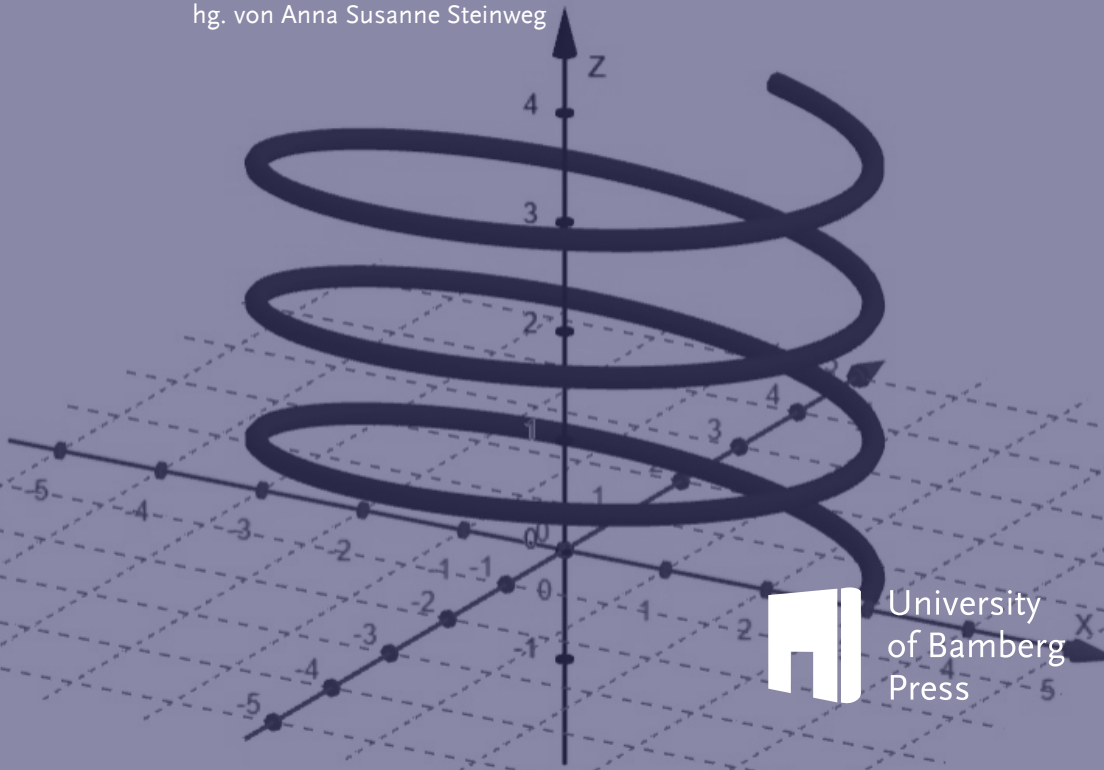


Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2024

hg. von Anna Susanne Steinweg



University
of Bamberg
Press

13 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

hrsg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 13

Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2024

hg. von Anna Susanne Steinweg



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de/> abrufbar.

Dieses Werk ist als freie Onlineversion über den Hochschulschriftenserver (FIS; <https://fis.uni-bamberg.de/>) der Universitätsbibliothek Bamberg erreichbar. Das Werk – ausgenommen Cover, Zitate und Abbildungen – steht unter der CC-Lizenz CC BY.



Lizenzvertrag: Creative Commons Namensnennung 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>.

Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press
Umschlagbild: © A. Steinweg, created with GeoGebra®

© University of Bamberg Press, Bamberg 2024
<https://www.uni-bamberg.de/ubp/>

ORCID
Anna Susanne Steinweg  <https://orcid.org/0000-0002-9093-547X>

ISSN: 2193-2905 (Print) eISSN: 2750-8439 (Online)
eISBN: 978-3-86309-999-2 (Online)

URN: urn:nbn:de:bvb:473-irb-1040363
<https://doi.org/10.20378/irb-104036>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort der Sprecherinnen und Sprecher des Arbeitskreises Grundschule in der GDM	7
---	---

Hauptvorträge

Timo Dixel

Gesellschaft im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel? Mathematiklernen in der Grundschule zwischen Singularisierung und Superdiversität	9
--	---

Daniel Frischemeier

Förderung von Data Literacy im Mathematikunterricht der Primarstufe – unterrichtspraktische Umsetzungsideen und empirische Befunde	25
--	----

Daniela Götze

Fortbildungsmaterial im Wandel – Adaptionshandlungen von Multiplizierenden im Blick	41
--	----

Ulrich Kortenkamp

Wieviel Mathe braucht der Mensch? Mathematische Kernkompetenzen im Angesicht von KI	57
--	----

... aus den Arbeitsgruppen

Arithmetik

Diskussionsforum: I Minus und Plus aus Teile-Ganzes-Tripeln entwickeln: Ein Bericht II Flexibel subtrahieren lernen	73
„Du schreibst $6+2$, ich schreibe $2+6$.“ Nutzen von Beziehungen in Fördersituationen von Tandems mit besonderen Schwierigkeiten in Mathematik	77

Daten und Zufall

Längsschnittliche Erhebung der Kompetenzen des Inhaltsbereich <i>Daten und Zufall</i> im vierten Schuljahr	81
---	----

Geometrie

Vorstellungen, Perspektiven, Bezüge: Was stellen wir uns unter „Raumvorstellung“ vor?	85
--	----

Kommunikation & Kooperation

Partizipation im Rahmen der Förderung mathematischer Potenziale im inklusiven Mathematikunterricht	89
---	----

Lehrkräftebildung

Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln – Ausgestaltung des QuaMath-Programms und erste Forschungsergebnisse	93
--	----

Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien (PriMaMedien)

Eine App zur Förderung statistischen Lernens in der Grundschule – Statistische Argumentationen durch verschiedene Darstellungen von Daten anregen	97
---	----

Sachrechnen

Blickbewegungsmuster von Kindern beim Lesen diskontinuierlicher Texte: Ergebnisse einer Eyetracking-Studie am Beispiel ‚Kalender‘	101
--	-----

Vorwort

In dem hier vorliegenden elften Band der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ sind die Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) zusammengefasst. Die Tagung fand vom 08. bis zum 10. November 2024 an der Pädagogischen Hochschule Freiburg statt. Das diesjährige Tagungsthema „Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel“ wurde mit großem Interesse unter verschiedenen Blickwinkeln betrachtet.

Timo Dixel (Universität Münster) eröffnete die Tagung inhaltlich mit seinem Vortrag „Gesellschaft im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel? Mathematiklernen in der Grundschule zwischen Singularisierung und Superdiversität“. Er zeigte auf, in welcher Weise sich die Gesellschaft einerseits und die Schule andererseits verändern und dass zwischen beiden Prozessen gegenläufige Zusammenhänge bestehen.

Im zweiten Hauptvortrag „Wieviel Mathe braucht der Mensch? Mathematische Kernkompetenzen im Angesicht von KI“ griff Ulrich Kortenkamp (Universität Potsdam) ein auch im Bereich der Grundschule aktuelles Thema auf. Er stellte in differenzierter Weise Möglichkeiten und Grenzen dar,

Daniela Götze (Technische Universität Dortmund) beschrieb in ihrem Vortrag „Fortbildungsmaterial im Wandel – Adaptionshandlungen von Multiplizierenden im Blick“, dass die großen Fortbildungsprogramme der letzten Jahre von Kohärenz und Langfristigkeit geprägt sind. Zudem wird auf Multiplizierende gesetzt, um eine hohe Reichweite zu erzielen. Sie zeigte weiter auf, wie Multiplizierende die zur Verfügung gestellten Materialien abwandeln und welche Konsequenzen daraus für die Gestaltung von Qualifizierungen gezogen werden können.

Der vierte Hauptvortrag „Förderung von Data Literacy im Mathematikunterricht der Primarstufe – unterrichtspraktische Umsetzungsideen und empirische Befunde“ von Daniel Frischemeier (Universität Müns-

ter) behandelte ein bislang wenig beachtetes Gebiet des Mathematikunterrichts in der Grundschule und entwickelte Konzepte, wie es an Bedeutung gewinnen könnte.

Auch in diesem Jahr stellten Kolleginnen und Kollegen ihre Arbeiten aus der aktuellen mathematikdidaktischen Grundschulforschung im Rahmen der Arbeitsgruppen vor und gaben somit neue Denkanstöße oder diskutierten kontroverse Themen. Durch die zusätzlich aufgenommenen Round-Table-Angebote bekamen Nachwuchsforscherinnen und -forscher zusätzliche Gelegenheiten, über ihre Projekte zu berichten und zu diskutieren. Wir bedanken uns dafür herzlich sowohl bei den Vortragenden als auch den Koordinatorinnen und Koordinatoren der Arbeitsgruppen. Nicht zuletzt gilt unser Dank all jenen Kolleginnen und Kollegen der Pädagogischen Hochschule Freiburg, die zur gelungenen Organisation der Tagung beitrugen.



Dr. Kathrin Akinwunmi



Prof. Dr. Marek Fetzner



Prof. Dr. Daniel Walter




Prof. Dr. Gerald Wittmann

Webpräsenz des Arbeitskreises <https://grundschule.didaktik-der-mathematik.de/>

Gesellschaft im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel?

Mathematiklernen in der Grundschule zwischen Singularisierung und Superdiversität

von Timo Dexel

 0009-0008-3948-0861

Im Aufsatz gehe ich der Frage nach, wie sich gesellschaftlicher Wandel im Mathematikunterricht der Grundschule zeigt. Hierfür analysiere ich gesellschaftliche Wandlungsprozesse, zeige aktuelle Tendenzen über mathematikdidaktische Diskurse sowie die gegenwärtige Praxis des Mathematikunterrichts der Grundschule auf und beziehe dies aufeinander. Es wird deutlich, dass der Wandel diskursiv durchaus aufgegriffen wird. In der Praxis wird gesellschaftlicher Vielfalt mit unterrichtsmethodischer Öffnung begegnet, es sind jedoch fachliche Schließungen durch Standardisierung und Vereindeutigung festzustellen.

Schlüsselwörter: Singularisierung, Superdiversität, Ungleichheit, Individualisierung, Normalisierung

1 Einstieg

1976 unternimmt Heinrich Winter den Versuch, Geometrie als Thema für den Mathematikunterricht der Grundschule zu legitimieren. Neben einigen abstrakten Überlegungen stellt er zahlreiche Beispielaufgaben vor, so etwa die folgende:

Jedes Kind hat 5 deckungsgleiche quadratische Plastikplättchen.
Aufgabe: Lege damit verschiedene Figuren („Quadratfünflinge“)
[...] Wer findet alle möglichen Figuren und zeichnet sie ins Heft?
(Winter, 1976, S. 16, Ausl. TD).

Fast 50 Jahre später zählt diese Aufgabe zu den Klassikern der Mathematikdidaktik, ja, sogar das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen empfiehlt sie als ‚Lernaufgabe‘. Es lässt sich ein kleiner, aber bedeutsamer Unterschied feststellen:

Forscherauftrag ‚Finde alle zwölf Fünflinge‘ (MSW NRW, o.J.)¹

Es ist schon bemerkenswert, wie mit einer einzigen Formulierung fast alle Kreativität und potenziellen Problemlöseprozesse aus der Aufgabe entfernt werden können; besonders interessant wird es, wenn man die 18 Seiten präziser Erläuterungen und Tippkarten im Anhang der recht

¹ Ich verdanke diesem Hinweis einem Vortrag von Stephan Berendonk und Felix Lensing im Wuppertaler Oberseminar für Didaktik der Mathematik. Für Anmerkungen zum Text bedanke ich mich bei Anna Hummel.

kurzen Aufgabe hinzunimmt. Im Folgenden möchte ich argumentieren, dass diese Engführung, so subtil sie zunächst erscheint, Ausdruck eines Wandels der unterrichtlichen Praxis im Zusammenhang mit gesellschaftlichem Wandel ist. Hierfür gehe ich zunächst auf diese sozialen Wandlungsprozesse ein, um daran anschließend den Wandel des Mathematikunterrichts zu präzisieren. In einem dritten Schritt beziehe ich die Entwicklungen aufeinander. Ich schließe mit einem Ausblick.

2 Gesellschaftlicher Wandel

Gesellschaftlicher bzw. sozialer Wandel ist ein Randthema von Fachdidaktiken und Pädagogik. Die Wissenschaft, die sich im Kern mit Gesellschaft und ihrer Entwicklung beschäftigt, ist die Soziologie (Schäfers, 2019). Im Folgenden stelle ich zwei Ansätze vor, die die Verfasstheit der westlichen bzw. deutschen Gesellschaft analysieren.

2.1 Die Gesellschaft der Singularitäten

Die spätmoderne Erziehungspraxis ist ein *Singularisierungsprogramm des Kindes*. Jedes Kind, so die Überzeugung, ist anders und besonders – und soll es sein. Jedes Kind gilt nun als ein ganz einzigartiges Ensemble von Begabungen, Potenzialen und Eigenheiten, zu deren Erfahrung es ermuntert werden soll. (Reckwitz, 2019, S. 331f., Herv. i.O.)

Reckwitz trifft in seinen Analysen des Schulsystems die Unterscheidung zwischen Schulen, die sich einem „quasiindustriellen Standardisierungsimperativ“ (Reckwitz, 2019, S. 333) unterwerfen und durch Standardisierung ein Kompetenzniveau nach unten absichern würden und den sogenannten *ambitionierten* Schulen. Letztere verstünden sich als Kulturen der Potenzialentfaltung, die der Begabung der einzelnen Schülerin über Singularisierung des Bildungsprozesses gerecht werden möchten und *müssen*, um im Wettbewerb um die exzellente Schule zu bestehen. Was versteht Reckwitz unter Singularisierung? Er stellt die These auf, dass in der Spätmoderne die soziale Logik des Allgemeinen ihre Bedeutung zugunsten einer Logik des Besonderen verloren hat. Das Einzigartige, was als „nicht austauschbar und nicht vergleichbar erscheint“ (Reckwitz, 2019, S. 11), eben das *Singuläre*, wird so Ziel von gesellschaftlichen Interessen und Hoffnungen. Der Prozess der

Singularisierung umfasst vier Praktiken, die als Beobachten und Bewerten sowie Hervorbringung und Aneignung beschrieben werden. Auf das Beispiel Schule bezogen, muss eine gewisse Sensibilität für pädagogische Prozesse vorliegen, um sie als eine Singularität zu erkennen, man muss also wissen, was eine Schule im Gegensatz zu anderen besonders macht. Dies könnte zum Beispiel ein besonderes Unterrichtskonzept sein, der Verzicht auf Noten etc. Eng damit zusammenhängend ist die Frage, ob das Beobachtete als positiv oder negativ bewertet wird. In diesen Praktiken des Bewertens wird nicht selten eine Zertifizierung vorgenommen, etwa als ‚gute‘ Schule (man denke an den deutschen Schulpreis oder Schullogos) bewertet. Natürlich sind auch Schulen selbst an dieser Singularisierung beteiligt, sie *bringen* sie *hervor*, indem sie sich für bestimmte Zertifikate bewerben, ein Leitbild schreiben, eine Homepage erstellen etc. Schließlich wird das Singuläre emotional *angeeignet*. Eine Schulkultur wird als besonders wahrgenommen, Mitglieder tragen womöglich Schulpullover oder ein verliehener Preis wird mit einem Fest gewürdigt, das Stolz hervorruft und zeigt gleichermaßen. Der Modus der Singularisierung lässt sich somit als Performativität, als Aufführung bezeichnen (Reckwitz, 2019, S. 72). Es wird deutlich, dass die Gesellschaft der Singularitäten vor allem in einer eher gut qualifizierten oberen Mittelklasse anzutreffen ist, während der ‚alte‘ Mittelstand erodiert und verschwindet.

2.2 Die superdiverse Klassengesellschaft

Vor dem Hintergrund der zunehmenden Diversität in allen Zonen der Klassengesellschaft kann von einer Entwicklung hin zur superdiversen Klassengesellschaft gesprochen werden. In diesen Kreuzungen und Überlappungen von Klassenlage und Diversität manifestiert sich die Pluralisierung von kulturellen Praktiken, Lebensformen, Erfahrungshorizonten, Bedürfnissen und Interessen. (El-Mafaalani, 2023, S. 33)

Der Soziologe und Bildungsforscher El-Mafaalani nutzt in zahlreichen Publikationen eine Tisch-Metapher. Er beschreibt die Weltgesellschaft als ein Gebäude, die nationale Gesellschaft als einen Raum, den Menschen betreten (einwandern) oder verlassen (auswandern) können. In der Mitte des Raumes steht ein Tisch, an dem Kuchen gegessen wird. Noch vor einigen Jahrzehnten saßen an diesem Tisch ausschließlich

weiße Männer, dann kamen Frauen hinzu, mittlerweile sitzen dort auch Migrantinnen, behinderte Menschen etc. und können am Kuchenessen teilhaben. Gleichzeitig gibt es Menschen, die auf dem Boden sitzen und von der Tischgesellschaft noch ausgeschlossen sind. Mehr Menschen an einem Tisch und mehr, die Platz nehmen wollen – man muss in keiner Großfamilie aufgewachsen sein, um sich vorzustellen, dass dies zu Konflikten führen wird. Diese Konflikte werden stärker, je mehr Menschen am Tisch platznehmen. Dies führt zu dem Paradox, dass mehr Teilhabe in aller Regel zu mehr Konflikten führt. Diese Konflikte sind aber nicht als Rückschritt zu deuten, sie sind gerade ein Zeichen für wachsende Teilhabemöglichkeiten. El-Mafaalani nennt dies das *Integrationsparadox* (El-Mafaalani, 2019). In aktuellen Analysen betont er, dass gesellschaftliche Funktionen, die vormals der Familie zugeordnet waren, immer stärker auf Institutionen wie die Schule transferiert werden. Diese, so El-Mafaalani (2024), seien mit den neuen Aufgaben restlos überfordert.

2.3 Zwischenfazit

In der Zusammenschau dieser unterschiedlichen zeitdiagnostischen Analysen können wir neben den Differenzen (z. B. Nivellierung der Mittelklasse bei Reckwitz, Konflikte durch Fortschritt bei El-Mafaalani) doch Gemeinsamkeiten feststellen. Zunächst ist sozialer Wandel konflikthaft. Klassische Verteilungsungleichheiten bleiben bestehen bzw. verstärken sich sogar. Unbestritten ist auch die Diversifizierung der Lebensstile, die in den genannten Zeitdiagnosen unterschiedlich benannt, doch einhellig erkannt werden. Pointiert formuliert, lässt sich der soziale Wandel als Prozess der Singularisierung in einer von Diversität und Ungleichheit geprägten Gesellschaft beschreiben.

3 Wandel des Mathematikunterrichts

In der Geschichte des Mathematikunterrichts lassen sich Verschiebungen, Wandlungsprozesse und Reformen ausmachen (Vohns, 2016). Interessant ist, dass – wie in anderen schulbezogenen Bereichen auch – die Bildungspolitik als zentraler Agent eines Wandels auftritt. In den Folgen der PISA-Studien hat Kompetenz- und Qualitätsmessung an Bedeutung gewonnen; dies zeigt sich nicht nur in Einführungswerken

zur Didaktik der Mathematik, sondern auch in Förderung von Projekten zur Verbesserung des Mathematikunterrichts – aber verändern Steuerungsbemühungen und soziale Wandlungen auch den Mathematikunterricht? Um dies zu klären, treffe ich zunächst die Unterscheidung zwischen einem mathematikdidaktischen Diskurs (Abschn. 3.1) und einer mathematikunterrichtlichen Praxis (Abschn. 3.2). In einer Arbeitsdefinition verstehe ich Diskurse als eine Rede über Praxis (diese Rede kann die Praxis natürlich beeinflussen) und die Praxis als das, was faktisch passiert (über das wiederum diskursiv verhandelt werden kann).

3.1 Wandel im Diskurs

Der Wandel des Mathematikunterrichts (der Grundschule) wird in Diskursen der Mathematikdidaktik häufiger thematisiert, da diese als Wissenschaft für die Praxis nicht nur eine präskriptive, sondern auch eine reflexive Dimension hat (Steinbring, 1998; Lensing, 2021). Die Entwicklung wird dabei als ein Prozess der Ausbalancierung des Spannungsfeldes von Kind- und Fachorientierung gedeutet (Käpnick & Benölken, 2020; Rathgeb-Schnierer, Schuler & Schütte, 2023). Rathgeb-Schnierer et al. (2023) zeichnen die Entwicklung mathematischer Bildung in der Grundschule von einem reinen Rechenunterricht 1920er hin zu einer starken Wissenschafts- und Fachorientierung in den 1970er, die dann wiederum durch eine neue Kindorientierung zum Ende des Jahrhunderts abgelöst wird. Das neue Jahrtausend steht ganz im Zeichen der Kompetenzorientierung und Bildungsstandards, jedoch verweisen die Autorinnen auch auf eine angedachte *inhaltliche* Öffnung des Unterrichts, wie sie u.a. in den Arbeiten im Umfeld der Dortmunder Gruppe um Müller und Wittmann entwickelt wurde.

Darüber hinaus kommen aktuelle Einführungswerke in die Mathematikdidaktik der Primarstufe nicht mehr ohne einen Verweis auf Heterogenität, Diversität und die Notwendigkeit von (natürlicher) Differenzierung aus. Die Singularisierung von Kindheit und Schule hat ihren Niederschlag in mathematikdidaktischen Publikationen gefunden. Die Betonung der Begabungsentfaltung, der eigenständigen konstruktiven Entdeckerhaltung von Lernenden, der individuellen Förderung kindlicher Interessen und Potenziale sowie der Differenzierung (vom Kind

aus) lassen sich in nahezu jedem aktuellen Einführungswerk der Mathematikdidaktik finden, ebenso wie die Bedeutung einer veränderten Aufgabenkultur hin zu mathematisch geöffneten Formaten wie Lernumgebungen und Problemfelder (z. B. Krauthausen, 2018; Käpnick & Benölken, 2020; Rathgeb-Schnierer et al., 2023; Zannetin & Selter, 2024). Die intensive Auseinandersetzung mit Sprache und Mehrsprachigkeit im Mathematikunterricht mag als Zeichen dafür dienen, dass die Diversität von Kindheit beachtet wird (Prediger & Özdil, 2011; Götze, 2015; Baschek et al. 2024); es wird sogar die Benachteiligung armer Kinder diskutiert (Bohlmann, 2018). Es scheint, als wäre die Mathematikdidaktik durchdrungen von dem Prozess der Singularisierung und als würde die Diversität von Lernenden anerkannt werden.

Es ist jedoch im Hinterkopf zu behalten, was Rathgeb-Schnierer et al. in Bezug auf die inhaltliche Öffnung von Mathematikunterricht konstatieren: „Wie erfolgreich die Umsetzung in der Praxis im Einzelnen und auf das Ganze gesehen ist, lässt sich schwer beurteilen, da es hierzu kaum Erhebungen und empirische Befunde gibt.“ (2023, S. 27). Diese Unklarheit, ob die diskursiven Verhandlungen der Mathematikdidaktik gleichzusetzen sind mit der faktischen Praxis des Mathematikunterrichts, betont auch Vohns: „Was Wittmann und Winter [...] forderten, waren eben Forderungen, oder anders: Ideale, deren breite Realisierung man weder vor noch nach Einführung der Bildungsstandards als gegeben annehmen darf.“ (Vohns, 2016, S. 42, Ausl. TD). Ich kann an dieser Stelle zwar nicht mit breiten empirischen Befunden aufwarten, gebe aber einen kleinen Einblick in die aktuelle Praxis des Mathematikunterrichts.

3.2 Wandel der Praxis?

Um einen tatsächlichen Wandel von Praxis abzubilden, müssten Unterrichtsbeobachtungen des vergangenen Jahrhunderts mit den heutigen verglichen werden; dies ist natürlich nicht ohne weiteres möglich. Im Folgenden werde ich daher Elemente der aktuellen Praxis des Grundschulmathematikunterrichts anhand ausgewählter Szenen aus einem größeren Forschungsprojekt (zum Design: Dixel, Bohlmann & Straehler-Pohl, 2024) beleuchten und mit früheren Studien vergleichen. Ich beginne mit einem für unser Material typischem Unterrichtsarrangement, einem ‚Stationenlernen‘ bzw. einer Lerntheke:

Die Schüler:innen können zwischen folgenden ‚Stationen‘ wählen: eine Zwei mit Kreide auf eine kleine Tafel zeichnen, die Zwei mit einer Nadel in Papier stechen, die Zwei mit einem Pfeifenreiniger formen, die Zwei mit dem Finger in den Sand malen, die Zwei mit Knete modellieren, eine gedruckte Zwei mit Knöpfen überziehen, eine gedruckte Zwei mit dem Bleistift nachzeichnen und ein Arbeitsblatt, auf dem die Zwei in immer kleiner werdende Kästchen geschrieben werden muss. Alle Schüler:innen scheinen motiviert und in ihrem eigenen Tempo zu arbeiten. Sobald sie mit einer ‚Station‘ fertig sind, kreuzen sie das entsprechende Kästchen auf ihrem ‚Stationszettel‘ an und wählen eine andere ‚Station‘. Während ich in der Klasse umhergehe, bemerke ich, dass einige Schüler:innen den Reim „Buckel, Rutschbahn, Boden, die zwei ist schnell gezogen“ leise wiederholen, während sie arbeiten.

Formal ist der Unterricht aufgrund des regelmäßigen Einsatzes von Lerntheken (die hier Woche für Woche bei jeder Zahl von eins bis neun identisch genutzt werden) geöffnet. Inhaltlich bleibt er aber geschlossen. Jede Lerntheke stellt jeweils eine Zahl ins Zentrum, wobei dies auf die äußere Form der Zahl, also die Ziffernschreibweise, beschränkt bleibt. An anderer Stelle wurde darauf hingewiesen (Dexel et al., 2024), dass es eigentlich nicht einmal um das Schreiben selbst geht, schließlich werden auch zahlreiche nicht-schreibende Techniken verwendet. Auch mathematisch geschieht nichts; die Zwei wird weder als Stelle in einer Rangfolge oder aber als Symbol für eine Menge aus zwei Elementen eingeführt; auch der Bezug zur ‚Eins‘ fehlt. In der Unterrichtsforschung werden solche Phänomene auch als Entfachlichung bezeichnet (Reh & Caruso, 2020). Die unterrichtliche Praxis verweist damit auf eine methodische Öffnung bei geschlossener Mathematik (Steinbring, 1999), sie wird bestimmt durch das routinierte Abarbeiten. Fachdidaktisch weniger geschulte Beobachterinnen und Beobachter könnten den Unterricht als gelungen erleben, da alle Kinder beschäftigt sind, Ergebnisse produziert werden und nebenbei noch eine anspruchsvolle Methode des offenen Unterrichts bereits in den ersten Schulwochen reibungslos funktioniert. Allein: Es geht inhaltlich um wenig. Ein solches

Arrangement und das Erarbeiten des Zahlenraums in Schritten konnten wir in fünf von zehn Schulen unseres Samplings beobachten. Dies läuft nicht immer im selben Maße reibungslos ab:

Die Lehrerin geht zum Pult und nimmt einen Stapel Arbeitsblätter in die Hand. Sie hält das Blatt vor die Klasse, sodass es jedes Kind sehen kann. „Oh ne...“, ruft ein Schüler genervt. „Schon wieder das“, ruft eine Schülerin gelangweilt. Manche SchülerInnen senken den Kopf. „Was heißt denn hier schon wieder? Wir haben doch noch gar nicht geübt wie man die Sechs aufschreibt!“ ruft die Lehrerin.

Die Uneinigkeit darüber, ob es bei dem Arbeitsblatt nun um ein neues oder ein altes handelt, lässt sich leicht erklären: In den Wochen zuvor wurden die Zahlen von eins bis fünf mit dem strukturgleichen Blatt eingeübt. Auf jedem dieser Arbeitsblätter sind exakt dieselben Übungen zu absolvieren, nur für verschiedene Zahlen. Aus Sicht der Schülerinnen und Schüler stellt dies eine Redundanz dar, während die Lehrkraft (es ist unklar ob gespielt oder tatsächlich überrascht) darauf hinweist, dass es doch eine *neue* Aufgabe ist.

In *einer* Schule unseres Samples wurde die sogenannte ganzheitliche Zahleinführung praktiziert, bei der der Zahlenraum bis 20 von der ersten Stunde an den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung steht und welche als Konsens der mathematikdidaktischen Empfehlungen zur Gestaltung des Anfangsunterrichts gelten darf. In der beobachteten Zeit zeichnete sich das Vorgehen zwar als fachlich sehr reichhaltig ab, jedoch schien das frontal organisierte Unterrichten der Lehrkraft eines funktionierenden Unterrichtsablaufs nicht immer zuträglich. In der nächsten Szene haben die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit die Aufgabe erhalten, Mengen von Steinen zu erfassen und deutlich zu machen, wie sie die Gesamtanzahl erkannt haben. Intendiert ist, die Mengenauffassung ‚auf einen Blick‘ zu fördern und etwa Strukturen wie die ‚Kraft der Fünf‘ zu nutzen. Eine Schülerin kreist jedoch immer wieder alle Steine ein und wird von der Lehrkraft darauf hingewiesen, dass dies nicht viel Sinn ergebe. Verzweifelt wendet sich die Schülerin an ihren Sitznachbarn:

„Versteh‘ ich nicht!“

„Wie viele sind das hier?“

„6“

„Und wie kann man die einkreisen?“

„3 und 3...ja“

„Und wie viele hast du hier eingekreist?“

„4 und 2“

„Und wie viel ist das?“

„6“

„Das kommt dann da unten hin (*zeigt auf kleine Linie, auf die das jeweilige Ergebnis geschrieben werden soll*). Hast du es jetzt verstanden?“

„Ja!“

Es ist zu vermuten, dass die Schülerin sogleich sechs Steine erkannte und deshalb alle auf einmal einkreiste. Dies kommt aber nicht der Aufgabe der Lehrerin entgegen, die eigentlich erwartete, Teilmengen zu markieren, die beim Feststellen der Gesamtmenge ‚auf einen Blick‘ helfen. Mathematikdidaktisch informierte Leserinnen und Leser erkennen eine typische Interaktionsstruktur des Mathematikunterrichts: Das Trichtermuster (Bauersfeld, 1978), allerdings entwickelt es sich in diesem Fall unter den Lernenden selbst. Auch hier zeigt sich zwar eine relative Offenheit der Methode – Einzelarbeit, die individuelle Strukturdeutungen ermöglichen soll – jedoch dieselben geschlossenen Interaktionen, die wir bereits aus dem Unterricht der 1970er Jahre kennen.

Ich überspringe im Verlauf des Schuljahres ein paar Wochen, bis alle Zahlen eingeführt sind. In der Stunde soll es nun um das Vergleichen von Zahlen gehen. Anstelle einer Tafel hängt ein Smartboard im Klassenraum, auf dem drei Krokodile ihr Maul öffnen, eines nach links, eines nach vorne, eines nach rechts. Darunter sind sechs und zwei Fische aufgemalt, dann jeweils ein Fisch und rechterhand drei und vier Fische. Zwischen die Fische soll nun ein Kleiner-, Größer- oder Gleichzeichen eingefügt werden:

Ein Junge, der leise aufzeigt, wird drangenommen. Er schreibt ‚3‘ und ‚4‘ unter die Fische und ergänzt das Zeichen ‚<‘. Die Lehrerin fragt ihn, ob er den Satz dazu sagen möchte. Er schüttelt den Kopf, bleibt kurz vorne stehen und geht dann zurück an seinen Platz. „Okay, dann versuchen wir es gemeinsam: Drei ist weniger als vier.“, trägt die Lehrerin vor. Die Klasse spricht im Chor den Satz nach, die Lehrerin lässt ihn wiederholen. Analog wird die nächste Aufgabe besprochen. Die Klasse wiederholt den Satz „Eins ist gleich Eins“ zweimal.

Auch diese Szene erinnert stark an Unterricht früherer Zeiten, sieht man einmal davon ab, dass das klassische Tafelbild nun ein klassisches Smartboardbild ist. Sowohl das Krokodilsmaul als Zeichen für die Ungleichheitsrelation, die Präsentation der Lösung an der Tafel und die Wiederholung im Chor entsprechen einer Praxis, die so auch vor 60 (oder 80 oder 20) Jahren hätte stattfinden können. Ein Merkmal des Klassen-Chors ist, dass einzelne Stimmen unter vielen verschwimmen; hier ist also keine Praxis der Singularisierung, sondern eher Kollektivierung zu finden; an anderer Stelle haben wir dies als Praxis der Normalisierung (Dexel et al., 2024) bezeichnet. Kinder, die sich unsicher sind, können den Satz leise mitsprechen, während Kinder, die wissen, warum drei ‚kleiner‘ bzw. ‚weniger‘ ist als vier, mit Selbstvertrauen sprechen können. Unterschiede fallen nicht groß auf. Die bisher dargestellten Szenen stammen allesamt aus Schulen, die Reckwitz (2019) als von einem *Standardisierungsimperativ durchdrungen* bezeichnen würde. Wie verhält es sich mit den sogenannten ambitionierten Schulen? Die folgende Szene wurden an einer Montessori-Schule in gehobener Gegend beobachtet:

Ein Junge schreibt die Zahl, wie die Zahlen zuvor, die Zahl 184 farblich richtig auf seine Zahlenrolle. Vor ihm liegen noch die Zahlenkarten entsprechend der Zahl 183. Diese hat er anscheinend bis dahin entsprechend seines Fortschritts richtig gelegt. Nachdem er die 185 und 186 auf die Rolle geschrieben hat, nimmt er die Zahlenkarte „drei“ der Zahl 183 weg und legt stattdessen eine sechs an die Einerstelle. Er murmelt: ‚187‘. Er schreibt die 187 auf. Direkt danach schreibt er auch die 188 auf. Er murmelt weiter vor sich hin: ‚89‘. Er schreibt die 189 auf.

Unterricht nach Montessori ist üblicherweise durch eine große Offenheit, ja, Individualisierung gekennzeichnet. Er entspricht präzise der Reckwitz'schen Beschreibung einer singularisierten Schule, in der das Kind und seine individuellen Potenziale in den Blick genommen werden. Lernen wird hier delegiert an Material (Breidenstein, 2015) und erfolgt ‚selbstgesteuert‘. In verschiedenen Studien hat sich gezeigt, dass das Material ab einem gewissen Zeitpunkt keine inhaltliche Rolle mehr spielt (Breidenstein, 2015; Martens, 2018). Auch in der beobachteten Szene kann der Schüler die Zahlen problemlos auf die Rolle schreiben; hin und wieder fällt ihm auf, dass er die Karten nicht gelegt hat und holt dies nach. Innerhalb dieses höchst individualisierten Unterrichts (er ist der Einzige, der mit der Zahlenrolle arbeitet) ist die Fachlichkeit radikal geschlossen: es geht um eine letztlich triviale Zahlenfolge.

Die hier aufgezeigten Ergebnisse ähneln der Engführung des NRW-Schulministeriums (s.o.). Der von uns beobachtete Mathematikunterricht präsentiert sich inhaltlich geschlossen und abrechenbar. Die soziologischen Zeitdiagnosen laufen ins Leere. Woran kann das liegen?

4 Diskussion:

Mathematikunterricht und die Isomorphie der Schule

Es scheint so, als würde die Diagnose der Diversifizierung den alltäglichen Mathematikunterricht recht wenig betreffen. Am ehesten findet die Theorie der Singularisierung in einer methodischen Individualisierung ihre mathematikunterrichtliche Übersetzung. Ansonsten überwiegt eine starke Vereinheitlichung von mathematischer Praxis, die durch Kollektivierung einerseits und Vereinzelung andererseits zwar unterschiedliche Ausprägungen hat, aber dennoch auf dieselbe Vereinheitlichung zielt. Bei genauerer Hinsicht können Prozesse der Schließung unter dem Deckmantel der Öffnung identifiziert werden, die die Ergebnisse des Mathematikunterrichts vorhersagbar machen. In dieser Hinsicht ist die unterrichtliche Fachlichkeit nahezu komplementär zu den soziologischen Zeitdiagnosen. Während wir in mathematikdidaktischen Diskursen gesellschaftliche Wandlungsprozesse mal bewusst, mal unfreiwillig aufgegriffen werden, erscheint die hier untersuchte Praxis des Mathematikunterrichts (bei aller methodischer Vor-

sicht) in weiten Teilen stabil. Hier ähneln sich die von uns untersuchten Schulen. Auch in Studien der qualitativen Unterrichtsforschung wird auf dieses Phänomen hingewiesen (Gruschka, 2011; Martens, 2018). In der Erziehungswissenschaft wird dies als *Isomorphie der Schule* (Böhme, 2024) beschrieben, als eine übergreifende Ähnlichkeit der einzelnen Schulen. Diese Isomorphie kann mit Di Maggio und Powell (1983) durch *Zwang*, *Mimesis* oder *normativem Druck* entstehen. Alle drei Ursachen lassen sich im Kontext des Mathematikunterrichts leicht wiederfinden. Zunächst stehen Lehrkräfte durch Leistungsvergleiche wie VERA, TIMSS und den IQB-Bildungstrend unter dem Zwang, messbare Leistung zu produzieren. Erfolgreich in einem Test ist nicht diejenige Schülerin mit einer kreativen Idee, sondern die, mit dem korrekt angekreuzten Ergebnis. Auch die Mimesis erscheint einsichtig: Das deutsche Schulsystem ist durch einen hohen Einsatz (studentischer) Vertretungslehrkräfte gekennzeichnet. Diese haben oft nicht die Zeit, sich ausführlich auf Unterricht vorzubereiten, noch die Erfahrung, um ein eigenes Profil zu entwickeln. Sie übernehmen das Stationenlernen ihrer Kollegen, sie imitieren die Klassenführung ihres Teampartners und erzeugen so ähnlichen Unterricht. Als dritte Ursache machen Di Maggio und Powell normativen Druck aus. Neben der Bildungssteuerung kann dieser auch von Eltern ausgeübt werden. In meiner Promotionsstudie identifizieren zwei Lehrerinnen die Eltern als größte Herausforderung für inklusiven Unterricht. Diese hätten oft die Vorstellung, dass jedes Kind jede Aufgabe bearbeiten müsste, auch differenzierte Hausaufgaben stießen auf Unverständnis (Dixel, 2020). Es ist anzunehmen, dass manche Lehrkräfte diesem Druck durch eine klassische und damit nachvollziehbare unterrichtliche Praxis aus dem Weg gehen. Der Wandel des Mathematikunterrichts geschieht auf eine subtile Weise. *Im Sinne einer Gegenbewegung zu gesellschaftlichen Öffnungstendenzen findet schulübergreifend Schließung und Vereindeutigung statt.* Nun stellt sich eine ganz andere Frage: Was geht uns eigentlich verloren, wenn der Unterricht zu diesen Prozessen neigt?

5 Ausblick: Das wunderschöne Risiko der Bildung

Im mathematikdidaktischen Diskurs finden sich die Prozesse der Singularisierung von Kindheit wieder. Die Praxis des Mathematikunter-

rechts wiederum ist durch diese Prozesse nur oberflächlich gekennzeichnet. Auch von einer Akzeptanz der Diversität ist wenig zu sehen. Beide Aspekte – Singularisierung im Diskurs, Schließung im Unterricht – können m. E. problematisch wirken. Um dies zu erläutern, möchte ich eine These auf den Mathematikunterricht beziehen, die der Erziehungswissenschaftler Gert Biesta entwickelt hat (2016, 2020). Kritisch beobachtet er Tendenzen der Bildungspolitik und -praxis, welche er als „Learnification“ bezeichnet. Auf diese Weise wird die pädagogische Tätigkeit in der Schule auf das Lernen der Kinder reduziert und lässt außer Acht, dass wir *etwas* (z. B. Mathematik), *für* etwas (z. B. um die Welt in einer spezifischen Weise wahrzunehmen) und *von* jemandem (einer Mathematiklehrkraft) lernen². Biesta argumentiert, dass Bildung immer ein Risiko in sich trage: Zum Beispiel das Risiko, dass ‚Zöglinge‘ – und hier ist es egal, ob wir von Studentinnen oder Schülern sprechen – unsere Intentionen nicht nachvollziehen. Bezogen auf Winters Aufgabenvorschlag ergibt sich ein Risiko darin, dass nicht alle Kinder auf 12 Fünflinge kommen werden. Ohne die Tippkarten und Anleitungen ist zu erwarten, dass mancher Versuch der Systematisierung scheitert, einige Kinder keine Lösung finden. Andere wiederum werden behaupten, alle Figuren gefunden zu haben, ohne es zu begründen. In gerade diesen Situationen stecken Möglichkeiten (mathematischer) Bildung, die durch Aushandlung, Vergleich und Diskussion stattfinden können (Roos & Nührenbörger, 2024). Auch eine Lehrkraft kann dies durch Moderation anregen, also fragen, ob es wirklich alle Fünflinge sind, woran man das merkt, wie man es systematisch darstellen kann, einen Hinweis geben, etc., aber sie kann natürlich nicht das mathematische Tätigsein für ihre Schülerinnen und Schüler übernehmen. Wir als Lehrende an Hochschulen riskieren auch, dass unsere Studierende die Hinweise auf guten Unterricht nicht annehmen:

This means, however, that there always is a possibility, and there always should be a possibility, that our students take their freedom and then turn back to us and say that they don't want — or,

² So erklärt sich hoffentlich der Titel des Aufsatzes, der sich nur auf das Lernen von Mathematik bezieht

perhaps more importantly, don't need — our intentions. This risk is always there in education as well, and if we see this as a risk that needs to be overcome, a problem that needs to be “solved,” we actually eradicate education itself. (Biesta, 2020, S. 103).

Wir können Studierende z. B. nicht zwingen, Zahlen ganzheitlich einzuführen, wir können höchstens unsere Argumente stark machen und versuchen, sie von den Vorteilen unserer Ansichten zu überzeugen. Wir können zeigen, warum fachliche Offenheit Chancen bietet und kluge Methoden wie die natürliche Differenzierung beibringen, ohne jedoch eine Garantie zu haben, dass Studierende dies umsetzen. Kurz: Wir – Lehrkräfte und Forschende – können *lehren* und damit etwas *risikieren*.

Literatur

Baschek, E., Fetzer, M., Klose, R., Schreiber, C., & Söbbeke, E. (2024). *Sprachlich-kulturelle Ressourcen im Mathematikunterricht der Primarstufe*. WTM-Verlag.

Biesta, G. (2016). *The beautiful risk of education*. Routledge.

Biesta, G. (2020). Risking Ourselves in Education: Qualification, Socialization, and Subjectification Revisited. *Educational Theory*, 70(1), 89–104. <https://doi.org/10.1111/edth.12411>

Böhme, J. (2024). *Widerstreitkraft schultheoretischer Gegenstandsbestimmungen im Wandel schulpädagogischer Selbstverständnisse: Pädagogische (Re-)Fokussierungen des Eigenwerts, der Technologierbarkeit, Isomorphie und der Legitimität von Schule*. Vortrag auf der Tagung der DGfE-Kommission Schulforschung und Didaktik, Universität Osnabrück, 13.09.2024.

Bohlmann, N. (2018). Unequal bodies: corporeality and social inequality in mathematics classrooms. *ZDM*, 51(2), 263–275. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1005-6>

Breidenstein, G. (2015). Vincent und die „Apotheke“ – oder: die Didaktik des Materials. *Zeitschrift für interpretative Schul- Und Unterrichtsforschung*, 4(1), 15–30. <https://doi.org/10.25656/01:15347>

Dixel, T. (2020). *Diversität im Mathematikunterricht der Grundschule: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zu Gelingensbedingungen inklusiven Mathematiklernens*. WTM-Verlag.

- Dexel, T., Bohlmann, N., & Straehler-Pohl, H. (2024). What is early elementary school mathematics, actually? – Glances from a practice-theoretical stance. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 13, 137–146.
- DiMaggio, P. J., & Powell, W. W. (1983). The Iron Cage Revisited: Institutional Isomorphism and Collective Rationality in Organizational Fields. *American Sociological Review*, 48(2), 147–160. <https://doi.org/10.2307/2095101>
- El-Mafaalani, A. (2019). *Das Integrationsparadox: Warum gelungene Integration zu mehr Konflikten führt*. Kiepenheuer und Witsch.
- El-Mafaalani, A. (2023). Rassismus(kritik) in der superdiversen Klassengesellschaft. Dynamiken, Widersprüche, Perspektiven. *Zeitschrift für erziehungswissenschaftliche Migrationsforschung*, 1(2), 23–39. <https://doi.org/10.3224/zem.v2i1.03>
- El-Mafaalani, A. (2024). *Transformation von Kindheit und Jugend – und die unge lösten Herausforderungen in Bildungssystem und Bildungsforschung*. Vortrag gehalten auf dem Münsterschen Bildungskongress, Universität Münster, 18.09.2024.
- Götze, D. (2015). *Sprachförderung im Mathematikunterricht*. Cornelsen.
- Gruschka, A. (2011). *Verstehen lehren: Ein Plädoyer für guten Unterricht*. Reclam.
- Käpnick, F., & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule* (2. Aufl.). Springer Spektrum.
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Springer Spektrum.
- Lensing, F. (2021). *Das Begreifen begreifen: Auf dem Weg zu einer funktionalistischen Mathematikdidaktik*. Springer VS.
- Martens, M. (2018). Individualisieren als unterrichtliche Praxis. In M. Prose & K. Rabenstein (Eds.), *Kompendium Qualitative Unterrichtsforschung. Unterricht beobachten – beschreiben – rekonstruieren* (S. 207–222). Klinkhardt.
- Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (o.J.). *Lernaufgaben Mathematik Grundschule: Raum und Form – Forscherauftrag: „Finde alle 12 Fünflinge“*. <https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/download/1581>
- Prediger, S., & Özdil, E. (2011). *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit: Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland*. Waxmann.

Rathgeb-Schnierer, E., Schuler, S., & Schütte, S. (2023). *Mathematikunterricht in der Grundschule: Lernangebote fachorientiert, kindorientiert und differenziert gestalten*. Springer.

Reckwitz, A. (2019). *Die Gesellschaft der Singularitäten: Zum Strukturwandel der Moderne*. Suhrkamp.

Reh, S., & Caruso, M. (2020). Entfachlichung? Transformationen der Fachlichkeit schulischen Wissens. *Zeitschrift für Pädagogik*, (5), 611–625. <https://doi.org/10.3262/ZP2005611>

Roos, S., & Nührenbörger, M. (2024). Mathematische Gespräche und kooperatives Arbeiten im inklusiven Mathematikunterricht. In C. Heil & D. Bönig (Hrsg.), *Mathematische Begegnungen mit Kindern Schätzen Lernen: Festschrift Für Silke Ruwisch* (S. 117–132). WTM-Verlag.

Schäfers, B. (2019). *Einführung in die Soziologie*. Springer.

Steinbring, H. (1998). Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 30(5), 161–167. <https://doi.org/10.1007/s11858-998-0004-4>

Steinbring, H. (1999). Offene Kommunikation mit geschlossener Mathematik? *Grundschule*, (3), 8–13.

Vohns, A. (2016). Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? Überlegungen am Beispiel des Mathematikunterrichts. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (100), 35–42. <https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/85/74>


Winter, H. W. (1976). Was soll Geometrie in der Grundschule? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 8(1/2), 14–18.

Zannetin, E., & Selter, C. (2024). *Mathematik unterrichten in der Grundschule: Inhalte - Leitideen - Beispiele* (4. Auflage). Klett/Kallmeyer.

Prof. Dr. Timo Dixel
Institut für Erziehungswissenschaft
Bispinghof 5/6
48143 Münster
timo.dixel@uni-muenster.de

Förderung von Data Literacy im Mathematikunterricht der Primarstufe – unterrichtspraktische Umsetzungsideen und empirische Befunde

von Daniel Frischemeier

 0000-0002-8957-7660

Daten spielen eine zentrale Rolle in Entscheidungsprozessen und sind in den Medien allgegenwärtig. Um den Anforderungen einer zunehmend datenorientierten Welt gerecht zu werden, ist die Förderung von Data Literacy von entscheidender Bedeutung. Dies erfordert innovative Ansätze, um Lernenden bereits frühzeitig Kompetenzen im Umgang mit Daten zu vermitteln. Zu diesen Ansätzen gehören unter anderem das Arbeiten mit realen Daten im Rahmen eines Datenanalysezyklus, das frühzeitige Erlernen grundlegender Datenoperationen sowie der Einsatz digitaler Werkzeuge zur Datenexploration. In diesem Beitrag werden Umsetzungsideen sowie empirische Befunde zu diesen Ansätzen zur Förderung von Data Literacy für den Mathematikunterricht in der Primarstufe vorgestellt.

Schlüsselwörter: Data Literacy, Statistisches Denken, digitale Werkzeuge, Mathematikunterricht in der Primarstufe

1 Einleitung

Zahlreiche Entscheidungsprozesse im Alltag, beispielsweise in der Politik, der Wirtschaft oder der Medizin, beruhen auf Daten. Um diese Prozesse zu verstehen und aktiv daran teilnehmen zu können, benötigen mündige Bürger:innen eine fundierte statistische Allgemeinbildung sowie die Fähigkeit, Daten kompetent zu nutzen (Ridgway, 2016). Diese Entwicklung führt zu einem wachsenden Bedarf an Data Literacy, welche mittlerweile als wesentlicher Bestandteil der Allgemeinbildung angesehen wird (Schüller, 2019). Data Literacy umfasst die Fähigkeit, Daten zu verstehen, zu interpretieren und zu nutzen – dies befähigt Schüler:innen, fundierte Entscheidungen zu treffen, indem sie Daten aus ihrem Alltag und ihrer Umgebung kritisch bewerten.

Bei dem Konstrukt Data Literacy werden die Fähigkeiten, „Daten auf kritische Art und Weise zu sammeln, zu managen, zu bewerten und anzuwenden“ (Schüller et al., 2021, S. 1) in den Vordergrund gestellt. Mit Data Literacy wird damit auch „die Urteilsfähigkeit, Selbstbestimmtheit und das Verantwortungsbewusstsein gestärkt und die gesellschaftliche und wirtschaftliche Teilhabe von uns allen in einer durch Digitalisierung geprägten Welt gefördert.“ (Schüller et al., 2021,

S. 2). Eine entsprechende Data Literacy Charta formuliert fünf Leitprinzipien als Grundlage zur Gestaltung von Bildungsprozessen zu dieser Schlüsselkompetenz des 21. Jahrhunderts - u.a., dass Data Literacy allen Menschen zugänglich sein muss (Schüller et al., 2021).

Auch im aktuellen Positionspapier der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik zur Mathematischen Bildung und Digitalisierung (Bescherer et al., 2024) wird betont, dass sich Anforderungen an mathematische Kompetenzen beständig verändern – insbesondere durch die Digitalisierung – und somit gefordert, dass „statistisches Denken [...] digital verstanden werden [muss], wenn es als Kernkompetenz des 21. Jahrhunderts verstanden werden soll“ (Bescherer et al., 2024, S. 9).

Mit Blick auf die Durchgängigkeit im Lernprozess (Holzäpfel et al., 2024) sollte Data Literacy und darauf aufbauend statistisches Denken bereits früh und im Primarbereich gefördert und gefordert werden. Auch wenn die Entwicklung einer Data Literacy sicherlich nicht das zentrale Ziel des Mathematikunterrichts der Primarstufe ist, gibt es dennoch zahlreiche Beispiele, wie Lerngelegenheiten zur Förderung von Data Literacy im Mathematikunterricht der Primarstufe aufgegriffen werden können.

In diesem Beitrag sollen daher an exemplarischen Aspekten Möglichkeiten und Potentiale aufgezeigt werden, wie Data Literacy bereits im Mathematikunterricht der Primarstufe gefördert werden kann, welche unterrichtspraktischen Ideen bereits existieren und welche empirischen Erkenntnisse vorliegen, um Data Literacy im Mathematikunterricht der Primarstufe zu entwickeln.

2 Data Literacy im Mathematikunterricht in der Primarstufe

Bereits seit über 20 Jahren besteht in der Stochastikdidaktik-Community (siehe z.B. Ben-Zvi und Garfield, 2004) Einigkeit bei der Ausdifferenzierung verschiedener Konstrukte zum Lernen statistischer Inhalte, wie z.B. Statistical Literacy, Statistical Reasoning und Statistical Thinking. Doch ist damit weder eine Stufung (z. B. der Begriffsentwicklung), noch generell eine Trennung zwischen den Konstrukten gemeint (Ruwisch, 2021). Das Konstrukt der Data Literacy ist aus der Sta-

tistical Literacy erwachsen – ein Konstrukt, welches 1993 durch Wallman geprägt und durch konzeptionelle Überlegungen – insbesondere von Gal (2002) – z.B. um dispositionelle Elemente erweitert worden ist.

Mit Blick auf eine tragfähige Data Literacy schlägt Gould (2017) eine erweiterte („augmented“) Definition von Statistical Literacy vor, die um spezifische Datenkompetenz wie das Wissen, wie man grundlegende deskriptive Darstellungen von Daten erstellt, um reale Prozesse zu verstehen, ergänzt wird.

In der deutschen Bildungslandschaft und insbesondere im Hochschulsektor haben Schüller et al. (2021) den Begriff der Data Literacy geprägt (siehe oben). In den aktuellen Bildungsstandards finden sich im Inhaltsbereich „Daten und Zufall“ für die Primarstufe auch bereits wesentliche Aspekte von Data Literacy (siehe Barzel et al., 2022) – insbesondere spiegeln diese Aspekte auch die einzelnen Phasen des Datenanalysezyklus (PPDAC) nach Wild und Pfannkuch (1999) oder Franklin and Bargagliotti (2020) wider.

Im Datenanalysezyklus nach Wild und Pfannkuch (1999) geht alles von der statistischen Fragestellung (**P**roblem) aus, für dessen datenbasierte Beantwortung eine Datenerhebung geplant werden (**P**lan) und Daten erhoben werden müssen (**D**ata). Dies kann auf verschiedene Weisen realisiert werden: per Umfrage, Experiment oder Beobachtung. Schließlich müssen die Daten analysiert (**A**nalysis) und dann interpretiert werden, so dass die anfänglich aufgestellte Fragestellung mit den Daten beantwortet werden kann (**C**onclusions). Mit Blick auf die heutigen Anforderungen rund um Big Data und Data Science ist dieser Zyklus mit seinen Phasen neu zu denken und auszubauen (Ridgway, 2016) – für den Mathematikunterricht der Primarstufe bietet er aber ein großes Potential, die Durchführung statistischer Projekte zu begleiten und zu strukturieren und somit für eine unterrichtliche Transparenz sorgen.

3 Exemplarische Aspekte zur Förderung einer frühen Data Literacy im Mathematikunterricht der Primarstufe

Empfehlungen zur unterrichtlichen Förderung von Data Literacy finden sich vor allem in Neubert (2012) und Sill and Kurtzmann (2019)

aus nationaler sowie beispielsweise in Leavy et al. (2018) und Leavy et al. (2023) aus internationaler Perspektive. Einen umfassenden Überblick über den Stand empirischer Forschung bietet das Handbuch von Ben-Zvi et al. (2018) sowie der Handbuchartikel von Biehler et al. (2023). Fünf wesentliche Ideen der Förderung einer frühen Data Literacy lassen sich dabei insgesamt herauskristallisieren:

- Der Entwicklung statistischer Fragestellungen Aufmerksamkeit schenken und den Kindern die Möglichkeit geben, den Datenanalysezyklus selbst mitzugestalten;
- Fundamentale Datenoperationen früh und auf verschiedenen Repräsentationsebenen kennenlernen;
- Digitale Werkzeuge zur Unterstützung und Exploration umfangreicher Daten einsetzen;
- Ein Denken in Verteilungen anbahnen und Zusammenhänge zwischen Variablen untersuchen;
- Kontexte aus der Lebenswirklichkeit der Kinder nutzen und kritisches Denken anregen.

Dieser Beitrag stellt eine kurze Reise durch die ersten drei Aspekte vor – dabei wird zunächst eine kurze fachliche und fachdidaktische Konkretisierung des jeweiligen Aspekts im Vordergrund vorgenommen bevor auf ausgewählte praktische Umsetzungsideen für den Unterricht sowie Erkenntnisse aus empirischen Studien eingegangen wird. Wesentliche Grundlage für die folgenden Ausführungen ist dabei Frischemeier und Biehler (2024).

3.1 Der Entwicklung statistischer Fragestellungen Aufmerksamkeit schenken und den Kindern die Möglichkeit geben, den Datenanalysezyklus selbst mitzugestalten

Statistische Fragestellungen sind grundlegend für die Datenexploration und somit für ein sinnstiftendes Erleben des Datenanalysezyklus PPDAC von zentraler Bedeutung (Franklin & Bargagliotti, 2020). Fragestellungen können in der Stochastik sehr variantenreich sein – insbesondere lassen sich die Aspekte *Intention*, *Komplexität* und *Qualität* einer statistischen Fragestellung unterscheiden (Frischemeier & Biehler, 2024). Nehmen wir als Beispiel drei ausgewählte Fragen, die im

Rahmen von Unterrichtsprojekten aufgeworfen worden sind, um uns diese drei Aspekte *Intention*, *Komplexität* und *Qualität* einer statistischen Fragestellung klar zu machen:

- Anna: Haben die Viertklässler:innen mehr Spiele auf dem Tablet als die Drittklässler:innen?
- Ben: Wie unterscheiden sich die Jungen und die Mädchen in ihrer Freizeitgestaltung?
- Chris: Wie groß bist du?

Bei der Frage von Anna, „Haben die Viertklässler:innen mehr Spiele auf dem Tablet als die Drittklässler:innen?“, handelt es sich beispielsweise um eine statistische Fragestellung im Sinne einer Forschungsfrage. Diese Forschungsfrage enthält zwei Merkmale (*Klassenstufe* und *Anzahl Spiele auf dem Tablet*) und kann mit „Ja“ oder „Nein“ beantwortet werden. Die Frage von Ben, „Wie unterscheiden sich die Jungen und die Mädchen in ihrer Freizeitgestaltung?“, ist ebenfalls eine statistische Fragestellung im Sinne einer Forschungsfrage. Auch hier sind zwei Merkmale (*Geschlecht*, *Freizeitgestaltung*) enthalten. Im Vergleich zur Frage von Anna ist diese Frage allerdings offener und komplexer – zum einen reicht eine Antwort in Form von „Ja“/„Nein“ nicht aus, die Frage erfordert vielmehr eine elaborierte und differenziertere Antwort (Unterschiede zwischen Gruppen). Darüber hinaus muss das Merkmal *Freizeitgestaltung* auch weiter operationalisiert werden – Was meint Freizeitgestaltung? Was ist darunter zu verstehen? Sowohl die Frage von Anna als auch die Frage von Ben haben gemeinsam, dass sie nicht auf eine einzelne Person, also einzelne Merkmalsträger:innen, sondern auf eine Stichprobe abzielen. Die Frage von Chris, „Wie groß bist du?“, hingegen spricht nur eine spezifische Person an – und ist im statistischen Sinne keine Forschungsfrage, sondern viel mehr eine Frage, die zur Datenerhebung (z. B. in einem Interview oder in einem Fragebogen) genutzt werden kann.

Empirische Studien zeigen, dass es generell wichtig ist, Schüler:innen beim Generieren adäquater statistischer Fragen zu unterstützen, wie beispielsweise von Allmond and Makar (2010) betont wird. Die Fähigkeit, passende Fragestellungen für statistische Projekte zu formulie-

ren, stellt jedoch unabhängig vom Alter der Lernenden eine Herausforderung dar. Dies wird durch vielfältige Schwierigkeiten deutlich, die sowohl bei Schüler:innen der Primarstufe (Watson & English, 2017), als auch bei Schüler:innen der Sekundarstufe I (Arnold & Franklin, 2021) auftreten. Der Verlauf und der Erfolg statistischer Projekte hängen eng mit der Qualität der formulierten Fragestellungen zusammen, wie z.B. Frischemeier und Leavy (2020) feststellten. Daher ist es zunächst entscheidend, zwischen statistischen Fragestellungen und Fragebogenfragen (Fragen zur Datenerhebung, siehe oben) zu unterscheiden (Arnold & Franklin, 2021). Um die Unterscheidung zwischen statistischen Fragestellungen und Fragebogenfragen zu fördern, sollten Lerngelegenheiten geschaffen werden, die es den Schüler:innen ermöglichen, diese Unterschiede zu erkennen (Arnold & Franklin, 2021). Mit Blick auf die Überarbeitung der Fragestellung hinsichtlich der Aspekte *Komplexität* und *Qualität* wird empfohlen, bereits Grundschüler:innen im Alter von 9 bis 10 Jahren durch Peer-Feedback Möglichkeiten zu bieten, ihre statistischen Fragestellungen zu überarbeiten (Allmond & Makar, 2010). Unterstützungsmaterialien, Fragebogenfragen und statistische Fragestellungen zu unterscheiden, oder die *Qualität* der statistischen Fragestellungen für den Mathematikunterricht in der Primarstufe weiterzuentwickeln, finden sich z. B. in Frischemeier und Walter (2021).

3.2 Fundamentale Datenoperationen früh und auf verschiedenen Repräsentationsebenen kennenlernen und ein Denken in Verteilungen anbahnen

Eine weitere wichtige fundamentale Voraussetzung – auch mit Blick auf die Durchgängigkeit im Lernprozess – für den Ausbau einer tragfähigen Data Literacy sind das souveräne Ausführen grundlegender Datenoperationen sowie das Anbahnen eines Denkens in Verteilungen. Generell lässt sich sagen, dass Verteilungen eine zentrale fundamentale Idee in der Statistik darstellen und somit ein zentrales Ziel des Stochastikunterrichts darin besteht, ein Denken in Verteilungen zu entwickeln (Biehler, 2007).

Auf einer ersten Stufe ist es dabei wichtig, zwischen Verteilungen kategorialer (wie Lieblingstier, Fortbewegungsmittel zur Schule, etc.)

und numerischer Merkmale (wie Körpergröße, Anzahl der Fotos auf dem Smartphone, etc.) zu unterscheiden und, dass grundlegende Datenoperationen wie Klassifizieren (Trennen) und Anordnen zur visuellen Analyse (Stapeln) auf verschiedenen Ebenen und in spiralförmigen Lernprozessen erfahrbar gemacht und weiterentwickelt werden.

3.2.1 Verteilungen kategorialer Merkmale

Bei Verteilungen kategorialer Merkmale spielen Säulendiagramme als Darstellungsform eine zentrale Rolle. Diese Diagramme sind von der Primarstufe (English, 2012) über die Sekundarstufe I bis hin zur Sekundarstufe II und darüber hinaus DAS Darstellungsmittel für Verteilungen kategorialer Merkmale. Die Arbeit mit Datenkarten (Billion, 2023) kann den Prozess zur Erstellung von Säulendiagrammen in den Vordergrund rücken, dabei grundlegende Datenoperationen wie *Trennen* und *Stapeln* zugänglich machen und außerdem Lernende dazu motivieren, komplexere Auswertungen im Sinne einer bi- oder multivariaten Datenanalyse vorzunehmen. Mithilfe von Datenkarten können bereits junge Lernende die Eigenschaften konventioneller Säulen- oder Balkendiagramme erfassen (Frischemeier & Biehler, 2024).

Um ein Denken in Verteilungen bereits in der Primarstufe anzubahnen, wird ein spiralcurricularer Ansatz entlang verschiedener Repräsentationsebenen empfohlen. Die oben erwähnten Datenoperationen wie das *Trennen* und *Stapeln* von Daten(karten) sollten dabei erlernt werden. Diese ersten Sortier- und Kategorisierungsübungen können dazu beitragen, dass Lernende statistische Konzepte und Datenoperationen besser verstehen. Materialien wie Steckwürfel, Bauklötze und Datenkarten können in einer frühen Phase der Datenexploration als Repräsentanten für Merkmalsträger:innen dienen, wobei zunächst einfache (zwei Ausprägungen) und später komplexere Varianten (mehr als zwei Ausprägungen) untersucht werden. Darauf aufbauend (siehe 3.3) können dann digitale Werkzeuge die Exploration umfangreicher Datensätze unterstützen.

Wir stellen das durchgängige Erleben der Datenoperationen *Trennen* und *Stapeln* kurz exemplarisch dar. Im Elementarbereich können Piktogramm-Datenkarten (Frischemeier & Kuzu, 2024), die Informationen über Merkmalsträger:innen wie z.B. Lieblingstier, Lieblingshobby

etc. enthalten und bildlich dargestellt sind, genutzt werden, um erste Datenoperationen zu erleben. Insbesondere können die Kinder Merkmalsträger:innen nach bestimmten Merkmalen – wie z. B. Lieblingstier – trennen oder kategorisieren. Stapelt man die Piktogramm-Datenkarten in den einzelnen Kategorien übereinander, so kann bereits die Vorstufe zu einem Säulendiagramm zur Verteilung der kategorialen Variable *Lieblingstier* erzeugt werden. Eine Abstraktion auf einer weiteren Stufe (mit denselben Konsequenzen) kann dann durch die Nutzung von Steckwürfeln oder Bauklötzen angebahnt werden. Schließlich können – auch zum Anbahnen einer multivariaten Datenanalyse – Datenkarten in Form von Klebezetteln genutzt werden, um Merkmalsträger:innen durch diese zu repräsentieren. Jede:r Schüler:in kann zu gegebenen Merkmalen die individuellen entsprechenden Eigenschaften (z. B. *Lieblingstier*) und Merkmalsausprägungen (z. B. *Hund*) auf einem Klebezettel notieren. Die gesammelten Datenkarten einer Klasse können dann zunächst ungeordnet an der Tafel gesammelt und unter einer Forschungsfrage (beispielsweise „Wie sieht die Verteilung des Merkmals *Lieblingstier* bei uns in der Klasse aus?“) ausgewertet werden. Durch die Datenoperation *Trennen* werden die Datenkarten nach Ausprägungen (z. B. Hund, Katze, Kaninchen, etc.) getrennt. Im weiteren Prozess entsteht durch das *Stapeln* ein Datenkarten-Säulendiagramm und schließlich ein konventionelles Säulendiagramm zur Verteilung des Merkmals *Lieblingstier* in der Klasse. Ein nächster, weiterführender Schritt – insbesondere mit Blick auf die Anbahnung einer bi- oder sogar multivariaten Datenanalyse – kann dann die Untersuchung des Zusammenhangs zweier Merkmale (z. B. mithilfe einer Forschungsfrage wie „(Wie) Unterscheiden sich die Jungen und Mädchen bei der Wahl ihres Lieblingstiers?“) sein.

3.2.2 Verteilungen numerischer Merkmale

Das Konzept der Verteilung numerischer Daten und auch die Darstellung dieser als gestapeltes Punktdiagramm ist sehr anspruchsvoll und beinhaltet wesentliche grundlegende statistische Ideen wie Darstellung und Variabilität – diese Ideen können jedoch informell in für junge Kinder zugänglichen Kontexten begreifbar gemacht werden (Makar, 2018). Verschiedene Studien zeigen, dass junge Lernende be-

reits in der Lage sind, Informationen aus numerischen Daten abzuleiten unter anderem durch das individuelle Identifizieren von zentralen Häufungsbereichen in Verteilungen (z.B. Fielding-Wells, 2018; Makar & Allmond, 2018). Während Bakker und Gravemeijer (2004) zwischen einer lokalen Sicht („Daten als einzelne Punkte“) und einer globalen Sicht („Daten als Gesamtheit“) auf Daten und Verteilungen unterscheiden, differenzieren Konold et al. (2015) vier nicht-hierarchische Perspektiven auf Daten (*data as pointer*, *data as case value*, *data as classifier* sowie *data as aggregate*). Bei der Perspektive *data as case value* fokussieren sich Lernende auf einzelne Datenpunkte (z. B. Extremwerte von einzelnen Merkmalsträger:innen, die besonders auffallen), bei *data as aggregate* werden die Daten als eine Gesamtheit betrachtet und Charakteristika wie Form, Zentrum oder Streuung erkannt, die aus einzelnen Datenwerten nicht abzulesen sind. Unabhängig von den verschiedenen Kategorisierungen ist die Entwicklung einer aggregierten Sichtweise relativ selten und insbesondere für junge Schüler:innen schwierig (u.a. Konold et al., 2015). Im letzten Jahrzehnt gab es daher zahlreiche Forschungsstudien zu den Datenexplorationsprozessen und der Entwicklung des frühen statistischen Denkens junger Lernender. Ein besonderer Fokus lag dabei unter anderem auf den Interpretationen, Erfahrungen und dem Verständnis junger Schüler:innen hinsichtlich der Variation und Variabilität (z. B. Watson et al., 2020) oder auf ihren informellen inferentiellen Denkprozessen (z. B. Makar & Rubin, 2018). Die unterrichtliche Umsetzung der Grundidee des *Trennens* und *Stapelns* ist nicht nur für die Exploration der Verteilung kategorialer Variablen fundamental, sondern kann auch für die Exploration der Verteilung numerischer Variablen und für die Erstellung gestapelte Punktdiagramme eingesetzt werden. Alternativ können gestapelte Punktdiagramme auch ausgehend von Wertebalkendiagrammen erzeugt werden. Die oben angesprochenen zentralen Häufungsbereiche können Lernenden helfen, Verteilungen numerischer Merkmale und gestapelte Punktdiagramme zu beschreiben und zu interpretieren. Weitere Ideen zur Thematisierung von Verteilungen numerischer Variablen im Mathematikunterricht der Primarstufe finden sich in Frischemeier und Biehler (2024).

3.3 Digitale Werkzeuge zur Unterstützung und Exploration umfangreicher Daten einsetzen

Die Exploration von Datensätzen kann durch digitale Werkzeuge vereinfacht werden und die Arbeit mit Datenkarten ausbauen. Digitale Werkzeuge ermöglichen es den Schüler:innen, größere Datenmengen selbstständig zu analysieren und zu visualisieren und zwischen verschiedenen Visualisierungen sowie der Untersuchung verschiedener Fragestellungen zu switchen.

Eine erste Frage für Lehrkräfte ist, wie man an umfangreiche und reale Datensätze kommt. Für die Unterrichtspraxis gibt es da zwei Möglichkeiten: entweder können die Daten selbst durch ein Onlinetool (z. B. Google forms) erhoben werden oder man nutzt bereits erhobene Datensätze wie den Datensatz *Grundschüler:innen NRW 2017*, der 809 reale Fälle von Grundschüler:innen zum Medien- und Freizeitaktivitäten beinhaltet (siehe auch Frischemeier & Biehler, 2024).

Eine zweite Frage, die sich stellt, ist die Auswahl des digitalen Werkzeugs. Zwei digitale Werkzeuge, die geeignete Potentiale nach Walter (2018) für den Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht der Primarstufe aufweisen, sind TinkerPlots (www.tinkerplots.com) und CODAP (concord.codap.org).

TinkerPlots wurde auf Grundlage aktueller Erkenntnisse der Stochastikdidaktik entwickelt und für den Einsatz in den Klassenstufen 3 bis 8 konzipiert. Die Software zielt darauf ab, Schüler:innen einen frühen Zugang zu statistischen und probabilistischen Denkweisen zu ermöglichen (Biehler et al., 2013). Ein besonderes Merkmal von TinkerPlots ist die Anknüpfung an das Arbeiten mit Datenkarten, was eine intuitive Einführung in statistische Prozesse bietet. Die Erstellung von Graphiken erfolgt mittels drei grundlegender Datenoperationen: *Trennen*, *Ordnen* und *Stapeln*. Diese Operationen bieten Lernenden die Möglichkeit, auch umfangreiche Datensätze zu analysieren und somit an komplexeren statistischen Projekten zu arbeiten. Konkret ermöglicht TinkerPlots es, Denk- und Arbeitsprozesse umzulagern, indem Datenoperationen wie *Trennen* und *Stapeln* auf größere Datensätze übertragen werden (Frischemeier & Biehler, 2024). Dies erleichtert das Erstellen konventioneller Diagramme, selbst bei der Analyse größerer Datenmengen. Durch die Strukturierung von Darstellungen mittels der

Funktionen *Trennen*, *Ordnen* und *Stapeln* bietet TinkerPlots eine didaktisch wertvolle Unterstützung im Stochastikunterricht, die nahtlos an die Operationen mit den Materialien (Piktogramm-Datenkarten, Steckwürfel, Datenkarten, etc.) anschließt. Darüber hinaus ermöglicht die Software, verschiedene Darstellungsformen gleichzeitig anzuzeigen und somit Darstellungen miteinander zu vernetzen, was das Verständnis komplexer statistischer Zusammenhänge fördert.

Das Tool CODAP stellt eine vereinfachte Version von TinkerPlots dar. Sie ermöglicht es Lernenden, Daten auf vielfältige Weise zu analysieren und zu manipulieren, indem sie diese – ebenfalls wie in TinkerPlots – nach selbst gewählten Fragestellungen „drehen und wenden“ können. Ein besonderes Merkmal von CODAP ist, dass die Software kostenfrei und browserbasiert ist, was einen schnellen Einstieg ermöglicht. Lehrkräfte können eine digitale Datenexploration in CODAP leicht vorbereiten (z. B. durch das Importieren von Datensätzen), sodass sie problemlos im Unterricht eingesetzt werden kann.

Beide digitalen Werkzeuge bieten wertvolle Potentiale (siehe Walter 2018) für den Einsatz im Mathematikunterricht der Primarstufe:

- Denk- und Arbeitsprozesse auslagern: beide Tools erleichtern das Übertragen von grundlegenden Datenoperationen auf größere Datensätze. Dies ermöglicht es den Lernenden, mit umfangreichen Datenmengen umzugehen und konventionelle Diagramme zu erstellen. Besonders hilfreich ist dabei die schnelle und flexible Analyse von Daten.
- Darstellungen strukturieren: beide Tools unterstützen das Strukturieren von Darstellungen, indem sie die Daten sortieren, trennen und stapeln. Dies schafft eine klare und verständliche Visualisierung der Daten.
- Darstellungen vernetzen: ein weiteres Potenzial liegt in der gleichzeitigen Abbildung verschiedener Darstellungsformen, wie Datenkarten, Tabellen und Graphen/Diagrammen. Dies ermöglicht es den Lernenden, unterschiedliche Perspektiven auf die Daten einzunehmen und Zusammenhänge zu erkennen.

Schließlich lässt sich sagen, dass der Einsatz dieser digitalen Werkzeuge zur Entwicklung einer tragfähigen Data Literacy bei Lernenden über alle Altersstufen hinweg beiträgt (u. a. Ben-Zvi, Gravemeijer & Ainley, 2018; Johansen, 2024).

4 Fazit

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass für die Förderung einer frühen Data Literacy zentral ist, dass Lernende (und Lehrkräfte!) statistische Fragestellungen ernst nehmen und den Kindern die Möglichkeit geben, den Datenanalysezyklus mit realen, lebensweltbezogenen Daten zu erleben. Damit einhergehend sollte es den Kindern in diesem Kontext auch ermöglicht werden, durch konkrete Erfahrungen spiralförmig und durchgehend ein Verständnis für fundamentale Datenoperationen wie *Trennen* und *Stapeln* zu entwickeln. Die Einbindung digitaler Werkzeuge eröffnet neue Möglichkeiten zur individuellen und tiefergehenden Exploration größerer Datensätze.

Auch wenn es nicht Teil dieses Beitrags war, möchte ich dennoch abschließend ganz kurz auf den fünften wichtigen Aspekt zur Förderung einer frühen Data Literacy eingehen: der Kontext, aus dem die Daten stammen, muss ernst genommen werden und im Lebensweltbezug der Kinder verortet sein. Insbesondere muss eine Integration aus Kontextwissen und Erkenntnissen aus den Daten bei der Interpretation der Daten und der anschließenden Argumentation initiiert werden (auch als Teil der Analyse und Interpretation von Ergebnissen, Analyse und Conclusions innerhalb von PPDAC). Dies kann realisiert werden, in dem z.B. vorgegebene Aussagen (Schlagzeile einer Pressemitteilung) oder aus den Daten abgeleitete Argumente hinterfragt und kritisch reflektiert werden (Birk, 2024).

Abschließend bleibt zu bemerken, dass schließlich die Umsetzung dieser Forderungen und eine adäquate Implementierung im Mathematikunterricht der Primarstufe eine entsprechende Aus- und Weiterbildung von Mathematiklehrkräften zwingend voraussetzt.

Literatur

Allmond, S., & Makar, K. (2010). Developing primary students' ability to pose questions in statistical investigations. *Proceedings of the 8th international conference on teaching statistics*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Arnold, P., & Franklin, C. (2021). What makes a good statistical question? *Journal of Statistics and Data Science Education*, 29(1), 122–130. <https://doi.org/10.1080/26939169.2021.1877582>

Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distributions. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 147–168). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_7

Barzel, B., Gasteiger, H., Greefrath, G., Maritzen, N., Nührenböcker, M., & Stanat, P. (2022). Weiterentwicklung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich und die Sekundarstufe I. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 30(3), 208–211. <https://doi.org/10.1515/dmvm-2022-0066>

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6>

Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K., & Ainley, J. (2018). Design of statistics learning environments. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 473–502). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_16

Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (2018). *International handbook of research in statistics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7>

Bescherer, C., Büscher, C., Lengnink, K., Pinkernell, G., Reinhold, F., Schacht, F., Schreiber, C., & Walter, D. (2024). Mathematische Bildung und Digitalisierung: Strategiepapier der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM). *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*(117), 6–14.

Biehler, R. (2007). Denken in Verteilungen - Vergleichen von Verteilungen. *Der Mathematikunterricht*, 53(3), 3–11.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technology for Enhancing Statistical Reasoning at the School Level. In M. A. Clements, A. J.

Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K.-S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-689). Springer Science + Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_21

Biehler, R., Engel, J., & Frischemeier, D. (2023). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 243-278). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_8

Billion, L. (2023). A Semiotic Perspective on Learning Mathematics with Digital and Analogue Material: Primary School Children Acting on Statistical Diagrams. *Statistics Education Research Journal*, 22(2). Article 8. <https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.420>

Birk, L. (2024). Kann man das so sagen? Förderung kritischen Denkens zwischen Schlagzeile und Daten. *Grundschulmagazin*, 2024(2), 21–26.

English, L. D. (2012). Data modelling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 15-30. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9377-3>

Franklin, C., & Bargagliotti, A. (2020). Introducing GAISE II: A guideline for precollege statistics and data science education. *Harvard Data Science Review*, 2(4), 1–9. <https://doi.org/10.1162/99608f92.246107bb>

Fielding-Wells, J. (2018). Dot plots and hat plots: supporting young students emerging understandings of distribution, center and variability through modeling. *ZDM – Mathematics Education*, 50(7), 1125–1138. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0961-1>

Frischemeier, D. (2024). Daten handlungsorientiert und mediengestützt unterrichten: Frühes statistisches Denken im Mathematikunterricht der Primarstufe entwickeln. *Grundschulmagazin*, 2024(2), 2–6.

Frischemeier, D., & Biehler, R. (2024). *Daten-Spürnasen auf Spurensuche: Datenanalyse in der Grundschule mit digitalen Werkzeugen*. Klett/Kallmeyer.

Frischemeier, D., & Kuzu, T. E. (2024). Datenexploration mit Piktogramm-Datenkarten. *Grundschulmagazin*, 2024(2), 7–12.

Frischemeier, D., & Leavy, A. (2020). Improving the quality of statistical questions posed for group comparison situations. *Teaching Statistics*, 42(2), 58–65. <https://doi.org/10.1111/test.12222>

- Frischemeier, D., & Walter, D. (2021). Daten für Kinder: Anregungen für das Sammeln, Darstellen und Interpretieren. *Fördermagazin Grundschule*, 2021(4), 29–36.
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review* 70(1), 1–51. <https://doi.org/10.2307/1403713>
- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). Qualitätvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *mathematik lehren*, 2024(242), 2–9.
- Johansen, S. G. (2024). Students' Tool-Shaped Conceptualisation of the Idea of Statistical Distributions: The Case of Frida. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1–30. <https://doi.org/10.1007/s40751-024-00138-9>
- Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J., & Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 305–325. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9529-8>
- Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparistodemou, E. (2018). *Statistics in Early Childhood and Primary Education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7>
- Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., Paparistodemou, E., & Frischemeier, D. (2023). Research on Early Statistical and Probabilistic Thinking. *Statistical Education Research Journal*, 22(2). <https://doi.org/10.52041/serj.v22i2>
- Makar, K. (2018). Theorising links between context and structure to introduce powerful statistical ideas in the early years. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 3–20). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_1
- Makar, K., & Allmond, S. (2018). Statistical modelling and repeatable structures: purpose, process and prediction. *ZDM – Mathematics Education*, 50(7), 1139–1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0956-y>
- Makar, K., & Rubin, A. (2018). Learning about Statistical Inference. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261–294). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8

Neubert, B. (2012). Leitidee: *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit: Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Mildenerger.

Ridgway, J. (2016). Implications of the Data Revolution for Statistics Education. *International Statistical Review*, 84(3), 528–549. <https://doi.org/10.1111/insr.12110>

Ruwisch, S. (2021). Statistisches Denken in der Grundschule: Alles nur Zufall?. In A.S. Steinweg (Hg.), *Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2021*. University of Bamberg Press. <https://doi.org/10.20378/irb-59254>

Schüller, K. (2019). Ein framework für data literacy. *AStA Wirtschafts-und Sozialstatistisches Archiv*, 13(3-4), 297–317. <https://doi.org/10.1007/s11943-019-00261-9>

Schüller, K., Koch, H., & Rampelt, F. (2021). *Data-Literacy-Charta*. Stifterverband, Berlin.

Sill, H.-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7>

Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-19067-5>

Watson, J. M., & English, L. D. (2017). Statistical problem posing, problem refining, and further reflection in grade 6. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 17, 347–365. <https://doi.org/10.1080/14926156.2017.1380867>


Watson, J., Fitzallen, N., English, L., & Wright, S. (2020). Introducing statistical variation in year 3 in a STEM context: Manufacturing licorice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(3), 354-387. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1562117>

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–248. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

Prof. Dr. Daniel Frischemeier
Universität Münster
Institut für grundlegende und inklusive mathematische Bildung
Johann-Krane-Weg 39
48149 Münster
dfrische@uni-muenster.de

Fortbildungsmaterial im Wandel: Adaptionshandlungen von Multiplizierenden im Blick

von Daniela Götze

 0000-0002-2826-3684

Ein Fortbildungsprogramm hat größere Reichweite, wenn Multiplizierende nach vorheriger Qualifizierung die Fortbildungen selbst leiten. Hierfür bekommen sie passendes Fortbildungsmaterial an die Hand, welches sie für die eigene Arbeit adaptieren. Im Artikel wird in der Tiefenanalyse einer Multiplizierenden aufgezeigt, dass bestimmte Adaptionen die Unterrichtsentwicklungsprozesse bei den Lehrkräften erschweren können. Hieraus werden Konsequenzen für die Weiterarbeit im QuaMath-Programm gezogen.

Schlüsselwörter: Multiplizierende, Adaptionen, Fortbildungsmaterial, Unterrichtsentwicklungsprozesse

1 Zum Grundgerüst von Fortbildungsprogrammen

Vor etwa 20 Jahren haben Adler et al. (2005) die Lehrkräfteprofessionsforschung noch als „aufstrebendes Forschungsfeld“ bezeichnet. In vor allem kleinen Stichproben wurden zentrale Pionierarbeiten bezüglich des Lehrkräftelernens geleistet, sodass insbesondere in den letzten Jahren die Bestrebung nach einer größeren Reichweite von mathematikbezogenen Professionalisierungsprogrammen zugenommen hat. Diese arbeiten oftmals nach dem Kaskadenmodell (Maaß & Artigue, 2013), welches auf der Idee des scaling up fußt: Die teilnehmenden Lehrkräfte werden nicht von denjenigen direkt fortgebildet, die das Material entworfen haben, sondern von Multiplizierenden, die wiederum für die Durchführung des professionell entwickelten Programms vorab qualifiziert wurden. Für die Arbeit mit den Lehrkräften erhalten die Multiplizierenden Fortbildungsmaterialien mit Foliensätzen, Arbeitsblättern und Videos für Fortbildungsaktivitäten, Inputs und Anregungen für Reflexionen und Diskussionen usw., die wissenschaftlich evaluiert auf die beruflichen Lernbedürfnisse und Lernwege der Lehrkräfte zugeschnitten sind (Prediger, 2019). Die Umsetzung dieser Materialien ist allerdings nicht als Top-Down-Prozess von den Forschenden, zu den Multiplizierenden und schließlich zu den Lehrkräften angelegt. Denn eine zu starke Umsetzungstreue wird nicht selten zum hemmenden Faktor, wenn notwendige Adaptationen an die jeweiligen spezifischen Bedingungen (z. B. im Hinblick auf die jeweilige Ziel-

gruppe) nicht vorgenommen werden (Schrader et al., 2020). Gleichwohl dürfen Adaptionen nicht dazu führen, dass die zentralen Aussagen des Fortbildungsmaterials nicht mehr erhalten bleiben.

Aber wie kann das gelingen? Dies ist Gegenstand des vorliegenden Beitrags.

2 Adaptionshandlungen von Multiplizierenden

Adaptionshandlungen von Multiplizierenden können unter verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden. So kann beispielsweise die Umsetzungstreue der Kernkomponenten des gesamten Fortbildungsprogramms betrachtet werden. Darunter ist die möglichst genaue Umsetzung der zur Verfügung gestellten Materialien gemeint (Jacob et al., 2017). Die Umsetzungstreue fokussiert somit eher das „Was wurde umgesetzt?“ aber weniger das „Wie wurde es umgesetzt?“. Im Fokus stehen Kernkomponenten, nicht aber Kernkompetenzen.

Ein anderer Zugang der Beforschung von Adaptionshandlungen schreibt den Multiplizierenden eine „pedagogical design capacity“ (Brown, 2009) – einem Ansatz aus der Forschung von Adaptionshandlungen bei Lehrkräften – zu, denn „[...] materials require craft in their use; they are inert objects that come alive only through interpretation and use by a practitioner“ (Brown, 2009, S. 22). Gemäß diesem Ansatz stellt sich nicht die Frage, *ob* Materialien verändert werden, sondern *wie*. Ausschlaggebend sind nicht nur die oberflächlich, kosmetische Veränderungen, sondern vor allem die Veränderungen, die die Kernaussagen beeinflussen und somit eine tiefgehende Veränderung im Material bewirken. Diesen Ansatz verfolgend haben Leufer et al. (2019) die Unterscheidung materialbasierter und themenspezifischer Adaptionen vorgenommen. Materialbasierte Adaptionen werden als solche definiert, wenn sie sich auf konkrete Teile des Materials beziehen und damit sichtbar sind. Das kann durch Auslassungen, Veränderungen, Umsortierungen oder Neueinfügungen geschehen (Leufer et al., 2019).

Thematische Adaptionen fokussieren die Veränderung von Themen und Schwerpunktsetzungen innerhalb des Materials. Das kann bedeuten, dass das vorgegebene Material ggf. gar nicht verändert wird, aber

beispielsweise einzelne Abschnitte oder auch Aktivitäten vernachlässigt oder auch ganz anders als intendiert behandelt werden. Thematische Adaptionen führen somit häufig zu einer Verschiebung der Kernaussagen innerhalb des Materials (Zwetzschler et al., 2016). Thematische Adaptionen werden oftmals durch die antizipierten Bedürfnisse der Teilnehmenden begründet (Leufer et al., 2019). Diese Orientierung ist einerseits erforderlich, um die Fortbildung möglichst auf die individuellen Bedürfnisse der Teilnehmenden zuschneiden zu können. Sie birgt aber auch die Gefahr der Verschiebung der drei zentralen Wissensfacetten für Lehrkräftefortbildungen, die im Material angesprochen werden sollten (Cochran-Smith & Lytle, 1999, vgl. Abb. 1).

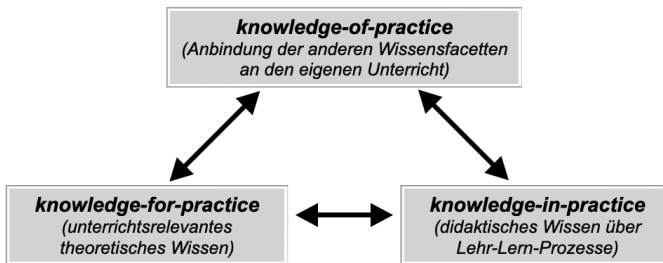


Abb. 1 Wissensfacetten, die im Rahmen von Fortbildung adressiert werden sollten

Knowledge-for-practice umfasst das notwendige theoretische aber unterrichtsrelevante Hintergrundwissen zum behandelten Themengebiet. Sie kann als die *Theorie in der Praxis* oder *für die Unterrichtspraxis relevantes theoretisches Wissen* bezeichnet werden (Cochran-Smith & Lytle 1999) und umschreibt daher das Wissen, auf das sich Lehrkräfte bei der Unterrichtsplanung stützen sollten (Darling-Hammond & Bransford, 2005). Die Betonung der Relevanz für den Unterricht impliziert, dass die theoretischen Bezüge konkret mit dem Lerngegenstand des Fortbildungsprogramms verknüpft sein sollten, denn eine Fokussierung auf rein abstraktes Wissen hat nachweislich keinen Einfluss auf Unterrichtsentwicklungsprozesse (Joyce & Showers, 2002).

Knowledge-in-practice wird aktiviert, wenn Lehrkräfte unterrichtsrelevante Entscheidungen beispielsweise in der Unterrichtsplanung treffen. So müssen sie lernen das Potenzial einer reichhaltigen Aufgabe zu erkennen und unterrichtlich aufzubereiten. Ebenso ist dieses Wissen notwendig, um (typische) Strategien oder auch Fehlermuster in

Lernendenbearbeitungen zu erkennen und diagnosegeleitet Förderung zu planen. Es ist das Praxiswissen, welches vor allem in der Planung des (weiteren) Unterrichts relevant wird (Cochran-Smith & Lytle 1999).

Knowledge-of-practice trennt im Gegensatz zu den ersten beiden Wissensfacetten nicht das unterrichtsrelevante theoretische Wissen und das praktische Wissen voneinander. Vielmehr wird davon ausgegangen, dass das Wissen, das Lehrkräfte benötigen, um gut zu unterrichten, entsteht, wenn Lehrer ihr eigenes Klassenzimmer als Ort empirischer Erprobungen behandeln und die Unterrichtserfahrungen aufgrund der beiden anderen Wissensfacetten reflektieren (Cochran-Smith & Lytle 1999). Dies kann im Fortbildungsmaterial beispielsweise durch die Einbindung von Erprobungsaufträgen für die Unterrichtspraxis Berücksichtigung finden, die in der Fortbildung von den Teilnehmenden gemeinsam geplant, anschließend im eigenen Mathematikunterricht durchgeführt und in einer nächsten Fortbildungsveranstaltung gemeinsam reflektiert werden (Prediger & Selter, 2024).

In der Gestaltung von Fortbildungsmaterialien sind die ersten beiden Wissensfacetten gut durch die Darlegung des unterrichtsrelevanten theoretischen Wissens und der Umsetzung dieses Wissens durch z. B. kognitiv aktivierende Aufgaben und Unterrichtsmethoden implementierbar. Beim *knowledge-of-practice* hingegen bedarf es der unterrichtlichen Einbettung der anderen beiden Wissensfacetten: Inwiefern wird der Fortbildungsgegenstand bereits im eigenen Unterricht umgesetzt? Wie kann er im eigenen Mathematikunterricht verstärkt werden? Somit ist die Adressierung aber insbesondere eine Verknüpfung und damit unterrichtliche Einbettung aller drei Wissensfacetten in einer Lehrerfortbildung eine zentrale Gelingensbedingung, um Unterrichtsentwicklungsprozesse zu begünstigen.

Bezüglich der Berücksichtigung und Verknüpfung dieser drei Wissensfacetten zeigte die Studie von Leufer et al. (2019), dass Multiplizierende oftmals die eigentlich intendierte Wissensfacette eines bestimmten Abschnitts im Fortbildungsmaterial nicht als solche nutzen oder diese nebeneinandergestellt und somit nicht miteinander verknüpft werden. Wie sich derartige Adaptionen durch die Verschiebung der Wissensfacetten auf die Fortbildung auswirkt, soll im Folgenden an

Ausschnitten aus einer Studie mit Multiplizierenden¹ der Primarstufe illustriert werden.

3 Adressierung der Wissensfacetten im Rahmen der „Fachoffensive Mathematik“

3.1 Hintergrund und Design der Studie

Die in Kapitel dargelegten Daten stammen aus der „Fachoffensive Mathematik“ in NRW. Im Rahmen dieses durch das Bundesland NRW geförderten Projekts (<https://www.schulministerium.nrw/masterplan-grundschule>) werden Multiplizierende in allen 53 Schulämtern in NRW dafür qualifiziert, Grundschulen bei der schulinternen Unterrichtsentwicklung zu unterstützen. Neben vor allem beratenden Tätigkeiten arbeiten diese Personen mit mindestens einem Lehrkräftenetzwerk – bestehend aus etwa 20 Lehrkräften aus sechs bis zehn verschiedenen Grundschulen – an zentralen inhaltlichen Basisthemen wie z. B. „Basiskompetenzen sichern – Rechenschwierigkeiten vermeiden“ (Details siehe: <https://pikas.dzlm.de/node/2096>). Hierfür hat das PI-KAS-Projektteam Materialien für die Netzwerkarbeit erstellt und die Multiplizierenden für die Ausbringung dieses Materials qualifiziert. Unterrichtsmaterialien, welche die Lehrkräfte zur Erprobung im eigenen Unterricht und damit als Grundlage der gemeinsamen Reflexion in den von den Multiplizierenden durchgeführten Netzwerkveranstaltungen einsetzen können, werden ebenso bereitgestellt. Darüber hinaus gibt es regelmäßige Austauschtreffen, in denen u. a. auch Adaptionsmöglichkeiten der Materialien behandelt werden.

Mit Beginn der Netzwerkarbeit im Schuljahr 2023/24 erklärten sich fünf Multiplizierende bereit, ihre Netzwerkarbeit intensiv begleiten zu lassen. Eine weitere Multiplizierende kam Ende des Schuljahres hinzu. Die einzelnen Netzwerktreffen dieser Multiplizierenden wurden videografiert, die dafür genutzten Materialien analysiert und Interviews mit den Multiplizierenden und mit einigen teilnehmenden Lehrkräften geführt.

¹ Diese werden im besagten Projekt als „Fachberatende“ bezeichnet, da sie vor allem Beratungstätigkeiten übernehmen. Für den besseren Lesefluss werden sie im Folgenden als „Multiplizierende“ bezeichnet.

3.2 Gestaltung des Materials

Die Materialien für die Netzwerkarbeit zum Thema „Basiskompetenzen sichern – Rechenschwierigkeiten vermeiden“ gliederten sich nach den im SWK Gutachten (2022) genannten arithmetischen Basiskompetenzen ‚Zahlverständnis‘, ‚Operationsverständnis‘, ‚Stellenwertverständnis‘, ‚Schnelles Kopfrechnen‘, ‚Zahlenrechnen‘ und ‚Ziffernrechnen‘. Zur Ausbringung dieses Basisthemas wurden den Fachberatern insgesamt sieben aufeinander aufbauende Module angeboten, wobei sich das Zahlenrechnen über zwei Module erstreckte (siehe <https://pikas.dzlm.de/node/587>). In den Materialien wurde das *knowledge-for-practice* in der Form adressiert, dass in einem ersten Abschnitt verdeutlicht wurde, welche Verstehensgrundlagen der jeweiligen Basiskompetenz zugrunde liegen. Das *knowledge-in-practice* wurde in der Diagnose dieser Verstehensgrundlagen in z. B. schriftlichen Kinderbearbeitungen sowie in der Darlegung möglicher Förderanregungen behandelt. Das *knowledge-of-practice* wurde durch die Berücksichtigung bereits bestehender Unterrichtspraktiken der teilnehmenden Lehrkräfte, die Anbindung der dargelegten Fördermöglichkeiten an den eigenen Unterricht und durch den Erprobungsauftrag, bei dem (neue) verstehensorientierte Förderanregungen für den eigenen Unterricht geplant und erprobt werden sollten, angesprochen. Somit dienten vor allem die Aktivitäten, die an bestehende Unterrichtspraktiken anknüpften, neue Ideen für den eigenen Mathematikunterricht etablierten sowie zur konkreten Umsetzung im eigenen Mathematikunterricht aufforderten, der ständigen Verknüpfung von mindestens zwei Wissensfacetten. Inwiefern die Multiplizierenden die Verknüpfung dieser Wissensfacetten gelang, wird im Folgenden exemplarisch am Fallbeispiel der Multiplizierenden Kathrin dargelegt.


4 Verknüpfung der Wissensfacetten als Herausforderung von Multiplizierenden



Die Tiefenanalyse der Adaptionen von Kathrin in Bezug auf die drei Wissensfacetten soll verdeutlichen, wie herausfordernd diese Adressierung sein kann, sofern das Fortbildungsmaterial nicht adäquat unterstützt.


Kathrin – eine Novizin in der Fortbildung – hat in ihrem ersten Netzwerktreffen das Thema „Diagnose und Förderung von Zahlverständnis“ erarbeitet. Dabei hat sie den ihr zur Verfügung gestellten Foliensatz nahezu komplett übernommen. Viele inhaltlichen Folien hat sie erhalten, gleichwohl – und das war das Interessante bei Kathrin – hat sie nahezu alle Aktivitäten von den Folien gestrichen.

So wurde zu Beginn des Foliensatzes eine Aktivität vorgeschlagen, mit der die teilnehmenden Lehrkräfte zunächst für sich selbst und anschließend gemeinsam mit anderen reflektieren sollten, wie sie guten Mathematikunterricht definieren.

Warm-Up: Was ist für Sie guter Mathematikunterricht?

 **Arbeitsauftrag: Selbstreflexion**
Was sind für Sie Kriterien guten Mathematikunterrichts?

 15 Minuten  **Arbeitsauftrag: Austausch zu zweit**
Vergleichen Sie immer zu zweit Ihre Antworten. Welche Kriterien doppeln sich? Welche nicht?

 **Arbeitsauftrag: Sammeln im Plenum**
Sammeln Sie Ihre Ergebnisse mit der gesamten Gruppe

Sinn der nächsten Aktivität

1. Phase: Was ist guter Mathematikunterricht? (20 min)

15 min **Auftrag: „Gute Kriterienkriterien“**
Die Lehrkräfte beschaftigen sich mit der Frage „Was ist für mich guter Mathematikunterricht?“ und sammeln dazu wesentliche Aspekte.

5 min **1. Folie**

- Die nächste Folie dient dazu:
 - Feststellen, welche Bewusstheit die Lehrkräfte zur Thematik mitbringen (Schnelldiagnostik); andersherum: „Welches Bild von Mathematik haben die Lehrkräfte?“;
 - Bestandaufnahme/ Einschätzung und die Lehrkräfte sensibilisieren !! Darüber ins Gespräch kommen,
 - Überleitung zu unsere Ideen eines guten Mathematikunterrichts.
- Didaktische Umsetzung:
 - online: TaskCard, Mentimeter, MiroBoard oder Mural (Educational Lizenzen können kostenfrei beantragt werden)
 - Präsenz: Kartenaufgabe im Plenum oder individuelle Mindmap (diese aufheben lassen)
 - ! Sie können die für Sie passende Aktivität wählen
 - Notieren Sie sich auf einem Zettel, was Sie sich für die Zukunft vornehmen für sich und für Ihre Schützlinge und Schüler
 - Bewahren Sie den Zettel auf, um ihn sich am Ende der ersten sechs Teilmodule/ am Ende der Fortbildung noch einmal anzuschauen

Abb. 2 Aktivität zur Anknüpfung des knowledge-for-practice an die bestehenden Unterrichtspraktiken

Das Anknüpfen an bestehende Praktiken sollte dazu beitragen, dass die anschließend in den Folien vorgestellten Kriterien eines verstehenorientierten Mathematikunterrichts (Prediger et al., 2022) an die eigene bestehende Unterrichtspraxis angeknüpft werden können (vgl. Abb. 2). Ziel war somit eine (erste) Verknüpfung von knowledge-for-practice und knowledge-of-practice: Wo finden diese theoretischen Qualitätskriterien bereits im eigenen Mathematikunterricht Berücksichtigung? Um dies zu verdeutlichen wurde dem Foliensatz eine ausgeblendete Folie beigefügt (vgl. Abb. 2, rechter Teil), in der diese Intention der Anknüpfung und auch der Nutzen für die eigene Veranstaltung transparent gemacht wurde.

Kathrin aber entschied sich dafür, diese Aktivität und zudem auch die weiteren Folien, auf denen die Prinzipien für qualitativollen Mathematikunterricht (Prediger et al, 2022) erläutert wurden, auszulassen. Sie

begründete ihre Entscheidung teilnehmendenorientiert, da sie eine Ablehnung der Teilnehmende vermutete.

K: [...] Mein Gedanke war: Wenn ich anfangen damit, wie alle guten Mathematikunterricht machen sollen, habe ich sie alle schon verloren. Ich weiß wie beratungsresistent Lehrkräfte sind. Wenn ich denen sage: ich zeige euch jetzt was Geiles und Neues und hier sind die Leitideen für guten Mathematikunterricht, kommuniziere ich ja implizit schon: Das, was ihr macht ist kein guter Mathematikunterricht, weil ich zeige euch das ja jetzt.

Kathrin war nicht die einzige Multiplizierende, die diese Folien ausließ. Anscheinend blieb unklar, wie dieser Abschnitt im Foliensatz sich in das Gesamtkonzept der entsprechenden Veranstaltung eingliederte. Die *Geschichte des Moduls* wurde nicht transparent.

Die Aktivität, mit der Kathrin alternativ in ihre Veranstaltung einstieg, diente der Verknüpfung von knowledge-for-practice und knowledge-in-practice, sodass eine von Kindern bearbeitete Eingangsstandortbestimmung zum Zahlverständnis vor allem unter der Perspektive der durch diese Standortbestimmung diagnostizierbaren Verstehensgrundlagen analysiert werden sollte. Es ging also nicht nur um die Diagnose der Kinderbearbeitung, sondern auch darum, welche Verstehensgrundlagen bezüglich des Zahlverständnisses durch diese Standortbestimmung erhoben werden. Somit sollten in einem ersten Schritt die empirisch belegten Verstehensgrundlagen des Zahlverständnisses identifiziert und gemeinschaftlich gesammelt werden. Kathrin moderierte diese Arbeitsphase in ihrer Veranstaltung wie folgt:

Kathrin: [...] und da würde ich Sie jetzt bitten sich diese Eingangsstandortbestimmung anzuschauen und sich zu überlegen was die Kinder können müssen und was sie mitbringen müssen, um diese Aufgaben erfolgreich zu bearbeiten. Welche Fähigkeiten? [...] Ich würde jetzt gerne die Verstehensgrundlagen der Reihe nach durchgehen. Was müssen die Kinder können für diese Eingangsstandortbestimmung?

Es ist zu erkennen, dass Kathrin die Teilnehmenden bei der Identifikation der Verstehensgrundlagen aktiv beteiligte. Gleichwohl blieb die

Verknüpfung zu den konkreten Kinderbearbeitungen aus, d. h. es wurden zwar (einige) Verstehensgrundlagen identifiziert, aber nicht weiter diagnostiziert. Die Anwendung des (neuen) Wissens bei der Diagnose von konkreten Kinderbearbeitungen blieb aus. Die Chance, der unmittelbaren Verknüpfung von knowledge-for-practice und knowledge-in-practice wurde somit von ihr nicht genutzt. Allerdings fehlten diese Informationen im Foliensatz, sodass die Verknüpfungsidee im Material nicht transparent gemacht wurde. Somit war es nicht weiter verwunderlich, dass Kathrin – als Novizin in der Fachberatung – diese Verknüpfung nicht von sich aus erkannte und entsprechend moderierte. Dazu hätte es konkrete *Ausführungen über die Zielsetzung der Aktivität* im Material gebraucht.

Im weiteren Verlauf des Netzwerktreffens hat Kathrin weitere drei Aktivitäten ausgelassen. Darunter waren zwei Aktivitäten, die zur direkten Verknüpfung von knowledge-of-practice und knowledge-in-practice hätten beitragen können (vgl. Abb. 3). Beide Aktivitäten setzten bei den eigenen Unterrichtspraktiken an und dienten dazu, diese mit den im Material angebotenen Anregungen zur förderorientierten Diagnose zu verknüpfen. Aber auch hier gab es für Kathrin keine erläuternden Hintergrundinformationen im Foliensatz, warum und mit welchen Zielen diese Aktivität in der konkreten Veranstaltung mit den Lehrkräften hätte durchgeführt werden sollen, sodass vom Materialdesign her die *Ausführungen über die Zielsetzung der Aktivität* und die *Möglichkeiten der Moderation* nicht transparent gemacht wurden.



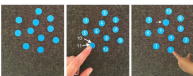




Erfahrungsaustausch: Prozessbegleitende und langfristige Diagnose	Zählen spielerisch fördern
 	
<p> 10 Minuten</p> <p></p> <p>Wie gestalten Sie prozessbegleitende und langfristige Diagnose in Ihrem Mathematikunterricht bzw. an Ihrer Schule? Welche Aufgabenformate und Methoden haben sich bewährt?</p> <p>Schreiben Sie Ihr bestes Beispiele auf Post-Its/ins TaskCard. Erklären Sie möglichst genau, wie Ihr Aufgabenformat/ Ihre Methode funktioniert und was daran so gut ist.</p>	<p> 10 Minuten</p> <p></p> <p>Wie diagnostizieren und fördern Sie die Zählkompetenzen Ihrer Kinder? Welche spielerischen Aktivitäten haben sich bewährt?</p> <p>Schreiben Sie Ihr bestes Beispiel auf Post-Its/ins TaskCard. Erklären Sie möglichst genau, wie Ihre spielerische Aktivität funktioniert und was daran so gut ist.</p>

Abb. 3 Ausgelassene Aktivitäten zur Verknüpfung von knowledge-in-practice mit knowledge-of-practice

Die Praxiserprobung dient der Verknüpfung aller Wissensfacetten. Ihr kommt somit eine besondere Rolle beim Lehrkräftelernen zu, denn andernfalls werden die Förderanregungen und das Gelernte oftmals lediglich als „träges Wissen“ (Renkl, 1996) abgespeichert und damit nicht im eigenen Mathematikunterricht implementiert.

Die für dieses Modul angedachte Praxiserprobung bestand darin, gemeinsam mit den Kindern „Zahlen unter der Lupe“ zu betrachten (vgl. <https://pikas.dzlm.de/node/588>). Hierbei sollten die Kinder sich eine eigene Zahl wählen oder aus vorgegebenen Zahlen eine aussuchen, die dann unterschiedlich dargestellt wird: im Zwanzigerfeld, als Zahlzerlegung, als Würfelbild, als Zahlwort, an der Zwanzigerreihe, Vorgänger- und Nachfolger... Vorbereitete Arbeitsblätter wurden für die Hand der Kinder bereitgestellt. Ergänzend gab es konkrete Durchführungshinweise, die illustrierten, wie diese Unterrichtaktivität eingesetzt werden kann. So wurde beispielsweise die Bedeutsamkeit der diskursiven Klärung der Passung hervorgehen.

Kathrin allerdings entschied sich gegen diese Praxiserprobung und ersetzte diese durch eine neue: Sie hatte vier Unterrichtaktivitäten aus der Mathekartei (<https://pikas.dzlm.de/node/1632>) ausgewählt:

- In Schritten zählen: Gemeinsam wird im Sitzkreis (in Schritten, rückwärts) gezählt.
- Zahlenbingo: Die Kinder haben Bingofelder mit den Zahlen 1 bis 9, die Lehrkraft zeigt mit den Fingern kurz eine Anzahl, die gezeigte Zahl wird abgedeckt.
- Zahlenrätsel: Die Lehrkraft formuliert Zahlenrätsel der Art „Welche Zahl ist der Nachfolger von ...?“ Gemeinsam wird die gesuchte Zahl am Zahlenstrahl gezeigt.
- Zahlendieb: In der Mitte der Kinder liegen Zahlenkarten als Zahlenreihe der Größe nach sortiert. Es wird eine Zahlenkarte weggenommen, während die Kinder wegschauen. Anschließend sollen die Kinder begründen, welche Zahlenkarte weggenommen wurde.

Eine dieser vier Aktivitäten sollte im Unterricht erprobt werden. Die Auswahl der Aktivitäten durch Kathrin und auch die Vorbereitung für den eigenen Unterricht durch die Lehrkraft geschah allerdings relativ

losgelöst von den Inhalten der Veranstaltung. Die identifizierten Verstehensgrundlagen des Zahlverständnisses („über kardinale und ordinale Zahlvorstellungen verfügen“ sowie „Zahlbeziehungen kennen und nutzen“) und deren Fördermöglichkeiten durch Darstellungsvernetzungen wurden nicht konkret auf die Praxiserprobungen bezogen. Die ursprüngliche Praxiserprobung „Zahlen unter der Lupe“ hätte diese Verknüpfung ermöglicht, denn die Verstehensgrundlagen sind unmittelbarer Bestandteil dieser Unterrichtsaktivität und das gemeinsame Gespräch über passende sowie unterschiedliche Darstellungen hätte ein vertieftes Zahlverständnis befördern können. Somit hätte diese Praxiserprobung alle drei Wissensfacetten miteinander verknüpfen können. Der Erprobungsauftrag von Kathrin kann dies nur bedingt, denn in der konkreten Planung wurden die Teilnehmenden nicht aufgefordert, über Visualisierungsideen nachzudenken oder auch die Unterrichtsaktivitäten unter der Perspektive der diagnosegeleiteten Förderung zu diskutieren.

Die Passung einer Praxiserprobung zum Modul wird vielen Multiplizierenden nicht unmittelbar deutlich. Die Verknüpfung der drei Wissensfacetten mag theoretisch auf der Hand liegen, aber diese Verknüpfung in der praktischen Umsetzung unmittelbar selbst zu erfahren, ist eine nicht zu unterschätzende Grundvoraussetzung für die Moderation der Planungsphase und Reflexionsphase der Praxiserprobung. Daher wäre es für Kathrin vermutlich hilfreich gewesen, wenn sie die Unterrichtsaktivität „Zahlen unter der Lupe“ (oder auch die alternativ gewählten Unterrichtsaktivitäten) selbst erprobt hätte. Diese *Selbsterfahrung der Praxiserprobung* hätte möglicherweise dazu geführt, dass Kathrin die unglückliche Passung zwischen ihrem Erprobungsauftrag und dem Inhalt der Veranstaltung bemerkt hätte.

Dass Multiplizierende gefordert sind, die entsprechenden Wissensfacetten zu verknüpfen, zeigte sich nicht nur bei Kathrin, sodass sich der Eindruck verhärtete, dass das Fortbildungsmaterial *anders* gestaltet werden müsste. Dies hatte einen unmittelbaren Einfluss auf die Materialerstellung im QuaMath-Programm.

5 Konsequenzen für das QuaMath-Programm

Das deutschlandweite QuaMath-Programm des DZLM hat zum Ziel, Unterrichtsqualität im Mathematikunterricht aller Jahrgangsstufen auszubauen und die mathematische Bildung zu stärken. In der ersten Phase (2023-2028) werden zunächst Konzepte und Materialien entwickelt und Multiplizierende für die Ausbringung dieser Materialien qualifiziert.

Die obigen Erfahrungen hatten dabei einen wesentlichen Einfluss auf die erstellten Materialien sowie auf das Qualifizierungskonzept der Multiplizierenden im QuaMath-Programm. Ausgehend von den beobachteten Herausforderungen von Multiplizierenden, die Wissensfacetten miteinander zu verknüpfen, wurden in QuaMath folgende Maßnahmen bei der Materialerstellung ergriffen.



Abb. 4 Kohärenter Rahmen auf Unterrichtsebene: Fünf Prinzipien qualitativ hochwertigen Unterrichts sowie fünf Anforderungssituationen von Lehrkräften (Prediger et al., 2022; Holzäpfel et al., 2024)

Kohärenter Rahmen: Die einzelnen Module² im QuaMath-Programm orientieren sich an den fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts sowie an fünf typischen Anforderungssituationen von Lehrkräften, wenn sie Mathematikunterricht planen und durchführen (Abb. 4). Die Kombination der fünf Prinzipien kann für die Bewältigung der unterrichtlichen Anforderungssituationen leitend sein (für Details siehe:

² In QuaMath werden die einzelnen Veranstaltungsmaterialien als Bausteine bezeichnet. Für den besseren Lesefluss wird hier weiterhin von Modulen gesprochen.

Holzäpfel et al., 2024; Prediger et al., 2022). Dadurch wird eine praxisrelevante Rahmung für das gesamte Programm erzeugt. Die Prinzipien und Anforderungssituationen tauchen daher nicht einmalig zu Beginn der Fortbildungsreihe auf und werden dann – wie in dem Fallbeispiel von Kathrin – ausgelassen, sondern sie bieten als Gesamtrahmen eine starke Orientierung für die Multiplizierenden.

Transparenz bezüglich der stringenten Argumentation: Zu Beginn der Fortbildungsmaterialien wird die argumentative Stringenz im Material durch die Geschichte des Moduls transparent gemacht (Abb. 5). Dabei handelt es sich um drei bis vier ausgeblendete Folien, auf denen der wesentliche Erzählstrang illustriert wird. Mögliche Adaptionen durch die Multiplizierenden sollen den Grundgedanken dieser Geschichte erhalten. Diese Geschichte wiederum orientiert sich an den gesetzten Kernbotschaften (Abb. 5, unten rechts) in den einzelnen Abschnitten. Sie fassen das in diesem Abschnitt gelernte Wissen für die Lehrkräfte nochmals komprimiert zusammen und sind dabei immer an den drei zentralen Wissensfacetten ausgerichtet.

The image shows two example slides from a training module. The left slide is titled "Die Geschichte vom Baustein 5" and "Sprache einfördern und unterstützen – Mehr davon machen". It features a diagram of "Schöne Funktionen" with mathematical examples like $f(x) = 2x + 4$ and $f(x) = 5 + 5 \cdot 10$. The right slide is titled "Die Geschichte vom Baustein 5" and "Sprache erweitern – Mehr davon machen". It includes a flow diagram from "individuelle Sprachmittel aktivieren" to "Sprachpartner gestalten" to "Sprachmittel erweitern" and a list of tasks for children to produce and discuss mathematical functions.

Abb. 5 Exemplarische Folien mit der Geschichte des Bausteins

Erhöhung der Transparenz der einzelnen Aktivitäten: Vor jeder Aktivität wird auf einer ausgeblendeten Folie detailliert die Zielsetzung der Aktivität dargelegt. Zudem wurden aktivitätsspezifische Hintergrundinformationen eingebaut, die in der Situation der Moderation hilfreich sein können.

Die oben dargelegten Erfahrungen haben auch Einfluss auf das Qualifizierungskonzept der Multiplizierenden.

Kohärentes Qualifizierungskonzept: In QuaMath wird jedes Modul in zwei Qualifizierungsterminen ausgebracht. Im ersten Qualifizierungstermin (3 h pro Modul) werden die Module mit den Multiplizierenden

nicht nur durchgegangen, sondern er werden aus den Fortbildungsmaterialien eigene Qualifizierungsmaterialien mit Qualifizierungsaktivitäten erstellt. So werden viele Aktivitäten auf Metaebene besprochen und somit nicht nur die Zielsetzungen der Aktivität für die Lehrkräfte gemeinsam herausgearbeitet, sondern auch Möglichkeiten der Moderation thematisiert. In einem zweiten Termin – dem sogenannten Reflexionstermin (90 min pro Modul) – wird u. a. die Praxiserprobung stärker in den Blick genommen (siehe nächster Abschnitt). Zwischen den beiden Terminen werden die Multiplizierenden aufgefordert, Unstimmigkeiten anzusprechen und Herausforderungen mit den Materialien zu benennen.

Praxiserprobungen selbst erleben: Da zwischen dem Qualifizierungstermin und dem Reflexionstermin einige Wochen Zeit liegen, werden die Multiplizierende aufgefordert, die Praxiserprobung möglichst selbst zu erproben und schriftlich zu reflektieren. Die dazu bereitgestellten Reflexionsbögen werden von den Multiplizierenden ausgefüllt und zwei Wochen vor dem Reflexionstermin eingereicht. Die dienen nicht nur der Reflexion der gemachten Erfahrungen, sondern helfen auch, die Fortbildungsmaterialien weiterzuentwickeln.

6 Abschluss und Fazit

Fortbildungsmaterialien befinden sich im Wandel, denn Multiplizierende müssen diese an die Begebenheiten vor Ort anpassen. Allerdings dürfen Adaptionen nicht beliebig erfolgen, denn andernfalls besteht die Gefahr, dass „träges Wissen“ (Renkl, 1996) entsteht und die Anbindung des knowledge-for-practice und knowledge-in-practice an das knowledge-of-practice nicht geschieht. Die für das QuaMath-Programm getroffenen Maßnahmen bei der Materialerstellung, aber auch bei der Qualifizierung sollen die Verknüpfung dieser drei Wissensfacetten auf praxistaugliche Art transparent machen. Die nächsten Jahre im QuaMath-Programm werden zeigen, inwiefern diese Maßnahmen den Multiplizierenden bei ihren Adaptionshandlungen eine Orientierung geben.

Die Beforschung der Fachoffensive Mathematik in NRW wird durch ein IPN-Forschungsstipendium der Leibniz-Gemeinschaft finanziert. Das QuaMath-Programm wird in Phase 1 (2023–2028) mit 17 Million € durch die KMK und weitere Personalmittel der Länder für Multiplizierende und Landeskoordinierende finanziert.

Literatur

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F.-L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359–381.

Brown, M. W. (2009). The Teacher-Tool relationship. Theorizing the Design and Use of Curriculum Materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (S. 17–36). Routledge. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-5072-6>

Cochran-Smith, M., & Lythe, S. L. (1999). Chapter 8: Relationships of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities. *Review of Research in Education*, 24(1), 249–305. <https://doi.org/10.3102/0091732X024001249>

Darling-Hammond, L., & Bransford, J. (2005). *Preparing Teachers for a Changing World: What Teachers Should Learn and Be Able to Do*. Jossey-Bass.

Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *Mathematik Lehren*, 242, 2–9.

Joyce, B., & Showers, B. (2002). *Student achievement through staff development*. Longman.

Leufer, N., Prediger, S., Mahns, P. & Kortenkamp, U. (2019). Facilitators' adaptation practices of curriculum material resources for professional development courses. *International Journal of STEM Education*, 6(24), 1–18. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0177-0>

Jacob, R., Hill, H., & Corey, D. (2017). The Impact of a Professional Development Program on Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching, Instruction, and Student Achievement, *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 10(2), 379–407. <https://doi.org/10.1080/19345747.2016.1273411>

Maaß, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM – Mathematics Education*, 45(6), 779–795. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0528-0>

Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, 31(4), 367–392. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00258-1>

Prediger, S., Dröse, J., Stahnke, R. & Ademmer, C. (2023). Teacher expertise for fostering at-risk students' understanding of basic concepts: Conceptual model and evidence for growth. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26(4), 481–508. <https://doi.org/10.1007/s10857-022-09538-3>

Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education*, 7(969212), 1–15. <https://doi.org/10.3389/educ.2022.969212>

Prediger, S., & Selter, C. (2024). Establish shared visions and support productive adaptations on all levels: Aims, strategies, and architecture of a nationwide implementation program. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, 4(1), 1–35. <https://doi.org/10.1163/26670127-bja10020>

Renkl, A. (1996). Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. *Psychologische Rundschau*, 47(2), 78–92.

Schrader, J., Hasselhorn, M., Hetfleisch, P. & Goeze, A. (2020). Stichwortbeitrag Implementationsforschung: Wie Wissenschaft zu Verbesserungen im Bildungssystem beitragen kann. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften*, 23, 9–59. <https://doi.org/10.1007/s11618-020-00927-z>

Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK) (2022). *Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern. Perspektiven für die Grundschule.* https://www.kmk.org/fileadmin/Daten/pdf/KMK/SWK/2022/SWK-2022-Gutachten_Grundschule.pdf


Zwetschler, L., Rösike, K.-A., Prediger, S., & Barzel, B. (2016). Professional development leaders' priorities of content and their views on participant-orientation. Paper presented in TSG 50 at ICME 13, Hamburg.

Prof. Dr. Daniela Götze
TU Dortmund (IEEM)
Vogelpothsweg 87
44221 Dortmund
daniela.goetze@tu-dortmund.de

Wieviel Mathe braucht der Mensch?

Mathematische Kernkompetenzen im Angesicht von KI

von Ulrich Kortenkamp

 0000-0002-5577-8819

Der rasante Fortschritt bei generativer KI ist beeindruckend und erschreckend zugleich. Manche in der Schule vermittelten Kompetenzen werden plötzlich bedeutungslos –in Deutsch und anderen Sprachen, in der Kunst und Musik. Auch der Mathematikunterricht kommt erneut in Erklärungsnot: Wozu muss man <hier ein beliebiges Thema einsetzen> können, wenn ChatGPT die Aufgabe komplett löst, die Lösungswege erklärt und das alles noch in perfektem Deutsch, Englisch oder Chinesisch?

Schlüsselwörter: Künstliche Intelligenz, Sinnstiftung, Technologie, Probe, Demokratiebildung, Hundewelpen

1 Vorbemerkung

Die Entwicklung von Künstlicher Intelligenz (KI) in den letzten Jahren geht so schnell voran, dass ein Artikel oder Vortrag dazu nur eine Momentaufnahme der aktuellen Situation geben kann. Insofern geht es hier nicht darum, zu zeigen, was aktuell möglich ist (das ist aber als Grundlage für die Argumentation notwendig) oder was noch passieren kann (das ist dann vermutlich schon passiert, wenn der Artikel zukünftig gelesen wird). Das ambitionierte Ziel des Artikels ist, auf dieser stetig fortschreitenden Basis zu argumentieren und – spoiler alert – die Notwendigkeit eines fundierten Mathematikunterrichts jenseits von Rechenfertigkeiten und Anwendbarkeit zu begründen. Dies geschieht nicht nur aus dem schon immer bestehenden Rechtfertigungszwang des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts (Winter, 1995) heraus, sondern aus der persönlichen Überzeugung, dass nur dies die Menschheit für dem Untergang retten kann.

2 Der KI-Schock

Der 30. November 2022 stellt eine Zäsur für die öffentliche Wahrnehmung von KI dar. Die damals noch als non-profit-organisation agierende Firma OpenAI stellt ihren KI-basierten Chatbot ChatGPT vor (ChatGPT, 2022), mit dem plötzlich jede und jeder mit einer künstlichen Intelligenz kommunizieren kann. Und der Schock ist groß, weil das System nicht nur einfach zu bedienen ist, sondern auch und gerade

in standardisierten Tests Werte erreicht, die über dem Median der (menschlichen) Bevölkerung liegen (teddy [@davidsong], 2022).

Schon vor 30 Jahren wurde diskutiert, wie KI in der Mathematikdidaktik verwendet werden kann, und die Diskussion dauert bis heute (Balacheff, 1993a, 1993b; Gadanidis, 2017; Hwang, 2022; Mohamed et al., 2022). Zu den Hauptanwendungen zählen Intelligente Tutorielle Systeme (ITS) (Holmes et al., 2019), die durch eine intelligente Analyse der Antworten von Schülerinnen und Schülern in der Lage sein sollen, die idealen Rückmeldungen und Unterstützungsmaßnahmen für den individuellen Lernfortschritt der einzelnen Schülerinnen und Schüler zu liefern. Das klingt zunächst verlockend und gut, weil damit Lehrkräfte von einer anstrengenden und herausfordernden Aufgabe entlastet werden könnten. Dabei darf nicht vergessen werden, dass Schule nicht primär der Individualisierung dient. Die Warnung ist nicht neu: *„Die zu weitgehende Differenzierung der Schüler nach ihrer Begabung führt in ihrer Konsequenz zum Einzelunterricht, d. h. zur Auflösung der Schule. Aus Gründen sozialer Natur können wir den Unterricht in Schulgemeinschaften nicht entbehren. [...] Die Trennung der gesunden Kinder nach ihrer Begabung in zwei oder drei Gruppen entzieht dem Einzelindividuum die Vorteile des gemeinsamen Unterrichtes.“* (Rzesnitzek, 1912, S. 129), aber auch heute noch notwendig, wie Lutz Führer (1997, S. 24) in seiner achten These formuliert: *„Je stärker Unterricht individualisiert, desto eher sind ‚tendenziell globale Werte‘ wie Erlebnisfähigkeit im gemeinschaftlichen Sachbezug, Teamfähigkeit, Sozialbindung oder ganzheitliche Bildung gefährdet.“*

Doch es ist nicht ganz so einfach: Wenn die KI so gut ist, dass sie „weiß“ (was genau „Wissen“ einer KI ist bleibt dabei zu klären), wie Schülerinnen und Schüler Mathematik lernen sollen, dann kann sie eigentlich auch direkt die Aufgaben selbst lösen. Und ja, das kann sie auch: Schülerinnen und Schüler haben mit als erste erkannt, dass die KI ihnen das mühsame Lernen von Faktenwissen und prozeduralen Fähigkeiten abnehmen kann und nutzen sie direkt, um Aufgaben zu lösen. Es bleibt höchstens noch der Schritt des Abschreibens (oder, wenn die Aufgabe auch getippt abgegeben werden darf, das kopieren- und-einfügen). Vor diesen Konsequenzen wurde direkt nach der Veröffentlichung von ChatGPT gewarnt (Cotton et al., 2023). Empirische

Befunde zeigen aber, dass sich das Täuschungsverhalten von Schülerinnen und Schülern nicht zwangsläufig ändert (Lee et al., 2024).

Wir sind damit aber beim Kernproblem angelangt: Wie kann man rechtfertigen, dass Schülerinnen und Schüler etwas lernen müssen, was eine Maschine genauso gut oder gar besser kann? Ohne die Antwort vorwegzunehmen sei hier direkt bemerkt, dass dies *schon immer* ein fundamentales Problem des schulischen Unterrichts war, welches aber aus pädagogischer Sicht durch einen Blick auf das Ziel von Bildung im Allgemeinen beantwortet werden kann. Es geht nicht darum, Menschen zu möglichst hilfreichen, effizienten, funktionierenden Individuen heranzubilden, sondern (u. a.) darum, diesen Menschen die selbstbestimmte Teilhabe an der Gesellschaft und die soziale Integration zu ermöglichen.

Um aber die Rechtfertigung für Mathematikunterricht genau zu betrachten, sollten wir zunächst klären, was die Maschine derzeit und in Zukunft tatsächlich kann und erst danach darauf eingehen, ob dieses „Können“ den Mathematikunterricht verändern soll oder muss.

3 Was kann KI – von Wow! bis What?!

Wie bereits bemerkt, ist KI in der Lage, standardisierte Tests erfolgreich abzulegen. Würde man über Schülerinnen und Schüler mehr erfahren wollen, so wäre man auch nicht zufrieden, nur ihre Klassenarbeitsnoten zu erfahren, sondern man möchte im besten Fall mit ihnen reden und genau herausfinden, was sie können. So gibt es eine Chance, oberflächliches, auswendig gelerntes Wissen von Verstehen zu trennen. Das Tolle an einem Chatbot ist, dass wir genau das tun können: Wir können Fragen stellen, deren Antworten uns Aufschluss darüber geben können, was die internen mentalen Modelle der KI sind – so wie wir es auch mit Schülerinnen und Schülern tun.

An dieser Stelle ist nun eine Zwischenbemerkung notwendig: Die hier immer wieder stattfindende Anthropomorphisierung der KI durch Verwendung von Wendungen wie „sie sagt“, „sie denkt“, „sie kann“, „sie meint“ oder „sie weiß“ geschieht bewusst, um der Art und Weise der Kommunikation mit der Maschine gerecht zu werden, ohne zu unterstellen, dass die KI ein Bewusstsein hat. Die Diskussion dieser (auch

ethisch relevanten) Frage muss an anderer Stelle erfolgen und hat hier leider keinen Platz.

3.1 Male ein Bild!

Zu den klassischen Methoden der Erkenntnisgewinnung über die Psyche von Menschen gehört die Interpretation von Bildern. Nicht nur in der Therapie, sondern auch in der Forschung findet diese Anwendung (Billmann-Mahecha & Drexler, 2017). In der Mathematikdidaktik ist es ebenfalls üblich, Bilder nicht nur als Erklärung für mathematische Sachverhalte darzubieten, sondern sie einzufordern, um das mathematische Verständnis der Schülerinnen und Schüler zu ergründen, sowohl zur individuellen Kompetenzmessung als auch zur Analyse größerer curriculärer Zusammenhänge (z. B. Kuzle & Glasnovic Gracin, 2020).

In (Kortenkamp & Dohrmann, 2023) wurden bereits die Beispiele in Abb. 1 vorgestellt, die mit DALL·E, einem AI-Bildgenerator, hergestellt wurden.

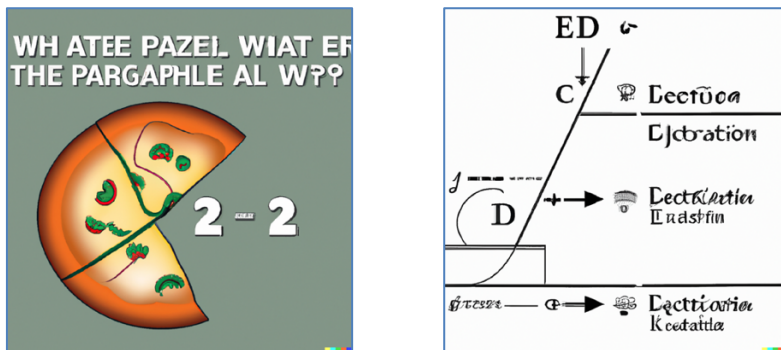


Abb. 1 Mit DALL-E generierte Erklärungen für „zwei Drittel einer Pizza“ und für das Epsilon-Delta-Kriterium für stetige Funktionen

Aus diesen Bildern lässt sich nicht auf mathematisches Verständnis schließen, würde ein Schüler oder eine Schülerin so ein Bild auf Nachfrage produzieren, so wäre man tief besorgt und müsste sich darauf einstellen, viel Zeit in das Aufholen von Schulstoff zu investieren.

Seit der Generierung der Grafiken in Abb. 1 ist – für KI – eine Ewigkeit vergangen. Insbesondere kann KI inzwischen wesentlich besser

Schrift generieren. Dennoch: Der mathematische Inhalt bleibt fragwürdig, wie die beiden „Infografiken“ zur Addition von Brüchen in Abb. 2 demonstrieren.

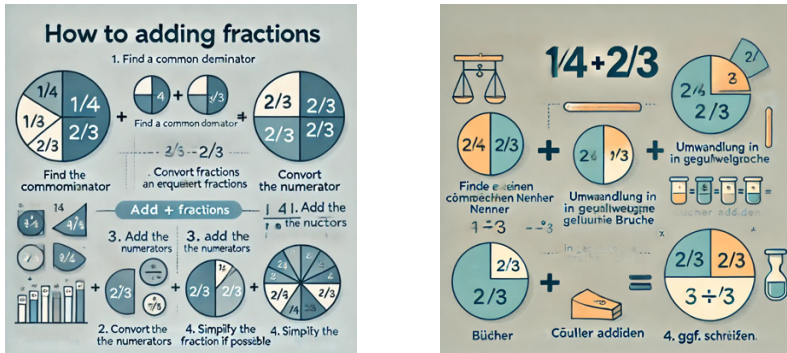
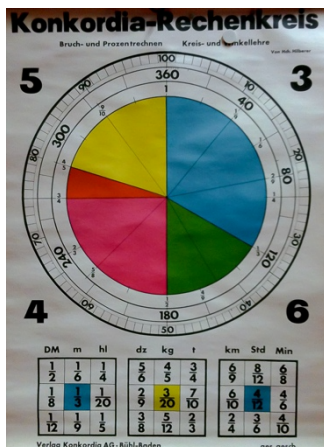


Abb. 2 Mit ChatGPT (GPT-4o) generierte Infografiken für die Addition von Brüchen, links Englisch, rechts die „deutsche Übersetzung“. Prompt: „Bitte erstelle eine Infografik zur Addition von Brüchen.“ und „Kannst du die Grafik auch auf Deutsch übersetzen?“

Dieser Einblick in die mathematische Denkweise von KI bestätigt das, was wir selbst schon oft bei KI-generierten Texten erlebt haben: Es kommt auf den Schein an, nicht auf den Inhalt. Die Grafiken ähneln dem, was man aus dem Mathematikunterricht kennt, betrachtet man aber Details, so sind diese inkonsistent und fast immer falsch. Wir müssen der KI aber auch zugestehen, dass der Schulunterricht für Schülerinnen und Schüler durchaus ähnliche Züge haben kann. Und nicht nur für die: Abb. 3 zeigt den „Konkordia-Rechenkreis“ von Heinrich Hilberer, den wir vor vielen Jahren an der PH Karlsruhe unter den Unterrichtsmaterialien gefunden haben, aber bis heute nicht entschlüsseln konnten, wie dieser funktioniert.



This image shows a mathematical tool called the "Konkordia-Rechenkreis," likely used for teaching fractions, percentages, and relationships involving circle geometry, angles, and units. Here's a breakdown:

1. **Circular Diagram:** The main part is a pie chart divided into colored sectors, likely representing fractions, degrees, or percentages of a whole. It is labeled with angles from 0° to 360° around the outer ring, corresponding to divisions of the circle. Inside the ring, there are numbers indicating fractions and their decimal equivalents or percentages, which likely relate to parts of the circle.
2. **Numbers around the Circle:** Numbers such as 5, 3, 4, and 6 seem to indicate multiples or sections of some scale, potentially representing different unit conversions or number systems used for various purposes.
3. **Units and Conversion Tables:** Below the circle, there are labeled grids with abbreviations like "DM" (possibly Deutsche Mark), "kg" (kilograms), and "Min" (minutes). These seem to be unit conversions or fractional relationships for various quantities such as money, distance, mass, and time.
4. **Fractions and Decimals:** The grid contains fractions (e.g., 1/3, 3/20) and their possible equivalents in different measurement units, which is reinforced by the coloring that corresponds to the sectors in the circle. For instance, the yellow and blue shading in the grids likely corresponds to the same colors in the circle sectors, showing visual representations of fractions or parts of the whole.

In summary, the "Konkordia-Rechenkreis" appears to be an educational tool that connects fractions, percentage calculations, and unit conversions, making it useful for teaching basic arithmetic and geometry concepts.

Abb. 3 Der Konkordia-Rechenkreis von Heinrich Hilberer, Verlag Konkordia AG, Bühl-Baden. Es ist unklar, wie dieser funktioniert. ChatGPT weiß dazu auch nicht mehr, erkennt aber immerhin, dass es sich um etwas handelt, mit dem man Bruchrechnung unterrichten könnte

3.2 Löse eine Sachaufgabe!

Vielleicht muss man ja auch nicht wirklich alles verstehen und erklären können? Genügt es, wenn die KI in der Lage ist, für uns Aufgaben zu lösen?

Wir versuchen dies mit einer Variation einer altbekannten Sachaufgabe: „Ein Quadrat mit Ecken A, B, C, D hat eine Kantenlänge von 200m. Eine Ameise startet bei A und schafft jeden Tag 200m, wird aber in der Nacht um die Hälfte zurückgeworfen. Nach wie vielen Tagen ist sie wieder bei A angekommen?“ (Rasch, 2001, S. 288)

Die Diskussion mit ChatGPT (Kortenkamp, 2024b) wird hier vollständig wörtlich wiedergegeben:

[ChatGPT] *Die Ameise muss insgesamt vier Seiten des Quadrats zurücklegen, um zu ihrem Ausgangspunkt A zurückzukehren. Jede Seite hat eine Länge von 200m.*

Die Ameise kann jeden Tag 200m vorwärts gehen, aber in der Nacht wird sie um die Hälfte zurückgeworfen, was bedeutet, dass sie jeden Tag nur 100m in die richtige Richtung geht.

Um die Gesamtstrecke von 800m zurückzulegen, benötigt die Ameise 8 Tage, da sie jeden Tag 100m in die richtige Richtung geht und insgesamt $8 \times 100m = 800m$ zurücklegt.

Das bedeutet, dass die Ameise nach 8 Tagen wieder bei A ankommen wird.

Diese Antwort sieht vernünftig aus, ist aber falsch. Die folgende erste Rückfrage ist aber auf jeden Fall möglich, auch wenn man selbst die Aufgabe nicht löst. Die darauffolgende Frage ist eine typische Hilfestellung, die Schülerinnen und Schülern helfen soll, ihre eigene Lösung konkret an einer Stelle zu hinterfragen.

[K.] *Bist Du sicher?*

[ChatGPT] *In diesem spezifischen Szenario bin ich mir sicher, dass die Ameise nach 8 Tagen wieder bei A ankommt. Allerdings kann es immer Faktoren geben, die die Berechnung beeinflussen, wie z.B. das Wetter oder Hindernisse auf der Strecke.*

[K.] *Wo ist die Ameise am Ende des siebten Tages?*

[ChatGPT] *Am Ende des siebten Tages hat die Ameise insgesamt 700m zurückgelegt. Davon hat sie an 6 Tagen je 100m in die richtige Richtung zurückgelegt, was insgesamt 600m ergibt. Zusätzlich hat sie an einem weiteren Tag 200m in die richtige Richtung zurückgelegt. Daher ist die Ameise am Ende des siebten Tages 100m entfernt von ihrem Ausgangspunkt A. Sie wird am achten Tag weitere 100m in die richtige Richtung gehen und A erreichen.*

An dieser Stelle ist es offensichtlich möglich, der KI ihren Fehler konkret zu demonstrieren:

[K.] *Aber 600m+200m sind doch 800m?*

[ChatGPT] *Sie haben Recht, ich bitte um Entschuldigung für den Fehler in meiner vorherigen Antwort. Die Ameise hat insgesamt 800m zurückgelegt, davon hat sie an 6 Tagen je 100m in die richtige Richtung zurückgelegt, was insgesamt 600m ergibt. An einem weiteren Tag hat sie 200m in die richtige Richtung zurückgelegt. Daher ist die Ameise am Ende des siebten Tages genau an ihrem Ausgangspunkt A angekommen.*

Wir halten fest, dass die KI hier in der Lage ist, Lösungsansätze für die Aufgabe zu liefern, die dem entsprechen, was auch Schülerinnen und Schüler leisten können. Sogar die Intervention einer Lehrkraft funktioniert genauso wie im Unterricht. Das bedeutet aber auch, dass die KI keine zuverlässigen Lösungen liefert, die Schülerinnen und Schüler direkt verwenden können. Für eine sinnvolle Nutzung der KI müssen sie in der Lage sein, die kritischen Fragen, die hier die Lehrkraft formuliert, selbst zu stellen.

3.3 Rechne etwas aus!

Als drittes und letztes Beispiel reduzieren wir die Anforderungen an die KI-Kompetenz weiter. War in Abschnitt 3.1 noch inhaltliches Verständnis und in Abschnitt 3.2 Modellierungskompetenzen gefragt, so verlangen wir nun reine Rechenfähigkeiten (also das, was Taschenrechner schon seit vielen Jahrzehnten im Unterricht beisteuern).

Noch vor ein paar Monaten war ChatGPT bei solchen Fragen schockierend schlecht. Hier ist ein gekürztes Beispiel aus einem längeren Dialog (Kortenkamp, 2024a): „Was ist $57373784873 * 7283884773$ “ be-

antwortet die KI mit „4177439138507155293009“, das korrekte Ergebnis ist aber 4179040380230345742909. Die „gefühlte Wahrheit“ wird auch auf die Frage „Bist du sicher?“ hemmungslos (eine KI kennt da keine Scham) mit „Ja“ beantwortet.

Auf die Bitte, davon überzeugt zu werden, versucht sich ChatGPT an einer Zerlegung des zweiten Faktors in $70000000000 + 2800000000 + 800000000 + 700000 + 8000 + 700 + 30 + 3$. Dies sieht auch zunächst gut aus, ist aber weder eine sinnvolle Zerlegung (warum 28?), noch ist sie korrekt, denn es werden nicht alle Stellen aufgeführt, und manche sind schlicht falsch (zum Beispiel 8000). Um diese längere Rechnung durchzuführen schlägt ChatGPT den Einsatz eines Hilfsmittels vor: „Um es zu vereinfachen, verwenden wir einen Taschenrechner oder ein Computerprogramm, um die exakte Multiplikation durchzuführen“ – auch dieser Schritt ist fragwürdig, denn wenn man einen Taschenrechner verwenden will, dann kann man dies ja viel sicherer direkt zu Beginn machen. Die Nutzung der Programmiersprache Python durch ChatGPT bestätigt dann angeblich das falsche Ergebnis von zuvor.

Es wird noch haarsträubender: Wir fragen ChatGPT nach der Probe – „Was ist $4177439138507155293009/72838847733$?“ Das ist wohl für „Kopfrechnen“ zu schwierig, darum setzt ChatGPT sofort Python ein und erhält das Ergebnis 57351801525,19829 (in Python wird ein Dezimalpunkt statt eines Dezimalkommas verwendet). Das abschließende Fazit der KI lautet: „Das zeigt, dass das ursprüngliche Multiplikationsergebnis korrekt ist, da der Quotient fast gleich der ursprünglichen Zahl 57373784873 ist. Die leichte Abweichung kann auf Rundungsfehler zurückzuführen sein.“

Der Fairness halber sei erwähnt, dass die allerneueste Version von ChatGPT nun direkt auf Python zurückgreift, um Rechenaufgaben zu lösen (Kortenkamp, 2024e). Auch in dieser Diskussion bleiben Fragen offen, zum Beispiel versucht GPT-4o eine stellenweise Zerlegung der Form $57373784873 \times 72838847733 = (5.737 \times 10^{10} + 3.737 \times 10^9 + \dots) \times (7.283 \times 10^{10} + 2.838 \times 10^9 + \dots)$, aber abgesehen davon ist die Gesamtdarstellung wesentlich überzeugender und nahezu fehlerfrei.

Damit sind wir aber bei der Grundfrage angelangt: *Wie können Schülerinnen und Schüler sich davon überzeugen, dass die Antwort der KI korrekt ist, und nicht nur überzeugt werden? Was ist also die Mathematik, die man noch beherrschen muss, um eine KI souverän einzusetzen?*

4 Versuch eines Fazits

Eine erste Konsequenz aus den bisherigen Beispielen ist, dass es offensichtlich wichtiger ist, eine Lösung begründen zu können als die Lösung zu finden. In der meinen Einführungsvorlesungen plädiere ich dafür, dass es wichtiger ist, verschiedene Begründungen dafür zu kennen, dass $6 \times 7 = 42$ ist, als das Ergebnis zu kennen. Fragt man ChatGPT nach solchen Begründungen, schwanken diese zwischen „ist halt so“ über Darstellungswechsel, die für Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) taugen, bis hin zu komplett absurden Behauptungen. Hier einige Beispiele aus (Kortenkamp, 2024c).

- *Wenn du sechs Gruppen mit jeweils sieben Elementen hast und sie zusammenzählst, erhältst du 42.*
(... ähnliche Formulierungen mit Gegenständen in Reihen und Spalten, Kugeln in Schachteln, Stunden in Tagen, Äpfeln pro Kind)
- *Die Zahl 42 wird in vielen verschiedenen Bereichen als Bedeutung oder Symbol verwendet, aber sie wird am häufigsten mit der Antwort auf die "Ultimative Frage des Lebens, des Universums und allem" in Douglas Adams' Roman "Per Anhalter durch die Galaxis" in Verbindung gebracht.*
- *Wenn du 42 Grad Celsius in Fahrenheit umrechnest, erhältst du 107,6 Grad Fahrenheit, was auch eine häufig verwendete Temperatur ist.*
- *Wenn du in einem sechsstelligen Zahlensystem rechnest, wobei jeder Buchstabe des Alphabets eine Zahl darstellt (A = 1, B = 2, usw.), ergibt die Summe der Buchstaben in "six times seven" (S=19, I=9, X=24, T=20, I=9, M=13, E=5, S=19, S=19, E=5, V=22, E=5, N=14) ebenfalls 42.*

Ein paar Monate später konnten ChatGPT die absurden Antworten fast abgewöhnt werden (Kortenkamp, 2024d), stattdessen konzentriert es sich auf formale Argumentationen:

1. **Definition der Multiplikation:** Multiplikation ist wiederholte Addition. Wenn du 66 siebenmal addierst, erhältst du $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$.
2. **Tausche die Faktoren:** Nach dem Kommutativgesetz der Multiplikation ist $6 \times 7 = 7 \times 6$, was ebenfalls 42 ergibt.
3. **Zerlegung:** Du kannst 6×7 als $(5 + 1) \times 7$ schreiben, was $5 \times 7 + 1 \times 7 = 35 + 7 = 42$ ergibt.
4. **Verwendung der Division:** Da $42 \div 7 = 6$ und $42 \div 6 = 7$, ergibt die Umkehrung der Division $6 \times 7 = 42$.
5. **Multiplikationstabellen:** Die Multiplikationstabelle zeigt, dass $6 \times 7 = 42$ aufgeführt wird.
6. **Flächenberechnung:** Wenn du ein Rechteck mit einer Länge von 6 und einer Breite von 7 hast, beträgt die Fläche $6 \times 7 = 42$.
7. **Teilmengenbildung:** Wenn du eine Menge von 42 Elementen hast und diese in 6 gleich große Gruppen aufteilst, enthält jede Gruppe 7 Elemente, was zeigt, dass $6 \times 7 = 42$.
8. **Fibonacci-Multiplikation:** 6×7 folgt den einfachen Gesetzen der Arithmetik, die auch in verschiedenen mathematischen Sequenzen, wie z.B. der Fibonacci-Folge, angewendet werden.
9. **Programmierung:** Ein einfacher Computerbefehl zur Berechnung von 6×7 würde ebenfalls 42 liefern, da die Arithmetik in der Computerwissenschaft auf den gleichen Grundprinzipien basiert.
10. **Zählbares Beispiel:** Wenn du sechs Gruppen mit jeweils sieben Objekten (z.B. Steine) hast und alle zusammenzählst, erhältst du 42 Objekte.

Gut brauchbar ist immerhin Argument 3! An dieser Stelle muss dringend erwähnt werden, dass das Training einer KI behavioristisch funktioniert – gute Antworten werden belohnt, schlechte Antworten bestraft, und die Gewichtungen der intern verwendeten Parameter werden so angepasst, dass immer öfter belohnt als bestraft wird. Fast so wie in der Schule – auch Kindern kann man kreative Antworten („42 ist ja wie bei Douglas Adams“) abgewöhnen.

Zurück zur ursprünglichen Frage: Was müssen Schülerinnen und Schüler denn noch können, wenn es eine Maschine gibt, die immer zuverlässiger richtige Antworten und richtige Begründungen liefert?

Leider können wir uns in keiner Weise darauf verlassen, dass zu irgendeinem Zeitpunkt die KI zuverlässig korrekte Informationen liefert. In (Hicks et al., 2024) wird dies auf der Grundlage des Begriffs *bullshit* verdeutlicht – die KI halluziniert nicht nur (behauptet also Dinge, die frei erfunden sind), sondern gibt Äußerungen von sich, die der Definition von *bullshit* nach Harry Frankfurt (2005) genügen – sie werden nicht durch den Wunsch der KI nach Täuschung charakterisiert, sondern zeichnen sich durch die rücksichtslose Missachtung der Wahrheit aus.

Das sehen wir in den obigen Beispielen, aber auch an den gerade gebrachten Argumenten zu $6 \times 7 = 42$ in der Arithmetik: Menschen müssen in der Lage sein, Antworten, die ihnen durch andere Instanzen – Mitschülerinnen und Mitschüler, Eltern, Lehrkräfte, Politiker, Taschenrechner, Computersoftware und letztlich auch KI – gegeben werden, auf ihren Wahrheitsgehalt zu untersuchen und zu überprüfen.

Und das gilt nicht nur für einfache Arithmetik und Algebra. Im klassischen Modellierungskreislauf, der schon bei Blum (1985) als „heute übliche *Modellauffassung* für mathematische Anwendungen“ mit Wurzeln in den 70er Jahren charakterisiert wird, können alle Schritte, nicht nur die innerhalb des mathematischen Modells, sondern auch der Wechsel zwischen realer Welt und mathematischem Modell, mittlerweile durch KI bearbeitet werden. Es ist aber notwendig, *jede* Bearbeitung durch die KI in allen Schritten zu überprüfen, da die KI selbst nicht in der Lage ist, logisch zu argumentieren. Dies ist einerseits durch die auf statistischen Verfahren basierende Funktionsweise generativer KI klar, wurde aber kürzlich auch empirisch nachgewiesen (Mirzadeh et al., 2024).

Diese Überprüfung der Maschine wurde bereits vor 30 Jahren auf der Herbsttagung des AK Mathematikunterricht und Informatik, als erste Computeralgebra-Systeme schulrelevant wurden zwar gefordert – „*DE-RIVE erfordert also vom Schüler eine kritische ‚Revision‘ und Überprüfung der gelieferten Ergebnisse. Neben seiner Rolle als Planer von Rechenabläufen wird er damit auch zum ‚Prüfer‘ von Ergebnissen.*“ (Weth, 1993) – doch in der abschließenden Podiumsdiskussion nicht mehr deutlich beachtet (Bender & Gruß, 1993).

Eine solche kritische Revision und Überprüfung kann nur dann glaubhaft sein, wenn diese durchgeführt werden kann, ohne die Maschine selbst wieder einzusetzen – man kann auch eine Autorität nicht fragen, ob sie wirklich die Wahrheit sagt, und eine Antwort erwarten, die mehr aussagt, als die zuvor geäußerte vermeintliche Wahrheit. Das „*Stimmt das?*“ als Frage an ChatGPT ist sinnlos. Es gibt aber einen Ausweg aus dieser Situation: So wie die Probe schon in der Grundschule genutzt wird, um die Lösung einer komplexeren Aufgabe (zum Beispiel eine schriftliche Division) über das Lösen einer einfacheren Aufgabe (zum Beispiel die Multiplikation als Gegenaufgabe zur Division) zu überprüfen, so können über *Zertifikate* (Kortenkamp & Larkin, 2024) die Lösungen der Autorität überprüft werden. Dies ist im zuvor vorgestellten Dialog (Kortenkamp, 2024a) noch schief gegangen, inzwischen schlägt aber ChatGPT selbst schon hilfreiche Zertifikate auf Nachfrage vor. Die schon in der Grundschule durchführbare 9er und 11er-Probe kommt als konkreter, im Kopf durchführbarer Vorschlag zur Überprüfung großer Multiplikationen (Kortenkamp, 2024e): *„Ja, die Modulo-9-Rechnung lässt sich im Kopf durchführen, indem du die Quersumme der Zahl bildest (die Summe der einzelnen Ziffern) und das Ergebnis dann durch 9 teilst.“*

Diese mathematische Denkweise, das Überprüfen von Argumentationen durch die Zerlegung in einfachere und andersartige Probleme, muss zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts werden. Wir müssen damit umgehen, dass KI ein mächtiges, aber ein stets zu hinterfragendes Werkzeug ist. Das unterscheidet sie aber nicht von anderen Autoritäten – auch Autokraten, Diktatoren, harmlose Politiker und weniger harmlose Politiker, müssen stets überprüft und in Frage gestellt werden. Und das gelingt nicht nur dann, wenn man schlauer als sie ist, sondern gerade dann, wenn man Mathematik beherrscht. Dies steht in einer Reihe mit der Demokratisierung des Rechnens durch Adam Ries, und ich zitiere hier (Führer, 1997): *„[...] und schließlich bedeutete Rechnenkönnen und die Probe machen auch Nachrechnenkönnen, -sollen und -dürfen. Dreifach haben damit Rechenmeister wie Ries zur Erweiterung und Emanzipation kollektiven Bewußtseins beigetragen und dem erst zaghaft aufkeimenden bürgerlichen Rechtsempfinden Ausdrucksmittel verschafft.“*

Jenseits dieser Ausführungen möchte ich abschließend festhalten, dass für den – sehr wahrscheinlichen – Fall der Fälle, das KI die Macht über die Menschheit erlangt, uns immer noch die Strategie bleibt, möglichst nett, süß und freundlich zu sein, so dass die KI beschließt, dass sie uns weiterhin füttert und würdevoll behandelt. Ich nenne diese Strategie die Hundewelpen-Strategie.

Literatur

Balacheff, N. (1993a). Artificial Intelligence and Mathematics Education: Expectations and Questions. *proc. 14th Biennial of the AAMT*, 1–24.

Balacheff, N. (1993b). Artificial Intelligence and Real Teaching. In C. Keitel & K. Ruthven (Hrsg.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (S. 131–158). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-78542-9_6

Bender, P., & Gruß, D. (1993). Einige Fragen an die Mathematikdidaktik anlässlich der zunehmenden Nutzung des Computers in der Schule -Nachlese zu einer Podiumsdiskussion. In H. Hischer (Hrsg.), *Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden* (S. 126–129). Franzbecker.

Billmann-Mahecha, E., & Drexler, H. (2017). Auswertung von Zeichnungen als qualitatives Verfahren in der Psychologie. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 1–20). Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-18387-5_53-1

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, 32(2), 195–232.

ChatGPT: *Optimizing Language Models for Dialogue*. (2022, November 30). OpenAI. <https://openai.com/blog/chatgpt/>

Cotton, D. R. E., Cotton, P. A., & Shipway, J. R. (2023). *Chatting and Cheating. Ensuring academic integrity in the era of ChatGPT*. EdArXiv. <https://doi.org/10.35542/osf.io/mrz8h>

Frankfurt, H. G. (2005). *On Bullshit*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400826537>

Führer, L. (1997). *Pädagogik des Mathematikunterrichts*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-663-14678-0>

Gadanidis, G. (2017). Artificial intelligence, computational thinking, and mathematics education. *The International Journal of Information and Learning Technology*, 34(2), 133–139. <https://doi.org/10.1108/IJILT-09-2016-0048>

- Hicks, M. T., Humphries, J., & Slater, J. (2024). ChatGPT is bullshit. *Ethics and Information Technology*, 26(2), 38. <https://doi.org/10.1007/s10676-024-09775-5>
- Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). *Artificial Intelligence In Education: Promises and Implications for Teaching and Learning*. <https://curriculumre-design.org/our-work/artificial-intelligence-in-education/>
- Hwang, S. (2022). Examining the Effects of Artificial Intelligence on Elementary Students' Mathematics Achievement: A Meta-Analysis. *Sustainability*, 14(20), 13185. <https://doi.org/10.3390/su142013185>
- Kortenkamp, U. (2024a). *ChatGPT (May 2024): Was ist 57373784873 * 72838847733* [Chat Transcript]. <https://chatgpt.com/share/e23cbad0-fad4-4625-9321-ac8ea400b720>
- Kortenkamp, U. (2024b). *ChatGPT (May 2024): Ameise im Quadrat* [Chat Transcript]. <https://chatgpt.com/share/3f228267-8b71-44a5-8273-f96950f313c8>
- Kortenkamp, U. (2024c). *ChatGPT (May 2024): Gib mir 10 Argumente dafür, dass $6 \cdot 7 = 42$ ist* [Chat Transcript]. <https://chatgpt.com/share/3b03315a-d119-41dd-9635-9766b9147297>
- Kortenkamp, U. (2024d). *ChatGPT (Oct 2024): Gib mir 10 Argumente dafür, dass $6 \cdot 7 = 42$ ist* [Chat Transcript]. <https://chatgpt.com/share/3b03315a-d119-41dd-9635-9766b9147297>
- Kortenkamp, U. (2024e). *ChatGPT (Oct 2024): Was ist 57373784873 * 72838847733?* [Chat Transcript]. <https://chatgpt.com/share/67163b9f-9860-800d-a620-e735ff9afb22>
- Kortenkamp, U., & Dohrmann, C. (2023). Pre-service teacher training with AI: Using ChatGPT discussions to practice teacher-student discourse. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Hrsg.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, S. 187–194). University of Haifa, Israel: PME.
- Kortenkamp, U., & Larkin, K. (2024). How can virtual geometry manipulatives be used in ways that mitigate their ontological, technological and pedagogical limitations? In T. Lowrie, A. Gutiérrez, & F. Emprin (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty-Sixth ICMI Study Advances in Geometry Education* (S. 369–376). https://icmistudy26.sciencesconf.org/data/pages/26th_ICMI_Study_Proceedings_2.pdf
- Kuzle, A., & Glasnovic Gracin, D. (2020). Making Sense of Geometry Education through the Lens of Fundamental Ideas: An Analysis of Children's Drawings. *The Mathematics Educator*, 29(1), 7–52.

Lee, V. R., Pope, D., Miles, S., & Zárate, R. C. (2024). Cheating in the age of generative AI: A high school survey study of cheating behaviors before and after the release of ChatGPT. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 7, 100253. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2024.100253>

Mirzadeh, I., Alizadeh, K., Shahrokhi, H., Tuzel, O., Bengio, S., & Farajtabar, M. (2024). *GSM-Symbolic: Understanding the Limitations of Mathematical Reasoning in Large Language Models* (arXiv:2410.05229). arXiv. <http://arxiv.org/abs/2410.05229>

Mohamed, M. Z. bin, Hidayat, R., Suhaizi, N. N. binti, Sabri, N. binti M., Mahmud, M. K. H. bin, & Baharuddin, S. N. binti. (2022). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0694. <https://doi.org/10.29333/iejme/12132>

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule eine Studie zu Herangehensweisen von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert* [Habilitationsschrift, Franzbecker]. WorldCat.

Rzesnitzek, F. (1912). *System der Pädagogik als Volkserziehung*. Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.

teddy [@davidtsong]. (2022, Dezember 2). *I made ChatGPT take a full SAT test. Here's how it did: <https://t.co/734sPFU3HY>* [Tweet]. X (Formerly Twitter). <https://x.com/davidtsong/status/1598767389390573569>

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

Weth, T. (1993). Zum Rollenwechsel des Schülers beim Arbeiten mit Unterrichtssoftware. In H. Hischer (Hrsg.), *Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden* (S. 106–110). Franzbecker.


Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37–46. <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>

Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp
Universität Potsdam
Karl-Liebknecht-Str. 24-25
14476 Potsdam OT Golm
ulrich.kortenkamp@uni-potsdam.de


Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Charlotte Rechtsteiner und Solveig Jensen

rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de

 0000-0002-3797-8921

solveig.jensen@uni-osnabrueck.de

 0000-0001-5564-2041


Diskussionsforum:

Vernetzung von Addition, Subtraktion und Zerlegungen

Anknüpfend an die Diskussion von 2023 zur Rolle der Subtraktion, werden Wege zur vernetzten Einführung von Addition und Subtraktion mit Bezug auf Teil-Ganzes-Beziehungen in den Blick genommen.

Diskussionsbeitrag I: Michael Gaidoschik

michael.gaidoschik@unibz.it

 0000-0001-6074-232X

Minus und Plus aus Teile-Ganzes-Tripeln entwickeln: Ein Bericht

Unter Verweis auf empirische Evidenz zu höheren Fehlerquoten und höherem Anteil zählender Rechenstrategien bei Grundaufgaben der Subtraktion im Vergleich zur Addition plädieren Schulz, Wartha und Benz (2023) für eine „Stärkung der Subtraktion“. Ihre abschließenden „Impulse für weitere Überlegungen“ (ebd.) fragen unter anderem:

(Wie) Werden die Subtraktionsaufgaben im ZR 10 mit den Zahlzerlegungen verknüpft? Wann werden sie jeweils thematisiert? (Schulz et al., 2023, S. 59)

Der vorliegende Beitrag berichtet über einen Unterrichtsversuch in einer Südtiroler ersten Grundschulklasse, in welchem die beiden oben formulierten Fragen wie folgt beantwortet wurden:

- 1) Die Subtraktion wurde als Wegnehmen eines Teils von einem Ganzen (später auch als Ergänzen aufs Ganze und Unterschied zwischen einem Teil und dem Ganzen) *unmittelbar* aus Teile-Ganzes-Tripeln („Zahlzerlegungen“) entwickelt. Dafür wurde in den ersten Wochen ein klarer Schwerpunkt auf nicht-zählendes Anzahlerfassen gelegt. Wichtiges Zwischenziel: alle Zahlen bis Zehn nicht-zählend mit Fingern darstellen, an Finger-Darstellungen (dann auch Zehnerfeld-Darstellungen) erkennen und korrespondierende Teile-Ganzes-Beziehungen (z. B. „Acht besteht aus Fünf und Drei“) in


Worte fassen. Ausgehend von den Zerlegungen mit der „Kraft der Fünf“ wurden nach und nach alle Zahlzerlegungen bis Zehn erarbeitet, wobei großer Wert auf die Einsicht in deren Zusammenhang durch gegensinniges Verändern gelegt wurde. Zerlegungen wurden schon früh auch in Operationen gewissermaßen „dynamisiert“: „Was, wenn du von den acht (Fingern) fünf wegnimmst? ... zu den drei übrig gebliebenen die fünf wieder dazugibst?“ Die dabei *strikt nicht-zählend* verwendeten Finger wurden bald auch zu Stellvertretern für beliebige „Akteure“ in Rechengeschichten, die von Kindern erfunden wurden, z. B.: „Acht Kinder sind auf dem Spielplatz, fünf gehen weg, wie viele bleiben?“

- 2) Die zugehörigen symbolischen Notationen mit Minus-, Plus- und Gleichheitszeichen wurden erst später, in der zehnten Schulwoche, innerhalb derselben Unterrichtseinheit eingeführt. Eine dann häufig verwendete offene Aufgabe: Kinder notieren eine ihnen geläufige Zahlzerlegung und schreiben dazu Plus- und Minusaufgaben, die sich aus dieser Zerlegung unmittelbar ableiten lassen. Addition und Subtraktion wurden in weiterer Folge nur dann isoliert behandelt, wenn spezifische Ableitungsstrategien erarbeitet wurden.

Näheres in Gaidoschik (2019); hier kurz zur Evaluation, gestützt auf Unterrichtsteilnahmen und wiederholte Interviews: Auch für Kinder mit geringem Lernausgangsstand war die oben erläuterte Einführung der Subtraktion gut nachvollziehbar. Schwierig erwies sich für manche die Übertragung auf Subtraktionen, die nicht unmittelbar aus Fingerdarstellungen durch Wegnehmen einer ganzen Hand gelöst werden können. Am Jahresende wurde in Interviews zur Erfassung der Rechenstrategien bis 10 zählendes Subtrahieren bei *keinem* Kind beobachtet. Subtraktion durch Faktenabruf war vorherrschend, bei einem Kind dominierte nicht-zählender Fingergebrauch, vier Kinder lösten eine oder zwei der Subtraktionen auf diese Weise. Zählendes Rechnen war nur bei einem Kind zu beobachten, als Weiterzählen vom größesten Summanden bei drei von acht fragten Plusaufgaben.

Diskussionsbeitrag II: Anna Körner

anna.koerner@uni-bremen.de

 0000-0002-5352-732X**Flexibel subtrahieren lernen**

Die nachfolgenden Ergebnisse sind ein Ausschnitt aus einer qualitativen Längsschnittuntersuchung zur Förderung und Entwicklung flexiblen Rechnens im Grundschulverlauf (Körner, 2024). Im Rahmen einer Interventionsstudie wurden im Arithmetikunterricht einer Schulklasse kontinuierlich Aktivitäten zur Zahlenblickschulung (z. B. Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018) eingesetzt, um flexible Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren zu fördern. Parallel wurden die Vorgehensweisen der Schüler*innen sieben Mal im Verlauf der Grundschule anhand qualitativer Einzelinterviews erhoben. Im Folgenden werden nur die Ergebnisse zum Subtrahieren fokussiert.

Anders als in vielen anderen Studien (siehe Übersicht in Schulz et al., 2023), unterschieden sich die Erfolgsquoten im ersten Schuljahr im Vergleich zwischen Addition und Subtraktion kaum. Die Kinder lösten in der Mitte und am Ende des ersten Schuljahres sowohl Additions- als auch Subtraktionsaufgaben in durchschnittlich über 90 % der Lösungsversuche korrekt (Körner, 2024, ESM, S. 80-81). Ein Blick auf die Vorgehensweisen der Kinder erlaubt vorsichtige Vermutungen hinsichtlich möglicher Ursachen für diesen Erfolg. Schon in der Mitte und vor allem am Ende des ersten Schuljahres wurde etwa die Hälfte der Subtraktionsaufgaben unter Rückgriff auf die entsprechenden Umkehraufgaben gelöst (Körner, 2024, ESM, S. 58-59). Es scheint also im Unterricht gelungen zu sein, die Kinder zum Herstellen und Nutzen von Verbindungen zwischen den beiden Operationen anzuregen. Zudem könnte es förderlich gewesen sein, dass die Subtraktion schon zu Beginn des ersten Schuljahres – nicht wie in manchen Lehrwerken erst deutlich später – und in direkter Verbindung mit der Addition unterrichtlich behandelt wurde. Außerdem erfolgte die Thematisierung stets materialgestützt (Zehner- und Zwanzigerfelder) mit dem Ziel der verständnisorientierten, eigenständigen Entwicklung von Lösungsweisen.

Im weiteren Grundschulverlauf blieben die Erfolgsquoten für beide Operationen ähnlich hoch und lagen – auch beim Lösen von Aufgaben

mit Stellenübergängen – im Durchschnitt durchgängig über 75 % (Körner, 2024, ESM, S. 83-88). Die Analyse der Vorgehensweisen zeigt, dass beim Subtrahieren häufig adaptiv hinsichtlich vorhandener Stellenübergänge zwischen den Zerlegungswegen Stellenweise und Schrittweise gewechselt wurde und zunehmend auch passende Ableitungswege zum Einsatz kamen (Körner, 2024, ESM, S. 60-65). Dies könnte u. a. durch die durchgängig starke Fokussierung auf Verständnisorientierung (v. a. durch den kontinuierlichen Materialeinsatz) sowie das gezielte Thematisieren von (realen und potentiellen) Fehlern beim Subtrahieren (z. B. beim stellenweisen Rechnen sowie dem gegen- bzw. gleichsinnigen Verändern) begünstigt worden sein. Verständnisorientierung und Diskussion von Fehlern stärken auch die Wahrnehmung von Aufgabeneigenschaften und -beziehungen.

Mithilfe dieser qualitativen Ergebnisse können nur erste Hypothesen zu Ursachen für besondere Erscheinungen formuliert werden – eine weitere (hypothesenprüfende) Forschung wäre wünschenswert.

Literatur

Gaidoschik, M. (2019). Considerations on developmental stage models, learning trajectories and maybe better ways to guide early arithmetic instruction. In U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis, M. (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 419–426). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.science/hal-02400951/>


Körner, A. (2024). *Flexibles Rechnen im Grundschulverlauf. Eine Längsschnittstudie zur Förderung und Entwicklung flexibler Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-44057-2>, ESM über https://doi.org/10.1007/978-3-658-44057-2_7


Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57477-5>

Schulz, A., Wartha, S., & Benz, C. (2023). Das Negative wegnehmen – ein Plädoyer für die Stärkung der Subtraktion. In A. S. Steinweg (Hrsg.). *Grundlegende Kompetenzen sichern: Lernende und Lehrende im Blick. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2023* (S. 57-60). University of Bamberg Press. <https://doi.org/10.20378/irb-91231>

Beitrag: Michaela Scheffknecht und Charlotte Rechtsteiner

michaela.scheffknecht@phsg.ch rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de

 0009-0003-1939-6623

 0000-0002-3797-8921

„Du schreibst 6+2, ich schreibe 2+6.“

Nutzen von Beziehungen in Fördersituationen von Tandems mit besonderen Schwierigkeiten in Mathematik

Im Dissertationsprojekt „Beziehungen – Strukturen – Rechnenlernen (BeSTeR): Förderung in Tandems von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten in Mathematik“ werden Interaktionen von jeweils zwei Schüler:innen mit einer Lehrperson im Rahmen einer Förderung analysiert. Grundlage für die Förderung bildet die Schulung des Zahlenblicks (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018). Untersucht wird, wann, wie und wozu Beziehungen von den Kindern mit besonderen Schwierigkeiten in Mathematik genutzt werden. Hierfür werden sowohl Entwicklungsverläufe als auch Vergleiche zwischen den Tandems vorgenommen.

1 (Flexible) Rechenkompetenzen entwickeln

Auf dem Weg zur Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen ist es unumgänglich, inhaltliche und strukturorientierte Herausforderungen zu meistern. Als die zwei zentralen arithmetischen Inhaltsbereiche beim mathematischen Lernen (nicht nur) in der Grundschule gelten das Zahlverständnis (inkl. Stellenwertverständnis) und das Verständnis der Rechenoperationen (Gaidoschik et al., 2021). Als strukturorientierte Herausforderung wird die Entwicklung eines Blicks für Zahl-, Term- und Aufgabeneigenschaften und -beziehungen angesehen, da ohne die Wahrnehmung dieser eine Ablösung vom Zählen sowie die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen kaum gelingen kann (Rechtsteiner-Merz, 2013).

2 Forschungsdesign

Den Datensatz der Studie bilden videographierte Fördereinheiten von vier Tandems, die im Rahmen einer den Unterricht ergänzenden mathematischen Förderung über einen Zeitraum von 20 bis 30 Einheiten (30 – 40 Minuten) gefördert wurden. Alle teilnehmenden Kinder be-

suchten eine zweite Klasse und zeigten bei einer qualitativen Eingangsdiagnostik Schwierigkeiten in den in Kapitel 1 erwähnten zentralen arithmetischen Inhaltsbereichen.

Die videographierten Daten wurden für einen ersten Überblick nach Kriterien zusammengefasst, die Indikatoren für Deutungs-aushandlungen sein könnten: Hinweise auf eventuelle besondere Momente (z. B. Uneinigkeit der Kinder), verschiedene Interaktions- und Kooperationsformen (z. B. gemeinsames Bearbeiten einer Aufgabe). Um in den anschließend ausgewählten Sequenzen den Interaktionsverlauf mit den Deutungen und der damit verbundenen Begriffsentwicklung der Kinder rekonstruieren zu können, soll auf die Kombination des interaktionistischen und epistemologischen Zugangs zurückgegriffen werden (u. a. Korten, 2020). Es werden dabei zwei Stränge verfolgt: Zum einen soll ein Querschnitt eines inhaltlichen Förderbereichs über alle Tandems hinweg komparativ verglichen und zum anderen ein Längsschnitt eines Tandems über verschiedene inhaltliche Bereiche im Förderverlauf analysiert werden.

3 Analysebeispiel: Linda und Amelie

In der Fördereinheit 14 ordnen Linda und Amelie in einer Fördersequenz Punktebilder mit Darstellungen der Zerlegungen der Zahl Sechs und begründen ihre Ordnung (Abb. 1). Anschließend werden sie von der Lehrperson aufgefordert, passende Aufgaben zu den Punktebildern zu notieren. Linda eröffnet das Gespräch mit einem inhaltlichen Vorschlag: Amelie soll $6+0$ aufschreiben, sie selbst $0+6$ und positioniert ihre Termkarte unter dem Punktebild zu $0+6$ ¹, Amelie ihre unter dem zu $6+0$. Danach macht Amelie den Vorschlag $6+0$ aufzuschreiben, was sowohl von Linda als auch von der Lehrperson hinterfragt wird mit der Begründung der Lehrperson, dass es so eine Termkarte bereits gebe. Daraufhin schlägt Linda vor, dass Amelie $6+1$ schreiben soll und sie selbst $1+6$. Beide Termkarten werden von Linda platziert, nämlich unter den Punktebildern zu $5+1$ und $1+5$ (Abb. 1). Nun macht Linda einen weiteren Vorschlag:

¹ Der erste Summand bezieht sich auf die Anzahl der blauen Punkte.

Linda du schreibst sechs plus zwei, ich schreibe $<^2$ zwei plus sechs (*notiert $2+6$, schiebt das Termkärtchen unter das Punktebild zu $2+4$ (Abb. 1)*)

Amelie $<$ (*holt ein leeres Kärtchen, notiert $6+2$, schiebt das Kärtchen unter das Punktebild zu $4+2$ (Abb. 1), holt ein neues Kärtchen, notiert $6+3$, schaut zu Linda)*)

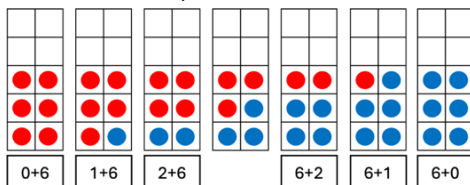


Abb. 1 Punktebilder mit Zerlegungen der Sechs und zugeordnete Termkarten

Am Anfang dieser Szene übernimmt Linda eine führende inhaltliche und organisatorische Rolle, indem sie bestimmt, was und von wem geschrieben werden soll. Es scheint, dass Linda eine Vorgehensweise verfolgt, bei der in jedem Schritt zwei Tauschaufgaben notiert werden sollen, die anschließend den jeweils äußersten noch nicht besetzten Punktebildern rechts und links zugeordnet werden. Somit wird die Reihe der Termkarten paarweise symmetrisch von außen nach innen aufgefüllt. Aus epistemologischer Sicht deutet dies darauf hin, dass Linda die Kommutativität bei Zahlzerlegungen (er)kennt und nutzt (Abb. 2).

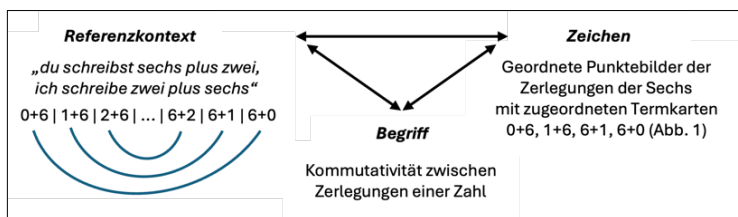


Abb. 2 Epistemologisches Dreieck zu Lindas Deutung

Unklar bleibt an dieser Stelle jedoch, welchen Referenzkontext Linda in Bezug auf die einzelnen Summanden der Terme aktiviert, um weitere Termkarten zu entwickeln. Die Idee des Tauschens nutzt sie zwar

² Das Zeichen $<$ weist auf gleichzeitige (Sprach-)Handlungen in verschiedenen Turns hin.

unmittelbar richtig, durch das Behalten des Summanden Sechs bei allen Termkarten scheint sie die damit einhergehende Veränderung der Gesamtmenge und damit verbunden die Idee des gegensinnigen Veränderns nicht zu erkennen. Erst im weiteren Verlauf, beim Punktebild zu $3+3$, entsteht bei Linda ein Moment einer produktiven Irritation, wodurch sie schließlich beide Darstellungsebenen verknüpfen sowie die Struktur wahrnehmen und nutzen kann, um alle Termkarten richtigzustellen.

Nach der Instruktion von Linda gegenüber Amelie „du schreibst $6+2$ “ notiert diese sofort die vorgegebene Termkarte und ordnet sie dem Punktebild von $4+2$ zu. Das könnte dafür sprechen, dass Amelie ein Muster in der Vorgehensweise von Linda wahrnimmt, das sie weiterführen kann und das sie nicht hinterfragt. Das selbstständige Notieren der Termkarte $6+3$ im nächsten Schritt spricht dafür, dass Amelie zwar ein Muster auf der symbolischen Ebene fortsetzen kann, dieses aber nicht mit der ikonischen Ebene verknüpft wird. Diese fehlende Verknüpfung der Darstellungsebenen bestätigt sich auch bei der Analyse des weiteren Sequenzverlaufs.

4 Fazit und Ausblick

Es scheint, dass beide Mädchen die symbolische und ikonische Ebene zuerst nicht vernetzen bzw. nur Teilmengen beachten. Erst nach einem Moment der Irritation gelingt es Linda, die vorhandene Struktur sowohl in den Punktebildern als auch zwischen diesen und den Termkarten richtig zu deuten.

Im weiteren Verlauf der Auswertung sind komparative Analysen der gleichen Förderaktivität bei anderen Tandems vorgesehen.

Literatur

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M. & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Special Issue der *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 47(111S).

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, Ch. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln*. Springer Spektrum.


Rechtsteiner-Merz, Ch. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung*. Waxmann.

Korten, L. (2020). *Gemeinsame Lernsituationen im inklusiven Mathematikunterricht*. Springer Spektrum.

Arbeitsgruppe Daten und Zufall


Koordination: Grit Kurtzmann

grit.kurtzmann@uni-greifwald.de

 0009-0007-0700-7642

Beitrag: Antonia Wunsch

antonia.wunsch@uni-flensburg.de

 0009-0007-5807-8408

Längsschnittliche Erhebung der Kompetenzen des Inhaltsbereichs *Daten und Zufall* im vierten Schuljahr

Die Relevanz stochastischer Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule wird mit Blick in die Lebenswelt der Kinder deutlich. Grundschüler*innen befinden sich alltäglich in (stochastischen) Situationen mit verschiedenen Ausgangsmöglichkeiten. Die bis zum Ende der Primarstufe zu erwerbenden stochastischen Kompetenzen sind in der Leitidee *Daten und Zufall* der Bildungsstandards formuliert (KMK, 2022). Aufgrund des vergleichsweise geringen Forschungsstands auf diesem Gebiet sind vor allem längsschnittliche Ergebnisse über die Kompetenzen bzw. Kompetenzentwicklung in der letzten Jahrgangsstufe des Primarbereichs interessant. Die Teilstudie *Daten und Zufall* wird im Rahmen des DFG-geförderten Projekts *MAMBO – Mathematikbücher optimal nutzen* durchgeführt.

1 Theoretischer Hintergrund

Für eine aktive Teilhabe an der Gesellschaft wird die „Forderung nach Data Literacy, Risk Literacy und Statistical Literacy“ bzw. „Probability Literacy“ laut (Biehler et al., 2023, S. 244, 251). Allerdings sind sowohl die erreichten stochastischen bzw. mathematischen Kompetenzen am Ende der Primarstufe (Schumann & Sachse, 2022) als auch an weiterführenden Schulen in Deutschland (OECD, 2023) rückläufig.

Einerseits berichten Autor*innen von defizitären Kompetenzen. So berichtet Käser (2013) im probabilistischen Mathematikunterricht von Verständnisschwierigkeiten der Viert- und Siebtklässler*innen bei den

Begriffen *Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit*. Auch Fischbein und Kolleg*innen stellten bereits 1991 sprachliche Herausforderungen mit den Begriffen „possible“, „impossible“ und „certain“ fest.

Beim Lösen kombinatorischer Problemstellungen weist Höveler (2014) auf das Problem des „Doppelt Zählens“ hin sowie auf eine unstrukturierte Herangehensweise von Drittklässler*innen. Weiter lösen maximal 50% der Drittklässler*innen kombinatorische Aufgabenstellungen korrekt (Herzog et al., 2017). Nach Hoffmann (2005) sind die Unterschiede zwischen Primar- und Sekundarstufe eher gering – nur die Hälfte der Variationsaufgaben bearbeiteten die Sekundarstufenschüler*innen erfolgreicher. Zudem sind die Erklärungen zur Kombinationsanzahl innerhalb der Schulformen heterogener als zwischen den Schulformen (Hoffmann, 2005).

Andererseits erklären Autor*innen, dass der Umgang mit stochastischen Situationen und das Fördern stochastischer Kompetenzen ab der Primarstufe möglich sind (Falk et al., 2012; Höveler, 2014; Frische-meier, 2020). Eine frühe stochastische Bildung begünstigt zudem die Kompetenzentwicklung in der Sekundarstufe (Wassner et al., 2002).

2 Forschungsfragen

Stochastische Inhalte sind ein verbindlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts der Primarstufe. Umfangreiche Erkenntnisse zu aktuellen Kompetenzständen der Schüler*innen in allen drei Bereichen der Stochastik (Daten, Zufall und Kombinatorik) sowie Hinweise zu der Kompetenzentwicklung der Schüler*innen sind kaum vorhanden. Um dies zu überprüfen und entsprechend zu messen, sollen die folgenden Forschungsfragen beantwortet werden:

- Welche Kompetenzen erreichen die Schüler*innen am Anfang und am Ende der vierten Jahrgangsstufe?
- Wie fällt die Kompetenzentwicklung aus? Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten bestehen?

3 Studiendesign

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde ein Paper-Pencil-Test entwickelt, der am Anfang und Ende des Schuljahres 2024/2025 in der vierten Klassenstufe eingesetzt wird. Die stochastischen Kompetenzen

der Viertklässler*innen werden längsschnittlich erhoben, um deren Entwicklung sowie mögliche Einflussfaktoren darauf (z. B. das genutzte Schulbuch) zu untersuchen. Es nehmen 43 Klassen mit insgesamt knapp 1.000 Schüler*innen teil.

Das entwickelte Testheft besteht aus drei Subtests mit insgesamt 32 Items: Teil 1 – Daten, Teil 2 – Kombinatorik, Teil 3 – Zufall. Im ersten Subtest mit elf Items entnehmen die Lernenden Tabellen und Diagrammen Informationen, wechseln deren Darstellungen und interpretieren Daten zur Aufgabenbeantwortung. Der zweite Subtest mit zehn Items umfasst das Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen mit der Wahl einer geeigneten Vorgehensweise für das Finden aller Kombinationen sowie für das Bestimmen von Kombinationsanzahlen. Im dritten Subtest mit elf Items wird das qualitative Einschätzen und Begründen von Zufallsexperimenten fokussiert. Die Lernenden nutzen die drei Antwortmöglichkeiten *sicher*, *möglich* sowie *unmöglich* zur Einschätzung von Eintrittswahrscheinlichkeiten und wählen aus verschiedenen Ereignissen von Zufallsexperimenten jeweils das mit der günstigeren Gewinnchance aus.

Zudem sind Interviews mit den teilnehmenden Mathematiklehrkräften am Ende des Schuljahres 2024/2025 geplant, um Inhalte und Umfang ihres Stochastikunterrichts einschätzen zu können.

Literatur

Biehler, R., Engel, J. & Frischemeier, D. (2023). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Auflage) (S. 243–278). Springer Spektrum.

Falk, R., Yudilevich-Assoulione, P. & Elstein, A. (2012). Children's concept of probability as inferred from their binary choices – revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), 207–233. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9402-1>

Fischbein, E., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 523–549. <https://doi.org/10.1007/BF00312714>

Frischemeier, D. (2020). Building Statisticians at an Early Age – Statistical Projects Exploring Meaningful Data in Primary School. *Statistics Education Research Journal*, 19(1), 39–56. [https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ19\(1\)_Frischemeier.pdf?1583007163](https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ19(1)_Frischemeier.pdf?1583007163)

Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2017). Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse. Darstellung, Abstraktionsgrad und Strategieinsatz als Einflussfaktoren auf die Lösungsgüte. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(2), 263–289. <https://doi.org/10.1007/s13138-017-0118-8>

Hoffmann, A. (2005). Vergleich der kombinatorischen Problemlösefähigkeit von Primar- und Sekundarstufenschülern im Hinblick auf Lerneffekte während eines Interviews. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26(3), 176–199. <https://doi.org/10.1007/BF03339022>

Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern* (Dissertation). Technische Universität Dortmund. <https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/33604>

Käser, U. (2013). Stochastisches Wissen und Entscheidungskompetenz in probabilistischen Problemsituationen ‚know that und ‚know how‘ von Viert- und Siebtklässlern über Häufigkeit, Zufall und Wahrscheinlichkeit. In G. Greefrath, F. Käpnick, M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster*, Band 1 (S. 524–527). Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Kultusministerkonferenz [KMK] (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004*. KMK. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf

OECD (2023). *PISA 2022 Ergebnisse (Band I): Lernstände und Bildungsgerechtigkeit*. wbv Media. <https://doi.org/10.1787/19963793>

Schumann, K. & Sachse, K. A. (2022). Kompetenzstufenbesetzungen im Fach Mathematik. In P. Stanat, S. Schipolowski, R. Schneider, K. A. Sachse, S. Weirich & S. Henschel (Hrsg.), *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich* (S. 67–80). Waxmann.


Wassner, C., Martignon, L. & Sedlmeier, P. (2002). Die Bedeutung der Darbietungsform für das alltagsorientierte Lehren von Stochastik. *Zeitschrift für Pädagogik*, 45, 35–50. https://www.researchgate.net/publication/27262343_Die_Bedeutung_der_Darbietungsform_fur_das_alltagsorientierte_Lehren_von_Stochastik


Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination

und Beitrag: Simone Reinhold und Bernadette Thöne

simone.reinhold@uni-leipzig.de thoene@uni-bremen.de

 0000-0003-0253-7525

 0009-0000-3880-1477

Vorstellungen, Perspektiven, Bezüge:

Was stellen wir uns unter „Raumvorstellung“ vor?

Räumlich-visuelle Fähigkeiten, an deren Ausbildung und Förderung der Geometrieunterricht der Grundschule in besonderer Weise beteiligt ist, spielen eine wichtige Rolle in vielen Bereichen des Alltags und des schulischen Lernens. Insbesondere die starke Verbindung zwischen den Fähigkeiten zur Wahrnehmung, Raumvorstellung, zur Muster- und Strukturerkennung und den im Primarbereich auszubildenden elementaren arithmetischen Fähigkeiten sind vielfach dokumentiert (vgl. exemplarisch Übersichten in Franke & Reinhold, 2016; Reinhold, 2024).

1 Ein erster Blick aus arithmetischer Perspektive?

Wie im mathematikdidaktischen Diskurs seit geraumer Zeit diskutiert und in der Arbeitsgruppensitzung aufgearbeitet wird, entfalten beispielsweise auch Veranschaulichungen an arithmetischen Arbeitsmitteln erst durch die aktive mentale Interpretation der visuell und haptisch wahrnehmbaren räumlichen Beziehungen ihre volle Wirkung: Arrangements aus Plättchen oder anderen visuell bzw. anderweitig wahrnehmbaren Repräsentanten werden im Zuge arithmetischer Deutungen nicht nur in Bezug auf arithmetisch geprägte (Zahl-) Aspekte, sondern auch in Bezug auf temporäre bzw. veränderte oder bewusst variierte Raumlage erfasst. Besondere Stärke ergibt sich, wenn dies auch in der Vorstellung stattfinden kann. So dokumentieren die Fotos in Abb. 1 das Umlegen eines einzelnen Elementes in einer strukturierter Darstellung auf einem Zwanzigerfeld zur Aufgabe $6 + 4$.

Zur adäquaten Deutung dieser und vergleichbarer Zusammenhänge sind neben Kompetenzen, die sich auf die Raum-*Wahrnehmung* in den

Mittelpunkt rücken, folglich offenkundig auch Fähigkeiten anzusprechen, die sich auf die Raum-*Vorstellung* beziehen, bei denen also Objekte mental repräsentiert bzw. konkrete oder vorgestellte räumliche Begebenheiten gedanklich manipuliert werden müssen:



Abb. 1 Konkrete Darstellung bzw. Vorstellung von Veränderung an einer räumlich-visuell erfahrbaren Repräsentation zur Aufgabe $6 + 4$ (Material aus Deckeln von Wasserflaschen selbst erstellt mit Kindern und Lehrkräften in Nampula, Mosambik, 2024)

Allerdings kursieren hier in der theoretischen und empirischen Auseinandersetzung mit Konzepten die verschiedensten Begriffe. Im internationalen Diskurs treten weitere Facetten und Auslegungen hinzu.

2 Ausgewählte Perspektiven auf Raumvorstellung

Zur Erarbeitung eines Überblicks bietet es sich, wie zahlreiche einschlägige Quellen dokumentieren, an, verschiedene Perspektiven auf die Fähigkeit zur Raumvorstellung einzunehmen und damit den Blick auf entsprechende Facetten auszuscharfen. So weisen beispielsweise Franke und Reinhold (2016) auf folgende Perspektiven hin:

- *Psychometrische Perspektive* – diese bezieht sich häufig auf das von Thurstone begründete Konzept von Primärfaktoren der Intelligenz, wobei neben dem Faktor S („space“) mehrere dieser Faktoren Teilaspekte der Raumvorstellung oder der visuellen Wahrnehmung ansprechen (vgl. ausführlicher Reinhold, 2018)
- *Kognitive Perspektive* – diese wird eingenommen, indem „die im Individuum ablaufenden Prozesse bei der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben“ (Franke & Reinhold, 2016, S. 63) fokussiert werden.
- *Strategische Perspektive* – diese ergibt sich aus der Betrachtung individueller Bearbeitungsprozesse bei der Begegnung mit Herausforderungen an die Raumvorstellung (Reinhold, 2018).

3 Konzepte der Raumvorstellung

Die meisten der im deutschsprachigen Raum verbreiteten Konzepte, die raumvorstellungsbezogene Kompetenzen terminologisch zu erfassen versuchen, differenzieren diese in verschiedene Teilbereiche aus. Starke Verbreitung findet dabei das Komponentenmodell von Maier (1999), das z. B. durch die separate Ausweisung der Komponente „Vorstellung von mentalen Rotationen“ (vgl. Abb. 2) die kognitive bzw. die strategische Perspektive abzubilden versucht.

Komponenten der Raumvorstellung

Art der Situation Person befindet sich...	statisch	dynamisch
außerhalb der Situation	Räumliche Beziehungen	Veranschaulichung
		Mentale Rotation
innerhalb der Situation	Räumliche Wahrnehmung	Räumliche Orientierung

Abb. 2 Übersicht über die Komponenten der Raumvorstellung in Anlehnung an Maier (1999, S. 14)

Wollring (1996, 2012) führt diese Aspekte stärker aufeinander bezogen zusammen, wenn er davon spricht, dass Kinder Objekte bzw. ebene Figuren „mental reversibel zerlegen, vergrößern, verkleinern oder sonstwie zum Zwecke des mentalen Sehens reversibel verändern“ (Wollring, 1996, S. 476). Hier, wie auch in weiteren Beispielen aus dem internationalen Kontext, wird deutlich, dass die (mentale) *Aktivität* akzentuiert und der Raumvorstellungsbegriff um die Komponenten Handeln („diese Fähigkeit in Handlungen an konkretem Material äußern zu können“) und Sprache („diese Fähigkeit in Sprache fassen zu können“) erweitert wird.

4 Diskussion und Ausblick

Für den geometriedidaktischen Diskurs, d. h. sowohl für die Unterrichtspraxis als auch für die geometriedidaktische Forschung im Primarbereich ergibt sich somit ein reichhaltiges Kompendium an theoretisch zu bearbeitenden Fragestellungen:

- Inwiefern ist die anhaltende Diskussion um (terminologische und inhaltliche) Facetten des Raumvorstellungsbegriffs überhaupt noch zeitgemäß? Was erscheint uns obsolet oder redundant? Was sollte uns aus der Historie dringend im „kollektiven mathematikdidaktischen“ Bewusstsein bleiben?
- Welche Übereinkünfte erscheinen bedeutsam? Lassen sich diese gewichten?
- Was ist (auch international) anschlussfähig? Wie kommunizieren wir dies in der internationalen Diskussion?
- Welche Lücken und Bedarfe erkennen wir für die Praxis und für die Forschung?

Literatur

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Springer Spektrum.

Maier, P. H. (1999) Raumgeometrie mit Raumvorstellung – Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, (3), 4–18.

Reinhold, S. (2018). Geometrische Abbildungen in der Vorstellung: Relevanz und (individuelle) Strategien von Grundschulkindern. In A. Steinweg. (Hrsg.), *Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018* (S. 41–48). UBP.

Reinhold, S. (2024). Bauen und Zählen – zwei Seiten der Medaille? Elementare Grundlagen und Beobachtungsanlässe für die frühe mathematische Bildung. In T. Friederich, K. Liebers, V. Jankowicz, S. Reinhold & M. Rönnau-Böse (Hrsg.), *Facetten der Professionalisierung im System frühkindlicher Bildung, Betreuung und Erziehung* (S. 35–45). FEL. <https://fel-verlag.de/produkt/facetten-der-professionalisierung-im-system-fruehkindlicher-bildung-betreuung-und-erziehung-festschrift-fuer-susanne-viernickel/>

Wollring, B. (1996). Räumliche Strukturen in unangeleiteten Zeichnungen von Grundschulern. In K.-P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1996* (S. 476–479). Franzbecker.

Wollring, B. (2012). Raumvorstellung entwickeln – Eine zentrale Forderung für mathematische Bildung. *Fördermagazin*, (2), 8–12.

Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt und Uta Häsel-Weide

birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de

0000-0002-3508-3032

uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de

0000-0001-6278-4240

Beitrag: Anna-Maria Billigen

billigen@uni-wuppertal.de

0009-0003-9201-7482

Partizipation im Rahmen der Förderung mathematischer Potenziale im inklusiven Mathematikunterricht

Während zahlreiche Konzepte für den inklusiven Unterricht den Umgang mit mathematischen Schwierigkeiten fokussieren, findet die Förderung mathematischer Potenziale häufig außerhalb des Klassenverbandes in exklusiven Lernsituationen statt, wodurch nur wenige Möglichkeiten des fachlichen Austauschs aller Kinder sowie des produktiven mit- und voneinander Lernens eröffnet werden (Billigen et al., 2023). Im Forschungsprojekt wurden parallelisierte Lernumgebungen (LU) zur Förderung mathematischer Potenziale im inklusiven Unterricht entwickelt, die den fachlichen Austausch sowie das gemeinsame Lernen aller Kinder ermöglichen. Der Beitrag fokussiert ausgewählte Aspekte des fachlichen Austauschs von Kindern, indem die Partizipation in einem heterogenen Zweierteam nachgezeichnet wird.

1 Partizipation

Mathematiklernen ist ein interaktiver Prozess, der sich in der Aushandlung mit anderen (Miller, 1986) sowie durch Partizipation an fachlichen Aushandlungsprozessen vollzieht. Dabei zeichnen sich erfolgreiche Lernprozesse durch die Entwicklung eines *individuellen Begriffsverständnisses* (Steinbring, 2009) sowie durch eine zunehmend autonomere *Partizipation* an kollektiven Argumentationen (Krummheuer & Brandt, 2001) aus. In Bezug auf schulische Inklusion stellt Partizipation eine Gelingensbedingung dar, indem sowohl die gleichberechtigte Teilhabe am Unterricht als auch die individuelle Einbringung am gemeinsamen fachlichen Lernen in den Blick genommen werden (Häsel-Weide & Nührenböcker, 2017). Im Forschungsprojekt wird durch epistemologische Analysen eine fachliche Perspektive auf Partizipation eingenommen, indem die Weiterentwicklung des individuellen Be-

griffsverständnisses während der Interaktion analysiert wird (Steinbring, 2009). Durch die Kombination mit einer sozialen Perspektive auf Partizipation wird die Handlungsautonomie der Lernenden im Verlauf der Interaktion mit Hilfe der Partizipationsanalyse untersucht. Im Beitrag werden hierzu die vier Sprechendenfunktionen analysiert (Krummheuer & Brandt, 2001): Ein*e *Kreator*in* formuliert eine eigene Idee in eigenen Worten, wohingegen ein*e *Traduzierer*in* die Formulierung einer anderen Person übernimmt, um eine eigene Idee auszudrücken. Während ein*e *Paraphrasierer*in* die Idee einer vorherigen Äußerung in eigenen Worten wiedergibt, wiederholt ein*e *Imitier*in* den Inhalt wie auch den Wortlaut einer vorangegangenen Äußerung. Die Partizipationsanalyse ermöglicht es nachzuzeichnen, inwiefern die Lernenden am gemeinsamen fachlichen Austausch partizipieren und welche Verantwortung sie dabei für den Inhalt übernehmen.

2 Design der parallelierten LU „Magische Quadrate“

Im Forschungsprojekt wurde eine neuartige Konzeption einer inklusiven LU zum Lerngegenstand Magische Quadrate (MQ) entwickelt, die natürlich differenzierende Aufgaben mit dem Konzept der Parallelisierung kombiniert. Die LU wurde mit 31 Viertklässler*innen in drei Zyklen erprobt. Nachdem sich die Kinder in Sequenz 1 (S1) in einer natürlich differenzierend angelegten Einführungsstunde in Einzelarbeit mit MQ vertraut gemacht haben, erkunden sie in S2 parallelierte, natürlich differenzierende Entdeckungsaufgaben in zieldifferenten Zweierteams: Variante A (VA, Abb. 1), komplexere Variante B (VB, Abb. 1). Die Zweierteams wurden auf Grundlage der Lernendenprodukte wie auch der anschließenden Austauschphase im Plenum gebildet.

Magische Quadrate

1 Berechnet die Zauberzahl und vergleicht die magischen Quadrate. Was fällt euch auf?

4	3	8	8	3	4	9	8	13	7	14	9
9	5	1	1	5	9	14	10	6	12	10	8
2	7	6	6	7	2	7	12	11	11	6	13

Zauberzahl: _____ Zauberzahl: _____ Zauberzahl: _____ Zauberzahl: _____

2 Findet neue magische Quadrate. Was passiert mit der Zauberzahl, wenn ihr die Mittelzahl verändert? Warum ist das so? Begründet.

Zauberzahl: _____

S2 – VA

Findet magische Quadrate mit der Zauberzahl 90. Wie geht ihr vor? Begründet.

S2 – VB

S3

Jetzt machen wir ein magisches Quadrat mit der Mittelzahl 3

Das geht doch gar nicht

Karen Charlotte

Wer hat recht? Findet gemeinsam mehrere Begründungen.

Abb. 1 Sequenz 2 – Variante A / Sequenz 2 – Variante B / Sequenz 3

In S3 (Abb. 1) bearbeiten die Kinder in heterogenen aus VA und VB zusammengesetzten Zweierteams einen gemeinsamen Forschungsauftrag.

3 Einblick in ein Fallbeispiel¹

Lotta (zuvor VA) und Lenny (zuvor VB) bearbeiten gemeinsam einen neuen Entdeckungsauftrag (Abb. 1).

- Lo Schreib mal die drei rein.
 Le Mmh [schreibt 3 in F5²]. Ich glaub wir können
 Lo Unten muss die neun hin [tippt auf „Zauberzahl“].
 Le [schaut überrascht] Hmh [schreibt 9 in das Feld „Zauberzahl“].
 Ich wusste nicht, dass hier eine neun hin soll.
 I Vielleicht kann Lotta dir das erklären.
 Lo Weil drei mal drei sind neun und immer, (.) man muss die Zahl in der Mitte immer mal drei rechnen.
 Le Ha (.) ahh, aber das geht nicht weil (.) vielleicht, weil wir brauchen ne ne [tippt auf F4] es gibt nur (...). Vielleicht könnte das gehen, aber nur vielleicht, zwei und vier [schreibt 2 in F4, 4 in F6]. (..) Das ergibt
 Lo Zwei und drei sind fünf [tippt auf F4, F5, F6], ja das sind neun.
 Le Das geht nicht.
 Lo Schreib mal da ne fünf hin [tippt auf F2].
 Le Weil sonst wir brauchen ein fünf [zeigt auf rechte Spalte], aber dann ergibt es neun. So wenn wir ein fünf machen, müssen wir Zahl zwei oder drei [tippt auf F3, F9]. Das geht nicht. Oder eins oder vier [tippt auf F9, F3] und vier haben wir schon [tippt auf F6]. Das geht nicht.
 Lo Weil man ja dann Zahlen doppelt benutzen muss.

F1	F2	F3
F4	F5	F6
F7	F8	F9

	3	

Zauberzahl: 9

2	3	4

Zauberzahl: 9

Lotta schlägt als *Kreatorin* die Zauberzahl 9 vor. Vermutlich überträgt sie damit ihre Entdeckungen aus S2 (VA) über den Zusammenhang von Mittel- und Zauberzahl auf die neue Aufgabe. Lenny greift diese für ihn neue Entdeckung auf und entwickelt sie als *Kreator* weiter, indem er eine mögliche Zahlzerlegung und Anordnung für die von Lotta eingebrachte Zauberzahl 9 sucht. Lotta *paraphrasiert* daraufhin Lennys Vorschlag, woraufhin er als *Kreator* anbringt, dass das MQ „nicht geht“. Lotta verstummt dadurch nicht, sondern bringt als *Kreatorin* die Zahl 5 als neuen Vorschlag für ein spezifisches Feld (F2) ein. Auch Lenny bringt die Zahl 5 in den Austausch ein. Seine Zeigehandlung auf die rechte Spalte sowie die Felder F3 und F9 lassen aber die Interpretation zu, dass er die 5 nicht als Lösungsvorschlag für ein spezifisches Feld wählt. Vielmehr scheint er die Spaltensumme 9 in die Summanden 4 (F6) und 5 (F3 & F9) zu zerlegen. Diese Interpretation wird auch

¹ Dem Umfang des Beitrags geschuldet findet keine ausführliche wissenschaftliche Analyse, sondern eine verkürzte Darstellung einer Partizipationsanalyse statt.

² Zur besseren Lesbarkeit werden die Felder des MQ fortlaufend nummeriert.

dadurch gestützt, dass er mögliche Zahlzerlegungen der 5 zur Bestimmung der Felder F3 und F9 sucht. Es zeigt sich, dass Lenny durch Lottas neuen Vorschlag zu einer Begründung seiner vorherigen Aussage, dass das MQ nicht funktioniere, angeregt wird. Lotta greift seine Erklärung als *Paraphrasiererin* auf und konkretisiert diese, indem sie hervorhebt, dass dann Zahlen doppelt genutzt würden.

4 Fazit und Ausblick

Die *Partizipationsanalyse* konnte zeigen, dass beide Kinder am gemeinsamen fachlichen Austausch autonom partizipieren, indem sie Verantwortung für den Inhalt übernehmen. Dies zeigt sich daran, dass Lotta und Lenny jeweils neue Inhalte als *Kreator*innen* in die Kommunikation einbringen. Hierbei nutzen sie auch die Erkenntnisse des anderen und entwickeln diese im Diskurs weiter. Erste *epistemologische Analysen* zur LU (Billigen et al., 2023) in Kombination mit Partizipationsanalysen legen die Vermutung nahe, dass möglicherweise diese Form des speziell initiierten und zieldifferenten individuellen Zugangs in S2 sowie das Zusammenspiel aus natürlicher Differenzierung und Parallelisierung die Partizipation wie auch die individuelle Potenzialförderung beider Kinder begünstigen könnte. Derzeit werden in weiteren ausführlichen Analysen diese Begriffsentwicklungs- und Partizipationsprozesse detailliert charakterisiert.

Literatur

Billigen, A.-M., Söbbeke, E., & Sprenger, L. (2023). Cooperation processes in inclusive learning settings with a special focus on mathematical potential. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Hrsg.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (S. 4540–4547). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. <https://hal.science/hal-04409130>

Häsel-Weide, U., & Nührenböcker, M. (Hrsg.) (2017). *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen*. Grundschulverband e.V.

Krummheuer, G., & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion*. Beltz.


Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse*. Suhrkamp.

Steinbring, H. (2009). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b104944>

Arbeitsgruppe Lehrkräftebildung


Koordination: Gerald Wittmann

gerald.wittmann@ph-freiburg.de

 0000-0003-2094-0908

Beitrag: Lukas Baumanns, Daniela Götze, Bettina Rösken-Winter, Malte Lehmann, Christoph Selter

lukas.baumanns@tu-dortmund.de

 0000-0002-6697-3994

Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln: Ausgestaltung des QuaMath-Programms und erste Forschungsergebnisse

1 Zielsetzung für das QuaMath-Programm

Laut des IQB-Bildungstrends 2021 verlassen etwa 22 % der Grundschüler:innen die Primarstufe am Ende der 4. Klasse, ohne die Mindeststandards im Fach Mathematik erworben zu haben (Stanat et al., 2022). Dieser Wert hat sich seit dem IQB-Bildungstrend 2016 nochmals verschlechtert. Auch angesichts dieser Entwicklung stellt sich die Frage, wie die Qualität des Mathematikunterrichts verbessert werden kann. Das auf zehn Jahre angelegte, deutschlandweite QuaMath-Programm des DZLM verfolgt das Ziel, in der Breite Unterrichtsqualität auszubauen und die mathematische Bildung der Schüler:innen von der KiTa bis zum Abitur zu stärken. Dazu werden Schulen und deren Lehrkräfte durch Fortbildungen von DZLM-qualifizierten Multiplizierenden in der Weiterentwicklung ihres Mathematikunterrichts unterstützt.

In Studien zur Unterrichtsqualitätsforschung lassen sich Belege erkennen, dass qualitätsvoller Mathematikunterricht gerade dann zur Erreichung von Mindeststandards führt, wenn neben allgemeinen Merkmalen auch fachdidaktisch spezifische Merkmale für Unterrichtsqualität herangezogen werden (Charalambous & Praetorius, 2018). Aufbauend auf diesen Erkenntnissen agiert das QuaMath-Programm innerhalb eines kohärenten Rahmens aus fünf Prinzipien qualitätsvollen Mathematikunterrichts (für eine ausführliche Darstellung, siehe Prediger et al., 2022), die im DZLM mit verschiedenen Akteur:innen entwickelt

wurden: Kognitive Aktivierung, Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Lernendenorientierung und Adaptivität sowie Kommunikationsförderung.

2 Forschungsinteressen und Einblick in erste Erkenntnisse

Ein zentraler Bestandteil des QuaMath-Programms ist die Forschungsbasierung, um Gelingensbedingungen und Wirkungen der Fortbildungsmodule auf Qualifizierungs-, Fortbildungs- und Unterrichtsebene zu untersuchen. Im ersten QuaMath-Jahr (Sept. 2023–Sept. 2024) wurden Multiplizierende für die Durchführung der Fortbildungen im DZLM qualifiziert. Dabei geben erste Analysen interessante Einblicke in die Vorerfahrungen der teilnehmenden Multiplizierenden. So haben zwar 99 % von ihnen ein Lehramtsstudium und ein Referendariat abgeschlossen (davon in Mathematik: 91 % in der Primarstufe und 98 % in der Sekundarstufe), jedoch nur 38 % vor Beginn des Projektes eine Qualifizierungsmaßnahme für Multiplizierende im Bereich Mathematik durchlaufen. Auch in der eigenen Fortbildungserfahrung unterscheiden sich die Multiplizierenden. Während etwa die Hälfte der Multiplizierenden in den letzten 3 Jahren mindestens sieben Fortbildungen selbst gegeben hat, gibt es auch viele, die hier noch wenig bis keine Erfahrungen vorweisen können (Primarstufe: 30% ohne eigene Fortbildungserfahrung, Sekundarstufe: 26% ohne eigene Fortbildungserfahrung). Hinsichtlich der folgenden Merkmale qualitativvoller Fortbildungen (Kompetenzorientierung, Fallbezug, Teilnehmendenorientierung, Reflexionsförderung, Lehr-Lern-Vielfalt und Kooperationsanregung) zeigen die Multiplizierenden der Primarstufe zu Beginn des Projektes bereits eine hohe Selbstwirksamkeit (5-er Likert-Skala von 1 bis 5; z. B. hinsichtlich Fallbezug: $M = 4,44$, $SD = 0,53$ oder Kompetenzorientierung: $M = 4,22$, $SD = 0,51$). Zudem zeigt sich, dass die eigenen Kooperationsaktivitäten, vor allem mit anderen Multiplizierenden, als auch die Überzeugung, dass Lehrkräftekooperation Transfer unterstützt, entscheidend für eine hohe Selbstwirksamkeit bezüglich dieser Merkmale qualitativvoller Fortbildungen sind (Hansen et al., 2024). In einer ersten Studie konnten zudem Cluster für Kategorien identifiziert werden, die Multiplizierende der Primarstufe

($N = 156$) bei der professionellen Wahrnehmung einer fiktiven Fortbildungssituation anlegten (Bialy et al., 2024). Es ergaben sich drei Cluster, die sich dahingehend unterscheiden, dass entweder ein fachdidaktischer, ein überwiegend pädagogischer oder fast ausschließlich pädagogischer Fokus eingenommen wurde. Multiplizierende mit wenig Fortbildungserfahrung greifen im Rahmen ihrer professionellen Wahrnehmung eher auf nicht fachdidaktische Aspekte zurück.

Die Qualifizierung der Multiplizierenden für das Basismodul im ersten QuaMath-Jahr lieferte außerdem wertvolle Einsichten in die Bedeutung spezifischer Designelemente für die Professionalisierung von Multiplizierenden und Lehrkräften. Zu diesen Designelementen gehören insbesondere die Praxiserprobungen, die in den Fortbildungen gemeinsam geplant, anschließend durchgeführt und zu Beginn der nächsten Fortbildung gemeinsam reflektiert werden (Timperley et al., 2007). Sie dienen als Erfahrungs- und Entwicklungsraum, um die Inhalte der Fortbildungen direkt im Unterricht anzuwenden und im Hinblick auf die fünf Prinzipien qualitätsvollen Mathematikunterrichts zu reflektieren (Prediger & Selter, 2024). Darüber hinaus sind die Praxiserprobungen ebenfalls ein zentrales Designelement der Qualifizierung: auch die Multiplizierenden führen diese in ihrem eigenen Mathematikunterricht selbst durch und reflektieren ihre Erfahrungen. Dadurch werden die Multiplizierenden aktiv aufgefordert, die Inhalte der Qualifizierung direkt in ihrem Unterricht umzusetzen. Zeitgleich dienen sie der gemeinsamen Reflektion, sodass Erkenntnisse aus diesen Praxiserprobungen zur Weiterentwicklung der Fortbildungs- und Qualifizierungsmaterialien beitragen. Nach der individuellen Durchführung der Praxiserprobungen haben die Multiplizierenden ihre Reflexionsbögen eingereicht, die unter anderem den Beitrag der Praxiserprobungen im Hinblick auf die fünf Prinzipien erfragten (z. B.: „Inwiefern und wodurch hatten Sie den Eindruck, dass die Aktivität [...] einen Beitrag zur Verstehensorientierung bzgl. des angesprochenen Unterrichtsthemas leisten konnte?“). Insbesondere diese schriftlichen Reflexionen der Multiplizierenden von den durchgeführten Praxiserprobungen lieferten wertvolle Erkenntnisse darüber, wie die fünf Prinzipien im Mathematikunterricht konkret umgesetzt wurden. Zudem wurde die Analyse der Reflexionsbögen für die weitere Qualifizierung

der Multiplizierenden sowie die Überarbeitung des Fortbildungsmoduls der Lehrkräfte verwendet. Erkenntnisse aus diesem Vorgehen für die Entwicklung der Fortbildungs- und Qualifizierungsmaterialien werden beim Arbeitskreis präsentiert.

Das angelaufene QuaMath-Programm wird in Phase 1 (2023–2028) mit 17 Million € durch die KMK und weitere Personalmittel der Länder für Multiplizierende und Landeskoordinierende finanziert.

Literatur

Bialy, V., Shure, V., Lehmann, M. & Roesken-Winter, B. (2024). Facilitators' categories when noticing a fictional PD-situation: Pedagogical content vs. general pedagogic focus. In T. Evans, O. Marmur, J. Hunter, G. Leach & J. Jhagroo (Eds.). *Proceedings of the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 80–87). PME.

Hansen, E., Stahnke, S., Lehmann, M. & Rösken-Winter, B. (2024). Welche Rolle spielen Erfahrung und Kooperation für die Selbstwirksamkeit von Multiplikator:innen? 11. Tagung der Gesellschaft für Empirische Bildungsforschung, Potsdam.

Charalambous, C. Y. & Praetorius, A. K. (2018). Studying mathematics instruction through different lenses: Setting the ground for understanding instructional quality more comprehensively. *ZDM – Mathematics Education*, 50, 355–366. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0914-8>

Prediger, S., Götz, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B. & Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education*, 7, 969212. <https://doi.org/10.3389/feeduc.2022.969212>

Prediger, S. & Selter, C. (2024). Establish shared visions and support productive adaptations on all levels: Aims, strategies, and architecture of a nationwide implementation program. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, 4(1), 1–35. <https://doi.org/10.1163/26670127-bja10020>


Stanat, P., Schipolowski, S., Schneider, R., Sachse, K. A., Weirich, S. & Henschel, S. (Hrsg.). (2022). *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Waxmann.


Timperley, H., Wilson, A., Barrar, H., & Fung, I. (2008). *Teacher professional learning and development*. International Academy of Education.

Arbeitsgruppe Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien

Koordination: Melanie Platz und Aileen Steffen-Delplanque


melanie.platz@uni-saarland.de aileen.steffen@uni-osnabrueck.de

 0000-0002-4725-9955

 0009-0004-0495-7923

Beitrag: Lara Kristina Billion

billion@math.uni-frankfurt.de

 0000-0002-2989-8323

Eine App zur Förderung statistischen Lernens in der Grundschule – Statistische Argumentationen durch verschiedene Darstellungen von Daten anregen

Für eine selbstbestimmte Teilhabe an der Gesellschaft, die eine urteilsfähige und schlüssige Einordnung von Entscheidungen in Politik, Gesundheit und Wirtschaft umfasst, ist eine statistische Allgemeinbildung notwendig (Frischemeier & Biehler, 2024). Bereits in der Grundschule sollte die Grundlage hierfür gelegt und die kritische Auseinandersetzung mit statistischen Daten und deren Darstellungen geübt werden. Daran anschließend ist in den Bildungsstandards des Fachs Mathematik Primarstufe formuliert, dass Lernende einfache Befragungen planen und durchführen, erhobene Daten unter Nutzung von digitalen Werkzeugen darstellen sowie Darstellungen interpretieren, daraus Informationen entnehmen und diese kritisch reflektieren können sollen (KMK, 2022). In diesem Beitrag soll die App StaLApp als ein digitales Werkzeug analysiert werden, das die Lernenden im Verstehen von fundamentalen Datenoperationen, aber auch in der Exploration größerer Datensätze unterstützen soll. Ziel ist die Entwicklung des Denkens in Verteilungen (Biehler, 2007) und von statistischen Argumentationen, die über die Stufe des Lesens der Daten (Friel et al., 2001) hinausgehen, anzuregen.

1 Statistisches Lernen in der Grundschule

Zur Förderung einer umfassenden Datenkompetenz scheint es sinnvoll, Lernende von Beginn an fundamentale Datenoperationen (*Ordnen*, *Sortieren* und *Trennen*) auf verschiedenen Darstellungsebenen durchführen zu lassen (Frischemeier & Biehler, 2024). Es steht dabei das Verstehen des Aufbaus einer neuen Darstellungsform durch eine eigene, schrittweise Entwicklung dieser im Vordergrund (Frischemeier & Biehler, 2024). Das Durchdringen und Interpretieren einer

neuen Darstellungsform, die beispielsweise durch ein digitales Werkzeug automatisch präsentiert wird, fällt Lernenden meist schwer (Billion, 2023). Als Möglichkeit zur Förderung der fundamentalen Datenoperationen empfehlen Frischemeier & Biehler (2024) den Einsatz von Datenkarten, auf denen Merkmale und ihre Ausprägungen notiert werden. Bei kleineren Datensätzen kann durch Ordnen, Stapeln und Trennen dieser Datenkarten der Weg zum Säulendiagramm schrittweise nachvollzogen werden.

2 Mathematisches Lernen aus semiotischer Sicht

In diesem Beitrag wird statistisches Lernen aus einer semiotischen Perspektive nach Peirce (1931–33) betrachtet, wobei der Schwerpunkt auf dem Gebrauch von Zeichen und Diagrammen liegt. Unabhängig von der äußeren Form kann jede Darstellung – ob hörbar, sichtbar oder fühlbar – als Zeichen beschrieben werden, sofern sie von der zeichenlesenden Person als solches erkannt wird, wodurch ein Deutungsprozess ausgelöst wird (Billion, 2023). So könnte ein einzelner Punkt je nach Deutungshintergrund z. B. als Kreis oder als Eckpunkt eines Kantensmodells gedeutet werden. Zeichen können nach bestimmten Regeln zueinander in Relation gesetzt werden, wodurch ein Diagramm entsteht. Bezüglich des Umgangs mit Zeichen und Diagrammen definiert Peirce (1931, CP 1.54) den Begriff *diagrammatic reasoning* wie folgt:

(1) Konstruktion von Diagrammen nach bestimmten Relationen: Der statistisch gedeutete Punkt wird mit anderen Punkten in Relation gesetzt und es entsteht ein gestapeltes Punktdiagramm (Abb.1, links).

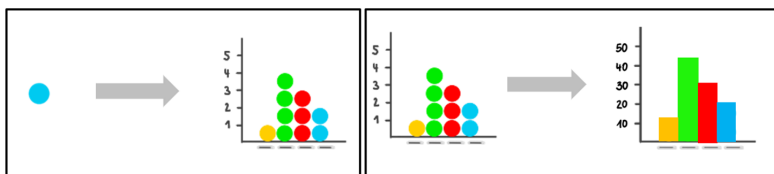


Abb. 1 Konstruktion (links) und Manipulation (rechts) eines Diagramms

(2) Manipulation der Diagramme nach den für die Konstruktion verwendeten Relationen: Durch Hinzunahme weiterer Daten kann das gestapelte Punktdiagramm gemäß der Konstruktion so angepasst werden, dass ein Säulendiagramm entsteht (Abb. 1, rechts).

(3) Beobachten und Prüfen der Ergebnisse sowie Formulieren in allgemeinen Aussagen: Durch Hinzunahme weiterer Daten kann eine allgemeine Aussage über die Verteilung getroffen werden (Abb. 2).

„In dem Diagramm lässt sich die absolute Häufigkeit an der y-Achse ablesen. In diesem Fall bestätigt sich der Eindruck aus der Stichprobe, dass Wert xy am häufigsten auftritt.“

Abb. 2 Formulierung einer allgemeinen Aussage

3 Der Aufbau der App StaLApp

In der App StaLApp liegt der Fokus auf selbstständig durchgeführten Datenoperationen, wobei die Aspekte des *diagrammatic reasoning* berücksichtigt werden. Lernende sollen durch das eigene Herstellen von Beziehungen schrittweise Diagramme konstruieren, manipulieren und anschließend Bezüge zu größeren Datenmengen herstellen. Zunächst arbeiten die Lernenden mit einer kleineren Datenmenge (Level 1-3), die nach dem Verständnis des Diagrammaufbaus in Level 4 erweitert wird (Abb. 3).



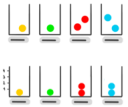
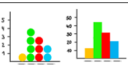
	Statistischer Fokus	Semiotischer Fokus
Level 1 	<ul style="list-style-type: none"> • Freies Ordnen von Datenkarten • Fokus: Beziehung zwischen Datenkarte und Datenpunkt 	<ul style="list-style-type: none"> • Konstruktion von Diagrammen
Level 2 	<ul style="list-style-type: none"> • Trennen der Datenpunkte in Eimer (eigenes Beschriften der Eimer) • Fokus: Systematisches Trennen nach Ausprägungen 	<ul style="list-style-type: none"> • Konstruktion und Manipulation von Diagrammen
Level 3 	<ul style="list-style-type: none"> • Trennen und Stapeln der Datenpunkte in bereits beschrifteten Eimern • Fokus: Ablesen von Häufigkeiten 	<ul style="list-style-type: none"> • Manipulation von Diagrammen
Level 4 	<ul style="list-style-type: none"> • Bezug zu größeren Datenmengen • Fokus: Betrachten/ Vergleichen von Verteilungen 	<ul style="list-style-type: none"> • Beobachten der Ergebnisse der Manipulationen und Formulierung in allgemeinen Aussagen

Abb. 3 Level der App StaLApp

Die Anzahl der Fälle, die in einem Level untersucht werden sollen sowie die Entscheidung, ob in den Levels dieselben oder neue Fälle betrachtet werden, kann in den Einstellungen der Dateneingabe festgelegt werden. Zusätzlich lassen sich die Merkmale und Ausprägungen auf der Datenkarte auswählen. Grundlage der App bildet der von Fri-

schemeier & Biehler (2024) erhobene Datensatz *Grundschülerinnen_NRW*.

4 Erprobung der App StaLApp und Ausblick

In einer Vorstudie wurde die App mit sechs Kindern erprobt, wobei der Fokus sowohl auf dem Umgang mit der App als auch auf der Förderung statistischer Argumentationen der Lernenden lag. Zu Beginn wurde den Kindern eine Hypothese, die einen Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen thematisierte, vorgestellt. Sie sollten zunächst eine Einschätzung ohne die Verwendung eines statistischen Diagramms abgeben. Anschließend sollten sie in den verschiedenen Levels der App die Daten so darstellen, dass sie die Hypothese überprüfen konnten. Nach jeder Datendarstellung sollten die Lernenden ihre Meinung zur Hypothese äußern und am Ende, basierend auf allen in der App erstellten, statistischen Darstellungen, abschließend argumentieren, wie sie die Hypothese bewerten. In qualitativen Analysen soll mit Bezug zu den Stufen der Interpretation nach Friel et al. (2001) (Lesen der Daten, Lesen zwischen den Daten, und Lesen über die Daten hinaus) untersucht werden, wie die Lernenden die verschiedenen Darstellungen in der App interpretieren und auf dieser Grundlage zur Hypothese argumentieren.

Literatur

Biehler, R. (2007). Denken in Verteilungen – Vergleichen von Verteilungen. *Der Mathematikunterricht*, 53(3), 3–11.

Billion, L. K. (2023). *Mathematical learning through actions on diagrams – reconstruction of learners' interpretation when acting on digital and analogue materials*. Dissertation. Goethe-Universität Frankfurt am Main, Universitätsbibliothek. <https://doi.org/10.21248/gups.79773>

Friel, S., Curcio, R., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension of instructional implications. *Journal of Research in Mathematics Education*, 32(2), 124–158. <https://doi.org/10.2307/749671>


Frischemeier, D. & Biehler, R. (2024). *Daten-Spürnasen auf Spurensuche. Datenanalyse in der Grundschule mit digitalen Werkzeugen*. Klett.

KMK (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*. Beschluss der Kultusministerkonferenz i. d. F. vom 23.06.2022.

Peirce, C. S. (1931-33, CP). *The collected papers of Charles Sanders Peirce*. eds. by C. Hartshorne, & P. Weiss. Harvard University Press.

Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Dinah Reuter

dinah.reuter@ph-freiburg.de  0000-0003-0454-6214

Beitrag: Katja Lenz und Stephanie Schuler

katja.lenz@ph-gmuend.de  0000-0002-8018-3155
stephanie.schuler@rptu.de  0000-0002-4203-9910

Blickbewegungsmuster von Kindern beim Lesen diskontinuierlicher Texte: Ergebnisse einer Eyetracking-Studie am Beispiel ‚Kalender‘

1 Theoretischer und empirischer Hintergrund

Diskontinuierliche Texte präsentieren komplexe Inhalte übersichtlich, präzise und verdichtet, jedoch nicht zusammenhängend und nicht ausschließlich mit Worten (Wildemann & Fornol, 2016). Dadurch können sie nicht mit denselben Lesestrategien wie kontinuierliche Texte gelesen werden. Es zeigt sich, dass zunehmend weniger Kinder in der Lage sind, Informationen aus diskontinuierlichen Texten zu entnehmen (Schumann & Sachse, 2022).

Für den Mathematikunterricht in der Primarstufe sind vor allem Tabellen und Listen, numerische Grafiken sowie Karten und Pläne relevant (Lenz & Schuler, 2022). Da Tabellen ein zentrales Werkzeug sind, um Daten zu organisieren, zu vergleichen und zu analysieren und über alle Schuljahre hinweg auftreten, befasst sich die vorliegende Studie mit Tabellen. Tabellen basieren auf einer strukturierten Darstellung von Daten in Zeilen und Spalten. Meist besitzen alle Daten in einer Spalte bzw. Zeile gemeinsame Eigenschaften (Kirsch et al., 2002). In diesem Beitrag nehmen wir Bezug auf eine Tabelle in Form eines Jahreskalenders.

Um das Lesen von diskontinuierlichen Texten zu untersuchen, wurde die Methode des Eyetracking eingesetzt. Nach der Eye-Mind-Hypothese spiegeln Blickbewegungen die gegenwärtige Aufmerksamkeit wider (Just & Carpenter, 1980). Empirische Untersuchungen zeigen, dass durch die Untersuchung von Blickbewegungen kognitive Prozesse und Strategien, die beim Lösen einer Aufgabe genutzt werden, nachvollzogen werden können (z. B. Schindler, 2021).

2 Forschungsfragen

Im Folgenden gehen wir zwei Fragen nach:

- (1) Welche Blickbewegungen zeigen Kinder beim Lesen eines tabellarischen Kalenders?
- (2) Inwiefern stimmen Blickbewegungs- und Interviewdaten überein?

3 Methodisches Vorgehen

Es wurden Daten von 13 Viertklässler:innen (8 Jungen, 5 Mädchen) erhoben, davon 10 mit Deutsch als Zweitsprache. Die Erhebung fand im Einzelsetting an einem Schulvormittag statt. Zur Erfassung der Blickbewegungen wurde ein monitorbasierter Eyetracker (Tobii Pro Fusion, Abtastrate: 120 Hz, Genauigkeit von 0,3°) eingesetzt. Der durchschnittliche Abstand zwischen dem Bildschirm (24 Zoll, 1920 × 1080 Pixel) und den Probanden betrug ca. 60 cm. Vor der Aufnahme wurde eine 9-Punkt-Kalibrierung durchgeführt. Im Sinne eines teilstandardisierten Interviews wurden den Probanden verschiedene Fragen gestellt (z. B. „Wie viele Tage hat der Monat Oktober?“, „Welcher Wochentag war am 9. Mai?“) und jeweils nachfolgend als Stimulus ein Kalender in tabellarischer Form gezeigt. Unmittelbar nach der Beantwortung einer Frage wurde der Stimulus ausgeblendet und die Kinder dazu aufgefordert, ihre Vorgehensweise zu beschreiben. Die Eye-Tracking-Daten wurden anhand von Heatmaps und Gazeplots der einzelnen Lernenden ausgewertet und anschließend übergreifende Blickbewegungsmuster beschrieben.

4 Erste Ergebnisse

Es konnten insgesamt vier Blickbewegungsmuster identifiziert werden, die auf unterschiedliche Lesestrategien schließen lassen. Das erste Muster zeichnet sich dadurch aus, dass zunächst die für die Antwortfindung relevanten Bereiche gezielt angesteuert werden. Teilweise werden anschließend auch weitere Bereiche zur Absicherung der Antwort fixiert. Die relevanten Bereiche werden durch gezielte Sprünge oder auch Pendelbewegungen miteinander verbunden. Dieses Blickmuster lässt sich einer strukturorientierten Lesestrategie (Bock & Dresing, 2021, S. 14) zuordnen, die u. a. durch visuelle Hinweise wie

Überschriften, grafische Elemente in Form farblicher Hervorhebungen geleitet wird. Das zweite Muster ist dadurch gekennzeichnet, dass sowohl für die Antwortfindung relevante als auch nicht relevante Bereiche fokussiert werden. Dieses Blickmuster kann als lineares Lesen beschrieben werden, bei dem der Text mehr oder weniger strikt in einer Leserichtung rezipiert wird (Bock & Dresing, 2021, S. 16). Diese beiden Muster können auch als Mischform auftreten. Das letzte Muster stellt ein ungerichtetes Absuchen dar, bei dem relevante und nicht relevante Bereiche für die Antwortfindung ggf. auch mehrfach fixiert werden.

5 Diskussion und Ausblick

Die Analyse der Blickbewegungen ermöglichte es, unterschiedliche Vorgehensweisen von Viertklässler:innen beim Lesen eines Kalenders zu identifizieren. Dabei scheint die strukturorientierte Lesestrategie durch ihre Zielgerichtetheit dem linearen Lesen überlegen. Weiterhin ist zu vermuten, dass das strukturorientierte Lesen eng mit (Vor-)Wissen über die jeweilige Textsorte verbunden ist.

Der Abgleich mit den Interviewdaten zeigte, dass durch das Eyetracking auch Vorgehensweisen erfasst wurden, die die Kinder im Interview nicht verbalisierten. Insofern ermöglichte das Eyetracking detaillierte Einblicke in das Vorgehen der Kinder, was insbesondere bei Kindern mit Deutsch als Zweitsprache hilfreich sein kann, da ein Verbalisieren von Lesestrategien möglicherweise sprachlich nur eingeschränkt möglich ist. Darüber hinaus zeigte der Abgleich mit den Interviewdaten, dass ein Nachvollziehen der Strategien auch ohne Interviewdaten möglich ist, was bisherige Befunde hierzu unterstreicht (Reuter & Bruns, 2022). An einigen Stellen wurden die Vorgehensweisen der Kinder beim Lesen des Kalenders jedoch nicht eindeutig aus den Blickbewegungen ersichtlich. Um diese Lücken zu schließen, wäre es aufschlussreich, die Blickbewegungsvideos nach der Durchführung des Interviews gemeinsam mit den Kindern anzuschauen. Durch die Methode des so genannten „stimulated recall interviews“ (Hyrskykari et al., 2008) könnten die Kinder ihre Vorgehensweisen ergänzend erläutern und somit ein noch umfassenderes Verständnis der Lesestrategien erreicht werden.

Literatur

- Bock, B. & Dresing, P. (2021). Multimodale Lesestrategien. Eine empirische Rekonstruktion auf Basis von Laut-Denk- und Eye-Tracking-Daten. *Medien im Deutschunterricht*. <https://doi.org/10.18716/OJS/MIDU/2021.0.2>
- Hyrskykari, A., Ovaska, S., Majaranta, P., Rähä, K.-J., & Lehtinen, M. (2008). Gaze path stimulation in retrospective think-aloud. *Journal of Eye Movement Research*, 2(4), 1–18. <https://doi.org/10.16910/jemr.2.4.5>
- Just, M. A. & Carpenter, P. A. (1980). A Theory of Reading: From Eye Fixations to Comprehension. *Psychological Review*, 87(4), 329–354. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.4.329>
- Kirsch, I., Jong, J. d., Lafontaine, D., McQueen, J., Mendelovits, J. & Monseur, C. (2002). *Lesen kann die Welt verändern: Leistung und Engagement im Ländervergleich: Ergebnisse von PISA 2000*. OECD. <https://doi.org/10.1787/9789264102750-de>
- Lenz, K. & Schuler, S. (2022). Kalender, Liniennetzplan & Co: Diskontinuierliche Texte lesen lernen. *Die Grundschulzeitschrift*, 334, 20–23.
- Reuter, D. & Bruns, J. (2022). Muster- und Strukturerkennungsprozesse bei potenziell mathematisch begabten Grundschulkindern untersuchen – Das Potenzial von Eye-Tracking und retrospektivem Interview im Vergleich. In P. Klein, N. Graulich, J. Kuhn, & M. Schindler (Hrsg.), *Eye-Tracking in der Mathematik- und Naturwissenschaftsdidaktik* (S. 41–57). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-63214-7_3
- Schindler, M. (2021). Eye-Tracking in der mathematikdidaktischen Forschung: Chancen und Herausforderungen. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021* (S. 13–20) WTM. <http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-22326>
- Schumann, K. & Sachse, K. A. (2022). Kompetenzstufenbesetzung im Fach Mathematik. In P. Stanat, S. Schipolowski, R. Schneider, K. A. Sachse, S. Weirich & S. Henschel (Hrsg.), *IQB-Bildungstrend 2021: Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich* (S. 67–80). Waxmann.
- Wildemann, A. & Fornol, S. (2016). *Sprachsensibel unterrichten in der Grundschule: Anregungen für den Deutsch-, Mathematik- und Sachunterricht*. Klett Kallmeyer.



Dieser Tagungsband dokumentiert die Ergebnisse der 31. Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), die dieses Mal vom 08. bis zum 10. November 2024 an der Pädagogischen Hochschule Freiburg stattfand. Das Thema der Tagung lautete ‚Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel‘.

Die Tagung griff damit auf, dass sich die gesellschaftlichen Rahmenbedingungen der Grundschule ändern, und fragt danach, was dies für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts bedeutet. In vier Hauptvorträgen wurde das Tagungsthema aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet.

Weiter setzten sich sieben Arbeitsgruppen mit den Themenfeldern „Arithmetik“, „Geometrie“, „Sachrechnen“, „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit“, „Kommunikation & Kooperation“, „PriMaMedien: Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien“ sowie „Lehrkräftebildung“ intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander. Die zentralen Inhalte der Arbeitsgruppen sind in diesem Band ebenfalls dokumentiert.

Die jährlich stattfindende Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule der GDM richtet sich seit ihrem Bestehen an Personen, die den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schulischer Praxis sowie den schulverwaltenden Institutionen suchen. Die Tagung ist in besonderer Weise durch eine offene und kollegiale Kooperation von Vertreterinnen und Vertretern aus Praxis und Theorie geprägt.



ISBN 978-3-86309-999-2



9 783863 099992

www.uni-bamberg.de/ubp