur eindeutigen Identifizierung von Dingen und konkreten Eigenschaften (Stichwort Objektivismus), dann kann die Sprache nicht zur lebendigen Erkundung unbekannter bzw. mehrdeutiger und symbolischer Zusammenhänge benutzt werden. Man kann erkennen: Einerseits sind die kommunikativen Mittel (Wörter und Gebärden) in ihren Ausdrucksmöglichkeiten präzise zu entwickeln und zu gebrauchen. Andererseits bleibt es in interaktiven Situationen mit anderen Personen offen, was mit verbalen oder mit Gesten-basierten Mitteilungen anderer Personen intendiert bzw. gemeint ist.

Diese Unterscheidung zwischen ‚Mitteilungen' – die durch Sprechen, Zeigen, und auch durch Gebärden hergestellt werden – und ‚Informationen' – den möglichen, verschiedenen Bedeutungen, die den

Mitteilungen zugeordnet sein könnten – ist relevant für echte bzw. vollständige kommunikative Systeme. Der Soziologe Niklas Luhmann (1997) hat diese Differenz zwischen Mitteilung und Information für Kommunikationen zwischen beteiligten Personen als wesentliche Grundlage herausgearbeitet. Für die Mitteilung einer Person – durch Sprechen, Zeigen, und auch durch Gebärden – muss eine andere Person selbst eine Bedeutung, eine Information herstellen. Mitteilungen enthalten nicht direkt die eindeutig passenden Informationen – anders als der Objektivismus es unterstellt.

Eine lebendige Kommunikation zwischen Personen, also die Nutzung von Wörtern, Zeigegesten und Gebärden, ist gerade dann möglich, wenn die Mittel, die für eine Mitteilung benutzt werden, wechselweise verständlich und zugänglich sind, und wenn zugleich mögliche Bedeutungen variabel bleiben und von anderen erst hergestellt werden müssen.

3 Mathematische Symbole als kommunikative Mittel

Sicherlich ist die mathematische Symbol- und Zeichensprache weder eine Gebärdensprache, noch eine alltägliche gesprochene Sprache. Sie ist jedoch auch eine ›lebendige‹ Sprache, ein kommunikatives System und nicht bloß ein Zeichen–Code, oder eine eindeutige fachsprachliche Bezugnahme auf reale oder mathematische Objekte. Was wird wichtig, wenn mathematische kommunikative Mittel nicht einfach auf der Ebene von eindeutigen Codierungen verbleiben sollen? Was macht die Autonomie und Lebendigkeit eines mathematischen kommunikativen Systems aus?

An einigen Beispielen aus dem Mathematikunterricht der Grundschule soll illustriert werden, in welcher Weise Kinder unterschiedliche Deutungsweisen bei der Nutzung mathematischer kommunikativer Mittel vornehmen.

Es gibt Grundschulkinder, die Zahlen mit Eigenschaften von ‚Pseudo-Dingen' identifizieren. Beispielhaft erläutert Anke Steenpaß (2014), welche spezielle Vorstellung sich die Schülerin Sonja von den Strichen des Zahlenstrahls macht. In einem klinischen Interview wurde sie zur Aufgabenstellung (siehe Abb. 4) gefragt: „Welche der vier Kärtchen passt am besten zu diesem Zahlenstrahl?".

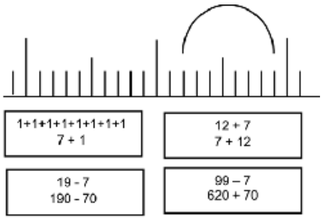


Abb. 4 Welche Aufgabe passt am besten?

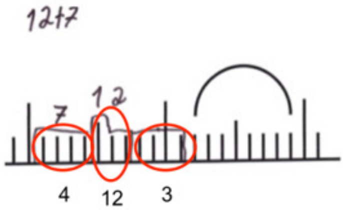


Abb. 5 Sonjas Wahl: ‚12 + 7'

Sonja entscheidet sich für die Aufgabe ‚12 + 7'. Dann zeigt sie, wie sie die Aufgabe sieht, sie zeichnet ‚Umkreisungen' ein (siehe Abb. 5) und erklärt diese. Sie sagt, die langen Striche sind 100, die mittleren bedeuten 5 oder 10 und die kleinen sind Einer. Zuerst umkreist sie den ersten mittleren Strich und die zwei kleinen Striche rechts daneben, das sind 12. Sie umkreist die vier kleinen Striche links und zudem drei kleine Striche um den zweiten langen Strich, den sie aber nicht berücksichtigt, das sind zusammen 7.

Sonja nimmt eine pseudo-dingliche Deutung der Skalierungsstriche vor. Sie nutzt zunächst die Striche in einfacher Form als Zeichen die für etwas Andres stehen, z.B. könnten die Skalierungsstriche auf Stäbe verweisen. Diese Pseudo-Dinge haben Eigenschaften wie lang, mittel-lang und kurz. Diese Eigenschaften sind dann für Sonja die Grundlage zur Konstruktion der Zahlen 12, 7 und der Summe 12 + 7 (vgl. Steenpaß 2014).

Die Schülerin Anne wählt die Aufgaben ‚12 + 7' und ‚99 – 7', zeichnet und erklärt (siehe Abb. 6). Die Zahl 12 wird durch einen Bogen als Abstand von 0 bis zum Skalierungsstrich 12 Schritte weiter gedeutet. 7 wird als Abstand von 12 bis 19 interpretiert.

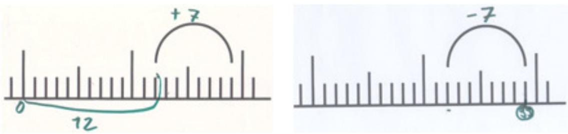


Abb. 6 Annes Darstellung für ‚12 + 7' und ‚99 – 7'

99 wird als Nachbarzahl von 100 links am Skalierungsstrich neben der implizit gesetzten 100 platziert. Nun wird der vorgegebene Bogen mit –7 beschriftet, also als ‚7 Schritte zurück' verstanden.

Die vielen Teilelemente des komplexen Zahlenstrahl-Diagramms werden von Sonja als Zeichen für reale Dinge mit konkreten Eigenschaften genommen. Die Bedeutung der Striche ist durch besondere Eigenschaften festgelegt. Demgegenüber nutzt Anne dieses Diagramm in vielfältigen Beziehungen zueinander. Die Zahlen ‚12, 7, –7 und 99' werden nicht mit einzelnen Strichen identifiziert. Zahlen werden auf dem Zahlenstrahl durch Beziehungen, hier durch Abstände, repräsentiert. In gewisser Weise legen die Skalierungsstriche, also die Elemente des mathematischen Systems, wechselweise zueinander fest, wie und welche Zahlen mit diesen mathematischen Kommunikationsmitteln symbolisiert werden

In einem weiteren Beispiel haben Grundschulkinder die Zahl ‚417' durch rote Striche und blaue Quadrate (siehe Abb. 7) repräsentiert (siehe Gellert, 2015).

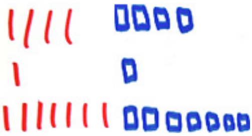


Abb. 7 Darstellungen der Zahl ‚417'

In der gemeinsamen Diskussion wird darüber gestritten, ob es sich tatsächlich um Darstellungen der Zahl ‚417' handelt.

Chris stellt eine eher dingliche Deutung zur Diskussion: „... wenn man (.) ich hab ja gesagt, wenn man alle Zehner zusammenrechnet, dann ergibt das hundertzwanzig. Und hier die Hunderter das gibt eintausend und # zweihundert. ...". Dieser Schüler verbindet mit den einzelnen Elementen der Darstellungen konkrete Eigenschaften: Die roten Striche stehen für 10er–Stangen, die blauen Quadrate für 100er-Platten.

Dennis erklärt ‚Beziehungen' wie in einem Stellenwertsystem: „... Äh, die oberen Platten sind immer die Hunderter, dadrunter sind die ..., die also die Zehner, und dadrunter sind die Einer, also vierhundertsiebzehn". Und Julian ergänzt: „... is doch egal, ob das, (*schaut kurz die Lehrerin an*) Platten oder, (*schaut in der Klasse umher*) Striche sind. Man braucht doch nicht immer das zu nehmen, was man gelernt hat. (.)". Für diese Schüler sind beide kommunikativen Zeichensysteme – rote Striche oder blaue Quadrate – Repräsentationen der Zahl 417, und zwar aufgrund der Stellenwertstruktur und nicht wegen konkreter Eigenschaften. Zudem sind beide Repräsentationen aus Sicht ihrer Struktur gleich und keinesfalls verschieden.

Man kann erkennen, mathematische Kommunikations- und Darstellungsmittel können nicht aufgrund unterstellter ‚pseudo-dinglicher' Eigenschaften mathematische Symbole erklären. Erst wenn potenzielle ‚systemische' Strukturen zwischen den Elementen mathematischer Kommunikations- und Darstellungsmittel hergestellt und genutzt werden, wird eine angemessene Deutung mathematischer Symbole in Gang gesetzt.

Die Bearbeitung von Sachaufgaben mit Hilfe verschiedener Darstellungsmittel kann als Prozess der Herstellung von symbolischen Repräsentationen verstanden werden. Katharina Kleine (siehe https://www.uni-due.de/didmath/ag_steinbring/forschung_kleine.php) untersucht in ihrem Promotionsprojekt, wie Kinder (Klasse 4) mittels Zahlen und Rechnungen, mit Hilfe von Zeichnungen und zudem mit Einsatz von Arbeits- und Anschauungsmaterialien Sachaufgaben erkunden. Das Untersuchungsinteresse richtet sich auf die Erforschung verschiedener Formen der von Kindern vorgenommenen Symbolisierungen – von ‚alltagsnahen' bis zu ‚mathematisch systemischen Symbolisierungen'.

Am Sachkontext ‚Kirschen pflücken' wird exemplarisch vorgestellt, wie Kinder mit Arbeitsmaterialien Teilaufgaben darstellen und zu Lösungen finden. Für diesen Aufgabenkontext sind folgende Vorgaben wichtig: „Annika, Jakob und sein Opa pflücken Kirschen. Jakob und Annika können in einer halben Stunde je 1 kg Kirschen pflücken. Der Opa pflückt 3kg Kirschen in einer halben Stunde".

Kern der Teilaufgabe c): „Annika, Jakob und sein Opa pflücken insgesamt 3 Std. lang Kirschen. Wieviel kg Kirschen haben sie zusammen gepflückt?"

Jonas entwickelt eine erste Darstellung der Aufgabe mit Arbeitsmaterialien (siehe Abb. 8).

Jonas stellt mit Material in alltagsnaher Weise Aspekte der Situation dar: Opa, Jakob, den Kirschbaum und Eimer. Er versucht, viele konkrete Elemente und Eigenschaften nachzuahmen.

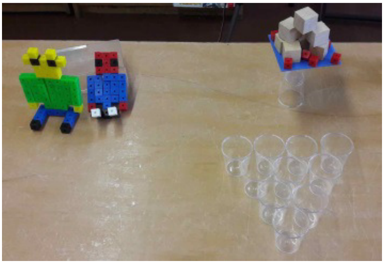


Abb. 8 Opa, Jakob, Kirschbaum und Eimer

Später im Interviewverlauf wird Teilaufgabe d) besprochen. Hier lautet die Anforderung: „Jakob, Annika und Opa wollen 40 kg Kirschen pflücken. Nach 2 Std. 30 Min. hören Annika und Jakob mit dem Pflücken auf. Wie lange muss Opa noch alleine Kirschen pflücken?"

Abb. 9 Jakob und Annika hören nach 2 Std. 30 Min. auf

Mit Arbeitsmaterialien hat Jonas die Aufgabe so dargestellt, dass eine Vervollständigung der Darstellung zu einer Lösung werden kann (siehe Abb. 9). Die beiden Kinder pflücken 10 kg (10 Eimer, 4 rote Plättchen) in 2 Std. 30 Min. (fünf blaue Plättchen). Der Opa hat in 4 Std. (8 blaue Plättchen) 24 kg (24 Eimer, Holzwürfel) gepflückt. Es fehlen noch 6 kg, die der Opa noch in 1 Std. pflücken muss. Die Materialien, die hier zur Repräsentation der Elemente der Sachaufgabe eingesetzt werden, sind zum Teil alltagsnah (Opa, Jakob, Kirschbaum, Eimer), zum Teil arbiträr, d.h. sie übernehmen ‚definitorisch' eine Rolle (blaue Plättchen als 30 Min., Holzwürfel ‚steht für' 1 kg Kirschen).

Gegen Ende des Interviews wird Teilaufgabe f) bearbeitet: „Jakob möchte 36kg Kirschen in 3 Std. schaffen. Wie viele Freunde braucht Jakob?"

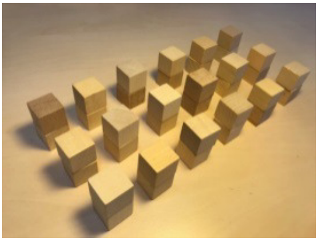


Abb. 10 Wie viele Freunde braucht Jakob?

Das von Jonas zur Darstellung der Aufgabe benutzte Material besteht nur aus Holzwürfeln (siehe Abb. 10). Diese sind zu einem 3x6-Rechteck von Zweiertürmen angeordnet worden. Was bedeutet nun ein Zweierturm? Diese materiellen Objekte beziehen sich nicht direkt auf Sachelemente der Aufgabe, sie konstituieren Beziehungen zwischen den Sachelementen. Ein Zweierturm referiert auf ‚2 kg pro Std. pro Kind'; drei Zweiertürme können auf ‚6 kg pro Std. pro Opa' referieren. Aus dem Rechteck liest Jonas ab: Eine Dreierreihe bedeutet 3 kg, die Jakob in 3 Std. gepflückt hat. Um 36 kg zu pflücken benötigt Jakob noch 5 Freunde zur Hilfe – 5 weitere Dreierreihen.

Diese Repräsentation der Aufgabe durch ein Rechteck von Holzwürfeln enthält keine alltagsnahen, spontanen, unmittelbar einsichtigen Symbolisierungen. Dieses Würfel-System steht nicht für Dinge und Eigenschaften aus der Sachaufgabe, sie referieren auf Beziehungen. Die Bedeutung der einzelnen Würfel ergibt sich aus der Rolle, die alle Würfel im System mit einander einnehmen. Beispielsweise kann eine Dreierreihe, die die Menge eines Kindes in 3 Std. darstellt, auch gedeutet werden als die Menge, die Opa in einer Stunde pflückt.

Es wird an den Beispielen deutlich, dass mathematische kommunikative Mittel in anfänglichen Deutungsprozessen sich auf konkrete Dinge und Eigenschaften beziehen können. Wenn sich diese Deutungs- und Symbolisierungsprozesse weiterentwickeln, dann löst sich das mathematische kommunikative Mittel mehr und mehr vom realen Ding, es treten unterliegende Beziehungen hervor, die zum eigentlichen Ziel der mathematischen Symbolisierungen werden. Es braucht keinen Eimer mit roten Steckperlen mehr, der Holzwürfel wird zum materiellen Symbol für ‚1 kg pro 30 Min. pro Kind'. Es sind nicht die Dinge der Welt, die mit den mathematischen kommunikativen Mitteln, den mathematischen Symbolen, benannt werden. Die Dinge treten in den Hintergrund, ihre Namen werden zu Metonymien für die den konkreten Elementen zugewiesenen Beziehungen.

Literatur

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Becker-Mrotzeck, M. (2017). Fazit. In D. Leiss, M. Hagenau, A. Neumann & K. Schwippert (Hrsg.), *Mathematik und Sprache – Empirischer Forschungsstand und unterrichtliche Herausforderungen*. Münster: Waxmann.

Behrends, E. (2013). *Fünf Minuten Mathematik*. Berlin: Springer.

Church, J. (1971). *Sprache und die Entdeckung der Wirklichkeit. Über den Spracherwerb des Kleinkindes*. Frankfurt a. M.: S. Fischer.

Dantzig, T. (1954). *Number, the Language of Science*. London: George Allen & Unwin LTD.

Gellert, A. (2015). ‚Die Striche sind doch die Zehner' – Fokussieren auf mathematische Strukturen. *Grundschulmagazin* (3).

Lakoff, G. & Johnson, M. (2014). *Leben in Metaphern: Konstruktion und Gebrauch von Sprachbildern*. Heidelberg: Carl Auer.

Leiss u.a. (2017). *Mathematik und Sprache – Empirischer Forschungsstand und unterrichtliche Herausforderungen*. Münster: Waxmann.

Luhmann, N. (1997). *Die Gesellschaft der Gesellschaft*. Bd. I & II. Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Novalis. (1978). *Werke, Tagebücher und Briefe Friedrich von Hardenbergs*. (Hrsg. Hans Joachim Mähl und Richard Samuel). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Sacks, O. (1990). *Stumme Stimmen*. Hamburg: Rowohlt.

Steenpaß, A. (2014). *Grundschulkinder deuten Anschauungsmittel. Eine epistemologische Kontext- und Rahmenanalyse zu den Bedingungen der visuellen Strukturierungskompetenz*. Essen: Universität Duisburg-Essen. DuEPublico, online.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen, Gleichungen, funktionale Beziehungen*. Berlin: Springer.

Whitehead, A. N. (1948). *Eine Einführung in die Mathematik*. Bern: Francke.

Prof. Dr. Heinz Steinbring
Universität Duisburg-Essen
Thea-Leymann-Str. 9
D-45127 Essen
heinz.steinbring@uni-due.de

Sprache trifft Material

von Kerstin Tiedemann

Der Gebrauch von didaktischem Material kann das Mathematiklernen dann besonders gut unterstützen, wenn darüber gesprochen wird. Denn mit Mitteln der Sprache kann präzise dargelegt werden, wie das Material und die Handlungen an ihm auf mathematisch-konventionalisierte Weise zu deuten sind. In diesem Beitrag werden drei unterschiedliche Potenziale des Zusammentreffens von Sprache und Material vorgestellt und anhand von Praxisbeispielen illustriert.

Schlüsselwörter: Bildungssprache, Material, Register, Unterrichtsfachsprache

1 Einleitung

Grundschulkinder, die Mathematik lernen, handeln häufig mit Material: Sie legen Plättchen ins Zwanzigerfeld, bauen mit Holzwürfeln Gebäude oder verschieben Perlen am Rechenrahmen. Das alle geht ohne Sprache. Doch wenn es darum geht, die mathematische Bedeutung dieser Materialhandlungen im Unterricht auszuhandeln, brauchen Lernende wie Lehrende Sprache: Was siehst du in dem Material? Warum passt deine Handlung am Material zur Aufgabe? Was ist das Gemeinsame in diesen beiden Materialdarstellungen?

In solchen Unterrichtsgesprächen wird das Material im Mathematikunterricht zu einem Ausgangspunkt für die fachbezogene Sprachentwicklung. Die Kinder müssen lernen, mit anderen über Material und Materialhandlungen zu sprechen. In diesem Prozess kann das Material beides sein: eine Hilfe zum Austausch, aber auch eine Herausforderung zur Weiterentwicklung.

In diesem Beitrag werden drei unterschiedliche Potenziale des Aufeinandertreffens von Sprache und Material vorgestellt und anhand von Praxisbeispielen illustriert.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Ausgangspunkt

In dem longitudinal angelegten Projekt „Representations, oral language, and engagement in mathematics (RoleM)“ haben Elizabeth Warren und ihr Team von 2010 bis 2014 im australischen Bundesstaat Queensland untersucht, inwiefern ein Förderprogramm, das den mündlichen Sprachgebrauch und dessen enge Verknüpfung mit unterschiedlichen konkret-gegenständlichen Materialien („hands-on materials") in den Mittelpunkt stellt, zur Förderung speziell von Zweitsprachenlernenden im Mathematikunterricht beitragen kann (Miller & Warren, 2014; Warren & Miller, 2013). Sie haben also in das Aufeinandertreffen von Sprache und Material gezielt inszeniert und beforscht.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Gesamtgruppe von der Maßnahme profitiert hat. Obgleich der Bundesstaat Queensland in der nationalen Leistungsüberprüfung NAPLAN („National Assessment Program Literacy and Numeracy") insgesamt weit hinter dem australischen Durchschnitt lag (Miller & Warren, 2014, S. 792), gelang es der Gruppe der RoleM-Kinder in einer entsprechenden Testung den nationalen Durchschnitt zu erreichen. Insbesondere die indigenen Kinder, die anstatt des australischen Standardenglisch eine ganz eigene Variante des Englischen, das sog. Aboriginal English, als Erstsprache sprechen, zeigten signifikant bessere Leistungen.

Mit Blick auf den Mathematikunterricht an deutschen Grundschulen mögen alle Überlegungen zu den Besonderheiten der Stichprobe und ihren kulturellen und sprachlichen Eigenheiten kaum relevant sein, wohl aber die Frage, was das Zusammentreffen von Sprache und Material so produktiv machen kann. In Annäherung an diese Frage können auf der Basis eines qualitativ-interpretativen Forschungsprojekts 3 Potenziale des Zusammentreffens von Sprache und Material unterschieden werden; zwei davon werden im empirischen Teil dieses Beitrags anhand von illustrierenden Beispielen vorgestellt. Doch zunächst soll die theoretische Perspektive auf die beiden Zusammentreffenden skizziert werden: Welche Sprache ist gemeint? Und welche Annahmen zum Umgang mit konkret-gegenständlichen Materialien liegen der Arbeit zugrunde?

2.2 Sprache

Wenn von der Sprache im Mathematikunterricht die Rede ist, wird nicht selten die Bildungssprache als Zielregister benannt und von den Registern der Alltagssprache und der Fachsprache abgegrenzt (z.B. Lange & Gogolin, 2010). Bei einem Register handelt es sich aus soziolinguistischer Perspektive nach Halliday (1978, S. 195) um eine funktionale Variante des Sprachgebrauchs. Der Sprecher erachtet bestimmte sprachliche Anforderungen in einer Situation als gegeben und passt seine Nutzung von Sprache daran an. So zeichnet sich ein Register strukturell durch jene sprachlichen Mittel auf Wort-, Satz- und Textebene aus, die zur Erfüllung der jeweils als gegeben erachteten Anforderungen besonders geeignet sind.

Die *Alltagssprache* erlaubt funktional betrachtet eine rasche und reibungslose Kommunikation im Alltag und ist strukturell u.a. durch Worte mit unscharfen Bedeutungsfeldern, einfache Satzkonstruktionen und eine dialogische Textstruktur geprägt (vgl. Meyer & Prediger, 2012). Als Beispiel denke man an einen abendlichen Plausch mit dem besten Freund, bei dem die Gesprächspartner einander sehen, ihre Interaktion spontan organisieren und die geteilte Situation nutzen können, um sich dem jeweils anderen verständlich zu machen, z.B. durch Gesten oder ein zustimmendes Nicken.

Das Register der *Fachsprache* ist für eine fachliche Kommunikation optimiert, bei der Gedanken unabhängig von einer konkreten Interaktionssituation vollständig, präzise und kompakt geäußert werden sollen. Typische Mittel auf struktureller Ebene sind Begriffe mit eng abgegrenzten Bedeutungen, komplexe Satzstrukturen mit Nominalisierungen, Nebensätzen und Einschüben, umfängliche Attribute und unpersönliche Formulierungen. Als Beispiel lässt sich an eine Mathematikdidaktikerin denken, die an ihrem Schreibtisch sitzt und in Vorbereitung auf die Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule einen Beitrag für den Tagungsband verfasst. Da sie im Moment der Textrezeption nicht zugegen sein wird, ist sie gefordert, alle zum Verständnis des Textes notwendigen Informationen möglichst explizit, genau und klar strukturiert im Text selbst zur Verfügung zu stellen.

Die *Bildungssprach*e schließlich ist als Register durch die Ziele und Traditionen der Bildungseinrichtungen geprägt und geeignet, um abstrakte und komplexe Fachinhalte aufzunehmen und auszudrücken (Lange & Gogolin, 2010). Sie vermittelt gewissermaßen zwischen wissenschaftlichen Fachdisziplinen und dem Alltag der Bildungseinrichtungen (Ortner, 2009). Aus diesem Grund wird sie fächerübergreifend konzeptionalisiert (Gogolin, 2009). Strukturell ähnelt sie der Fachsprache, wobei es von Fach zu Fach unterschiedliche Vorlieben zur sprachlichen Herstellung von Vollständigkeit, Präzision und Kompaktheit geben kann.

Gogolin (2009, S. 270f.) betont, dass die Beherrschung der Bildungssprache zwar vom „erfolgreichen Schüler“ erwartet werde, sie aber nicht notwendigerweise in der alltäglichen Unterrichtskommunikation gebräuchlich sei. Diese vermeintliche Dissonanz löst sich auf, wenn man den situativen Zusammenhang der jeweiligen Registernutzung berücksichtigt. Während Gogolin (2009, S. 270) als Verwendungsbeispiele für die Bildungssprache auf Lehrwerke, Unterrichtsmaterial und Prüfungsaufgaben und damit vorwiegend auf schriftliche Äußerungen verweist, findet Unterrichtskommunikation zu einem großen Teil mündlich statt (Morgan et al., 2014). Dahingehend ist zu bedenken, dass die Anforderungen an den Sprachnutzer beim mündlichen und schriftlichen Sprachgebrauch grundsätzlich verschieden sind (Koch & Oesterreicher, 1985). In der Situation des mündlichen Sprachgebrauchs, also z.B. beim Plausch mit dem besten Freund, sind die Prozesse der Sprachproduktion und Sprachrezeption eng verzahnt und stützen einander. Rückfragen und Missverständnisse können unverzüglich bearbeitet werden; Mimik und Gestik tragen zum gegenseitigen Verstehen bei. In der Situation des schriftlichen Sprachgebrauchs aber sind die Prozesse der Sprachproduktion und -rezeption voneinander entkoppelt. Der Produzent muss eigenständig einen konsistenten Text komponieren, der situationsunabhängig gut verständlich ist. Diese unterschiedlichen situativen Anforderungen an den Sprachnutzer lassen aus funktionalpragmatischer Perspektive unterschiedliche Register und damit unterschiedliche sprachliche Mittel als geeignet erscheinen. Anders gesagt: Die Bildungssprache ist im Mathematikunterricht nicht in jeder Situation das beste Register.

Diese Überlegung stützt eine Kritik, die Morgan et al. (2014, S. 849) in einem Überblicksartikel zum Forschungsstand im Bereich ‚Mathematik und Sprache’ formulieren: Die Rede von einem Zielregister sollte nicht den Blick darauf verstellen, dass Mathematik ganz wesentlich eine diskursive Aktivität ist, die in einer Reihe von Registern realisiert werden kann. Um diesem Blick auf den Sprachgebrauch im Mathematikunterricht auch theoretisch-konzeptionell gerecht zu werden, habe ich an anderer Stelle von *Unterrichtsfachsprache* gesprochen (Tiedemann, 2015). Damit wird kein weiteres Register bezeichnet, sondern die im Unterricht tatsächlich verwendete Mischung der schon beschriebenen Sprachregister. Dieses soziolinguistisch geprägte, weite Verständnis von Sprache wird zugrundgelegt, wenn nachfolgend das Zusammentreffen von Sprache und Material untersucht wird.

2.3 Material

Wenn Grundschulkinder im Mathematikunterricht mit konkreten Materialien wie Holzwürfeln oder dem Rechenrahmen handeln, dann ist damit eine didaktische Hoffnung verbunden. Die Kinder sollen durch die Arbeit mit konkreten Gegenständen die darin – zumindest aus Sicht der Lehrerin – repräsentierte mathematische Struktur entdecken und verinnerlichen. So grundlegend diese Hoffnung für die schulische Praxis ist, so voraussetzungsreich ist sie, wenn man sich ihr theoretisch-analytisch nähert. Denn der Prozess von der Materialhandlung zur mentalen Repräsentation ist bei Weitem kein Automatismus. Darin ist sich die mathematikdidaktische Community einig.

Es wird davon ausgegangen, dass das Material und die Handlung an ihm nicht einfach die gemeinte mathematische Struktur zeigen, sondern dass die mathematische Struktur „durch einen geistigen Akt in die konkrete Situation hineingelesen werden“ muss (Lorenz, 1995, S. 10). Es gibt also keinen direkten Weg vom Material in den Kopf des Kindes. Das Kind ist vielmehr gefordert, sich aktiv in bestimmte Weisen, ein Material zu deuten, einzuüben. Diese Deutungsweisen sind historisch gewachsen, fachlich begründet und als Konvention zumindest im Unterricht fest an das Material gebunden. Damit ist die Konstruktionsleistung, ein Material zu deuten, immer auch eine Rekonstruktionsleistung. Dörfler (1986, S. 13f.) argumentiert weiter, dass diese Leistung keinesfalls als eine einfache und direkte Schematisierung von Handlungsabläufen mit konkreten Materialien vorzustellen ist, sondern dass es wesentlich ist, im Handlungsverlauf „gewisse Gegebenheiten“, „Zustände, Punkte und Stellen“ hervorzuheben und diese Strukturierungspunkte dann mit ihren quantitativen oder geometrischen Charakteristika zueinander in Beziehung zu setzen. Um eine solche mathematische Deutungsweise zu lernen, muss das Kind im Austausch mit anderen (re)konstruieren, welche strukturierenden Gegebenheiten in einer bestimmten Materialhandlung mathematisch relevant sind: Wo kann ich den 1. Summanden sehen, wo den 2. und wo die Summe? Und wie ‚zeigt' sich das Plus-Zeichen in der Materialhandlung? Gleichzeitig ist zu lernen, dass es mathematisch irrelevant ist, ob die Perlen an einem Rechenrahmen aus Holz oder Plastik sind, ob die Plättchen im Zwanzigerfeld groß oder klein sind, etc. Diese fachliche Aufgabe der Aufmerksamkeitsfokussierung auf die mathematisch relevanten Gegebenheiten ist auch eine sprachliche Aufgabe. Denn es ist erstens notwendig, aus den sprachlichen Äußerungen von anderen die mathematisch relevanten Gegebenheiten ‚herauszufiltern', und zweitens, diese zunehmend selbst in Worte fassen zu können. Denn nur so kann die Lehrkraft erfassen, ob ein Kind die Materialhandlung nicht nur ausführen kann, sondern sie tatsächlich ‚verstanden' hat, sie also auch mathematisch-konventionalisiert deuten kann. Im Folgenden wird der Fokus auf die sprachliche Seite des Zusammentreffens von Material und Sprache gelegt: Was macht es mit der Sprache, wenn sie auf Material trifft?

3 Empirische Beispiele

Die folgenden zwei Beispiele stammen aus unterschiedlichen Forschungszusammenhängen. Sie stehen also in keinem empirischen Zusammenhang, eignen sich aber gut, um unterschiedliche Potenziale des Zusammentreffens von Sprache und Material zu illustrieren. Daher werden sie an dieser Stelle nebeneinandergestellt.

3.1 Sprache trifft Material: Entlastung

Die erste Szene ist aus einer Spiel- und Erkundungssituation des Projekts MaKreKi („Mathematische Kreativität bei Kindern"; vgl. Brandt, Vogel & Krummheuer, 2011). Zwei Mädchen, Naomi (6.11 Jahre) und Olivia (8.1 Jahre), haben den Auftrag bekommen, die Fotografie einer Anordnung von Gegenständen mit den entsprechenden Gegenständen auf einem Spielteppich nachzubauen. Das Foto zeigt (näherungsweise) eine Draufsicht und lässt unterschiedliche Übersetzungen in ein dreidimensionales Arrangement zu. So gibt es beispielsweise einen ‚Brückenstein' und einen Quader, die von oben gleich aussehen, sich lediglich dadurch unterscheiden, dass die Brücke im Gegensatz zum Quader im unteren Teil ein ‚Loch' hat (vgl. Abb. 1).

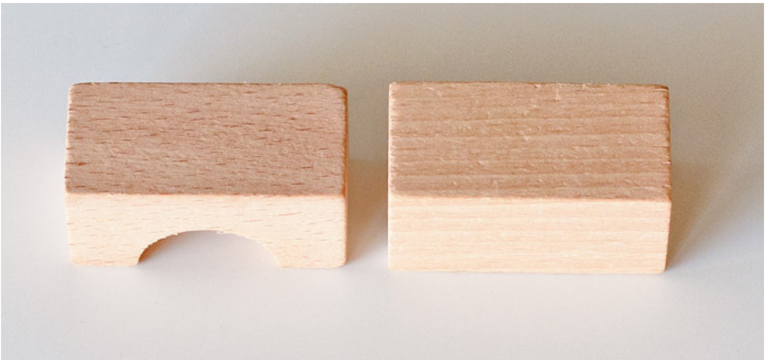


Abb. 1 Die fraglichen Körper: links der Brückenstein, rechts der Quader

Um genau diese beiden Steine geht es in der nachfolgenden Szene. Die beiden Mädchen haben anstatt des Brückensteins den Quader verbaut. Nun fragt die Interviewerin (I) nach, wo denn „die Brücke" verbaut worden sein könnte?

I:	Wo könnte denn in dem Bild die Brücke verbaut worden sein? Sie ist nämlich verbaut worden. Habt ihr da ne Idee?
Olivia:	Ja, ich weiß es. [*auf den Quader zeigend:*] Hier.
I:	Ah, das könnten wir als Brücke nehmen.
Olivia:	[*nimmt den Quader kurz hoch, legt ihn dann wieder an dieselbe Stelle*] Das ist- [*schiebt den Quader zur Seite, legt den Brückenstein an seine Stelle*] Guck! [*legt den Brückenstein zur Seite und den Quader wieder an die Stelle*] Die haben das bestimmt.
I:	Ja, okay. Leg's doch mal als Brücke hin. [*legt den Quader zur Seite*]
Naomi:	[*schaut auf das Foto, dann von oben auf den Brückenstein*] Hey, ja! Das ist, das sieht, wenn man da von oben guckt, sieht das aus, als ob das [*auf den Quader zeigend*:] dieses Block hier wär.

I: Genau, man kann das nämlich gar nicht genau sagen, ist es jetzt das oder das.

Naomi: Weil wenn man so guckt, sieht man das Loch. [*setzt sich etwas nach hinten, sodass sie seitlich auf den Brückenstein blickt*] Aber wenn man so guckt, sieht man nicht das Loch. [*richtet sich auf, blick von oben auf den Brückenstein*]

Die Interviewerin gibt explizit an, dass der Brückenstein verbaut wurde, und fragt nach Möglichkeiten, diese Information im Übersetzungsprozess zu berücksichtigen: „Wo könnte denn in dem Bild die Brücke verbaut worden sein?" Olivia antwortet mit einer Ortsangabe: „[*auf den Quader zeigend:*] Hier.". Ihre sprachliche Äußerung ist äußerst knapp und ohne weitere Kenntnis der Situation nicht verständlich. Während ihr gestischer Verweis auf den Quader die eigentliche Antwort enthält, klärt das Hinweiswort ‚hier', dass Olivia ihr Zeigen als eine Ortsangabe und damit als eine Antwort auf die Frage der Interviewerin versteht. In diesem Sinne deutet offenbar auch die Interviewerin Olivias Äußerung: „Ah".

Im Folgenden begründet Olivia, warum die Brücke an der von ihr benannten Stelle verbaut worden sein könnte. Sie entfernt den Quader, auf den sie zuvor gezeigt hat, legt den Brückenstein an seine Stelle und legt schließlich wieder den Quader zurück auf die Ausgangsposition. Verbalsprachlich setzt sie ihr Handeln durch Satzstücke in Szene: „Das ist-" und „Guck!". Damit wird deutlich, dass das für sie Wichtige an dieser Stelle nicht zu hören, sondern zu sehen ist. Sie lenkt die Aufmerksamkeit ihrer Interaktionspartner auf ihre Materialhandlungen und zeigt dort die Austauschbarkeit von Quader und Brückenstein.

Nach Bruner (1974, 104) ermöglicht die Sprache Kindern, Erfahrungen zu kombinieren. Olivias direkt nacheinander ausgeführte Handlungen erscheinen an dieser Stelle als ein Beispiel dafür, dass auch Materialhandlungen dieses Potenzial (zumindest näherungsweise) haben. Olivia stellt handelnd zwei Erfahrungen in einen unmittelbaren Zusammenhang und deutet damit einen Vergleich an: Wenn der Quader oder der Brückenstein an die bezeichnete Person gestellt wird, ergibt sich in der Draufsicht dasselbe Bild. Gleichwohl ist diese Interpretation gewagt, da Olivia sprachlich nicht expliziert, was ihre

Handlungen zeigen sollen. Eine Deutung in diesem Sinne bleibt also ihren Interaktionspartnern überlassen. Damit wird deutlich, dass das Handeln mit Material an dieser Stelle zwar die sprachliche Repräsentation ersetzen kann, aber auch eine gesteigerte Interpretationsunsicherheit für die Interaktionspartner mit sich bringt.

Im Weiteren begründet auch Naomi, warum der Brückenstein an der von Olivia benannten Stelle verbaut worden sein könnte: „Hey, ja! Das ist, das sieht, wenn man da von oben guckt, sieht das aus, als ob das [*auf den Quader zeigend*:] dieses Block hier wär.“ Sie differenziert Olivias Begründung aus: Der Quader kann nicht in jeder beliebigen Hinsicht durch den Brückenstein ersetzt werden, sondern nur wenn man „von oben“ auf das Arrangement blickt und man die Körper, so muss man ergänzen, auf eine bestimmte Weise positioniert.

Die Unterscheidung zweier Perspektiven expliziert Naomi nachfolgend in Form zweier unterscheidbarer Bedingungen: „Weil wenn man so guckt, sieht man das Loch. [*setzt sich etwas nach hinten, sodass sie seitlich auf den Brückenstein blickt*] Aber wenn man so guckt, sieht man nicht das Loch. [*richtet sich auf, blick von oben auf den Brückenstein*]“ Aus der einen Perspektive ist das ‚Loch' des Brückensteins sichtbar, aus der anderen hingegen nicht. An Naomis Begründung ist bemerkenswert, dass sie den entscheidenden Aspekt, nämlich die jeweils gemeinte Perspektive, nicht sprachlich expliziert, sondern durch eine eingenommene Körperhaltung anzeigt und sprachlich nur darauf verweist: „so“. Es ist nicht anzunehmen, dass Naomi nicht in der Lage ist, die jeweils gemeinte Perspektive auch sprachlich zu bezeichnen, da sie zumindest für die Draufsicht bereits zu Gehör gebracht hat, wie man diese Perspektive verbalsprachlich beschreiben könnte: „wenn man da von oben guckt“. Daher kann angenommen werden, dass sich hier ein weiteres Potenzial des Zusammentreffens von Material und Sprache zeigt. Naomi reduziert ihre (mögliche) Sprache und macht die gemeinten Perspektiven optisch wahrnehmbar. Auf diese Weise erleichtert sie die Rezeption ihrer Äußerung. Sie macht für Olivia (und die Begleitperson) sichtbar, was sie meint. Hier wird die Sprache also offenbar nicht ersetzt, um überhaupt etwas ausdrücken zu können, sondern um etwas für andere besser verständlich ausdrücken zu können.

Somit zeigt die Szene in der Zusammenschau, dass das Material die Sprache z. T. ersetzen und somit entlasten kann. Darin liegen gleich zwei didaktische Potenziale. Erstens ist dieser Befund im Hinblick auf Kinder relevant, deren Fähigkeiten zur Sprachproduktion (womöglich) noch nicht hinreichend entwickelt sind. Ihnen ermöglicht das Zusammentreffen von Sprache und Material, ihre Ideen trotzdem in den Austausch mit anderen einzubringen und eine Rückmeldung zu erhalten. Zweitens ist dieser Befund relevant für Kinder, deren Fähigkeiten zur Sprachrezeption (womöglich) noch nicht hinreichend entwickelt sind. Wenn der Sprecher seine Äußerung mit Material unterstützt, ist es ihnen eher möglich, zu erfassen, was der Sprecher auszudrücken beabsichtigt.

3.2 Sprache trifft Material: Herausforderung

Die zweite Szene entstammt einer längsschnittlichen Untersuchung der fachbezogenen Sprachentwicklung von rechenschwachen Kindern (vgl. Tiedemann 2017). Im Mittelpunkt steht Hanna (9 Jahre). Sie besucht die dritte Klasse, als sie an einem Förderprogramm für rechenschwache an der Universität zu Köln teilnimmt. Für die Dauer eines Semesters wird sie darin in wöchentlichen Sitzungen von einer Studentin, die eigens dafür ausgebildet wurde, gefördert. Der inhaltliche Schwerpunkt liegt auf der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100. Hanna vollzieht im Verlauf der Förderung eine bemerkenswerte unterrichtsfachsprachliche Entwicklung, die nachfolgend beispielhaft nachgezeichnet wird.

Hanna und die Studentin Britta arbeiten zunächst am Rechenrahmen. Es fällt auf, dass Hanna anfangs häufig Zehner und Einer vertauscht. Als Britta sie beispielsweise in der ersten Fördersitzung bittet, eine 23 am Rechenrahmen einzustellen, stellt Hanna eine 32 ein und erklärt:

> Ja, ich benutz einfach meinen Trick, dass das da (*zeigt auf die 3 Zehnerreihen*) 3 ist und dann ist das (*zeigt auf die 2 Perlen*) 2. Da bin ich irgendwie dran gewöhnt.

Hannas Äußerung kann so gedeutet werden, dass sie die beiden Stellen der 23 in zwei disjunkte Mengen am Rechenrahmen übersetzt. Die ‚3' wird mit Zehnerreichen repräsentiert und die ‚2' mit einzelnen Perlen. So wird deutlich, dass die von Hanna gebrauchten Zahlworte allein keine sprachliche Differenzierung von Zehnern und Einern erlauben. Dafür entwickeln Hanna und Britta im Folgenden eine materialspezifische Sprache: Sie sprechen im Hinblick auf den Rechenrahmen von ‚Zehnerreihen' und ‚(einzelnen) Perlen'. So formuliert Hanna bereits in der zweiten Fördersitzung, als sie Britta diktiert, wie sie eine 15 einstellen soll:

> Du nimmst erst, ähm, einen Zehner, also eine ganze Zehnerreihe. (...) und dann noch 5 Einer dazu. Also 5 Perlen.

Mit der beschriebenen Spezifizierung der Sprache sind die Zehner und Einer für Hanna nicht länger vertauschbar. Sprachliche Spezifizierung und fachliche Differenzierung sind in Hannas Lernprozess zwei Seiten derselben Medaille. Ferner greift Hanna bereits abstraktere mathematische Begriffe auf, die Britta ihr als Sprachvorbild wiederholt angeboten hat und die geeignet sind, um auch Handlungen an anderen Materialien zu beschreiben: „Zehner" und „Einer".

In einem nächsten Abschnitt der Förderarbeit nutzen Hanna und Britta Mehrsystemblöcke. Hier vollzieht sich sowohl inhaltlich als auch sprachlich eine analoge Entwicklung. Zunächst vertauscht Hanna Zehner und Einer erneut. Als sie von Britta in der dritten Fördersitzung aufgefordert wird, eine 35 mit Mehrsystemblöcken darzustellen, legt Hanna eine 53 und erklärt:

> weil hier sind (*auf die 5 Zehnerstangen zeigend*) 5 und hier sind (*auf die 3 Einerwürfel zeigend*) 3.

Auch für dieses Material entwickeln Hanna und Britta dann eine spezifische Sprache. Sie sprechen von ‚Zehnerstangen' und ‚(einzelnen oder kleinen) Würfeln'. So diktiert Hanna Britta in der vierten Fördersitzung auf folgende Weise, wie eine 25 mit Mehrsystemblöcken darzustellen sei:

> (...) Da nimmst du 2 Zehnerstangen und ... dann noch (...) 5 kleine Würfel.

Damit zeigt sich ein zweites Mal die enge Verwobenheit von mathematischer Differenzierung und sprachlicher Spezifizierung.

Die hier skizzenhaft nachgezeichnete sprachliche Spezifizierung wurde in der Interaktion vor allem von Britta eingefordert. Es war ihr Weg, mit Hanna an der Unterscheidung von Zehnern und Einer zu arbeiten. Zehner und Einer haben eigene – materialspezifische und materialübergreifende – Namen bekommen. In einer fünften und letzten Szene trifft die Sprache auf zwei Materialien gleichzeitig und es wird deutlich, welches Potenzial die Sprachentwicklung für Hannas Lernprozess hat. In der siebten Fördersitzung diktiert Hanna Britta zunächst korrekt, wie eine 42 mit Mehrsystemblöcken darzustellen ist: „(...) also legst du 4 Zehnerstangen und 2 Einerwürfel." Als Britta diese Antwort lobt und dann nachfragt, wie sie die 42 am Rechenrahmen einstellen würde, antwortet Hanna:

> Ja, genauso. Weil 42 ist ja 42. Aber da machst du für die 4 Zehner halt Reihen und nicht Stangen, ne? Aber das ist ja egal. Und dann (...)

Hanna setzt hier beide Materialien aus der bisherigen Förderarbeit zueinander in Beziehung. Sie bezeichnet ein abstraktes mathematisches Objekt als Zehner und benennt, dass es am Rechenrahmen als Reihe und bei den Mehrsystemblöcken als Stange dargestellt wird. Sprachlich möglich wird ihr dieser Vergleich durch die Beherrschung von 3 Sprachen: Sie hat eine Sprache speziell für den Rechenrahmen, eine Sprache speziell für die Mehrsystemblöcke und eine Sprache für abstrakte mathematische Objekte. So kann sie ausdrücken, dass der Zehner mit dem einen Material anders dargestellt wird als mit dem anderen: „Aber das ist ja egal."

Insgesamt wird an der Fallstudie deutlich, dass Material auch Impulse zur fachbezogenen Sprachentwicklung geben kann, wenn es erstens darum geht, immer präziser über das Material und die Handlungen an ihm zu sprechen, und wenn es zweitens darum geht, unterschiedliche Materialien zu vergleichen und auf einer abstrakteren Ebene Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu benennen. Dann ist das Material keine Entlastung mehr, sondern eine produktive Herausforderung für die Unterrichtsfachsprache.

4 Fazit und Diskussion

Die beiden Szenen haben drei unterschiedliche Potenziale des Aufeinandertreffens von Sprache und Material gezeigt: Material kann die Sprache sowohl aufseiten des Sprechers als auch aufseiten des Zuhörers entlasten, es kann sie aber auch zu mehr Genauigkeit und Abstraktheit herausfordern.

Die Potenziale können für das Mathematiklernen im Unterricht gezielt genutzt werden. Dabei dienen die fachlichen Lehrziele als Orientierungspunkt: Welche inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen sollen erworben werden? Was ist das Ziel der geplanten Aktivitäten? Mit Blick auf eine solche Zielperspektive kann dann bestimmt werden, welche konkret-gegenständlichen Materialien überhaupt geeignet sind, um die Arbeit zu bereichern. Und erst dann kommen die dargestellten Potenziale ins Spiel. Mit konkreten Arbeitsaufträgen und bereitgestellten Angeboten kann eher das eine oder eher das andere Potenzial genutzt werden.

Um die Sprache zu entlasten, sollte nicht nur geeignetes Material in ausreichender Menge zur Verfügung stehen, sondern dessen Nutzung kann zum festen Bestandteil des Arbeitsauftrags gemacht werden: „Erkläre mit dem Rechenrahmen, wie du die Aufgabe 28+7 rechnest." Dann bleibt es dem Kind überlassen, welche „Gegebenheiten" der Materialhandlung es sprachlich repräsentiert und wo es (vorerst) auf Sprache verzichtet und stattdessen eine Materialdarstellung ‚sprechen' lässt (Dörfler, 1986).

Um die Sprache herauszufordern, kann ein Vergleich zwischen unterschiedlichen Materialien gezielt initiiert werden: „Auf den Bildern siehst du, wie Kinder Zahlen mit unterschiedlichen Materialien dargestellt haben. Welche Bilder zeigen dieselbe Zahl? Begründe." Der Vergleich von unterschiedlichen Materialien und den Handlungen an ihnen setzt immer die Loslösung von einem konkreten Material voraus. Es geht darum, Gemeinsamkeiten und Unterschiede materialübergreifend zu bezeichnen. Das ist eine Herausforderung für die Sprache. Auf dem Weg zur Bewältigung dieser Herausforderung kann es nützlich sein, zunächst an der Spezifizierung der Sprache zu arbeiten (Abschn. 3.2). Eine Variante dafür ist, in einer Partnerarbeit Materialhandlungen diktieren zu lassen (Wartha & Schulz, 2012, S. 63). In einem solchen Diktat geht es nur um ein Material, aber das diktierende Kind ist gefordert, geeignete sprachliche Mittel zu finden, um alle relevanten Schritte der Materialhandlung genau zu beschreiben.

Insgesamt zeigt sich, dass die soziolinguistische Perspektive, die mit dem Register-Begriff Einzug in den Forschungsbereich ‚Mathematik und Sprache' gehalten hat, einen wertvollen Impuls bringt, der auch für das weitere Nachdenken über die Ergebnisse aus dem australischen Projekt RoleM (Miller & Warren, 2014; Warren & Miller, 2013) hilfreich ist. Wenn Sprache in der sozialen Situation des Unterrichts auf Material trifft, ist das kein grundsätzlich positives oder negatives Ereignis. Materialnutzung führt nicht automatisch zu einer Verkümmerung der angestrebten Bildungssprache, ist aber ebenso wenig immer und überall nützlich für ihre Förderung. Vielmehr sollte es darum gehen, die Potenziale des Zusammentreffens von Sprache und Material zu kennen und didaktisch geschickt zu nutzen. Um die mathematische Bildungssprache zu fördern, braucht es aus soziolinguistischer Perspektive Situationen, in denen ihre Verwendung zweckmäßig ist. Der Vergleich von unterschiedlichen Materialien kann eine solche Situation sein. Hanna nutzt einen komplex strukturierten Satz und das wichtige Fachwort ‚Zehner', um ihre zentrale Einsicht zu beschreiben: „Aber da machst du für die 4 Zehner halt Reihen und nicht Stangen, ne?"

Literatur

Brandt, B., Vogel, R., & Krummheuer, G. (Hrsg.). (2011). *Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am „Center for Individual Development and Adaptive Education" (IDeA)*. Münster: Waxmann.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.

Dörfler, W. (1986). Das Verhältnis mathematischer Operationen und gegenständlicher Handlungen. In H.-G. Steiner (Hrsg.), *Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten* (S. 1-14). Köln: Aulis.

Gogolin, I. (2009). Zweisprachigkeit und die Entwicklung bildungssprachlicher Fähigkeiten. In I. Gogolin & U. Neumann (Hrsg.), *Streitfall Zweisprachigkeit – The Bilingualism Controversy* (S. 263-280). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Halliday, M.A.K. (1978). Sociolinguistics aspects of mathematical education. In M. Halliday (Hrsg.), *The social interpretation of language and meaning* (S. 194-204). London: University Park.

Koch, P., & Oesterreicher, W. (1985). Sprache der Nähe – Sprache der Distanz. Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorie und Sprachgeschichte. In O. Deutschmann, H. Flasch, A. Kablitz, B. König,

M. Kruse, W. Pabst & W.-D. Stempel (Hrsg.), *Romanistisches Jahrbuch, Band 36* (S. 1-43). Berlin: de Gruyter.

Lange, I., & Gogolin, I. (2010). *Durchgängige Sprachbildung. Eine Handreichung*. Münster: Waxmann.

Lorenz, J.-H. (1995). Arithmetischen Strukturen auf der Spur. Funktion und Wirkungsweise von Veranschaulichungsmitteln. *Die Grundschulzeitschrift, 82,* 8-12.

Meyer, M., & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik, 54*(45), 2-9.

Miller, J., & Warren, E. (2014). Exploring ESL students' understanding of mathematics in the early years: factors that make a difference. *Mathematics Education Research Journal, 26,* 791-810.

Morgan, C., Craig, T., Schütte, M., & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 46*(6), 843-853.

Ortner, H. (2009). Rhetorisch-stilistische Eigenschaften der Bildungssprache. In U. Fix, A. Gardt & J. Knape (Hrsg.), *Rhetorik und Stilistik, Band 2* (S. 2227-2240). Berlin: de Gruyter.

Tiedemann, K. (im Druck). Die Handlung als Partnerin der Sprache. Zum Zusammenspiel sprachlicher und enaktiver Repräsentation. In R. Vogel & M. Beck (Hrsg.), Geometrische Aktivitäten und Gespräche von Kindern im Blick qualitativen Forschens. Münster: Waxmann.

Tiedemann, K. (2017). Beschreibungen im Prozess. Eine Fallstudie zur fachbezogenen Sprachentwicklung im Kontext unterschiedlicher Darstellungen. In D. Leiss, M. Hagena, A. Neumann, & K. Schwippert (Hrsg.), *Mathematik und Sprache. Empirischer Forschungsstand und unterrichtliche Herausforderungen* (S. 63-79). Münster: Waxmann.

Tiedemann, K. (2015). Unterrichtsfachsprache. Zur interaktionalen Normierung von Sprache im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica, 38,* 37-62.

Wagenschein, M. (1988). *Naturphänomene sehen und verstehen. Genetische Lehrgänge*. Stuttgart: Klett.

Warren, E., & Miller, J. (2013). Young Australian Indigenous students' effective engagement in mathematics: the role of language, patterns, and structure. *Mathematics Education Research Journal, 25*, 151-171.

Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen.

Prof. Dr. Kerstin Tiedemann
Universität Bielefeld
Universitätsstr. 25
33615 Bielefeld
kerstin.tiedemann@uni-bielefeld.de

WEGE durch den Sprachförderdschungel – Strukturierung des Fachwortschatz-Lernprozesses

von Lilo Verboom[1]

Das WEGE-Konzept zeigt mit seinen vier Teilschritten eine Möglichkeit auf, wie in einem fach- und sprachintegrierten Mathematikunterricht durch gezielte Übungen der Verstehenswortschatz der Kinder in einen gesicherten Mitteilungswortschatz überführt werden kann. Durch die Nutzung eines Planungsrahmens erhalten die KollegInnen eine Unterstützung, bei der Planung ihres Mathematikunterrichts von Anfang an fachlich und sprachlich gehaltvolle Ziele zu verfolgen. Dies ist ein Beitrag aus der Praxis für die Praxis. Es sind oft gerade die alltäglichen unterrichtspraktischen Aspekte, die eine erfolgreiche Umsetzung bestehender Konzepte erleichtern bzw. unnötigerweise erschweren.

Schlüsselwörter: WEGE-Konzept, Thematische Übungen, Scaffolding, Fachlich-sprachlicher Planungsrahmen

1 Die Bedeutung der Sprache für das Lernen

Die kognitive und kommunikative Funktion der Sprache für das Mathematik-Lernen ist bekannt, auch wenn die Mathematik zusätzlich über Möglichkeiten verfügt, Beziehungen, Eigenschaften und Operationen in der ihr eigenen abstrakten Sprache der Symbole und Zeichen auszudrücken, ähnlich z. B. der Notenschrift eines Musikstücks. Um in der Mathematik die Zeichen zum „Klingen" zu bringen, bedarf es eines komplexen Netzes aus Wissen und Verstehen, aufgebaut über konkret-handelnde Erfahrungen und deren erste Abstrahierungen durch ikonische Darstellungen sowie über das Versprachlichen eben dieser Erfahrungen und Beobachtungen - Sprache in ihrer heuristischen Funktion als „Mittel des Verstehens". Leider kommt gerade die Ebene des Versprachlichens – insbesondere auch im Fach Mathematik – in der Praxis häufig zu kurz. Zwar befassen sich gerade die Kolleginnen und Kollegen an Schulen mit einem hohen Anteil an Kindern mit geringen Deutschkenntnissen bzw. allgemein mit spracharm aufwachsenden Kindern mit der Sprachproblematik an ihren Schulen, allerdings sind sie angesichts des vielfältigen Angebots an einzelnen didaktischen Materialien zur Sprachförderung häufig überfordert, deren Nützlichkeit für den Fachunterricht zu beurteilen. Vor allem fällt es ihnen schwer, bestehende konzeptionel-

[1] Herzlicher Dank an Melanie Maske-Loock (TU Dortmund), die in Vertretung für Lilo Verboom den Vortrag auf der Arbeitskreistagung gehalten hat.

le Ansätze aus dem DaZ-Bereich (z. B. Gibbons, 2002) auf die speziel-le Fachsprache des Mathematikunterrichts zu übertragen bzw. gegebenenfalls auch davon abzugrenzen. Gerade der Grundschulbereich ist bezüglich der Entwicklung fachsprachlich fördernder Konzepte und Materialien eher „unterversorgt“, ganz im Gegensatz zu den weiterführenden Schulen, für die der Erwerb fachsprachlicher Redemittel schon früh eine zentrale Bedeutung erlangte.

Im Folgenden sollen mögliche WEGE durch den Sprachförderdschungel aufgezeigt werden. Hierbei handelt es sich keineswegs um ein neues Konzept sondern eher um eine strukturierende Vernetzung ausgewählter Ansätze zum integrierten Fach- und Sprachenlernen – gerade auch für den Grundschulbereich. Zahlreiche Veröffentlichungen (Abshagen, 2015; Kniffka, 2012; Quehl & Trapp, 2013; Weis, 2013) und auch aktuelle Lehrpläne weisen deutlich darauf hin, dass Fachwörter die Hauptinformation der fachlichen Kommunikation tragen. Laut Beese et al. (2014) müssen die SchülerInnen „... fachliche Begriffe beherrschen, um sich mit Fachinhalten auseinandersetzen zu können sowie ihr Fachwissen aufzubauen und zu erweitern.“ (ebd., S. 58; vgl. auch Beese & Benholz, 2013; Krämer & Beese, 2013). Dadurch vermittelt Sprache Eindeutigkeit und Genauigkeit. Das gilt ganz besonders auch für Kinder, denen das Rechnenlernen schwerfällt. Hinsichtlich der kommunikativen Funktion der Sprache heben Maier und Schweiger (1999) hervor, dass es sinnvoll ist, dass die Kinder einer Lerngruppe möglichst über einen gemeinsam geteilten Wortschatz verfügen sollten. Das wird deutlich, wenn man sich anschaut, wie unterschiedlich einzelne SchülerInnen ihre Entdeckungen zu einem beziehungshaltigen Päckchen oder „Entdeckerpäckchen“, wie Kinder diese regelmäßigen Aufgabenserien im Gegensatz zu den „normalen“, „langweiligen“ Rechenpäckchen bezeichneten, in Worte fassen:

„Die Zahlen sind/gehen rückwärts.“
„Die Zahlen sinken.“
„Das geht da immer runter.“
„Die Zahlen werden kleiner/weniger.“

Sie beschreiben denselben Sachverhalt der regelmäßigen Verringerung von Zahlen in einem operativ angelegten Rechenpäckchen unterschiedlich, mal eher ordinal, mal eher kardinal orientiert. Das kann beim Austausch u. U. zu Verständigungsschwierigkeiten führen, wenn die Kinder nicht zur Verdeutlichung des Gemeinten gleichzeitig auf die angesprochenen Zahlen zeigen können. An dieser Stelle sei vorweggreifend betont, dass es völlig natürlich ist, dass die Kinder ihre ersten Beobachtungen und Entdeckungen zunächst in ihrer „eigenen“, individuellen Sprache ausdrücken. Auf diesen Sachverhalt weist Leisen (2013) in Anlehnung an Butzkamm so wunderschön bildhaft hin:

> Fachliches Lernen findet immer in der Sprache und mit der Sprache statt, in einem Zustand, in dem diese selbst noch generiert wird. Sprache im Fachunterricht ist wie ein Werkzeug, das man gebraucht, während man es noch schmiedet (nach W. Butzkamm 1989). (ebd., S. 2).

Gerade in den Einstiegsphasen in ein neues Unterrichtsthema geben die sprachlichen Konstruktionen der Kinder Auskunft über ihre ersten mentalen Konstruktionen. So bezeichnete eine Schülerin einen Kreis in Analogie zu ‚*Dreieck*‘ und ‚*Viereck*‘ als ‚*Keineck*‘ welch passender – wenn auch keineswegs eindeutiger – Begriff! Bei einer anderen Unterrichtssituation, in der es um die Erforschung der Hundertertafel ging, benannte eine Schülerin die jeweils gleichbleibenden Einerziffern in einer Spalte (*9, 19, 29, 39, ..., 8, 18, 28, 38, ...* usw.) als „Neuner“, bzw. „Achter“, Siebener“ usw. ...) – möglicherweise in Anlehnung an die alltagssprachliche Verwendung ‚*vom Dreier springen*‘, ‚*Vierer-Pasch*‘, ‚*Ruder-Achter*‘, ‚*Sechser im Lotto*‘. Es wäre aufschlussreich gewesen zu erfahren, ob die Konzeptbildung bezüglich des Stellenwertbegriffs *„Einer“* (vs. *„Zehner“*) dennoch bereits korrekt ausgebildet war. Kritisch wird es vor allem dann, wenn sich die Kinder aus dem Unterrichtsgespräch herausziehen, weil sie spüren, dass sie das, was sie meinen, nicht in Worte fassen können: „Ich weiß gar nicht, was das heißt.“ Oder: „Wie soll ich das sagen?“ sind typische Äußerungen, mit denen die Kinder uns – hoffentlich! – ihre sprachliche Schwierigkeit kundtun. Was ist nun genau unter „Fachwortschatz“ zu verstehen? Die fachgebundene Sprache ist ein Teil der Bildungssprache und zeichnet sich entsprechend neben der spezifizierenden, präzisen fachlichen Terminologie mit Verwendung von Oberbegriffen u.a. durch eine abstrahierende, unpersönlichere Ausdrucksweise mit Substantivierungen und Passivkonstruktionen aus.

Der Fachwortschatz umfasst hierbei keineswegs nur die bloße Anhäufung einzelner Fachbegriffe. Er besteht nach Targońska (2011)

> nicht aus losen Vokabeln, sondern stellt ein System von unterschiedlichen Beziehungen und Verflechtungen dar, die nicht nur das Behalten fördern, sondern auch das schnelle Abrufen, d.h. eine rasche Verfügbarkeit des nötigen Vokabulars ermöglichen (ebd., S. 118).

Der Fachwortschatz umfasst daher – Kollokationen mit einbeziehend – auch Wortgruppen, Satzglieder und ganze Satzmuster.

2 Aufbau eines Fachwortschatzes: Der Wortspeicher

Der erarbeitete Fachwortschatz sollte zur dauerhaften unterstützenden Vergegenwärtigung auf einem Lernplakat, dem sogenannten „Wortspeicher“, schriftlich fixiert werden. Dieser Terminus wurde 2008 von der Autorin eingeführt, zusammen mit ihrer Co-Moderatorin Frau Steinau in Fortbildungen verwendet und in einem Beitrag im „Handbuch Sprachförderung“ das erste Mal veröffentlicht (Verboom, 2008; vgl. auch Verboom, 2012). Inzwischen hat er Einzug in die Literatur (z. B. Götze, 2015) gefunden. Vor allem an Studienseminarstandorten scheint das Anfertigen eines Wortspeichers inzwischen zur alltäglichen Praxis zu gehören. Allerdings sind nicht alle gestalteten Wortspeicher wirklich lernförderlich. Insbesondere die ausschließliche Auflistung einzelner Fachbegriffe erweist sich als wenig hilfreich, wenn den SchülerInnen die Bedeutung eines bestimmten Begriffs entfallen ist. Wie wichtig es ist, das benachbarte Auftreten von Wörtern zu berücksichtigen, mag das folgende Beispiel zeigen: Zur genaueren Beschreibung der Entdeckerpäckchen wurden einzelne Fachbegriffe gesammelt und schriftlich an der Tafel festgehalten, darunter auch der Fachbegriff *„gleich“*. Bei der Untersuchung eines vorgegebenen Entdeckerpäckchens antwortete ein Schüler auf die Frage der Lehrerin „Was passiert mit dem Ergebnis?“ mit Blick auf die Wortsammlung prompt mit dem Einwortsatz *„gleich“*. Das kann passieren, wenn Fachbegriffe wie isolierte Vokabeln präsentiert werden. Daher sollte zumindest der benachbarte Begriff *„bleibt“*, also *„bleibt gleich“* ergänzend ‚mitgeliefert‘ werden. Folgende Gestaltungselemente für einen Wortspeicher haben sich als lernwirksam bewährt: Themenangabe in der Überschrift

- Reduzierte Anzahl von Begriffen
- Übersichtliche Strukturierung ggf. durch unterschiedliche Farbgebung

- Geordnete Darstellung von thematischen Zusammenhängen (Unterthemen)
- Bildliche Veranschaulichungen, Foto-Beispiele oder Erläuterungen zur Unterstützung des Verständnisses und Erleichterung des Behaltens (insbesondere auch von Handlungsanweisungen / Operatoren)
- Nomen mit bestimmtem Artikel; ggf. auch im Plural
- Ggf. Konjugation bzw. verschiedene Zeitangaben bei Verben
- Zusätzliche Einbettung der Fachbegriffe in einen für den thematisierten Unterrichtsinhalt relevanten sprachlichen Kontext (Ausdruck oder Satz); insbesondere sollten präpositionale Angaben, bei denen sich in der Regel durch die Kasusveränderung auch der Artikel verändert, in die Wortgruppen mit aufgenommen und optisch hervorgehoben werden, z.B.: „die Hunderterstelle" – „*an der* Hunderterstelle.", „die Spalte" – „*in der* dritten Spalte, genauso wie Abweichungen von der üblichen Wortbildung („drei" – „*dritte*").

Wenn man mit den Lernplakaten einen Drehkalender anfertigt, können diese platzsparend im Klassenraum aufbewahrt und bei der jeweiligen Aktualisierung des Themas – z. B. in höheren Jahrgängen – wieder zur Erinnerung vorgezeigt werden. Es macht Sinn, die angefertigten Wortspeicher zu fotografieren und auf kleinen Ständern an den Gruppentischen aufzustellen (bzw. auf DIN-A-4-Blättern für jedes einzelne Kind zur Verfügung zu stellen). Bei schriftlich zu erledigenden Arbeiten erleichtert die größere räumliche Nähe das Nutzen des Wortspeichers. Um eine überdauernde Wirkung zu erzielen, sollte der Wortspeicher immer wieder ins Bewusstsein der SchülerInnen gerückt und ihnen regelmäßig ein aktiver Zugang zu den einmal eingeführten Begriffen ermöglicht werden. Dazu gehört in erster Linie der konsequente Verweis auf die Wortsammlung, wenn es den SchülerInnen schwerfällt, die neuen Begriffe selbst aktiv zu verwenden. Des Weiteren sollten die Begriffe – insbesondere schwer auszusprechende – regelmäßig von den SchülerInnen noch einmal laut vorgelesen, rechtschreiblich gesichert, erklärt und in einen passenden Beispielsatz eingebunden werden. Inwieweit es sinnvoll ist, sie in ein persönliches „Wörterheft" (ggf. mit erläuternden Veranschaulichungen) eintragen zu lassen, ist sicherlich auch altersabhängig. Für die Akzeptanz des Wortspeichers seitens der SchülerInnen erweist sich die eigene Erfahrung bezüglich fehlender Versprachlichungsmöglichkeiten als am geeignetsten („Ich weiß gar nicht, was das heißt"). Idealerweise wird dann gemeinsam mit den Kindern überlegt, welche „Mathe-Wörter" benötigt werden. In Lerngruppen mit unterschiedlichen sprachlichen Vorkenntnissen machen einzelne MitschülerInnen dazu auch Vorschläge, und der Wortspeicher kann gemeinsam erstellt werden. Gelegentlich kann auch „von außen“ ein Anstoß durch die Lehrkraft erfolgen, indem sie den Kindern ‚spielerisch‘ aufzeigt, dass „Mathematiker“ sich oft anders ausdrücken als Kinder:

Wir haben gesagt:	**Ein Mathematiker würde sagen:**
Die Zahlen gehen immer höher.	Die Zahlen werden immer größer.
Die hinteren Zahlen sind gleich.	Die Einer sind gleich.
Hier sind immer Neuner.	An der Einerstelle steht immer eine 9.
Die Zahlen in der Schräge	Die Zahlen in der Diagonale.
Hier ist die 10, 20, 30, 40,	In der letzten Spalte stehen (glatte) Zehnerzahlen.

Die Fachbegriffe werden dann erläuternd von der Lehrkraft semantisiert. Im Idealfall wird – wo notwendig – eine Übersetzung in der Erstsprache angeboten (z. B. durch muttersprachliche Lehrkräfte oder Eltern, vgl. auch Beese & Gürsoy, 2012; Prediger & Özdil, 2011). Oftmals sind die Kinder regelrecht stolz, wenn sie sich auch „wie die Erwachsenen“ ausdrücken können. Gelegentlich fordern sie das sogar regelrecht ein. Als zusätzliche Sensibilisierung für Sprachgenauigkeit kann ein Arbeitsblatt mit fiktiven Schüleräußerungen eingesetzt werden. Die Schülerinnen sollen z. B. beim Thema „Orientierung an der Hundertertafel“ beurteilen, welche der beiden Äußerungen genauer ist: „Das ist immer alles gleich. Immer die gleichen Zahlen.“ oder „Bei den Zahlen in der ersten Spalte steht an der Einerstelle immer eine 1.“ Die Lernbarkeit von Wörtern hängt von unterschiedlichen Faktoren ab, u.a. von

- der Wortlänge (nur für Anfänger)
- der Aussprache: Wörter, die schwer auszusprechen sind, werden langsamer / schlechter gelernt; Lernende vermeiden schwer auszusprechende Wörter. Was ein Wort phonologisch schwierig macht, hängt u.a. von der Muttersprache des Kindes ab (für Griechen schwierig, aber nicht für Türken: *fünf*, *Würfel*; für Türken schwer: Konsonantenhäufungen: „*St(e)rahl*“, „*Kuader*“ („Quader“), „*P(i)risma*“)
- einer regelmäßigen/unregelmäßigen Wortbildung, z.B. bei Komperativformen („*viel*“ – „*mehr*“ – „*am meisten*“)
- (Bedeutungsunterschiede zur Alltagssprache: „*Unterschied*“, „*abziehen*“, „*gerade Zahl*“)
- auch werden ähnlich klingende bzw. „aussehende“ Wörter beim Lesen oftmals voreilig verwechselt (z.B. „*Zeile*“, „*Zahl*“)

3 Festigung des Fachwortschatzes: Der Wortschatzlernprozess

Der Wortspeicher ist vor allem dann eine hilfreiche Unterstützung, wenn Kinder sich aktuell im Rahmen einer Unterrichtsreihe nachvollziehbar äußern wollen/sollen. Um die neuen Begriffe aber auch wirklich im Gedächtnis zu verankern und dann selbstständig auch auf neue Sachverhalte übertragen zu können, bedarf es neben der Visualisierung auf einem Lernplakat weiterer ausgedehnter unterrichtlicher Maßnahmen. Darauf verweisen zahlreiche Autoren, wenn sie die Notwendigkeit ausgiebiger Wiederholungen betonen:

> Meist müssen neue Wörter jedoch viele Male gehört werden, ehe sie eigenständig wieder erkannt werden. Untersuchungen zeigen, dass 8 bis 10 Wiederholungen nötig sind, damit ein Wort aus einem Lautstrom herausgefiltert werden kann (vgl. Dimroth et al. 2006, 4; Müller, 10). Mehr als 20 Wiederholungen sind nötig, damit eine Bedeutung zugeordnet werden kann (vgl. Pigada & Schmitt 2006, 19) und mehr als 50 Wiederholungen, bis ein neues Wort schließlich auch eigenständig gebraucht wird (vgl. Nodari, 2006, 4). (Apeltauer, 2010 zitiert nach Benholz & Mavruk, 2014).

Der *Wortschatzlernprozess* geht weit über die rein sprachunterstützende *Wortschatzvermittlung* hinaus. Die fokussiert sprachfördernde *Wortschatzarbeit* zielt durch intensive, oftmals schematische Übungen auf das Festigen und Behalten des Fachwortschatzes und seinen normgerechten Gebrauch ab.

> Dazu wird eine komplexe Aufgabe in Übungen und Aufgaben zerlegt, die jeweils nur einen Teil der sprachlichen Anforderungen verlangen und direkt auf die Verankerung und die Verwendung der neuen Fachwörter abzielen. (Storch, 1999, S. 72).

Hierzu bedarf nach es nach Rösch (2011) einer – in einzelnen Fällen sicher massiven – Steuerung durch unterrichtliche Maßnahmen, die möglichst früh einsetzen sollten. Letztlich sollen die SchülerInnen befähigt werden, den erworbenen Fachwortschatz auch in variierten Lernsituationen eigenständig produktiv anzuwenden.

4 Festigung des Fachwortschatzes: Das WEGE-Konzept

Das WEGE-Konzept stimmt mit seiner Schrittigkeit in weiten Teilen mit dem Wortschatzlernprozess überein, wurde allerdings unabhängig von den bestehenden Ansätzen aus dem DaF-Bereich und dem Fremdsprachenlernen entwickelt. Ausgehend von der Erarbeitung neuer fachbezogener Redemittel besteht es aus den vier Komponenten

- **Wortspeicher:** Erarbeitung und Visualisierung des benötigten Fachwortschatzes (Fachbegriffe und ihre sprachliche Einbettung in fachbezogene Ausdrücke, - Wortgruppen und Wortverbindungen - und Satzmuster)
- **Einschleif-Übungen:** Differenzierter Einsatz grundlegender Übungen zur direkten gedächtnismäßigen Verankerung und korrekten Verwendung der aktuell erworbenen einzelnen Fachbegriffe in einem eng begrenzten inhaltlichen und sprachlichen Rahmen (mit gleichbleibenden Satzmustern)

- **Ganzheitliche Übungen:** individualisiertes Angebot weiterführender Übungen zur Aktivierung und flexiblen Anwendung einer Vielzahl erworbener Fachbegriffe in einem erweiterten inhaltlichen und sprachlichen Rahmen (mit unterschiedlichen Satzmustern)
- **Eigenproduktionen**: Impulse zur selbstständigen Anwendung erworbener Sprachmittel mit inhaltlicher und sprachlicher Öffnung (vgl. Verboom, 2013).

Die vier Elemente des WEGE-Konzepts werden im Laufe einer Unterrichtsreihe realisiert. Die einzelnen Fachbegriffe und weitere sprachliche Mittel werden schrittweise erarbeitet und sukzessive eingeschliffen. Insbesondere die Einschleifübungen werden je nach individuellem Förderbedarf mehr oder weniger umfangreich durchgeführt. Sie sind der zentrale Bestandteil des WEGE-Konzepts. Dabei werden einfache grammatische Strukturen zumeist lediglich implizit vermittelt, wenn auch Abweichungen z. B. durch das korrektive Feedback oder auch durch das Sprachvorbild der Lehrkraft besonders betont werden: „Es heißt zwar ‚*die* Einerstelle‘, aber man sagt: ‚an *der* Einerstelle steht ...‘. Oder: „Es heißt ‚*die* dritt*e* Zeile‘. Aber man sagt: ‚Die 26 steht in *der* dritte*n* Zeile.‘ An dieser Stelle sei deutlich darauf hingewiesen, dass die Einschleifübungen als individuelle Angebote zu betrachten sind, die entsprechend mehr oder weniger, früher oder später, von Erfolg gekrönt sind. Es ist unbedingt zu vermeiden, dass die SchülerInnen die Sprachmittel voreilig und womöglich unverstanden-schematisch eintrainieren und gezwungenermaßen sozusagen „papageienartig“ anwenden. Auch auf der sprachlichen Ebene findet Lernen als individueller Prozess statt! Mit einem soliden Fachwortschatz sollten die SchülerInnen über ein Werkzeug verfügen, das es ihnen erleichtert, auch anspruchsvollere Mitteilungsbereiche und Textsorten wie das vollständige Beschreiben, das Begründen und Argumentieren zu bewältigen.

5 WEGE: Fachliche und sprachliche Progression bei Einschleifübungen

Um Zufälligkeit und Beliebigkeit bei der Auswahl und Konzeption von Übungen zu vermeiden, zeigt das WEGE-Konzept den KollegInnen strukturierende Zugangsweisen für gezielte, sprachfördernde Unterrichtsmaßnahmen auf. Dabei orientiert es sich an zwei Leitfragen:

- Wie können sprachliche Übungen und Trainings in den Mathematikunterricht integriert werden, ohne die fachlichen Inhalte zu vernachlässigen? Welche Übungsformen sind dafür geeignet und wie können sie gestaltet werden?
- Wie kann sprachfördernder Mathematikunterricht *systematisch* und *strukturiert geplant* werden?

Sprachförderung im Fach ist nicht gleichzusetzen mit dem allgemeinen Aufbau von Bildungssprache. Zwar kann das Fach einen solchen Aufbau phasenweise unterstützen. Immer wird aber die Erarbeitung fachlicher Inhalte im Vordergrund stehen. Hierbei ist zu beachten, dass sich mit der vertiefenden Auseinandersetzung mit Inhalten auch die sprachlichen Funktionen an Tiefe gewinnen und die sprachlichen Anforderungen steigen. Diese reichen von der einfachen, zumeist alltagssprachlichen mündlichen Wiedergabe von Aktivitäten und Beobachtungen über Beschreibungen und Erklärungen von erkannten Zusammenhängen in zunehmend fachgebundener Sprache bis hin zum argumentativ-verallgemeinernden Formulieren allgemeingültiger Besonderheiten und Gesetzmäßigkeiten, zunehmend losgelöst vom konkreten Beispiel. Damit gilt es bei der Unterrichtsplanung – neben der fachlichen Progression – immer auch die sprachliche Progression mitzudenken und anzustreben. Dies soll im Folgenden an einem Beispielen illustriert werden.

5.1 Beispiel: „Entdeckerpäckchen" (zweites Schuljahr)

Das Beispiel bezieht sich auf eine Unterrichtsreihe zu den „Entdeckerpäckchen in einem zweiten Schuljahr: Im ersten Schritt werden gemeinsam mit den Kindern Ausdrücke für die Positionen der Zahlen im Päckchen sowie für die regelmäßigen Veränderungen gesammelt: „Die erste (vordere) Zahl/ die zweite (hintere) Zahl / das Ergebnis – wird um ... größer / kleiner / bleibt gleich."

Fachlich: Gemeinsame Untersuchung eines Entdeckerpäckchens, Feststellen der regelmäßigen Veränderungen	**Sprachlich**: Gemeinsame Erarbeitung der Fachbegriffe für die Beschreibung von Positionen und Zahlbeziehungen

Zur direkten individuellen Festigung der erarbeiteten Begriffe ordnen die Kinder sodann zwei verschiedenen Entdeckerpäckchen passende Aussagen zu, zum ersten Päckchen: „Die erste Zahl wird immer um 3 größer" / „Die zweite Zahl wird immer um 4 kleiner." / Das Ergebnis wird immer um 1 ... ."; zum zweiten Päckchen: „Die erste Zahl wird immer um 4 größer." / „Die zweite Zahl wird immer um 2 kleiner." / „Das Ergebnis wird immer um 2 … .". Die Aussagen zum Ergebnis werden jeweils richtig ergänzt.

Fachlich: Untersuchung der Auswirkung regelmäßiger Veränderungen in zwei Entdeckerpäckchen auf das Ergebnis	**Sprachlich**: Individuelle Festigen der erarbeiteten Begriffe; Zuordnung entsprechender Beschreibungen zu den passenden Entdeckerpäckchen

Eine erhöhte Anforderung stellt es dar, wenn die Kinder im dritten Schritt zu der allgemeinen Aussage „Das Ergebnis bleibt immer gleich." selbstständig ein passendes Plus-Entdeckerpäckchen bilden sollen. Durch das Eintragen ihrer individuellen Lösung (z. B.: „Die erste Zahl wird immer um 10 größer" / „Die zweite Zahl wird immer um 10 kleiner") auf einem Arbeitsblatt wird die Erkenntnis des Gesetzes der Konstanz der Summe angebahnt und im gemeinsamen Klassengespräch am Schüler-Beispiel formuliert: „Wenn die erste Zahl um 10 größer und wenn die zweite Zahl um 10 kleiner wird, dann bleibt das Ergebnis gleich."

Fachlich: Ein Entdeckerpäckchen mit immer gleichen Ergebnissen bilden (Erkenntnis des Gesetzes von der Konstanz der Summe)	**Sprachlich**: „Übersetzung" einer Aussage zum Ergebnis in die Symbolsprache der Mathematik; Einführung: Konditionalsatz

Fachlich und sprachlich wird dann nach mehreren weiteren Zwischenschritten die höchste Stufe erreicht, wenn die Kinder - ohne die Aufgaben konkret auszurechen - die Art der Veränderungen in einem Term voraussagen können. Erkenntnis- und Sprachstand werden auf die allgemein-generalisierende Ebene gehoben.

Fachlich: Auswirkungen der Veränderung des Zahlenmaterials im Term auf das Ergebnis vorhersagen (generalisierende Ebene)	**Sprachlich**: Zahlbeziehungen allgemein, d.h. ohne konkretes Ausrechnen als Wenn-dann-Beziehungen ausdrücken (Satzmuster: Bedingungssatz)

Beim Einsatz von Übungen zur direkten Verwendung und Festigung des Fachwortschatzes muss den Kindern verdeutlicht werden, dass hierbei – neben der inhaltlichen – vor allem die sprachliche Komponente im Vordergrund steht. Der Einsatz einer Handpuppe beim Vorlesen mündlicher Übungen bzw. eines Logos bei schriftlich zu bearbeitenden Aufträgen kann hierbei für Transparenz sorgen.

6 WEGE: Die Ganzheitlichen Übungen

Ganzheitliche Übungen werden eher am Ende des Lernprozesses eingesetzt. Sie werden je nach Leistungsvermögen der einzelnen

SchülerInnen differenziert angeboten. Ganzheitliche Übungen machen bei komplexeren Themen mit schrittweiser Erarbeitung verschiedener Aspekte (Unterthemen) und umfangreicherer sprachlicher Mittel Sinn. Sie werfen noch einmal abschließend einen Blick auf das bisher Gelernte – fachlich und sprachlich. Eine Vielzahl an verschiedenen Fachbegriffen und Satzmustern wird aufgegriffen. Es gibt ein breites Repertoire an geeigneten Übungsformen. Zahlreiche „Methodenwerkzeuge“ aus Leisen (2013) können auch bereits in der Grundschule Verwendung finden und erfüllen dabei eine Vielfalt an sprachfördernden Funktionen. Typische Übungsangebote aus dem „Vokabel“-Lernen des DaZ-Bereiches wie „Kreuzworträtsel“, „Buchstabensalat“ oder „Suchsel“ entsprechen nicht dem Übungsansatz des WEGE-Konzepts.

Übungsformen / „Methoden-Werkzeuge“:	**Funktionen:**
- Wortliste (Wortspeicher) - Satz- / Textpuzzle - Lückentext - Wortfelder (paarweise Zuordnung von Begriffen) - Fehlersuche - Satz- / Fragemuster (übertragbare Mustersätze) - Rätsel (Frage-/Antwort-Umformung) - spielerische Übungen: (LOTTO, DOMINO, BINGO, TABU	- Wiederholung und Festigung des Fachwortschatzes - Förderung / Überprüfung des Begriffsverständnisses - Förderung des Leseverstehens - Förderung des Hörverstehens - Eischleifen bestimmter sprachlicher Strukturen - Förderung der sprachlichen Bewusstheit (Genauigkeit) - Vorbildcharakter für die Sprachproduktion - Förderung d. Kommunikation

7 WEGE: Eigenproduktionen

Erst wenn die Kinder in der Lage sind, mit den erworbenen Sprachmitteln selbstständig kleine Texte (mündlich oder schriftlich) zu verfassen, können sie zeigen, ob sie das Gelernte verinnerlicht haben und „frei“ darüber verfügen können. Für solche Eigenproduktionen gibt es verschiedene Anregungen:

Die Kinder können z.B.

- für ein BINGO- oder LOTTO-Spiel selbstständig Fragen zu ausgewählten Zahlen formulieren.
- zu vorgegebenen Fachbegriffen passende Sätze bilden.
- (im Lerntagebuch) aufschreiben, was sie über das behandelte Thema gelernt haben, oder zu einer Variation der Aufgabenstellung einen Forscherbericht formulieren.

Um Transparenz zu gewährleisten sollten sie dabei darauf hingewiesen werden, möglichst viele der gelernten „Mathe-Wörter“ zu verwenden. Es ist eine schöne Bestätigung, wenn die Kinder diese Wörter in ihren Verschriftlichungen einkreisen und dabei ablesen können, welche sprachlichen Lernfortschritte sie erzielt haben. Natürlich sind auch immer mündliche Äußerungen Eigenproduktionen. Allerdings muss in informellen Gesprächssituationen wie der Partner- oder Gruppenarbeit damit gerechnet werden, dass die Kinder in ihre individuelle, alltagssprachliche Ausdrucksweise verfallen. Beim Präsentieren sollten sie sich dann jedoch in einem anderen Sprachregister bewegen. Sprachfreien Mathematikunterricht darf es nicht geben. In der Literatur wird immer wieder darauf hingewiesen, wie wichtig es ist, dass bei allen sprachlichen Aktivitäten möglichst alle vier Bereiche „hören“ – „sprechen“ – „lesen“ – „schreiben“ Anwendung finden.

8 WEGE: WEGE mit Plan

Es dürfte deutlich geworden sein, dass die verschiedenen sprachfördernden Übungen nicht einfach nur beliebig und gießkannenartig im Unterricht eingesetzt werden können. Um bei allen Kindern verständiges Lernen auf der fachlichen Eben sprachlich zu begleiten und zu unterstützen bedarf es von Anfang an einer Planung, die wohlüberlegt fachliche und sprachliche Aktivitäten initiiert und einen sich gegenseitig bedingenden Lernzuwachs auf beiden Seiten anstrebt.

Als Grundlage für eine solch gezielte Planung ist es empfehlenswert, bei der vorausschauenden Vorbereitung des Unterrichts das Template des SIOP®-Planungsrahmens für den sprachfördernden Fachunterricht (Castillo & Teyechea, 2008, vgl. auch Beese, 2010) zu nutzen. Die Kolleginnen des Duisburger BiSS-Verbundes „Sprachbrille auf im Mathematikunterricht!“ haben dieses Template in einigen Punkten abgewandelt und durch die Komponenten des WEGE-Konzepts ergänzt (Abb.1).

Titel der Stunde(n) / der Reihe: *Orientierung an der Hundertertafel*	**Klassenstufe:** *2. Schuljahr*
Verknüpfung zu Vorwissen / Erfahrungen der SchülerInnen und zu bereits Gelerntem (fachlich): - *Zwanzigerfeld / Zwanzigertafel*	**Verknüpfung zu Vorwissen / Erfahrungsfeld der SchülerInnen und zu bereits Gelerntem (sprachlich):** *„Einer“, „Zehner“, „immer 10 in einer*

(1. Schj.) - *Hunderterfeld* - *Zahlvorstellung im ZR bis 100 (Stellenwert, Bündelung)*	*Reihe (Zeile)", „Zwanzigertafel", „immer 10 mehr"; „unter(einander)"*
Eingangsstandortbestimmung (Lernausgangslage): Einführendes Unterrichtsgespräch zur Hundertertafel; weitere Beobachtungen in den Folgestunden	
Fachliche(s) Lernziel(e): *Die SuS sollen* - *den Aufbau der Hundertertafel verstehen (Analogien, Zahlbeziehungen, ...)* - *sich an der Hundertertafel geläufig orientieren können*	**Sprachliche(s) Lernziel(e):** *Die SuS sollen* - *typische Fachbegriffe und Ausdrücke zur Beschreibung der Struktur der Hundertertafel sicher verwenden können* - *die Positionen von Zahlen an der HT sprachlich korrekt angeben können (Stolpersteine: Präpositionen; Verwendung des Artikels im richtigen Kasus nach Präpositionen)* - *zweistellige Zahlen richtig aussprechen können (Stolperstein: Zahlendreher)* - *die Ordnungszahlen 1. bis 10. korrekt bilden können*
Unterstützende Materialien / Medien (auch non-verbale Veranschaulichung): *Hundertertafel, Ausschnitte aus der HT, farbige Streifen (durchsichtig), Markierungen, Wortkarten mit Fachbegriffen, Wortspeicher (entsteht im Prozess)*	**Wortspeicher** (Schlüsselvokabular; Fachwortschatz)**:** *„die Zeile". „die Spalte", „die Diagonale", „ Einer", „Zehner", „an der Einer-(Zehner)stelle", „glatte Zehner" („die Zehnerzahl") „die Ziffer", „gleiche Ziffern", „über, unter, rechts von, links von, neben", „untereinander", „nebeneinander", „immer um 1 / 10 größer / kleiner"; „gleich bleiben"* **Satzmuster:** *„Die ... steht über/ unter/links von/rechts von der ... ."* *„Die ... steht in der ... Zeile und in der ... Spalte."* *„In der ... Spalte haben alle Zahlen ... Einer."* *„In der ... Zeile haben fast alle Zahlen ... Zehner."* *„Hier kommt die 36 (...) hin, weil, ..."*
Sinnvolle Aktivitäten, die ein Sprachhandeln erfordern: - *Beschreibung der Hundertertafel (beschreiben)* - *Rätsel zur Position von Zahlen mündlich/schriftlich entwerfen (Frage- / Antwortsätze formulieren)* - *Eine zerschnittene Hundertertafel*	**Einschleifübungen** (grundlegende sprachliche Übungen): - *Zahlenrätsel nach vorgegebenen Muster;* - *Verschiedene Arbeitsblätter zum Einschleifen von präpositionalen Angaben und von Satzmustern* - *Textpuzzle zusammensetzen*

zusammensetzen/ Lücken in Ausschnitten der HT ausfüllen (begründen) - *Fehlerhafte Aussagen korrigieren (begründen)*	
Fragen/Aufgaben, die kognitiv höhere Denkprozesse hervorrufen, nach oben differenzierte Angebote: - *Erkennen von gemeinsamen Eigenschaften eines vorgegebenen Zahlenmaterials* - *Beschreibung einer anders strukturierten Hundertertafel*	**Ganzheitliche Übungen** (erweiterte sprachliche Übungen): - *Fehlersuche* - *Lückentexte* - *LOTTO-, DOMINO-Spiel* --- **Eigenproduktionen** (weitgehend selbstständige [schriftliche] Sprachproduktionen) - *Mit Begriffen aus dem Wortspeicher mündlich/schriftlich Sätze oder Texte bilden lassen* - *Rätsel formulieren; Beschreibung einer veränderten Hundertertafel*
Abschlussstandortbestimmung (Lernzielüberprüfung): *(Veränderte) Hundertertafel schriftlich beschreiben*	

Abb. 1 Planungsraster zum WEGE-Konzept am Beispiel „Orientierung und Entdeckungen an der Hundertertafel“

Auf der Grundlage einer vorausschauenden Lernstandsanalyse („Wortspeicher“, Schlüsselvokabular“) sowie einer informellen Sprachstandsfeststellung („Vorwissen“, „Verknüpfung mit Vorkenntnissen“) werden die Ziele für themenbezogene sprachfördernde Übungen und angemessene Aktivitäten, die ein Versprachlichen herausfordern, festgelegt – zunächst einmal für die gesamte Lerngruppe, wenn nötig, d. h. bei individuellem Bedarf, aber durchaus auch für einzelne SchülerInnen. Der verwendete Planungsrahmen mag zunächst als sehr aufwändig erscheinen. Die Kolleginnen des BiSS-Verbundes erproben ihn nun bereits seit 3 Jahren und finden es ausgesprochen hilfreich, auf diese Weise strukturiert an die Förderung heranzugehen. Nicht immer werden im Planungsrahmen alle Felder direkt von Anfang an und auch nicht immer ganz vollständig ausgefüllt. Manches wird noch im Laufe der Reihe verändert oder ergänzt. Das entlastet und bewahrt die notwendige Flexibilität. Durch die Multiplikation des Planungsrahmens auf den bundesweiten BiSS-Tagungen durch den Duisburger BiSS-Verbund erfährt dieser Ansatz inzwischen eine hochgeschätzte bundesweite Verbreitung und wird auch durch andere Verbünde als Anregung übernommen.

Wie eingangs bereits erwähnt, ist mit dem WEGE-Konzept der Versuch unternommen worden, fachbezogene Sprachförderung geplant und strukturiert anzulegen. Weitere Forschungsvorhaben werden zeigen, ob dies ein gangbarer Weg ist. Es wird vor allem darauf ankommen, die Grundschul-Lehrkräfte von der Notwendigkeit einer integrierten fachsprachlichen Förderung zu überzeugen. Der didaktische Markt wird sich zunehmend und in aller Eile des Themas annehmen. Es ist zu wünschen, dass nicht voreilig „Rezepte" angepriesen sondern tragfähige Konzepte entwickelt und evaluiert werden. Die nötige Zeit sollte man sich dafür nehmen.

Literatur

Abshagen, M. (2015). *Praxishandbuch Sprachbildung Mathematik. Sprachsensibel unterrichten – Sprache fördern*. Stuttgart: Klett-Verlag.

Beese, M. (2010). *Sheltered Instruction Observation Protocol The SIOP Model – ein Modell zum integrierten Fach- und Sprachenlernen in allen Fächern mit besonderem Fokus auf Zweitsprachenlernende*. Abgerufen von http://www.uni-due.de/imperia/md/content/prodaz/siop.pdf.

Beese, M. & Gürsoy, E. (2012). Bezüge herstellen im Deutschen und Türkischen – Sprachliche Stolpersteine beim Mathematiklernen für zweisprachige Lernende. *Praxis der Mathematik in der Schule,* 45, 34–37.

Beese, M., & Benholz, C. (2013). Sprachförderung im Fachunterricht. Voraussetzungen, Konzepte und empirische Befunde. In C. Röhner, C. & B. Hövelbrinks (Hrsg.), *Fachbezogene Sprachförderung in Deutsch als Zweitsprache. Theoretische Konzepte und empirische Befunde zum Erwerb bildungssprachlicher Kompetenzen* (S. 37–56). Weinheim und Basel: Juventa.

Beese, M., Benholz, C., Chlosta, C., Gürsoy, E., Hinrichs, B., Niederhaus, C., & Oleschko, S. (2014). *Sprachbildung in allen Unterrichtsfächern*. München: Langenscheidt.

Benholz, C., & Mavruk, G. (2014). *Fortbildungsmodule für Lehrkräfte von Seiteneinsteigerinnen und Seiteneinsteigern*. Abgerufen von http://docplayer.org/29778584-Fortbildungsmodule-fuer-lehrkraefte-von-seiteneinsteigerinnen-und-seiteneinsteigern.html

Castillo, M., & Teyechea, N. (2008). *SIOP®-Lesson Plan Template 4*. Abgerufen von http://blog.smu.edu/projectconnect/files/2013/08/ELA3-G6.pdf.

Gibbons, P. (2002). *Scaffolding Language. Scaffolding Learning. Teaching Second Language Learners in the Mainstream Classroom*. Portsmouth: Heinemann.

Götze, D.(2015). *Sprachförderung im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Leisen, J. (2013). *Sprachförderung im Fach – Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis*. Stuttgart: Klett.

Kniffka, G. (2012). Scaffolding - Möglichkeiten, im Fachunterricht sprachliche Kompetenzen zu vermitteln. In M. Michalak & M. Kuchenreuther

(Hrsg.), *Grundlagen der Sprachdidaktik Deutsch als Zweitsprache* (S. 208-225). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Krämer, S., & Beese, M. (2013). Themenheft Protokolle und Co. – Fachsprache entwickeln. *Biologie 5–10,* 4.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache*. Wien: Öbv & hpt.

Nodari, C. (2006). *Grundlagen zur Wortschatzarbeit*. Zürich: Institut für Interkurturelle Kommunikation.

Prediger, S., & Özdil, E. (Hrsg.) (2011). *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit*. Münster: Waxmann.

Quehl, Th., & Trapp, U. (2013). *Sprachbildung im Sachunterricht der Grundschule. Mit dem Scaffolding-Konzept unterwegs zur Bildungssprache*. Münster: Waxmann.

Rösch, H. (2001). *Handreichung Deutsch als Zweitsprache*. Senatsverwaltung für Jugend, Schule und Sport (Hrsg.) Berlin. Abgerufen von https://www.berlin.de/sen/bildung/schule/foerderung/sprachfoerderung/daz_handreichung.pdf.

Storch, G. (1999). *Deutsch als Fremdsprache – Eine Didaktik*. Paderborn: Wilhelm Fink Verlag.

Targoński, J. (2011). *Lexikalische Kompetenz – ein Plädoyer für eine breitere Auffassung des Begriffs*. Abgerufen von http://pressto.amu.edu.pl/index.php/gl/article/viewFile/322/229.

Verboom, L. (2008). Mit dem Rhombus nach Rom – Aufbau einer fachgebundenen Sprache im Mathematikunterricht der Grundschule". In C. Bainski & M. Krüger-Potratz, (Hrsg.), *Handbuch Sprachförderung* (S. 95-112). Essen: Neue Deutsche Schule Verlagsgesellschaft.

Verboom, L. (2012). Ich kann das jetzt viel besser bedrücken. *Praxis der Mathematik in der Schule, 54* (45), 13-17.

Verboom, L. (2013). Sprachförderung im Fach mit Plan: Das WEGE-Konzept am Beispiel „Orientierung auf der Hundertertafel". *Grundschule Mathematik, 39*, 16 – 19.

Weis, I. (2013). *Sprachförderung PLUS. Förderbausteine für den Soforteinsatz im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett Verlag.

Lilo Verboom
Ehem. ZfsL Duisburg
Alte Landstr. 230
40489 Düsseldorf
liloverb@web.de

Vortragende i.V.
Melanie Maske-Loock
TU Dortmund – IEEM
44221 Dortmund
Melanie.Maske-Loock@math.tu-dortmund.de

Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Elisabeth Rathgeb-Schnierer
rathgeb-schnierer@mathematik.uni-kassel.de

Beitrag: Laura Korten
laura.korten@math.tu-dortmund.de

Zieldifferente Förderung flexibler Rechenkompetenzen – Erforschung kooperativ-interaktiver Lernsituationen im Rahmen einer Lernumgebung für den inklusiven Mathematikunterricht

Die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen ist zentrales Ziel im Arithmetikunterricht (u.a. Gaidoschik, 2010; Rathgeb-Schnierer, 2010; Selter, 2009) und stellt gleichzeitig eine große Herausforderung im Lernprozess dar. Dies gilt besonders für Kinder mit kognitiven Lernschwierigkeiten, da sie den Blick auf strukturelle Zusammenhänge und operative Beziehungen nicht von sich aus entwickeln (Häsel-Weide, 2016; Rechtsteiner-Merz, 2013; Scherer & Moser Opitz, 2010). Ebenso herausfordernd ist das *Gemeinsame Mathematiklernen* im inklusiven Unterricht, da die Balance zwischen individuellem und kooperativem Lernen *aller* Kinder geschaffen werden muss. Folglich müssen gezielt kooperativ-interaktive Lernsituation angeregt werden, die individuelle Zugänge und zieldifferente Lösungs- und Entwicklungsprozesse ermöglichen.

1 Individuell und gleichzeitig kooperativ-interaktiv Lernen

Der Kommunikation über operative Beziehungen sowie Lösungswege kommt bei der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen eine besondere Rolle zu (u.a. Gaidoschik, 2010; Rathgeb-Schnierer, 2010). Damit diese Kommunikation stattfinden kann, ist – besonders bezogen auf das Gemeinsame Mathematiklernen – zunächst eine individuelle Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand nötig, um den Kindern individuelle Zugänge und die Konstruktion eigener Vorstellungen und Ideen zu ermöglichen (ebd.). Auf dieser Grundlage können Kinder ihre Lösungsideen und Entdeckung austauschen und Impulse für die Weiterarbeit entwickeln. In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen, wie sich individuelle Zugänge und Lösungsprozesse durch kooperativ-interaktive Phasen im Rahmen einer Lernumgebung für den inklusiven Unterricht weiterentwickeln. Hierbei ist zu klären, ob das Mit- und Voneinanderlernen für die heterogenen Kinderpaare produktiv war und dabei flexible Rechenkompetenzen gefördert werden konnten.

2 Flexible Rechenkompetenzen zieldifferent fördern

Flexibles Rechnen wird im Hinblick auf die Aspekte Flexibilität und Adaptivität unterschiedlich definiert (vgl. Rechtsteiner-Merz, 2013). In diesem Beitrag wird unter Flexibilität der Wechsel zwischen den *„Lösungswerkzeugen“* (Strategische Werkzeuge, Faktenabruf, Zählen) verstanden, während sich Adäquatheit auf die zugrundeliegenden *„Referenzen“* (Standardverfahren, Zahlen-, Aufgabenbeziehungen) bezieht (Rathgeb-Schnierer, 2011, S.16ff.; Abb.1).

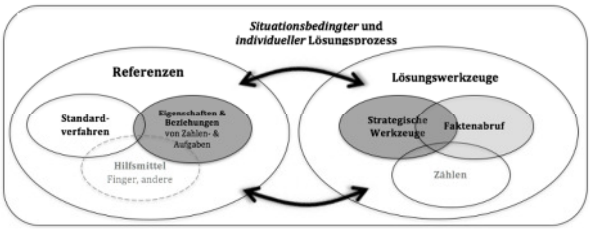


Abb. 1 Lösungsprozess (i.A.a. Rathgeb-Schnierer, 2011; Rechtsteiner-Merz, 2013)

In Anlehnung an diese Konzeptualisierung steht im vorgestellten Projekt die Förderung flexiblen Rechnens bei der Addition mit Blick auf das Nutzen von strategischen Werkzeugen in Abhängigkeit von Zahl- und Aufgabenwahrnehmung im Zentrum (grau, Abb.1). Daraus ergeben sich für die Lernumgebung zwei Förderschwerpunkte: der Aufbau von Zahlvorstellungen, auf deren Basis Beziehungen beim Rechnen genutzt werden können sowie die Entwicklung des Wahrnehmens und Nutzens von Aufgabenbeziehungen.

3 Ausgewählte Ergebnisse am Beispiel einer kooperativ-interaktiven Lernsituation

Die vorgestellten Ergebnisse beziehen sich auf die Lernumgebung „Wir erforschen Nachbarn und ihre Summen“ (Korten, 2018). Der Fokus liegt darauf, möglichst ‚geschickt’ viele Nachbarzahlen (Abb. 2) und ihre Summen zu finden. Die zugrundeliegenden arithmetischen Eigenschaften und Beziehungen bieten ein reichhaltiges Repertoire für das Entdecken und Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen, wodurch eine zieldifferente Förderung ermöglicht wird.

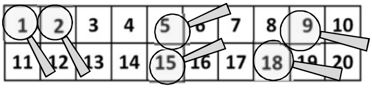


Abb. 2 Horizontale, vertikale und diagonale Nachbarn auf der 20er-Tafel

Das heterogene Kinderpaar in der Beispielszene (Abb. 3, 4) besteht aus einem Kind mit sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf ‚Lernen' (S1) und einem Kind mit durchschnittlichen Leistungen (S2). Während einer ‚Ausgewogenen Kooperation' (Korten, 2018) über eine Sortierung der diagonalen Nachbarsummen, bei der beide Kinder zielgerichtet nach individuellem Vermögen inhaltlich kommunizieren, vermutet S1, dass die Summe 24 fehlt und stellt damit die Vollständigkeit der diagonalen Nachbarsummen in Frage. Auf diese fehlerhafte Äußerung reagieren beide Kinder, indem sie Bezug zu Zahlenbeziehungen nehmen. S1 (Abb.3), die zuvor alle Zahlen isoliert betrachtete und Aufgaben durch Zählstrategien löste, setzt nun, angeregt durch den Austausch mit S2, die Summen in Beziehung und orientiert sich dabei an der Zahlwortreihe.

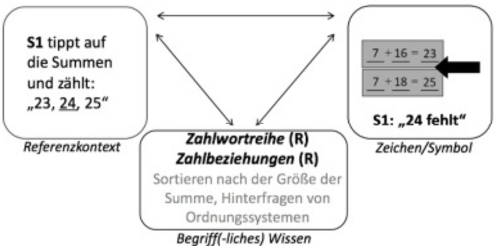


Abb. 3 Epistemologische Analyse nach Steinbring (2000): S1

S2 (Abb.4) bezieht sich ebenfalls auf Zahlbeziehungen. Sie argumentiert mit dem arithmetischen Muster der Summen, um zu belegen, dass es keine 24 gibt. Dabei entdeckt sie die gegensinnige Veränderung der Summanden, durch welche die Konstanz zweier Summen zustande kommt und bezieht sich nicht mehr nur auf Zahl- sondern auf Aufgabenbeziehungen. Diese nutzt sie im Weiteren als strategisches Werkzeug, um fehlende Summen zu finden.

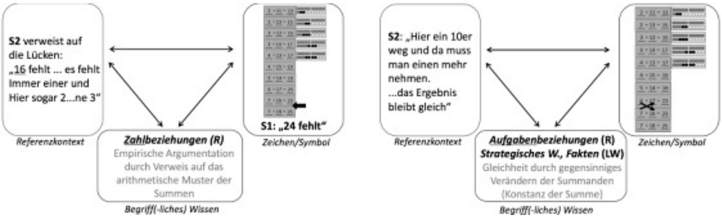


Abb. 4 Epistemologische Analyse nach Steinbring (2000): S2 (t1 und t2)

Die Rekonstruktion der individuellen Zugänge und Entwicklungsprozesse zeigt, dass sich beide Kinder auf ihrem Niveau weiterentwickeln, indem sie ausgehend von individuellen Konstruktionen über kommunikative Austauschprozesse in der kooperativ-interaktiven Phase, reflektieren und neue Einsichten gewinnen. Weiterhin kann an der Szene gezeigt werden, dass die flexiblen Rechenkompetenzen beider Kinder zieldifferent gefördert wurden und folglich das Mit- und Voneinanderlernen für beide produktiv war. S1 sieht nun Zusammenhänge und kann Aufgaben nach Merkmalen sortieren (Förderung: Referenzen). S2 entdeckt, beschreibt und nutzt die gegensinnige Veränderung der Summanden (Förderung: Referenzen, strategische Werkzeuge).

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). *Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres*. Universität Wien.

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen*. Wiesbaden: Springer.

Korten, L. (2018, i.V). *Entwicklung und Erforschung eines Lehr-Lernarrangements zur Anregung kooperativ-interaktiver Lernsituationen im inklusiven Mathematikunterricht*. Technische Universität Dortmund.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *JMD, 31*(2), 257–283.

Rathgeb-Schnierer, E. (2011). Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann?. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 15-22). Münster: WTM.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung*. Münster: Waxmann.

Scherer, P., & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity and strategy use in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 41*, 619–625.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion. *JMD, 21*(1), 28–49.

Arbeitsgruppe Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Koordination: Bernd Neubert
Bernd.Neubert@math.uni-giessen.de

Beitrag I: Kristina Penava
kpenava@math.tu-dortmund.de

Zufall und Wahrscheinlichkeit verstehen – Perspektivwechsel zwischen der kurzen und langen Sicht anregen

Eigenschaften von Zufall und Wahrscheinlichkeiten werden in unsrem täglichen Leben genutzt, um beispielsweise beim Sport durch Münzwürfe Entscheidungen herbeizuführen. Hier wird die Eigenschaft des Zufalls genutzt, dass Einzelereignisse nicht vorhersagbar sind (bezeichnet als kurze Sicht). Jedoch können bei ausreichender Anzahl von Versuchswiederholungen Regelmäßigkeiten identifiziert werden (bezeichnet als lange Sicht). Diese Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten werden genutzt, um begründete Vorhersagen für zukünftige Ereignisse zu treffen. Die Unterscheidung zwischen kurzer und langer Sicht wird als stochastischer Kontext bezeichnet.

1 Theoretischer Hintergrund

Zahlreiche empirische Studien zur Vorstellungsentwicklung im Phänomenbereich *Unsicherheit* treffen Aussagen darüber, dass Menschen bei der Einschätzung oder Deutung von Wahrscheinlichkeiten Schwierigkeiten haben und somit Entscheidungen in unsicheren Situationen nicht immer aufgrund mathematischer Gesichtspunkte treffen würden (für einen Überblick s. Jones et al., 2007).

Die Eigenschaft, dass Wahrscheinlichkeiten erst auf lange Sicht zuverlässige Aussagen treffen und somit die Variabilität auf kurze Sicht besonders hoch ist, erschwert den Aufbau tragfähiger Vorstellungen (Schnell, 2014). „Eine Kernbedingung für die Aktivierung stochastischer Überlegungen […] scheint also zu sein, den Perspektivwechsel von der Aufmerksamkeit auf das Einzel-Ergebnis hin zur langen Sicht zu vollziehen.“ (Prediger, 2005, S. 40)

Die empirische Forschung zeigt Bedingungen auf, die Lernumgebungen erfüllen müssen, um tragfähige Vorstellungen von Zufall und Wahrscheinlichkeit anzuregen. Sie muss hierfür

- das Sammeln und Systematisieren von tatsächlichen Erfahrungen in stochastischen Situationen (Wollring, 1994),
- Erfahrungen von Variabilität (Schnell, 2014),
- Perspektivwechsel von der Fokussierung von Einzelergebnissen hin zur langen Sicht (Prediger, 2005) und von der langen Sicht zur kurzen Sicht (Johnston-Wilder & Pratt, 2007) und
- das in Beziehung setzen von relativen Häufigkeiten und theoretischen Wahrscheinlichkeiten zueinander (Schnell, 2014) ermöglichen.

Aus mathematikdidaktischer Sicht ergibt sich die Frage, wie der Perspektivwechsel von kurzer zur langer Sicht schon bei Grundschülern angeregt werden kann.

2 Forschungsdesign

Auf Grundlage der im vorangegangenen Abschnitt aufgelisteten Bedingungen an Lernumgebungen wurde im Rahmen einer qualitativen Einzelfallstudie eine Erkundungssituation konzipiert, mithilfe derer Lernende im Alter zwischen 8-9 Jahren dazu angeregt werden sollen stochastische Erfahrungen im Kontext eines Würfelspiels zu sammeln und im Hinblick auf den stochastischen Kontext zu reflektieren.

Datengrundlage für die Analysen bilden drei aufeinanderfolgende Spielinterviews (Wollring, 1994), die mit jeweils 9 Dreiergruppen (n=27) geführt wurden.

Erkundungssituation *Wer gewinnt?*: Vier farbige Spielfiguren laufen, angetrieben von einem Farbwürfel mit asymmetrischer Farbverteilung, auf einem Spielfeld um die Wette. Die grüne Spielfigur ist mit drei Würfelseiten klar im Vorteil. Bis zum Ziel sind vier Schritte zurückzulegen. Das Kernelement des Spiels ist die begründete Vorhersage, welche Farbe das Spiel gewinnen wird. Während des Interviews spielen die Kinder das Spiel 9-12mal. Zur Systematisierung der Spielergebnisse stehen den Kindern vier unterschiedliche Protokollinstrumente zur Verfügung. Die Vorhersagen werden zusammen mit den tatsächlichen Gewinnern in der *Gewinnerliste* protokolliert. Alle Einzelereignisse werden in der *Urliste* sowie farblich sortiert in der *Einzelspielliste* und dem *Punktediagramm* (kumulierte Ergebnisse aller

Spiele) dokumentiert. Jede dieser Listen fokussiert demnach einen anderen stochastischen Kontext (vgl. Penava, 2017).

3 Exemplarisches Ergebnis

Im Rahmen der Interviews wurden Kinder mit verschiedenen Häufigkeitsverteilungen (je 6000 simulierten Würfelwürfen) konfrontiert und aufgefordert diese mit Ergebnissen der eigenen Spiele zu vergleichen.

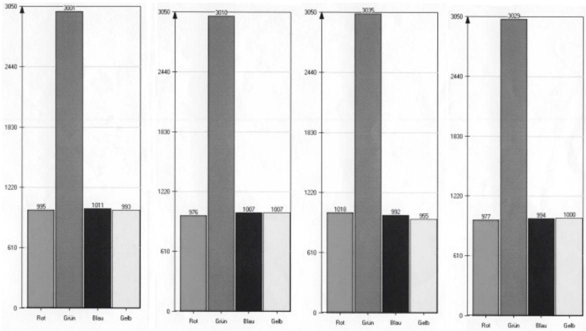


Abb. 1 Exemplarische Häufigkeitsverteilung. Simulation von 4x 6000 Würfen. (RF der Farben im Diagramm: rot, grün, blau, gelb)

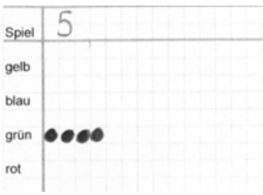


Abb. 2 Ausschnitt Einzelspielliste IV-BeLSDi1 – Spiel 5

Im folgenden Beispiel sollen die Kinder die Häufigkeitsverteilung (Abb. 1) und die Einzelspielliste (Abb. 2) miteinander vergleichen.

19 D Weil Grün ähm mehr Augen hatte und es dadurch auch öfter gewürfelt wurde und wir hatten ja nicht so viel- nicht so oft gewürfelt. Wenn wir öfter gewürfelt hätten – wäre Grün vielleicht da *(zeigt hinter die Einzelspielliste)* und die andern wären auch öfter drangekommen. Aber wir haben ja nicht – also das war nur ein Spiel und da haben wir nicht so oft gewürfelt [...] Wenn wir öfter gewürfelt hätten wären auch die anderen Farben mehr dran gekommen wahrscheinlich.

Zunächst begründet Daniel die Ereignisse mit Rückgriff auf die asymmetrische Farbverteilung. Die Abweichung der im Einzelspiel beobachteten von den erwarteten Häufigkeiten begründet er über die Anzahl der Versuchswiederholungen, nimmt demnach explizit Bezug zum stochastischen Kontext. Ergänzend antizipiert Daniel mögliche zukünftige Ereignisse, nimmt somit eine prognostische Sichtweise ein, dabei berücksichtigt er den Vorsprung von Grün (der durch den Vorteil der drei Würfelflächen gegeben ist). Weiterhin fügt er zum Schluss die Erweiterung *wahrscheinlich* an und relativiert dadurch die Gewissheit seiner Aussage.

Eine erste Analyse der empirischen Daten zeigt, dass der Vergleich der dokumentieren Ereignisse mit Ergebnissen der langen Sicht eine Reflexion über den stochastischen Kontext ermöglicht und somit den Perspektivwechsel anregen kann (für weitere Ergebnisse sei auf Penava, i.V. verwiesen).

Literatur

Johnston-Wilder, P., & Pratt, D. (2007). The relationship between local and global perspectives on randomness. In *Proceedings of the Fifth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 742-751).

Jones, G., Langrall, C., & Mooney, E. (2007). Research in Probability. Responding to Classroom Realities. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. (Vol. 4, pp. 909-955). Dordrecht: Kluwer.

Penava, K. (i.V.). Per Zufall zur Wahrscheinlichkeit – Eine qualitative Studie zu Vorstellungen zum Zufall und zur Wahrscheinlichkeit im Kontext eines Würfelspiels (Arbeitstitel).

Penava, K. (2017). Zufall und Wahrscheinlichkeit – Spielend Vorstellungen aufbauen?! *Grundschulunterricht Mathematik*, 33-37.

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica*, 28(2), 23-47.

Schnell, S. (2014). *Muster und Variabilität erkunden – Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wollring, B. (1994). *Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern*. Habilitation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Beitrag II: Marieke Vogt
mvogt@leuphana.de

Entwicklung mathematischer Begründungskompetenzen im Stochastikunterricht der Grundschule: Identifikation relevanter Einflussfaktoren und vergleichende empirische Validierung zweier Unterrichtseinheiten

Studien zeigen, dass Lernende verschiedener Altersklassen beim Das mathematische Begründen gehört zu den prozessbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler (SuS) bereits in der Grundschule entwickeln sollen (KMK, 2005). Empirische Befunde zeigen jedoch, dass SuS aller Jahrgangsstufen Schwierigkeiten mit dem Konstruieren mathematischer Begründungen und Beweise haben (Bezold, 2009; Brunner, 2013). Erfolgreiche Unterrichtskonzepte, die auf die explizite Förderung von mathematischen Begründungskompetenzen in der Grundschule abzielen, erscheinen dringend erforderlich, liegen jedoch bislang nicht vor.

In der eigenen Studie wurden Begründungskompetenzen als Realisierung von Anforderungen bei Aufgaben, in welchen ein mathematischer Zusammenhang mit Bezugnahme auf eine objektive Argumentationsbasis begründet werden muss, gefasst (Vogt, im Druck). Aus der Theorie wurden Ansatzpunkte für die Förderung der Begründungskompetenzen im Kontext stochastischer Aufgabenstellungen abgeleitet und daraufhin zwei Unterrichtseinheiten als Treatments entworfen. Treatment 1 verfolgt das Ziel, lediglich die stochastischen Kompetenzen von SuS weiterzuentwickeln, wohingegen in Treatment 2 zusätzlich zum Ausbau stochastischer Kompetenzen auch eine explizite Förderung mündlicher wie schriftlicher Begründungskompetenzen integriert ist. Drei 4. Klassen nahmen an der Studie im Pretest- Posttest- Design teil. Vor und nach dem Treatment wurden die schriftlichen Begründungskompetenzen der SuS anhand stochastischer Aufgabenstellungen erhoben (ebd.). Die Testergebnisse wurden mithilfe eines Kompetenzstufenmodells ausgewertet, welches eine nach mathematischen und linguistischen Aspekten differenzierte Beurteilung der Begründungskompetenzen ermöglicht (ebd.). Anhand des intraindividuellen Vergleichs der erreichten Kompetenzstufen im Vor- und Nachtest lassen sich die Entwicklungen der Begründungskompetenzen der SuS qualitativ detailliert beschreiben (ebd.) sowie die Wirksamkeit der Treatments quantitativ prüfen. Dabei zeigte sich, dass sich die Begründungskompetenzen der SuS, die an der Unterrichtseinheit inklusive der expliziten Begründungsförderung teilgenommen haben, signifikant häufiger weiterentwickelt haben als die der SuS, die lediglich eine stochastische Förderung oder als Kontrollgruppe den regulären Mathematikunterricht erhielten. Diese stärkere Zunahme manifestierte sich dabei sowohl hinsichtlich mathematischer als auch sprachlicher Anforderungen. Dagegen wirkte sich die rein auf inhaltliche Kriterien fokussierte Förderung nicht signifikant auf die Begründungskompetenzen bei stochastischen Aufgaben aus.

Im weiteren Verlauf der Forschungsarbeit werden diese Ergebnisse spezifiziert, indem unter anderem mögliche Störvariablen berücksichtigt und die Langfristigkeit der Effekte überprüft werden.

Literatur

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hamburg: Kovač.

Brunner, E. (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe 1: Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte*. Münster: Waxmann.

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich: Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Luchterhand.

Vogt, M. (im Druck). Kompetenzen und mögliche Entwicklungslinien von Viertklässler_innen bei schriftlichen Begründungsaufgaben im Rahmen des Stochastikunterrichts. In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017: Vorträge auf der 51. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 27.02.2017 bis 03.03.2017 in Potsdam*. (4 S.). Münster: WTM.

Beitrag III: Anna-Lena Neumann
anna-lena.neumann@uni-oldenburg.de

Mit dem Zufall spielen: Zugänge zu argumentativen Auseinandersetzungen im Themenbereich Wahrscheinlichkeit in der Grundschule

Der Themenbereich Wahrscheinlichkeit ist der Erfahrung nach zu urteilen (nicht nur) für Kinder schwer zugänglich. Dies liegt u.a. sicherlich daran, dass man Zufallsprozesse zwar auf der theoretischen Seite exakt modelliert, dann aber aus den Ergebnissen im konkreten Anwendungskontext keine Sicherheiten ableiten kann. Zugleich bietet der Themenbereich aber auch besonders niedrigschwellige Einstiegsmöglichkeiten: Die meisten Kinder haben bereits Erfahrungen mit (Würfel-)Spielen gemacht, so dass man bereits im Anfangsunterricht an informelle Ansätze zur Entwicklung eines Wahrscheinlichkeitsbegriffs anknüpfen kann (s. Neumann & Schwarzkopf, i.V.). Natürlich muss man dabei berücksichtigen, dass Bruchzahlen zur Kennzeichnung der Wahrscheinlichkeiten noch nicht zur Verfügung stehen. Ausgehend von diesen Grundgedanken stellt sich das vorliegende Projekt der Frage, wie eine substantielle Lernsituation gestaltet werden kann, die sich der grundschulspezifischen Spanne zwischen einem theoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriff und empirisch gewonnenen Erfahrungen in Zufallsprozessen stellt (Steinbring, 2000, S. 44ff.).

Angestrebt werden hierbei fundamentale Lernprozesse, die im Gegensatz zu relativen Lernprozessen ungleich schwieriger zu realisieren sind, d.h. es sollen Reorganisationen des alten Wissens initiiert werden, sodass die Lerngegenstände unter einer neuen Perspektive gedeutet werden können (Miller, 1986, S. 140f.). Im vorgestellten Projekt wird auf zwei verschiedene Weisen versucht, das Zustandekommen solcher Prozesse zu begünstigen: Zum einen werden die Kinder bei der Durchführung von (Würfel-)Spielen ständig unter Zugzwang (Voigt, 1984) gesetzt zwischen Handlungsalternativen zu wählen. Zum anderen werden die Zufallsexperimente so gestaltet, dass die von vielen Kindern erwartete Verteilung der Ereignisse nicht eintritt, sodass produktive Irritationen (Nührenbörger et al., 2016, S. 17) entstehen.

Im Fokus der Auswertung steht die Frage, inwiefern den Kindern der theoretische Wahrscheinlichkeitsbegriff zugänglich ist und unter welchen Bedingungen es zu einer Weiterentwicklung ihrer diesbezüglichen Vorstellungen kommen kann. Erste Ergebnisse zeigen, dass die Kinder nicht nur unterschiedlich tiefgreifende qualitative, sondern auch quantitative Vergleiche von Wahrscheinlichkeiten ohne explizit vorhandenen Bruchzahlbegriff entwickeln können, wobei allerdings nicht alle Vorstellungen aus fachlicher Sicht tragfähig sind.

Im Vortrag wurde eine im Rahmen des Projekts gestaltete Lernumgebung vorgestellt, bei der die o.a. Aspekte realisiert sind. Anhand von Beispielen wurden verschiedene, unterschiedlich tiefgreifende Argumentationsweisen aufgezeigt.

Literatur

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Neumann, A., & Schwarzkopf, R. (i.V.). Spielkontexte zum Zufall. In U. Häsel-Weide. & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen*. Frankfurt a.M.: Grundschulverband.

Nührenbörger, M., Rösken-Winter, B., Fung, C., Schwarzkopf, R., Wittmann, E. Ch., Akinwunmi, K., Lensing, F., & Schacht, F. (2016). *Design Science and Its Importance in the German Mathematics Educational Discussion (ICME-13 Topical Surveys)*. Cham u.a.: Springer International Publishing.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(1), 28-49.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Weinheim: Beltz.

Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer & Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-bs.de, simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beitrag: Susanne Wöller
susanne.woeller@uni-leipzig.de

Konzeptuelles Begriffsverständnis über WÜRFEL und QUADER bei Dritt-, Viert- und Fünftklässlern

Im Projekt wird die Entwicklung geometrischen Begriffsverständnisses bei Kindern im Alter von 8 bis 12 Jahren in den Blick genommen und untersucht, wie sich deren individuelle Vorstellungen zu den Begriffen Würfel und Quader über Bauhandlungen und Verbalisierungen äußern. Bisherige qualitative Analysen der Interviews lassen darauf schließen, dass die Vorstellungen stark divergieren: Die Begriffe können zum einen intuitiv und anschaulich vom Alltag der Kinder geprägt, aber auch auf einer mathematisch-deskriptiven oder sogar abstrahierenden Ebene zu verorten sein.

1 Theoretische und empirische Anknüpfungspunkte

In ersten empirischen Untersuchungen zum Projekt konnte bereits festgestellt werden, dass sich Drittklässler hinsichtlich ihres Begriffsverständnisses über die geometrischen Körper Würfel und Quader am Übergang vom *visual level* zum *descriptive level* (vgl. Van Hiele, 1986) befinden (Reinhold & Wöller, 2016, S. 128). Die Kinder stellen Bezüge zu ihrer alltäglichen Erfahrungswelt her *(„man kann mit dem Würfel spielen“, „ein Quader sieht aus wie ein Tisch“*), einige nehmen fehlerhaften Bezug zu zwei-dimensionalen Figuren *(„ein Würfel ist quadratisch“, „ein Quader ist ein Rechteck“)* oder verwenden mathematische Eigenschaftsbegriffe wie *Flächen, Ecken* und *Kanten* fehlerhaft (*„er hat 6 Ecken, 8 Seiten und 6 Kanten“*) bzw. unvollständig (*„der Würfel hat Ecken und Kanten“*). Weitere Untersuchungen zum Projekt, in denen Viert- und Fünftklässler befragt wurden, lassen auch erkennen, dass häufig in höheren Klassenstufen keine bis kaum Entwicklung auf höhere Denkebenen stattgefunden hat (Wöller, 2017, S. 214). Lediglich einige Fünftklässler nehmen im durchgeführten Interview beispielsweise Bezüge zum Beziehungsgeflecht zwischen Würfel und

Quader vor *(„ein Würfel ist schon irgendwie ein Quader, nur eben ein besonderer Quader“)*. Bei den meisten Kindern werden beide Körper aber unabhängig voneinander betrachtet.

Diese Ergebnisse decken sich mit anderen Studien, die kindliche Verstehensprozesse und geometrische Denkentwicklung in den Blick genommen haben: So beschreibt auch Merschmeyer-Brüwer (1994), dass sich „[e]in Großteil der Kinder [...] im 3. Schuljahr im Hinblick auf die Erfassung geometrischer Körper noch auf der ersten Denkebene [befinden]“ (S. 236) und v. a. ganzheitliche Sichtweisen auf geometrische Körper im Alltag eine Rolle spielen (S. 236). Ähnliche Ergebnisse erzielen auch Studien von Szinger (2008).

2 Fokus und ausgewählte Forschungsfragen

Diese Überlegungen führen unweigerlich zu einer Fokussierung auf die Entwicklungsphase, die den Übergang vom *visual level* zum *descriptive* (bzw. *theoretical*) *level* kennzeichnet. Zum jetzigen Zeitpunkt des Projekts liegt der Fokus daher auf der Forschungsfrage: *Welche Konzepte von einem Würfel und einem Quader spiegeln sich in den Bauhandlungen und Verbalisierungen von Dritt-, Viert- und Fünftklässlern wider?*

3 Konzeption der Unterschung

Bisher wurden videografierte halbstandardisierte Leitfadeninterviews in Eins-zu-Eins-Situationen mit Dritt-, Viert- und Fünftklässlern geführt. Die Kinder sollten ihre Vorstellungen von einem Würfel bzw. Quader sprachlich wiedergeben. Anschließend sollten sie mit vorgegebenen Holzbausteinen Würfel und Quader bauen und sich zu ihren Bauhandlungen äußern (*„Warum ist das ein Würfel bzw. Quader?“)*. Die Codierung der Videos erfolgt aktuell mit Hilfe der Software *Atlas.ti* und orientiert sich am Diskurs der gegenstandsbegründeten Theoriebildung in der Methodologie der Grounded Theory nach Corbin & Strauss (2015). Befragt wurden Schüler und Schülerinnen aus dem Leipziger Umland. Ebenso konnten Drittklässler aus Schulen in Penang (Malaysia) und Melbourne (Australien) in das Sampling aufgenommen werden (Abb. 1). Eine Besonderheit des Projekts liegt u. a. in einem Längsschnittdesign begründet, welches eine heterogene Lerngruppe aus Leipzig (N=10) begleitet (Abb. 1, fett).

	Klasse 3 (8;11-11;11)	**Klasse 4** (9;0-11;11)	**Klasse 5** (10;0-12;11)
Heterogene Lerngruppe	**10**	**10**	**9**
Grundschulen in Leipzig	50	30	9
Grundschulen in Penang	12		
Grundschulen in Melbourne	10		

Abb. 1 Sampling zur empirischen Fundierung bestehend aus Längsschnitt (Zeile 1, fett) und Querschnitt über weitere Dritt-, Viert- und Fünftklässlern (Spalten)

4 Ausgewählte Ergebnisse und Diskussion

Sowohl beim Würfel als auch beim Quader lässt sich in den Bauhandlungen und Verbalisierungen der Kinder zwischen Repräsentanten unterscheiden, denen zwei- oder drei-dimensionale Konzepte zugrunde liegen. Folglich wird der Quader zum einen als Raummodell (also als Körper, der eine Ausdehnung in Länge, Breite und Höhe hat) konstruiert. Hier bilden sich verschiedene Prototypen in den Bauwerken der Dritt-, Viert- und Fünftklässler ab, die diverse Besonderheiten bzw. Einschränkungen aufweisen: 1) ein Quader, dessen Länge ausgewogen zum Kantenverhältnis ist, 2) ein Quader mit vier gleichen rechteckigen und zwei gleichen quadratischen Seitenflächen und 3) ein Quader als doppelter Würfel. Zum anderen kann v. a. bei Drittklässlern beobachtet werden, dass sie zwei-dimensionale Konzepte von geometrischen Körpern aufgebaut haben. Sie konzentrieren sich folglich auf das Bauen eines „Rechtecks". Die Seitenflächen haben keine Relevanz in ihren Begründungen. Der Fokus liegt allein auf der rechteckigen Deckfläche. Diesem Konzept folgend identifizieren sie einen 2x2x1-Quader (Länge x Breite x Höhe) nicht als Quader, sondern als *„Würfel"* oder als *„Quadrat"*.

Ähnliche Analysen ergeben sich hinsichtlich der Würfelbauwerke. Auch hier legen v. a. Drittklässler ihren Fokus auf die quadratische Deckfläche und bauen häufig nur eine quadratische Schicht als Repräsentanten für einen Würfel (Abb. 2). In höheren Klassenstufen treten neben dem Bauen von Vollmodellen vermehrt ausdifferenzierte Strategien hinzu, die darauf schließen lassen, dass der Würfel auch als Kanten- oder Flächenmodell gedacht werden kann (Abb. 2), dessen Inhalt nicht zwangsläufig ausgefüllt sein muss. In diesen Konzepten konkretisiert sich eine abstrakte Idee des Würfels.

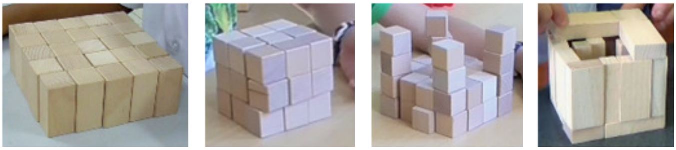


Abb. 2 (v. l. n. r.) Würfel als eine quadratische Schicht, Würfel als Vollmodell, Würfel als Kanten- und Flächenmodell (Produkte der befragten Kinder)

Zusammenfassend kann v. a. für Drittklässler ein starker Fokus auf geometrische Flächen und unzureichende Erfahrungen mit Elementen der drei-dimensionalen Geometrie angenommen werden. Dieses Phänomen tritt auch bei Viert- und Fünftklässlern vereinzelt auf, wird aber zunehmend durch drei-dimensionale Konzepte von geometrischen Körpern abgelöst. Wenn auch die Begriffe in den Verbalisierungen noch alltagssprachlich gefärbt sind, treten dennoch die erwähnten Defizite nur selten auf.

Literatur

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. Thousand Oaks: Sage.

Merschmeyer-Brüwer, C. (1994). Kindliche Verstehensprozesse, geometrische Denkentwicklung und Raumvorstellungsvermögen am Beispiel einer Unterrichtsreihe zu geometrischen Körpern in der Primarstufe. In K. P. Müller (Hrsg.), *BzMU* (S. 235-239). Hildesheim: Franzbecker.

Reinhold, S., & Wöller, S. (2016). Third Graders' Block-Building: How do they express their knowledge of Cubes and Cuboids? In C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Hrsg.), *Mathematics Education - How to solve it?* (Vol. 4, S. 123-130). Szeged, Hungary: PME.

Szinger, I. S. (2008). The Evolvement of Geometrical Concepts in Lower Primary Mathematics. *Annales Mathematicae et Informaticae, 35,* S. 173-188.

Wöller, S. (2017). Konzeptuelles Begriffsverständnis von Kindern über geometrische Körper. In A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen. Konkrete Lernsituationen für den Geometrieunterricht* (S. 187-222). Hildesheim: Franzbecker.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press.

Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt & Marcus Nührenbörger

birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de

marcus.nuehrenboerger@tu-dortmund.de

Beitrag: Christian Schöttler

christian.schoettler@math.uni-paderborn.de

Deuten dezimaler Strukturen im inklusiven Mathematikunterricht – Interaktionsprozesse beim fachlichen Austausch

Kooperation und fachlicher Austausch stellen aus inklusiv-pädagogischer und aus epistemologischer Perspektive zentrale Ziele des inklusiven Mathematikunterrichts dar. So zielt der gemeinsame Unterricht einmal darauf ab, möglichst viele gemeinsame Lernsituationen zu schaffen. Hier sollen alle Schülerinnen und Schüler auf der Basis ihrer individuellen Fähigkeiten lernen und gleichzeitig im Sinne eines Von- und Miteinanderlernens kooperativ zusammenarbeiten. Zum anderen steht aus epistemologischer Sicht Kooperation und Kommunikation in enger Wechselwirkung mit der individuellen Konstruktion mathematischen Wissens. So entsteht mathematisches Wissen durch individuelle Interpretationen innerhalb interaktiver Bedeutungsaushandlungen (Steinbring, 2005).

Folglich ist es wichtig, Interaktion und mathematischen Diskurs unter den Lernenden zu initiieren. Besonders der Diskurs ist bedeutsam: Falls sich die Lernenden über ihre Strategien oder Deutungen einig sind, haben sie auch keine Notwendigkeit zum fachlichen Austausch. Stattdessen benötigen sie Aufgaben, die eine positive Interdependenz ermöglichen und die zu Deutungsdifferenzen führen, welche produktive Anlässe zur Kooperation sein können.

Im Projekt „Dezimal“ werden gemäß der Mathematikdidaktik als Design Science (Nührenbörger et al., 2016) Lernumgebungen entwickelt und erforscht, mit denen Schülerinnen und Schüler in inklusiven Lerngruppen ihr dezimales Verständnis erweitern und vertiefen können. Dazu wurden die Lernumgebungen so konzipiert, dass durch vielfältige kooperative Phasen die Lernenden die Chance haben, sich trotz unterschiedlicher Kompetenzen auf verschiedenen

Niveaus über den gemeinsamen strukturellen Kern auszutauschen und die Zusammenarbeit inhaltlichen Gewinn bringt. Die konzipierten Lernumgebungen wurden im Mathematikunterricht erprobt und dabei Paare videografiert, davon jeweils ein Lernender mit sonderpädagogischem Förderbedarf im Bereich Lernen. Bei der Rekonstruktion der Lernprozesse werden die mathematischen Deutungen (vgl. Steinbring, 2005) bezüglich des Erkennens dezimaler Strukturen sowie die Partizipation der Lernenden innerhalb der Aushandlungsprozesse (vgl. Krummheuer & Brandt, 2001) analysiert.

Erkenntnis- und Partizipationsprozesse in der Lernumgebung „Verfeinern am Zahlenstrahl“

Im Rahmen der Lernumgebung sollen die Lernenden durch einen Vergleich unterschiedlicher Zahlenstrahlfolgen (vgl. Abb. 1) dezimale Strukturen und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Zahlenräumen erkennen und dabei ihr Verständnis des Stellenwertprinzips vertiefen. Die Lernumgebung ist so gestaltet, dass durch strukturanaloge Aufgaben strukturelle Beziehungen zwischen HT ZT T und H Z E thematisiert werden. Dabei arbeiten die Schülerinnen und Schüler zwar zieldifferent in unterschiedlichen Zahlenräumen, jedoch an einem gemeinsamen Kern und können sich über diesen Kern austauschen.

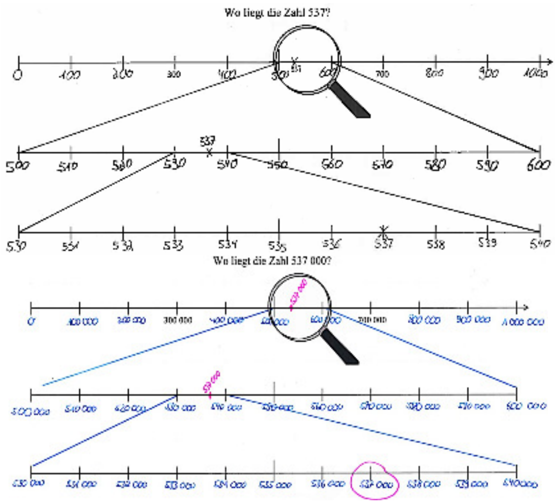


Abb. 1 „Zoomen am Zahlenstrahl“

Die gemeinsame Aktivität besteht aus einem Vergleich analoger Aufgaben. Der folgende Transkriptausschnitt entstammt einer gemeinsamen Lernsituation, in der die beiden Lernenden Lena und Max ihre Zahlenstrahlfolgen hinsichtlich Gemeinsamkeiten und Unterschieden vergleichen.

Lena	Auch wenn wir die gleichen Anfangszahlen haben, also die Zahlen ähnlich sind, sind unsere Zahlen verschieden. Die bei uns gleichen Anfangszahlen haben eine unterschiedliche Bedeutung. Daher sind meine Zahlen größer als deine.
Max	Ja, deine Zahlen sind größer. Immer um drei Nullen also (.) tausend. Deine Zahlen sind um tausend größer.

Vor Beginn dieses Ausschnitts haben Lena und Max bereits in einem horizontalen Vergleich herausgefunden, dass bei den jeweiligen Einheiten auf beiden Zahlenstrahlfolgen die ersten drei Ziffern gleich sind, die Einheiten also eine analoge Struktur aufweisen. Diese gemeinsame Erkenntnis greift Lena nun auf und erweitert diese Idee um den Aspekt der Verschiedenheit: Trotz des analogen Aufbaus unterscheiden sich die Einheiten in ihrer Mächtigkeit. Bei ihrer Erklärung nutzt Lena das Stellenwertprinzip und bezieht sich vermutlich auf die unterschiedlichen Zahlenwerte der einzelnen Ziffern. Obwohl die ersten drei Ziffern jeweils gleich sind, haben die Ziffern auf Lenas Zahlenstrahlfolge aufgrund einer anderen Position innerhalb der Ziffernfolge einen größeren Zahlenwert. Deswegen sind sie auch mächtiger als die Einheiten auf Max' Zahlenstrahlfolge. Damit hebt Lena die Bedeutung der Stelle von Ziffern hervor. Max stimmt Lenas Aussage zu. Anschließend stellt er die Einheiten der Zahlenstrahlfolgen zueinander in Beziehung und vergleicht sie hinsichtlich ihrer Mächtigkeit. Hier erkennt Max auf einer empirisch-konkreten Ebene, dass sich die Einheiten jeweils um drei Nullen unterscheiden. Optimistisch interpretiert könnte seiner Äußerung die Idee zugrunde liegen, je mehr Stellen eine Zahl aufweist, desto größer ist sie, welche er als Erklärung für die unterschiedlichen Mächtigkeiten nutzen könnte. Dabei stellt er möglicherweise multiplikative, dekadische Beziehungen zwischen den einzelnen Einheiten her, sodass er eine Vertausendfachung erkennen könnte.

Beim Vergleich erkennen die beiden Lernenden also gemeinsame und verschiedene strukturelle Beziehungen zwischen den Zahlenräumen. Bei ihren Erklärungen greifen sie auf zentrale Aspekte des Stellenwertprinzips zurück: Zahlenwerte von Ziffern, Mächtigkeit von Zahlen, Bedeutung der Position von Ziffern und dekadische Beziehungen zwischen Zahlen.

Werden nun die Aussagen von Lena und Max miteinander verglichen, lassen sich erste, vorsichtige Tendenzen verschiedener Niveaustufen erkennen, die durch den weiteren Verlauf der Episode gestützt werden. So fällt bei Lena auf, dass sie bestrebt ist, ihre Entdeckungen und Erkenntnisse losgelöst von konkreten Zahlen und Zeichen möglichst zu verallgemeinern, zugrundeliegende Strukturen zu verbalisieren und sich so ein Stück weit von der konkreten Situation zu lösen. Max hingegen bleibt auf einer empirisch-konkreten Ebene und bezieht sich auf sichtbare, gegebene Zahlen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu nennen. Bei weiteren Analysen ist zu untersuchen, ob sich diese Tendenzen und Differenzen zwischen Lernenden auch bei weiteren Paaren rekonstruieren lassen.

Partizipatorisch lässt sich festhalten, dass Lena und Max trotz ihrer unterschiedlichen Lernvoraussetzungen aktiv an der Bedeutungsaushandlung beteiligt sind und eigene, aufgabenbezogene Beiträge einbringen. Dabei bringt Lena die mathematische Idee ein, welche von Max aufgegriffen und um den Aspekt der multiplikativen Beziehungen weiterentwickelt wird. So kann die Idee als gemeinsam entwickelte Idee aufgefasst werden. Die gemeinsame Entwicklung der Idee zeigt eine Symmetrie zwischen den beiden Lernenden auf einer partizipatorischen Ebene.

Literatur

Krummheuer, G., & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim u.a.: Beltz Verlag.

Nührenbörger, M., Rösken-Winter, B., Fung, C., Schwarzkopf, R., Wittmann, E. C., Akinwunmi, K., Lensing, F., & Schacht, F. (2016). *Design Science and Its Importance in the German Mathematics Educational Discussion (ICME-13 Topical Surveys)*. Cham u.a.: Springer International Publishing.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective*. Berlin: Springer.

Arbeitsgruppe Lehrerfortbildung

Koordination: Marianne Grassmann & Christoph Selter

mgrassmann@gmx.de christoph.selter@t-online.de

Beitrag: Stephanie Schuler, Gerald Wittmann, Bettina Fritzsche

stephanie.schuler@uni-landau.de

gerald.wittmann@ph-freiburg.de

bettina.fritzsche@ph-freiburg.de

Wie gestalten FortbildnerInnen für den Mathematikunterricht an Grundschulen ihre Fortbildungen und welches Rollenverständnis besitzen sie?

1 Ausgangslage und Untersuchungsdesign

Obwohl MultiplikatorInnen in den staatlichen Fortbildungssystemen eine große Bedeutung zukommt, gibt es kaum Forschung diesbezüglich und demzufolge zahlreiche Forschungsdesiderata (Park Rogers et al., 2007; Even, 2008). Exemplarisch soll deshalb die Situation in Baden-Württemberg genauer betrachtet werden. In einer schriftlichen Befragung (Schuler & Wittmann, 2017) wurden Daten zur Berufsbiographie, zur aktuellen berufliche Situation und zu den Fortbildungsaktivitäten der MultiplikatorInnen für den Mathematikunterricht an Grundschulen erhoben. Eine anschließende Interviewstudie soll Einblick geben, *in welcher Weise MultiplikatorInnen für den Mathematikunterricht an Grundschulen ihre Fortbildungen planen und gestalten, welche Überzeugungen dahinter stehen und welches Rollenverständnis sie haben.* Hierzu wurden im Juli 2016 halboffene Leitfadeninterviews mit 15 MultiplikatorInnen durchgeführt, die in den letzten Jahren auch als solche aktiv waren, also mit einer Teilstichprobe der vorausgegangenen schriftlichen Befragung. Der Leitfaden umfasste Impulse („Bitte schildern Sie eine gelungene Fortbildung.“) und Fragen („In welcher Weise würden Sie gerne Ihr Fortbildungsangebot weiterentwickeln?“) sowie Satzanfänge, die zu vervollständigen waren („LehrerIn und FachberaterIn zu sein, ist ...“). Die transkribierten Interviews wurden in Anlehnung an Nohl (2012) entsprechend der dokumentarischen Methode ausgewertet: Den Leitfragen folgend ergaben sich thematische Abschnitte, zu denen eine formulierende und anschließend eine reflektierende Interpretation erstellt wurde. Es wird davon ausgegangen, dass sich mittels dieses Verfahrens sowohl das Erfahrungswissen als auch die Überzeugungen der MultiplikatorInnen rekonstruieren lassen, die für ihre Alltagspraxis konstitutiv sind (Bohnsack, 2014, S. 93 ff.). Beide Aspekte sind zumindest teilweise implizit und lassen sich nur bedingt explizit machen, sie dokumentieren sich aber in Erzählungen über die Alltagspraxis.

2 Erste Ergebnisse

Im Folgenden wird ein Überblick über erste Ergebnisse der formulierenden und der reflektierenden Interpretation im Querschnitt gegeben.

MultiplikatorInnen bieten unterschiedliche Fortbildungsformate an: einmalige Nachmittagsveranstaltungen, Fortbildungsreihen, die aus zwei bis fünf aufeinanderfolgenden Nachmittagsveranstaltungen bestehen, sowie ganztägige Veranstaltungen für ganze Schulkollegien. Bezüglich der dominierenden einmaligen Nachmittagsveranstaltungen findet sich durchweg ein ähnliches Konzept mit drei Elementen: einem Theorieblock, der nicht zu lang sein darf, einer Arbeitsphase, in der die teilnehmenden Lehrkräfte beispielsweise Aufgaben selbst ausprobieren oder Schülerlösungen beschreiben und bewerten, und einem Praxisteil, der insbesondere die Umsetzung der Aufgaben im Unterricht thematisiert sowie den Austausch der TeilnehmerInnen ermöglicht. Dahinter steht die Überzeugung, dass derartige Fortbildungen den Lehrkräften unmittelbar in der Praxis einsetzbare Materialien bieten sollten und niederschwellig sein müssen, teilweise begründet damit, dass zu lange Theorieblöcke oder auch längerfristige Fortbildungsreihen nicht akzeptiert würden, aber auch damit, dass die Lehrkräfte einen anstrengenden Schulvormittag hinter sich haben. Als ein zentrales Kriterium für eine gelungene Fortbildung erweist sich folglich die Teilnehmerorientierung, während weitere Kriterien (vgl. Barzel & Selter, 2015) eine eher untergeordnete Rolle spielen.

Die MultiplikatorInnen sind in ihrer Tätigkeit weitgehend autonom: Sie reichen ihr geplantes Fortbildungsangebot beim Schulamt ein und es wird in der Regel genehmigt. Das Fortbildungsangebot ist einerseits geprägt von den individuellen Interessen und Kompetenzen der MultiplikatorInnen (beispielweise Rechenschwäche) und andererseits von der Nachfrage vor Ort (beispielsweise Fortbildungen für fachfremd Unterrichtende insbesondere zu arithmetischen Inhalten). Dies bedeutet allerdings auch, dass zumindest bisher eine Fortbildungskonzeption allenfalls auf Schulamtsebene stattfindet, nicht jedoch landesweit, sieht man von der momentanen Ausnahmesituation wie der Umsetzung eines neuen Bildungsplans ab. In der Konsequenz bedeutet dies, dass die Fortbildung der MultiplikatorInnen, die wiederum auf Landesebene erfolgt, von hoher Bedeutung ist. Sie muss beispielsweise neben inhaltlichen (z.B. mathematikdidaktischen) und fortbildungsdidaktischen Elementen auch die Fortbildungsplanung und -konzeption umfassen. Weiter erwarten die meisten MultiplikatorInnen, dass ihnen qualitätsvolle Materialien zur Verfügung gestellt werden, die sie in ihren Veranstaltungen einsetzen können. Damit erweist sich die beständige Weiterqualifizierung der MultiplikatorInnen als eine der Schlüsselstellen für eine erfolgreiche Lehrerfortbildung.

Befragt nach ihrem eigenen Werdegang, berichten die MultiplikatorInnen weitgehend übereinstimmend, dass sich für ausgeschriebene Stellen nicht selten keine BewerberInnen finden, und Ernennungen dann auf unterschiedlichste Weise – häufig auch zufällig – erfolgen. Die Tätigkeit als MultiplikatorIn wird durchgängig als wenig begehrt eingeschätzt. Als eine Ursache kann die geringe finanzielle Dotierung genannt werden, die sich häufig auch in einer eher geringen Wertschätzung niederschlägt, wenngleich die befragten MultiplikatorInnen diese Tätigkeit gerne ausüben und diese auch nicht wieder abgeben wollen. Hinzu kommt, dass die Tätigkeit im individuellen Zeitbudget meist eine untergeordnete Rolle spielt, weil die Unterrichtstätigkeit und andere Tätigkeiten (insbesondere in der Schulleitung) weitaus mehr Zeit in Anspruch nehmen. Die Fortbildungstätigkeit wird von den Befragten als eine interessante Nebentätigkeit bzw. -rolle beschrieben. So betonen die meisten MultiplikatorInnen, dass sie nicht hauptamtlich als solche agieren wollen – die Abgrenzung zu Ausbildnern am Seminar oder an der Hochschule wird teilweise explizit genannt. Offenbar ist das eigene Unterrichten ein wesentlicher

Aspekt der professionellen Identität der MultiplikatorInnen, das aber auch für die Vorbereitung von Fortbildungen („Testen von Materialien und Aufgaben“) als unabdingbares Element eingeschätzt und als solches praktiziert wird. Die Doppelrolle wird als Win-Win-Situation empfunden: Aus dem Unterricht ergeben sich Ideen für Fortbildungen und deren Vorbereitung und Durchführung befruchten wiederum den eigenen Unterricht.

Literatur

Barzel, B., & Selter, C. (2015). Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36(2), 259–284.

Bohnsack, R. (2014). *Rekonstruktive Sozialforschung. Einführung in qualitative Methoden* (9. Aufl.). Opladen: Barbara Budrich.

Even, R. (2008). Facing the challenge of educating educators to work with practising mathematics teachers. In B. Jaworski & T. Wood (Hrsg.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (The international handbook of mathematics teacher education, Band 4, S. 57–73). Rotterdam: Sense.

Nohl, A. (2012). *Interview und dokumentarische Methode. Anleitungen für die Forschungspraxis* (4., überarb. Aufl.). Wiesbaden: Springer VS.

Park Rogers, M. et al. (2007). Effective professional development in science and mathematics education: Teachers’ and facilitators’ views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(3), 507–532.

Schuler, S., & Wittmann, G. (2017, in Druck). Empirische Befunde zur beruflichen Situation von Multiplikatorinnen und Multiplikatoren für den Mathematikunterricht an Grundschulen. In R. Biehler et al. (Hrsg.), *Mathematikfortbildungen professionalisieren – Konzepte, Beispiele und Erfahrungen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Arbeitsgruppe Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien

Koordination: Roland Rink & Daniel Walter

r.rink@tu-braunschweig.de dwalter@math.tu-dortmund.de

Beitrag: Dagmar Bönig

dboenig@uni-bremen.de

Lernen mit digitalen Medien in Grundschule und Lehrerbildung

Die verbindliche Verankerung von Kernbereichen mediendidaktischer Kompetenzen ist zentrales Ziel des von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Verbundprojekts "Digitales Lernen Grundschule". Dazu werden an der Universität Bremen in den Fächern Deutsch, Mathematik und Sachunterricht Konzepte konzipiert, die parallel in der Schulpraxis erprobt werden. In diesem Beitrag wird das Konzept für das Fach Mathematik skizziert und über erste Erfahrungen aus schulischen Erprobungen berichtet.

1 Konzept „Virtuelles Bauen und Handeln"

Im Fach Mathematik fokussieren wir auf den Einsatz digitaler Medien als Werkzeug zur Unterstützung kindlicher Lernprozesse. Der Aufbau tragfähiger mentaler Vorstellungen ist in allen Inhaltsbereichen der Grundschulmathematik bedeutsam. Handlungen mit Material und bildliche Darstellungen können diesen Aufbau befördern, wenn es gelingt diese mit der mathematischen Symbolebene sinnvoll zu verknüpfen. Die Möglichkeit der Darstellung und Bewegung von Objekten mittels digitaler Medien kann hier die für eine Verknüpfung der Darstellungsformen notwendigen Verstehensprozesse sinnvoll unterstützen. Ziel unseres Konzepts ist es, Lehramtsstudierende und Lehrkräfte mit diesem Potential der leichten Verfügbarkeit konkreter und beweglicher Darstellungen vertraut zu machen. Dabei werden die beiden zentralen Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts „Zahlen und Operationen" sowie „Raum und Form" berücksichtigt.

Das Konzept wird in die Module, in denen die Didaktik der oben genannten Inhaltsbereiche im Zentrum steht, integriert. Der inhaltliche Umfang umfasst insgesamt ca. 1cp und reicht von einer Seminarsitzung im ersten fachdidaktischen Modul bis zu vier Sitzungen im Abschlussmodul des Masterstudiengangs. Der spiralförmige Aufbau und die wiederholte Thematisierung des Einsatzes digitaler Medien zielen dabei auf eine stärkere Verinnerlichung des Konzepts ab. In den Seminarsitzungen lernen die Studierenden verschiedene Apps aus den oben genannten Inhaltsbereichen kennen und analysieren diese mit Blick auf die sich aus fachdidaktischer Perspektive bietenden Potentiale. Eine zusätzliche Vertiefung ist im Kontext einer schulpraktischen Erprobung (Praxissemester) oder im Kontext von Abschlussarbeiten möglich.

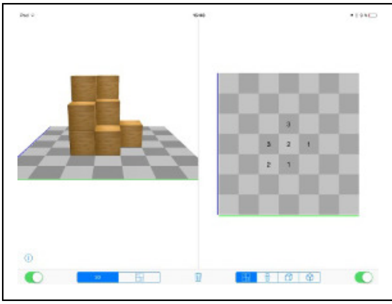
2 Erste Ergebnisse – Fokus Lehramtsausbildung

Nach den bisherigen Erfahrungen haben viele Studierende zu Beginn eine sehr kritische Einstellung bzgl. des Einsatzes digitaler Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Hier wird oft eine Konkurrenz zum Einsatz realer Materialen unterstellt (vgl. Ladel, 2017), die Option einer geeigneten Ergänzung durch digitale Apps muss explizit erarbeitet werden. Der spiralige Aufbau erweist sich dabei als lernförderlich. Während sich die Analyse der Programme zu Beginn des Studiums eher auf Oberflächenmerkmale beschränkt, wird am Ende des Studiums eine deutlich fachdidaktisch-inhaltlich akzentuierte Auseinandersetzung erreicht. Erwartungsgemäß trägt die vertiefte Auseinandersetzung im Rahmen einer Abschlussarbeit zu einer reflektierten Haltung gegenüber dem Einsatz digitaler Medien bei.

3 Erste Ergebnisse – Fokus schulische Erprobungen

Bislang wurden das „virtuelle Zwanzigerfeld“ (Urff, 2014) und die App „Klötzchen“ (Etzold, 2015) mit Grundschulkindern im Kontext von Abschlussarbeiten erprobt. Die Studierenden haben dazu eine Intervention mit einem einzelnen Kind oder einer kleinen Gruppe von Kindern geplant, durchgeführt und ausgewertet. Exemplarisch werden im Folgenden die Ergebnisse zur App „Klötzchen“ erläutert, eine detailliertere Analyse unterrichtlicher Einsatzmöglichkeiten findet sich in Bönig & Thöne (2018 i.V.).

Diese App ermöglicht das Erstellen von Würfelgebäuden in unterschiedlichen Darstellungen und Ansichten. Neben der 3D-Ansicht[1] kann ein Gebäude als Bauplan (bewerteter Grundriss), Zweitafelbild, Schrägbild in Kavalierprojektion und in isometrischer Darstellung abgebildet werden. Ausgehend von einem bewerteten Grundriss kann die App das entsprechende Zweitafelbild, das Schrägbild in Kavalierprojektion oder die isometrische Darstellung anzeigen. Welche Darstellung die App anzeigt, wird über Aktivierung der entsprechenden Möglichkeiten in den angezeigten zwei Fenstern gesteuert (vgl. Abb. 1a und 1b).



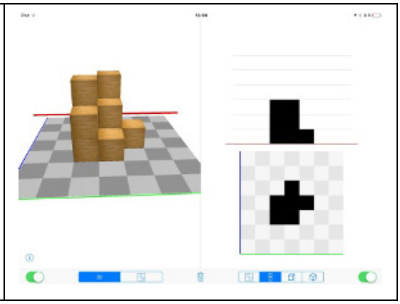


Abb. 1a 3D-Ansicht und Bauplan   Abb.1b 3D-Ansicht und Zweitafelbild

Die Bedienung der App ist einfach, insgesamt konnten sie alle Kinder nach einer kurzen Einführungsphase selbstständig nutzen, auch wenn manchmal nur geringe bzw. keine Vorerfahrungen mit dem Erstellen von Schrägbildern, dem Zweitafelbild oder der isometrischen Darstellung vorhanden waren.

Im Vergleich zum Bauen mit realen Würfeln hat die App zwei entscheidende Vorteile.

- Beim Erstellen des Bauwerks werden die verfügbaren Ansichten parallel angepasst.
- Das Gebäude kann in der 3D-Ansicht zügig um alle Raumachsen gedreht werden.

Ersteres konnte in den Erprobungen gezielt für die Vorhersage der Auswirkung spezifischer Veränderungen genutzt werden, wie z.B.: Wie verändert sich das Zweitafelbild, wenn Du an dieser Stelle noch

[1] Hier handelt es sich um eine Schrägbilddarstellung mit einem Fluchtpunkt, die den dreidimensionalen Eindruck verstärken soll.

einen Würfel hinzufügst? Die Kinder haben solche Fragen zu Übersetzungen zwischen den verschiedenen Ansichten im Kontext der App als sinnstiftend wahrgenommen und sich bereitwillig damit auseinandergesetzt. Während die App hier vorwiegend als schnelle Kontrollmöglichkeit fungiert, können darüber hinaus aber auch problemhaltige Aufgaben gestellt werden, bei denen die App die Rolle eines Werkzeugs im Lösungsprozess übernimmt. Wenn nicht eindeutige Darstellungen (z. B. ein Zweitafelbild) vorgegeben werden und die maximale bzw. minimale Anzahl der verbauten Würfel ermittelt werden soll, bietet die App durch die Möglichkeit der Drehung des Gebäudes in der 3D-Sicht eine sinnvolle kognitive Entlastung.

Die Ergebnisse der schulischen Erprobungen fließen jetzt in die Gestaltung der Seminarsitzungen der mathematikdidaktischen Module ein und können die bislang nur auf theoretische Ebene geführte Analyse der entsprechenden Software durch unterrichtspraktische Erfahrungen sinnvoll ergänzen.

Literatur

Bönig, D., & Thöne, B. (2018, in Vorbereitung). Die Klötzchen App im Mathematikunterricht der Grundschule. In S. Ladel, U. Kortenkamp & H. Etzold (Hrsg.), *Mathematik mit digitalen Medien - konkret. Ein Handbuch für Lehrpersonen der Primarstufe (Bd. 4)*. Münster: WTM-Verlag.

Etzold, H. (2015). *Klötzchen* [Anwendung]. Abgerufen von https://itunes.apple.com/us/app/cubeling/id1027746349?l=de&ls=1&mt=8

Ladel, S. (2017). Ein Essay zu den Begriffen ‚sinnvoll' und ‚Mehrwert'. In S. Ladel, C. Schreiber, & R. Rink (Hrsg.), *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe. Ein Handbuch für die Lehrerausbildung. 3. Band der Reihe Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe* (S. 171-179). München: WTM-Verlag.

Urff, C. (2014). *Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen*. Berlin: Mensch und Buch Verlag.

Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Dagmar Bönig
dboenig@uni-bremen.de

Beitrag: Nina Sturm
sturm@uni-landau.de

Das Potenzial kommunikativer Settings beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben

Grundschulkinder können beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben in vielerlei Hinsicht von selbstgenerierten externen Repräsentationen profitieren (Sturm, im Druck). Die externen Repräsentationen können in diesem Zusammenhang sowohl als kognitive Werkzeuge fungieren als auch intra- und interindividuelle Reflexionen anregen. Beide Facetten werden nachfolgend erläutert und durch empirische Erkenntnisse fundiert. Das zu diskutierende Potenzial kommunikativer Settings wird im Abschnitt 2 im Vordergrund stehen.

1 Externe Repräsentationen als kognitive Werkzeuge

Problemaufgaben können verstanden und gelöst werden, wenn es den Lösenden gelingt, die geschilderte Situation und die zugrunde liegenden Beziehungen in eine adäquate Repräsentation zu überführen. Durch das Externalisieren der mental ablaufenden Denk- und Lösungsprozesse kann mit der Repräsentation direkt und nicht nur vor dem geistigen Auge hantiert werden (Schnotz, Baadte, Müller, & Rasch, 2011). Dies ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn die Sachzusammenhänge noch nicht (vollständig) erschlossen werden können.

1.1 Wirksamkeitsprüfung eines Repräsentationstrainings

Vor dem Hintergrund, dass Grundschulkinder häufig noch nicht auf fundierte Problemlöseerfahrungen mit externen Repräsentationen zurückgreifen können, wurde ein zwölfwöchiges Training entwickelt, implementiert und evaluiert. Die Novizen erhielten zu Beginn des Unterrichts Impulse und Anreize wie sie Repräsentationen generieren und in ihre Lösungsfindung einbeziehen können, um von ihnen als Denk- und Erkenntniswerkzeug profitieren zu können. Wenn die Aufgabenstruktur fehlerhaft abgebildet war, wurden gemeinsam

Umstrukturierungsmöglichkeiten diskutiert und Tipps abgeleitet. Im Anschluss an das jeweils ca. 15-minütige Training widmeten sich die Kinder eigenständig einer neuen Problemaufgabe.

Es zeigte sich, dass trainierte Drittklässlerinnen und Drittklässler nach der Interventionsmaßnahme in ihren Leistungen untrainierten Drittklässlerinnen und Drittklässler überlegen waren. Sie lösten die Aufgaben erfolgreicher, steigerten ihre Problemlösekompetenzen nachhaltiger und generierten mehr externe Repräsentationen als untrainierte Kinder (Sturm, im Druck).

2 Externe Repräsentationen als Basis der intra- und interindividuellen Reflexion

Dass externe Repräsentationen mental vollzogene Handlungen und individuelle Entdeckungen sichtbar und nachvollziehbar werden lassen, macht sie nicht nur zu Gedächtnisstützen sondern auch zu Gesprächs- und Argumentationsstützen. Zum einen kann der Produzent auf der Basis der externen Repräsentation in Kommunikation mit sich selbst treten, sodass Reflexionsprozesse angeregt werden. Zum anderen kann das Miteinander- und Voneinander-Lernen im intersubjektiven Austausch Reflexionsprozesse anstoßen. Externe Repräsentationen können somit auch als Mittel der Reflexion, Kommunikation und Interaktion mit Gleichaltrigen angesehen werden.

Grundschulkinder gelten auch im Bereich des Kommunizierens und Argumentierens als Novizen. Daher ist es von Vorteil, wenn sie sich im Austausch auf ein Medium, wie beispielsweise eine externe Repräsentation, stützen können (Lorenz, 2005). Die Kinder können sich dadurch immer wieder auf das Konstruierte beziehen, durch Zeigen auf einzelne Schritte aufmerksam machen und ihre Argumentationen auf das Externalisierte stützen. Es wird erwartet, dass Lernprozesse dadurch intensiviert werden, in einem tieferen Verständnis münden und von ihnen wichtige Impulse für neue Einsichten ausgehen (z. B. Steinbring & Nührenbörger, 2010).

2.1 Wirksamkeitsprüfung der kommunikativen Settings

Um herauszufinden, ob sich ein Austausch unter Gleichaltrigen positiv auf die Leistungen der Drittklässlerinnen und Drittklässler auswirkt, hatten einige Kinder im Anschluss an die explorative Arbeitsphase die Möglichkeit, sich in kommunikativen Zweiersettings über ihren Lösungsprozess auszutauschen.

Um einen reinen Informationsaustausch zu vermeiden und vielmehr Prozesse des Helfens und Kollaborierens zu initiieren sowie das Einfordern von Begründungen zu begünstigen, wurde ein Gesprächsleitfaden (in Anlehnung an Kramarski, Weisse, & Kololshi-Minsker, 2010) entwickelt. Dieser wurde den Kindern in Form einer Lernkarte für die Austauschphase zur Verfügung gestellt (Sturm, 2015):

1. WAS habe ich dargestellt?
2. WIE bin ich vorgegangen?
3. WANN folgt welcher Schritt?
4. WARUM bin ich so vorgegangen?

Den Ergebnissen zufolge konnte die Wirksamkeit der kommunikativen Settings auf Basis der selbstgenerierten externen Repräsentationen nicht bestätigt werden. Demzufolge hatten die Kinder, die sich zusätzlich zum Training in kommunikativen Settings austauschen durften, gegenüber den Kindern, die sich nicht austauschen durften, keinen bedeutsamen Vorteil. Hinsichtlich der Problemlösekompetenzen ergab sich ein vernachlässigbar kleiner Vorteil zugunsten der Kinder, die sich austauschen durften.

2.2 Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse lassen unterschiedliche Erklärungen und Diskussionen zu. Dass der Erfolg der kommunikativen Maßnahmen in engem Zusammenhang mit der Qualität der kommunizierten externen Repräsentationen steht, darf keinesfalls vernachlässigt werden. Gerade wenn die selbstgenerierten externen Repräsentationen kein reflexionsermöglichendes Potenzial aufweisen, liegt nahe, dass die Kinder auch nicht von ihnen profitieren können. Folglich sollte die Austauschphase in den ersten Interventionswochen als wenig gewinnbringend bewertet werden. Die selbstgenerierten Schülerrepräsentationen wiesen hier noch enorme Schwächen hinsichtlich der Repräsentation der Struktur auf.

Im Nachgang muss auch der Gesprächsleitfaden hinterfragt werden. Es ist schwer rekonstruierbar, ob sich die Drittklässlerinnen und

Drittklässler auf den Gesprächsleitfaden einließen und sich tatsächlich an ihm orientierten. Ein weiterer Ansatzpunkt in diese Richtung ist, die Kommunikation und Interaktion unter Gleichaltrigen explizit zu fördern wie dies beim Generieren der externen Repräsentationen der Fall war.

Es konnte ebenfalls gezeigt werden, dass den metakognitiven Fähigkeiten und der individuellen Bereitschaft, Repräsentationen zum Lösen der Problemaufgabe zu generieren, eine hohe Bedeutung beizumessen ist. Im Workshop werden Möglichkeiten diskutiert wie kommunikative und argumentative Fähigkeiten auf Basis externer Repräsentationen gefördert werden können.

Literatur

Kramarski, B., Weisse, I., & Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? *ZDM, 42*(2), 179–193. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0202-8

Lorenz, J. H. (2005). Kommunikation über Rechenwege – Nur mittels Sprache? In J. Engel, R. Vogel, & S. Wessolowski (Hrsg.), *Strukturieren – Modellieren – Kommunizieren: Leitbilder mathematischer und informatischer Aktivitäten; Festschrift für Karl-Dieter Klose, Siegfried Krauter, Herbert Löthe und Heinrich Wölpert* (S. 151–164). Hildesheim: Franzbecker.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2011). Kreatives Denken und Problemlösen mit bildlichen und beschreibenden Repräsentationen. In K. Sachs-Hombach & R. Totzke (Hrsg.), *Bilder – Sehen – Denken. Zum Verhältnis von begrifflich-philosophischen und empirisch-psychologischen An-sätzen in der bildwissenschaftlichen Forschung* (S. 204–252). Köln: Halem.

Steinbring, H., & Nührenbörger, M. (2010). Mathematisches Wissen als Gegenstand von Lehr-/Lerninteraktionen. In U. Dausendschön-Gay, C. Domke, & S. Ohlhus (Hrsg.), *Wissen in (Inter-)Aktion: Verfahren der Wissensgenerierung in unterschiedlichen Praxisfeldern* (S. 161–188). Berlin: Walter de Gruyter.

Sturm, N. (2015). Problemhaltige Textaufgaben. Leitfaden für den Austausch in Zweierteams. *Die Grundschulzeitschrift. Material, 29*(283/284), 2–3.

Sturm, N. (im Druck). *Problemhaltige Textaufgaben lösen lernen*. Berlin: Springer.

Arbeitsgruppe Vorschulische Bildung

Koordination: Meike Grüßing
meike.gruessing@uni-vechta.de

Beitrag: Priska Schöner
schoener@ph-karlsruhe.de

Prozesse bei der (strukturierten) Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung

Im Rahmen eines Dissertationsprojektes wird erforscht, ob und wie Kinder bei Mengen von Objekten Strukturen wahrnehmen und ob und wie sie diese zur Anzahlbestimmung nutzen.

Um Einblicke in diese verschiedenen Prozesse bei 5-6 jährigen Kindern zu gewinnen, wurde eine Wirksamkeitsstudie im Prä-, Post-, Follow-up Design durchgeführt. Kindern im letzten Kindergartenjahr wurden diagnostische Aufgaben gestellt, um die Prozesse bezüglich der Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung bei strukturierter und unstrukturierter Anzahldarstellung zu erheben. Die Beobachtungen wurden mithilfe der Erhebungsinstrumente ‚Eye-tracking' und diagnostischen Einzelinterviews erhoben. Im folgenden Kurzbeitrag wird das zu Grunde liegende theoretische Modell zur Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung vorgestellt.

1 Die beiden Prozesse Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung

Einem Jungen wird eine Eierschachtel mit einigen Eiern gezeigt. Auf die Frage wie viele Eier in der Schachtel sind, antwortet er: „Drei und zwei". Er schüttelt mit dem Kopf, als er gefragt wird, ob er weiß, wie viele Eier das zusammen sind. Der Junge ist also in der Lage die Menge in die Teilmengen drei und zwei zu zerlegen, kann aber die Mächtigkeit der gesamten Menge noch nicht bestimmen.

Hierbei sind zwei Prozesse beobachtbar: Die Mengenwahrnehmung und die Anzahlbestimmung (Benz et al., 2015). Die beiden Prozesse können nacheinander ablaufen oder zusammenfallen. Wie in Abbildung 1 dargestellt, kann jeder dieser beiden Prozesse wiederum in drei verschiedene Untergruppen unterteilt werden. Die unterschiedlichen Möglichkeiten eine Menge wahrzunehmen ermöglicht wiederum unterschiedliche Wege die Anzahl der Elemente zu bestimmen, wie z. B. das Nutzen einer Zählstrategie, einer nicht-zählenden (Rechen-)Strategie oder das Abrufen von known facts (Wissen). Werden die Elemente einer Menge einzeln wahrgenommen, ist die Strategie ‚Alleszählen' die einzige Möglichkeit, die Anzahl zu bestimmen. Wird die Menge, wie bei dem Jungen im einleitenden Beispiel, in Strukturen wahrgenommen, wäre Alleszählen ebenfalls eine mögliche Strategie zur Anzahlbestimmung. Des Weiteren können neben Weiterzählen oder Zählen in Schritten auch nicht-zählende (Rechen-)Strategien zum Einsatz kommen, um die Mächtigkeit der Menge zu bestimmen.

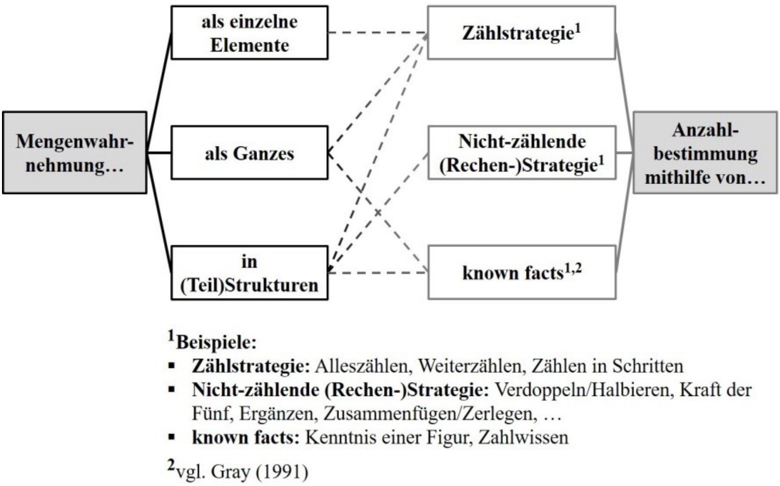


Abb. 1 Vernetzung der beiden Prozesse:
Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung (vgl. Schöner & Benz, in press)

1.1 Subitizing

Wird die Menge als Ganzes wahrgenommen und die Anzahlbestimmung erfolgt über das Abrufen von known facts (vgl. Abb. 1), fallen die beiden Prozesse der Wahrnehmung und der Bestimmung zusammen und es findet *subitizing* statt. Der englische Terminus *subitizing* in seiner ursprünglichen Bedeutung besagt, dass eine Person die Mächtigkeit einer kleinen Menge schnell, sicher und exakt benennen kann (Kaufman et al., 1949). Im Deutschen kann subitizing mit *Si-*

multanerfassung übersetzt werden und wird oft beschrieben als ein ‚Sehen auf einen Blick' (vgl. Schipper, 2009 oder Benz et al., 2015). Clements und Sarama nutzen dafür die Bezeichnung *perceptual subitizing* (Clements, 1999; Clements & Sarama, 2014; Sarama & Clements, 2009). Der Grundgedanke des subitizing als ein unmittelbares ‚Sehen und Wissen', lässt sich auf die *Quasi-Simultan-Erfassung* übertragen. Hierbei wird im Unterschied zur Simultanerfassung die Menge nicht als Ganzes, sondern in Strukturen wahrgenommen. Auch hier fallen zwei Prozesse zusammen: Die Wahrnehmung der Menge in Strukturen und die Anzahlbestimmung anhand von known facts (vgl. Abb. 1). Im deutschen Sprachraum wird der Begriff quasi-simultan an manchen Stellen jedoch nicht ganz einheitlich verwendet. Schipper (2009) beschreibt eine quasi-simultane Anzahlerfassung indem eine Menge in Teilmengen strukturiert und diese dann „*nach* der Präsentation des Bildes rechnerisch oder durch Abzählen ermittelt wird" (ebd., Hervorhebung im Original). Im weiteren Verlauf des Buches wird jedoch deutlich, dass diese quasi-simultane Anzahlerfassung dazu beitragen soll auf „zählende Verfahren [der Anzahlbestimmung] zu verzichten" (ebd.). Es wird jedoch nicht ganz klar, ob dieser ‚nicht-zählende' Prozess der Anzahlbestimmung neben dem ‚Rechnen' auch das ‚Wissen' als mögliche Form der Anzahlbestimmung mit einschließt. In zahlreichen weiteren Literaturquellen meint der Ausdruck quasi-simultan ein ‚Erfassen auf einen Blick' (z. B. Hasemann & Gasteiger, 2014), das mit einer Strukturierung der Menge in simultan erfassbaren Teilmengen einhergeht. Es besteht jeweils Konsens darüber, dass bei der Quasi-Simultan-Erfassung die Fähigkeit, eine Menge in Teilmengen wahrzunehmen, eine unabdingbare Voraussetzung ist. Diese Bedingung legen Clements und Sarama ebenfalls dem Begriff *conceptual subitizing* zugrunde (Clements, 1999; Clements & Sarama, 2014; Sarama & Clements, 2009). Die Anzahl kann jedoch nicht nur anhand von known facts bestimmt werden, sondern beispielsweise auch durch Weiterzählen (ebd.). Conceptual subitizing sagt demnach lediglich etwas über die Art der Mengenwahrnehmung aus, lässt aber die Art und Weise, wie die Anzahl bestimmt wird, offen. Das steht im Widerspruch zu der ursprünglichen Definition des subitizing, das ein ‚Sehen und unmittelbar Benennen Können' fordert. Um trennscharf argumentieren zu können und als logische Fortführung des Gedankens wird deshalb der Begriff *structural subitizing* vorgeschlagen, der ausschließlich die Situation beschreibt, in der der Prozess der Mengenwahrnehmung in Strukturen mit dem Prozess der Anzahlbestimmung anhand von known facts zusammenfällt (vgl. Abb. 1) und die Mächtigkeit der Menge unmittelbar benannt werden kann.

2 Diskussion

Offen bleibt an dieser Stelle die Frage, ob es aufgrund der nicht einheitlichen Definition generell sinnvoll ist, den Terminus quasi-simultan zu gebrauchen oder ob auch im Deutschen eine klare Abgrenzung hilfreich wäre. So könnte beispielsweise der Begriff structural subitizing mit *struktureller Simultanerfassung* übersetzt werden.

Literatur

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5,* 400–405.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2nd Edition). New York: Taylor & Francis.

Gray, E. M. (1991). An Analysis of Diverging Approaches to Simple Arithmetic: Preference and its Consequences. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 551–574.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3. Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer.

Kaufman, E., Lord, M., Reese, T., & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *The American Journal of Psychology, 62,* 498–525.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children.* New York: Taylor & Francis.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Braunschweig: Schroedel.

Schöner, P. & Benz, C. (in press). Visual structuring processes of children when determining the cardinality of sets – The contribution of eye-tracking. In C. Benz, A. S. Steinweg, H. Gasteiger, P. Schöner, H. Vollmuth, & J. Zöllner (Eds.), *Early Mathematics Learning – Selected Papers of the POEM Conference 2016.* New York: Springer.

University of Bamberg Press

Dieser Tagungsband dokumentiert die Ergebnisse der Jahrestagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), die in diesem Jahr wieder in Bad Salzdetfurth stattfand. Vom 03. bis 05. November 2017 widmete sich der Arbeitskreis dem Thema „Mathematik und Sprache".

Sprachbildung in der Mathematik ist eine herausfordernde und langfristige Aufgabe für die Unterrichtspraxis sowie die mathematikdidaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit. Dieser Themenkomplex wurde im Rahmen von vier Hauptvorträgen aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet und im Plenum diskutiert. So wurde die Nutzung und Entwicklung (umgangs-)sprachlicher Fähigkeiten der Kinder für den Zugang zur und das Verstehen von Mathematik in den Blick genommen. Ebenso standen die Entwicklung und die Besonderheiten der mathematischen Fachsprache im Fokus. Es wurden Möglichkeiten aufgezeigt, wie Lernumgebungen für einen sprachsensiblen Unterricht gestaltet werden können. Auf Grundlage empirischer Befunde wurden praktische Ansätze für eine langfristige Förderung der Sprachentwicklung im Mathematikunterricht vor- und zur Diskussion gestellt.

Zusätzlich setzten sich acht Arbeitsgruppen mit den Themenfeldern ‚Arithmetik', ‚Geometrie', ‚Sachrechnen', ‚Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit', ‚Lehrerfortbildung', ‚Kommunikation und Kooperation', ‚Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien' sowie ‚Vorschulische Bildung' intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander. Zentrale Ergebnisse dieser Arbeitsgruppen sind in diesem Band ebenfalls dokumentiert.

Die jährlich stattfindende Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM richtet sich seit ihrem Bestehen an Personen, die den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schulischer Praxis sowie den schulverwaltenden Institutionen suchen. Die Tagung ist von Beginn an in besonderer Weise durch eine offene und kollegiale Kooperation von Vertreterinnen und Vertretern aus Praxis und Theorie geprägt.

ISBN 978-3-86309-512-3

9 783863 095123

www.uni-bamberg.de/ubp