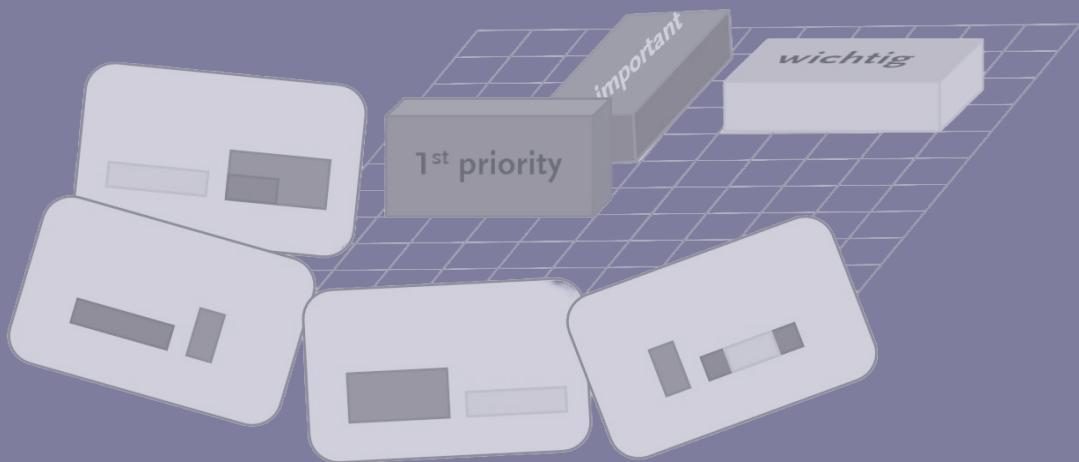


Was ist wichtig?

Perspektiven auf den Mathematikunterricht
in der Grundschule

hg. von Anna Susanne Steinweg



University
of Bamberg
Press

14 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

hrsg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 14

Was ist wichtig?

Perspektiven auf den Mathematikunterricht
in der Grundschule

hg. von Anna Susanne Steinweg


Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im
Internet über <http://dnb.dnb.de/> abrufbar.

Dieses Werk ist als freie Onlineversion über den Hochschulschriften-
server (FIS; <https://fis.uni-bamberg.de/>) der Universitätsbibliothek Bamberg
erreichbar. Das Werk – ausgenommen Cover, Zitate und Abbildungen – steht
unter der CC-Lizenz CC BY.



Lizenzvertrag: Creative Commons Namensnennung 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>.

Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press
Umschlagbild: © A. Steinweg

University of Bamberg Press, Bamberg 2025
 <https://ror.org/004fa0x02>

ORCID
Anna Susanne Steinweg  <https://orcid.org/0000-0002-9093-547X>

ISSN: 2193-2905 (Print) eISSN: 2750-8439 (Online)
eISBN: 978-3-98989-074-9 (Online)

URN: <urn:nbn:de:bvb:473-irb-110986x>
DOI: <https://doi.org/10.20378/irb-110986>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort der Sprecherinnen und Sprecher des Arbeitskreises Grundschule in der GDM	8
---	---

Hauptvorträge

Andreas Büchter

Was ist wichtig im Mathematikunterricht (nicht nur) der Grundschule? Mathematikdidaktische Antwortversuche aus der Perspektive der folgenden Bildungsabschnitte	10
--	----

Martina Diedrich

Für ein Kind braucht es ein ganzes Dorf, für guten Mathematikunterricht ein ganzes System: Mehrebenenbetrachtung aus Governance-Perspektive	26
---	----

Olaf Köller

Anforderungen an den Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert	42
--	----

Taha Ertuğrul Kuzu

Mehrsprachigkeitsaktivierung im (Mathematik-)Unterricht der Grundschule: Vier Maxime der Mehrsprachigkeitssensibilität	56
--	----

... aus den Arbeitsgruppen

Arithmetik

Diskussionsforum:

- I Beziehung von Addition & Subtraktion verstehen:
Herausforderungen beim verständigen Rechnen
- II Subtraction by addition: A most efficient strategy
for solving symbolic subtraction problems? 72

Auf den Punkt gebracht: Entwicklung einer Checkliste
für die Schulbuchwahl 76

Zwischen individueller Deutung und intendierter Struktur:
Wie Kinder grafische Darstellungen
mathematisch interpretieren 80

Daten und Zufall

Untersuchung zur Integration von Kontextwissen
bei der Interpretation statistischer Informationen:
Eine qualitative Studie unter Dritt- und Viertklässler*innen 84

Kernaspekte der Dateninterpretation in Schulbüchern:
Eine systematische Untersuchung
von Interpretationsaufgaben 88

Frühe mathematische Bildung

Einfluss mathematikdidaktischer Kompetenzfacetten
frühpädagogischer Fachkräfte auf die Interaktionsqualität
in Spielsituationen 92

Mathematical Learning Support Systeme
und interaktionale Nischen mathematischer Denkentwicklung
im familialen Kontext 94

Geometrie

Ansichtssache:

Ein Material zur Förderung der Raumvorstellung 96

Kommunikation & Kooperation

Phasenübergreifende Reflexionen über Mathematikunterricht:

Analysen von kooperativ entwickelten Unterrichtssequenzen 100

Lehrkräftebildung

Berichtete Praktiken der Lernbegleitung

bei der Förderung von arithmetischen Basiskompetenzen 104

PriMaMedien

KI-gestütztes Mathematiklernen:

Wie Kinder den KI-Tutor Knobelix beim Problemlösen nutzen 108

*Sachrechnen*Strategiewahl und Schwierigkeiten von Grundschulkindern
beim Schätzen von Längen 112

Modelle zum Aufbau des Größenverständnisses 116

Vorwort

Im vorliegenden 14. Band der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ sind die Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) zusammengefasst. Die Tagung wurde dieses Mal mit Unterstützung des Leibniz-Instituts für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) ausgerichtet und fand vom 14. bis zum 16. November 2025 in den Räumen der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel statt. Das Thema der Tagung lautete „Was ist wichtig? – Perspektiven auf den Mathematikunterricht in der Grundschule“.

Olaf Köller (IPN | Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik, Kiel) eröffnete die Tagung inhaltlich mit seinem Vortrag „Anforderungen an den Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert“. Er stellte dar, welchen Herausforderungen sich der Mathematikunterricht gegenwärtig und zukünftig stellen muss. Weiter rücken prozessorientierte Fähigkeiten in den Fokus, und der Unterricht soll Schülerinnen und Schüler befähigen, kritisch-reflexiv zu agieren. Auf der Basis zentraler Befunde zur Unterrichtsqualität wurden Bedingungen für einen zukunftsorientierten Mathematikunterricht herausgearbeitet.

Im zweiten Hauptvortrag „Was ist wichtig im Mathematikunterricht (nicht nur) der Grundschule? Mathematikdidaktische Antwortversuche aus der Perspektive der folgenden Bildungsabschnitte“ legte Andreas Büchter (Universität Duisburg-Essen) zunächst den normativen Rahmen seiner Überlegungen offen. Des Weiteren diskutierte er aus der Sekundarstufen-Perspektive kritisch, welche Bedeutung typische Lerninhalte der Primarstufe für einen spiralcurricularen Aufbau des Mathematikunterrichts haben.

Martina Diedrich (DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation, Berlin) beschrieb in ihrem Vortrag „Für ein Kind braucht es ein ganzes Dorf, für guten Mathematikunterricht ein ganzes System – Mehrebenenbetrachtung aus Governance-Perspektive“ den Mathematikunterricht als Teil eines geschachtelten Mehrebenensystems, in dem die Verantwortung für Qualitätsentwicklung geteilt wird. Anhand

des Startchancen-Programms zeigte sie auf, wie eine entsprechende Systementwicklung aussehen kann, die alle Akteure einbindet und betonte dabei die Bedeutung kohärenter Steuerungsprozesse.

Der vierte Hauptvortrag „Mehrsprachigkeitsaktivierung im (Mathematik)Unterricht der Grundschule: Vier Maxime der Mehrsprachigkeits-sensibilität“ von Taha Kuzu (Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd) stellte zunächst die Relevanz des Themas heraus, indem er Mehrsprachigkeit als einen zentralen Aspekt des heutigen Mathematikunterrichts beschrieb. Weiter gab er einen Einblick in den Forschungsstand sowie zu Strategien der Mehrsprachigkeitsaktivierung, wobei sowohl Potenziale für die Entwicklung von Lernenden als auch Herausforderungen für Lehrkräfte betrachtet wurden.

Darüber hinaus stellten Kolleginnen und Kollegen ihre Arbeiten aus der aktuellen mathematikdidaktischen Grundschulforschung im Rahmen der acht Arbeitsgruppen vor. Durch die nun schon zum zweiten Mal stattgefundenen Round-Table-Angebote bekamen Nachwuchsforscherinnen und -forscher zusätzliche Gelegenheiten, über ihre Projekte zu berichten.

Wir bedanken uns herzlich sowohl bei den Vortragenden als auch den Koordinatorinnen und Koordinatoren der Arbeitsgruppen. Nicht zuletzt gilt unser Dank all jenen Kolleginnen und Kollegen am IPN, die zur gelungenen Organisation der Tagung beitrugen.

Dr. Kathrin Akinwunmi


Prof. Dr. Marek Fetzner

Prof. Dr. Daniel Walter

Prof. Dr. Gerald Wittmann

Was ist wichtig im Mathematikunterricht (nicht nur) der Grundschule? Mathematikdidaktische Antwortversuche aus der Perspektive der folgenden Bildungsabschnitte

von Andreas Büchter

 0000-0001-8411-1004

Von überzeugenden, aber noch nicht in der Breite umgesetzten Überlegungen und Konzepten für den Mathematikunterricht sowie subjektiven Erfahrungen und Sichtweisen ausgehend werden die Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts der Grundschule aus spiralcurricularer Perspektive hinsichtlich der Frage eingeschätzt, was „wichtig“ ist. Dabei werden gewisse Akzentuierungen und eine curriculare Streichoption vorgeschlagen.

Schlüsselwörter: Allgemeine Lernziele, Anwendungs- und Strukturorientierung, Spiralcurriculum, Grundlegendes Wissen und Können, Arithmetik

1 Vorbemerkung

Mit der Wahl meines Vortragstitels, die deutlich vor der Ausarbeitung dieses Beitrags erfolgte, wollte ich das übergeordnete Thema („Was ist wichtig? – Perspektiven auf den Mathematikunterricht in der Grundschule“) bestmöglich bedienen. Die anschließenden Bemühungen um eine solche Ausarbeitung haben schnell gezeigt, dass ich die angekündigten Antwortversuche nicht in einem üblichen wissenschaftlichen Text leisten kann, der von einem konsolidierten Stand des Diskurses ausgeht und an großer intersubjektiver Nachvollziehbarkeit der Folgerungen orientiert ist. Der hier vorliegende essayartige Text basiert auch auf *subjektiven* Erfahrungen und Sichtweisen sowie evtl. noch nicht ausgereiften Überlegungen, die zu *subjektiven* Antwortversuchen führen. Diese Antwortversuche sind keineswegs zwangsläufig, rufen vermutlich mal mehr und mal weniger Widerspruch von Kolleg:innen hervor, die näher am Mathematikunterricht der Grundschule forschen und entwickeln als ich, und sollen letztlich nur die fortgesetzte Reflexion über Mathematikunterricht anregen.

2 Ausgangsüberlegungen für Antwortversuche

Antwortversuche auf die Frage, was im Mathematikunterricht „wichtig“ ist, benötigen einen normativen Rahmen und daher zunächst geeignete theoretische Überlegungen. Anschließend können auch empirische Untersuchungen ggf. klärend wirken, wenn sich z. B. Prädiktoren für das „Wichtige“ identifizieren lassen. Falls dabei belastbare Befunde erzielt

werden, können diese Prädiktoren „unterstützend wichtig“ werden, allerdings nur in „dienender“ Funktion und nicht als Selbstzweck. Der vorliegende Beitrag widmet sich den vorangehenden theoretischen Überlegungen.

Ein normativer Rahmen für Fragen des Mathematikunterrichts kann z. B. unter Rückgriff auf bildungstheoretische Konzepte, didaktische Grundposition und darin betonte didaktische Prinzipien, aber auch aus pragmatischen Überlegungen und Setzungen des Unterrichtsalltags in der Schule gewonnen werden. Ich gehe zusätzlich von meinen subjektiven Erfahrungen und Sichtweisen aus, um vor dem Hintergrund bewährter Suchrichtungen konkrete Antworten vorzuschlagen.

2.1 Eigene Ausgangsposition für Antwortversuche

Vor meinem Erfahrungshintergrund in der Lehrkräftebildung, aus der Tätigkeit im Landesinstitut für Schule sowie in Forschung und Entwicklung für die Sekundarstufe und die Studieneingangsphase gehe ich von folgenden Grundpositionen und Sichtweisen aus.

- Mathematikdidaktik soll konstruktiv auf die Praxis bezogen sein. Damit ist eine umfassende Betrachtung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse im Sinne eines Verständnisses von Curriculumforschung gemeint, die von der Praxis ausgeht, deren Rahmenbedingungen berücksichtigt und von Zielvorstellungen für Lernprozesse über Lehr-Lern-Materialien bis hin zur Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen (inkl. medialer und methodischer Fragen) geht. Dabei wird berücksichtigt, dass thematisierte Unterrichtsinhalte immer in Konkurrenz zu nicht-thematisierten stehen.
- Für effektive und effiziente Lernprozesse, die grundlegendes mathematisches Wissen und Können möglichst dauerhaft verfügbar machen sollen, ist ein spirallcurricularer Aufbau wesentlich (vgl. Büchter, 2014). Diese langfristige Unterrichtsplanung erfordert einen Aufbau entlang geeigneter stofflicher Entwicklungsstränge. Eine große Herausforderung dabei stellen in unserem gestuften und gegliederten Bildungssystem immer noch Übergänge zwischen einzelnen Abschnitten dar.
- Über grundlegendes mathematisches Wissen und Können hinaus sollen die Lernenden auch ein stimmiges Bild von Mathematik, meta-

mathematisches Wissen und positive Einstellungen zur Mathematik entwickeln können. Dafür muss der Mathematikunterricht auch tatsächlich mathematikhaltig sein und im Sinne einer „pädagogischen Leistungsschule“ mit „ermutigenden Rückmeldungen“ beim „Beurteilen und Fördern“ (Sundermann & Selter, 2006) gestaltet werden.

- Unterrichtsentwicklung kann nur als langfristig und tendenziell evolutionär gestalteter Prozess, der von der Praxis mitgestaltet wird, erfolgreich sein. Das „Modell der Didaktischen Rekonstruktion“ (Kattmann et al., 1997) betont, dass neben der Sachstruktur auch die möglichen Perspektiven der Schüler:innen berücksichtigt werden müssen. Dabei geht es um die „Lernbarkeit“. Der gleichberechtigte Einbezug von Lehrkräften in die Unterrichtsentwicklung soll auch die „Lehrbarkeit“ berücksichtigen. Dies könnte auch disruptive Reformen wie die Einführung der „Mengenlehre“ in den 1960er-Jahren in Westdeutschland (vgl. Hamann, 2018) oder die Einführung der Bildungsstandards vor gut 20 Jahren¹ vermeiden.

2.2 (Mögliche) Suchrichtungen für Antwortversuche

Aus Sicht der Curriculumforschung wird die Frage, was *heute* im Mathematikunterricht wichtig ist, üblicherweise unter Antizipation dessen beantwortet, was die nachwachsende Generation *morgen* und *übermorgen* bewältigen muss. Unter dieser Perspektive gibt es fortwährende mathematikdidaktische Reflexionen, z. B. während der Tagung des Arbeitskreises Grundschule vor drei Jahren (Steinweg, 2022). Es liegt nahe, übergeordnete Zielvorstellungen wie „17 Nachhaltigkeitsziele“ oder „21st Century Skills“ unter der Frage zu analysieren, ob und ggf. wie sie im Mathematikunterricht berücksichtigt werden sollen. Besonders intensiv wurde zuletzt diskutiert, welche Folgen die breite Verfügbarkeit KI-basierter Chatbots haben sollte. Das Fazit von Kortenkamp (2024) verstehe ich so, dass Schüler:innen nach wie vor eine fundierte mathematische Bildung benötigen, deren Kern kaum dem Wandel der Zeit unterliegt.

¹ Maßgeblich beteiligte Wissenschaftler:innen schreiben hierzu: „Die Einführung ... ist, damit sie rasch wirksam werden kann, i. w. ‚von oben‘ erfolgt, initiiert von der Politik und konzipiert von der Wissenschaft. Nun muss aber rasch die gesamte Lehrerschaft einbezogen werden“ (Blum et al., 2005). Die Ergebnisse der jüngsten „IQB-Bildungstrends“ (Stanat et al., 2022, 2025) lassen sich kaum im Sinne eines Erfolgs der „Reform von oben“ deuten.

Eine Überbetonung der Diskussion aktueller Herausforderungen kann ggf. dazu führen, dass der Kern mathematischer Bildung und darauf ausgerichteter Lehr-Lern-Prozess vernachlässigt wird. Ein Blick auf ältere Reformdiskussionen zeigt zudem, dass konzeptionelle Überlegungen nicht selten heute noch genauso aktuell sind wie zur Zeit ihrer Entstehung – und manchmal immer noch nicht umfassend eingelöst, wie die „Meraner Reformvorschläge“ (Gutzmer, 1905)². Im westdeutschen Diskurs der 1970er- und 1980er-Jahre waren u. a. Überlegungen und Konzepte von Wittmann (1974) und Winter (1975, 1985, 1987) prägend, die nach der „gescheiterten Unterrichtsreform“ (Hamann, 2018) mit „Mengenlehre“ in der Grundschule der Verlockung neuer Vereinseitigungen als Reaktion widerstanden haben und die als Vorläufer jüngerer Reformabsichten gelten (vgl. Neubrand, i. Vorb.).

- *Mathematik als Prozess, genetisches Prinzip:* In „Grundfragen des Mathematikunterrichts“ begründet Wittmann (1974) umfassend das „genetische Prinzip“ („Der Mathematikunterricht soll nach der genetischen Methode organisiert werden.“). Dabei bezieht er sich auf andere Protagonist:innen einer solchen Herangehensweise, die den Charakter von Mathematik als Tätigkeit bzw. als Prozess betonen:

Gemeinsam ist ... die Auffassung, daß die Mathematik nur über den *Prozeß* der Mathematisierung richtig verstanden und erlernt werden kann, nicht als Fertigfabrikat. (ebd., Herv. i. O.)
- *Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht:* Im Kontext der Curriculumforschung der 1960er- und 1970er-Jahre betont Winter (1975) die Bedeutung der „Artikulation von allgemeinen Lernzielen“ für Fragen der Lehrplan- und Unterrichtsgestaltung. Er arbeitet heraus, dass der Unterricht den Schüler:innen die Möglichkeiten geben soll ...

(L1) ... schöpferisch tätig zu sein. [...]
(L2) ... rationale Argumentation zu üben. [...]
(L3) ... die ... Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren. [...]
(L4) ... formale Fertigkeiten zu erwerben. (ebd.)

² Krüger (2000) bilanziert dazu: „Im Zusammenhang mit der Erziehung zum funktionalen Denken werden ... grundlegende didaktische Prinzipien genannt, die auch heute noch oder wieder von Aktualität sind ...“.

Die „Entfaltung schöpferischer Kräfte“ kann dabei im Mathematikunterricht dazu beitragen, dass Schüler:innen „heuristische Strategien lernen“ (ebd.).

- *Anwendungs- und Strukturorientierung*: Das in Winter (1987) dargelegte Konzept der „Anwendungs- und Strukturorientierung“ des Mathematikunterrichts hat (durch Winters prägende Mitarbeit) Eingang in den Grundschullehrplan in Nordrhein-Westfalen (KM NW, 1985) gefunden.³ Damit wurden frühere Vereinseitigungen überwunden (vgl. Krauthausen, 2018). „Anwendungsorientierung“ wird dabei im Sinne der didaktischen „Funktionen des Sachrechnens“ (Winter, 1985) verstanden, mit „Sachrechnen als Lernstoff, ... als Lernprinzip, ... als Lernziel: Befähigung zur Erschließung der Umwelt.“

In Orientierung an diesen Überlegungen und Konzepten „scanne“ ich nun aus spiralcurricularer Sicht die Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts der Grundschule: Arithmetik, Geometrie, Sachrechnen.

3 Einige Antwortversuche

Ein erster Antwortversuch auf die große Frage („Was ist wichtig ...?“) ist scheinbar banal: *Im Mathematikunterricht ist wichtig, dass die Schüler:innen sich mathematisch mit Objekten der Mathematik beschäftigen.* Ein Unterrichtsbeispiel in Dixel (2024) zur Thematisierung der Zwei zeigt aber, dass dies nicht selbstverständlich ist. Dort sollen sich Schüler:innen in einem methodisch zeitgemäßen Unterricht mit der Ziffer Zwei auseinandersetzen, die entsprechende Figur zeichnen, gestalten, ihre Form verbalisieren usw., wobei weder die begrifflichen Eigenschaften der Zahl thematisiert werden, noch das Schreiben der Ziffer automatisiert wird. Eine mathematische Beschäftigung mit der Zahl würde die Beziehungen zu anderen Zahlen, ordinale und kardinale Eigenschaften usw. in den Blick nehmen. Für die Sekundarstufe lassen sich vergleichbare Beispiele angeben, bei denen höchstens die Oberfläche von Begriffen berührt wird, diese aber nicht mathematisch geklärt und in Beziehung zu anderen gesetzt werden.

³ Weitere Eckpunkte dieses Lehrplans, die auf Winter zurückgehen (vgl. Neubrand, i. Vorb.), sind entdeckendes Lernen, produktives Üben und Differenzierung als „Grundsätze der Unterrichtsgestaltung“ (KM NW, 1985).

Aus Sicht der Sekundarstufe ist in naheliegender Weise wichtig, dass tragfähige Grundlagen für das Weiterlernen verfügbar sind. Bei grundlegendem Wissen und Können ist unter stofflicher Perspektive eine effektive und effiziente Arbeitsteilung zwischen den Schulstufen unter Beachtung des Spiralprinzips wichtig. Dies wird im Folgenden für die Inhaltsbereiche der Grundschule thematisiert. Darüber hinaus sind auch z. B. Interesse und Freude an Mathematik oder in altersangemessenem Grad erreichte allgemeine Lernziele wichtig.

3.1 Arithmetik ist wichtig!

Arithmetik spielt im Mathematikunterricht der Grundschule eine zeitlich hervorgehobene Rolle. Aus Sicht der Sekundarstufe sollte die Arithmetik noch deutlicher in den Vordergrund treten: *Wichtig ist ein tragfähiges Verständnis von Zahlen, Operationen und Relationen, sicheres und flexibles Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen sowie sicheres schriftliches Rechnen. Dies umfasst eine Vertrautheit mit den wichtigsten Darstellungen (im Stellenwertsystem und am Zahlenstrahl), die flexible Anwendung in außer- und innermathematischen Kontexten und die Anbahnung algebraischen Denkens.*

Die Arithmetik ist bis in die frühe Sekundarstufe so zentral wie später die Algebra und Funktionen/Abbildungen in der Oberstufe und der Hochschule. Warum ich der Arithmetik diesen Stellenwert zuschreibe und welche Bedeutung sie für das Weiterlernen in der Sekundarstufe haben kann, stelle ich für wichtige Teilbereiche konkreter dar.

3.1.1 Zahlen und Grundrechenarten

Für die Zahlbereichserweiterungen und die Grundrechenarten in den neuen Zahlbereichen ist ein tragfähiges Verständnis von natürlichen Zahlen und ihren verschiedenen Aspekten sowie der Grundrechenarten mit ihren verschiedenen Anwendungssituationen (oder Grundvorstellungen) unabdingbar. Dies gilt insbesondere für das Verstehen und Anwenden des strukturellen Zusammenhangs von Operation und Umkehroperation, der über die Zahlbereichserweiterungen hinaus zentral ist. An diese Grundlagen kann angeschlossen werden, indem überlegt wird, welche Aspekte, Vorstellungen und Zusammenhänge im neuen Zahlbereich tragfähig bleiben und warum die anderen nicht mehr tragfähig sind. Die Operationen im neuen Zahlbereich werden formal unter Rückgriff auf die Zahlen und Operationen im alten Zahlbereich festgelegt. Auch wenn

dies unterrichtlich nicht explizit so betrachtet wird, bleibt der Sachverhalt implizit relevant.

Aufgrund dieser zentralen Bedeutung wird das Rechnen mit natürlichen Zahlen zwar zu Beginn der Sekundarstufe wiederholt (und im Zahlenraum ausgeweitet), die Verstehensgrundlage wird hier aber – auch aus Zeitgründen – häufig nicht mehr hinreichend betrachtet.

3.1.2 Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen

Sicheres und flexibles Kopfrechnen ist zentral für eine arbeitsökonomische Beherrschung späterer mathematischer Anforderungen, bei denen Zahlen involviert sind. Schon für halbschriftliches Rechnen sind das Einspluseins und das Einmaleins in gut automatisierter Form ebenso wichtig wie flexible Zahlzerlegungen. Neben dem prinzipiellen Verstehen und Können ist dabei eine gewisse Automatisierung wichtig, um kognitive Kapazitäten für die eigentliche Anforderung (vorteilhaftes halbschriftliches Rechnen) freizuhalten. Umgekehrt dürften umfassende Erfahrungen im halbschriftlichen Rechnen über Verinnerlichungsprozesse zu ausgeweiteten Fähigkeiten im Kopfrechnen jenseits des automatisierten Bereichs führen.

Große Bedeutung hat das Kopfrechnen in der Folge für schriftliche Rechenverfahren und in der Sekundarstufe z. B. für die Bruch- und Prozentrechnung, das Überschlagen von Wurzeln, das Anwenden von Lösungsformeln oder Ableitungsregeln usw. Zahlzerlegungen und Strategien halbschriftlichen Rechnens sind darüber hinaus ein Baustein für algebraisches Denken, weil hier Zahlen und Zahlenterme relational im Sinne der Gleichwertigkeitsrelation (vgl. Akinwunmi & Steinweg, 2024) betrachtet werden (z. B. $317 - 199 = 317 - 200 + 1$).

3.1.3 Zahldarstellungen und Relationen

Die Vertrautheit mit zentralen mathematischen Darstellungen (im Stellenwertsystem und am Zahlenstrahl) und der Ordnungsrelation sind ein weiterer grundlegender Bereich. Das Verständnis der Zahldarstellung im Dezimalsystem ist u. a. Grundlage für die schriftlichen Rechenverfahren und das Verstehen von Dezimaldarstellungen rationaler und irrationaler Zahlen. Bei nicht-ganzen Zahlen wird das Dezimalsystem dabei „nach rechts erweitert“ (um Zehntel, Hundertstel, Tausendstel ...). Auch für

eine Herleitung oder zumindest Plausibilisierung von Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen ist die Vertrautheit mit der Darstellung im Dezimalsystem eine wichtige Voraussetzung.

Der Zahlenstrahl und später die Zahlengerade als Träger der Zahlen sind weitere grundlegende Darstellungen. Am Zahlenstrahl wird die Ordnungsrelation in anderer Darstellung begreifbar („größer als“ heißt dann „liegt rechts von“). Freudenthal (1973) weist der Zahlengerade eine wesentliche Rolle beim Aufbau des Zahlensystems im Mathematikunterricht zu: Sie ist anschaulich Trägerin der reellen Zahlen, wird aber erst schrittweise im Laufe der Sekundarstufe durch verschiedene Konstruktionen und Betrachtungen erforscht. Die mentale Platzierung reeller Zahlen auf der Zahlengerade, das Interpretieren von (absoluten) Unterschieden von Zahlen als Abständen sowie das Verständnis der Ordnungsrelation würde noch vielen Studienanfänger:innen dabei helfen, Aufgaben wie die folgende zu lösen:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $|x - 5| < |x - 1|$.

Die Ungleichung lässt sich formal unter Rückgriff auf die Betragsdefinition mit einer Unterscheidung von drei Fällen lösen. Sie kann aber auch durch Darstellung an der Zahlengerade gelöst werden (Abb. 1).

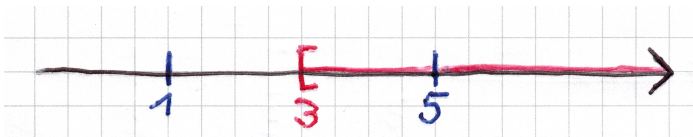


Abb. 1 Lösen einer Betragsungleichung

Die Ungleichung gilt für alle reellen Zahlen, deren Abstand von 5 kleiner ist als der Abstand von 1. In der Mitte liegt 3. Für reelle Zahlen größer als 3 gilt die Ungleichung somit.

Als weitere Relation ist die Gleichwertigkeitsrelation relevant. Es geht dabei um das bereits angesprochene Verständnis des Gleichheitszeichens im Sinne der Gleichwertigkeit von (i. d. R. verschiedenen) Termen, anstelle des Verständnisses als Handlungsaufforderung zum Ausrechnen. Dieses relationale Verständnis des Gleichheitszeichens ist ein weiterer Baustein für algebraisches Denken in der Sekundarstufe (vgl. Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2023).

3.1.4 *Schriftliches Rechnen*

Die schriftlichen Rechenverfahren im Stellenwertsystem sind etwa gegenüber dem Rechnen mit Zahlen in römischer Darstellung eine kulturelle Errungenschaft, die die Schüler:innen als solche kennenlernen sollten. Außerdem lernen sie hier Algorithmen kennen, die sie grundsätzlich verstehen ausführen können. In diesem Aspekt liegt vermutlich der größere bildende Wert als im Berechnen Können der Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten. Das Verstehen der Algorithmen (egal in welcher konkreten Form) basiert dabei auf dem Verstehen der Stellenwertdarstellung, die in der Grundschule intensiv thematisiert wird. Ein tieferes Verständnis des Divisionsalgorithmus kann später direkt klären, warum die Dezimaldarstellung von Brüchen endlich oder periodisch sein *muss* (vgl. Büchter & Donner, 2024).

Zwar werden die schriftlichen Rechenverfahren aktuell zu Beginn der Sekundarstufe erneut thematisiert, aber häufig vorrangig ausführungsorientiert. Die Unterrichtszeit genügt für tiefere Betrachtungen kaum und der Abstand zur intensiven Betrachtung der Dezimaldarstellung ist bereits zu groß. Wenn die Grundschule hier noch mehr Zeit investieren würde, könnte in der Sekundarstufe dafür ein anderes Thema der Grundschule erstmalig systematisch behandelt werden.

3.1.5 *Beiträge zur Prozess-, Anwendungs- und Strukturorientierung sowie zu allgemeinen Lernzielen*

Hinsichtlich einer erwünschten Unterrichtsgestaltung in Orientierung an den in 2.2 dargestellten Überlegungen und Konzepten kann die Arithmetik umfassende Beiträge leisten, die so kaum durch andere Inhalte geleistet werden können. *Mathematik als Prozess* wird erfahrbar, wo Entdeckungen ermöglicht werden, z. B. durch operativ strukturierte Übungen zu den Grundrechenarten, oder wo eigene Lösungswege geplant und realisiert werden können, z. B. beim halbschriftlichen Rechnen mit anschließendem Austausch in Rechenkonferenzen o. ä. Hinsichtlich der Anwendungs- und Strukturorientierung sei hier vor allem auf die Möglichkeiten der *Strukturorientierung* hingewiesen. Die Arithmetik bietet bereits in der Grundschule eine Vielzahl struktureller Eigenschaften und Zusammenhänge von Zahlen, Operationen und Relationen. Auf dieser

Basis können strenge Argumentationen geführt oder Probleme zweifelsfrei gelöst werden können. Hier gibt es also eine geeignete Grundlage für *allgemeine Lernziele*, insbesondere für das *rationale Argumentieren* und den *Erwerb formaler Fertigkeiten*.

3.2 Was ist noch wichtig?

Das bisherige Plädoyer würde tendenziell auf eine moderate Ausweitung der Unterrichtszeit für Arithmetik hinauslaufen, die an anderer Stelle gewonnen werden müsste. Es gibt aber im Bereich der Geometrie und des Sachrechnens ebenfalls unverzichtbare Beiträge zur mathematischen Bildung, auf die kurz eingegangen wird, bevor auch Einsparpotenzial gesucht wird.

3.2.1 Geometrie

In der Geometrie sind die Beiträge zur Entwicklung des *räumlich-figuralen Denkens* und des *geometrischen Strukturierens* besonders wertvoll. Hierzu zählt auch die Entdeckung und Nutzung von *Symmetrie*. Studien zeigen, dass sich die Raumvorstellung bei Kindern im Grundschulalter schnell entwickelt und gut fördern lässt (vgl. Heil, 2020). Die Materialien, Spiele und Aufgaben für die Grundschule sind hier besonders reichhaltig und sollten auch in der Sekundarstufe intensiver verwendet werden (ggf. in altersangepasster Form).

Geometrische Begriffsbildungen werden teilweise propädeutisch betrieben, teilweise aber auch systematisiert und formalisiert. Diese Systematisierung und Formalisierung ist auch mit Blick auf den aktiven Akt des Strukturierens wesentlich. Hier und im Bereich der *geometrischen Abbildungen* werden Beziehungen zwischen Begriffen bzw. Objekten systematisch betrachtet. Zu Beginn der Sekundarstufe wird in der Geometrie vieles (vermutlich aus Unkenntnis) mit großer Redundanz und teilweise weniger mathematischem Tiefgang wiederholt, was eigentlich (d. h. dem Lehrplananspruch nach) schon gefestigt vorhanden ist. Im Vergleich zur Arithmetik bietet die Geometrie dennoch weniger begrifflich geklärte strukturelle Zusammenhänge, sodass sie nicht die gleichen Beiträge (hinsichtlich Qualität und Umfang) zum mathematischen Argumentieren und Problemlösen leisten kann.

Mit Blick auf Längen sowie Flächen- und Rauminhalte leistet die Geometrie wichtige Beiträge zum Aufbau eines tragfähigen Verständnisses des (*mathematischen*) *Messens*. Durch das Messen von Größen von Figuren unter Zuhilfenahme von zugrundeliegenden Gelegenheitsmaßen oder zunehmend standardisierten Maßen werden Messprinzipien erfahrbar, die durch das Zerlegen und Zusammenfügen von Figuren ergänzt werden. Hieran kann die Erarbeitung der Flächeninhaltsberechnung zu Beginn der Sekundarstufe nahtlos anknüpfen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Geometrie, der vor allem in der Sekundarstufe zu kurz kommt, ist das Potenzial zu *schöpferisch-kreativem Tun*, was hier weniger im Sinne des Problemlösens und mehr im Sinne des Gestaltens „schöner“ Muster, vor allem ästhetisch ansprechender Bilder gemeint ist. Parkettierungen und Bandornamente sind typische Beispiele, aber nicht die einzigen. Die ästhetischen Erfahrungen, die hier möglich sind, sollten auch ermöglicht werden. Auch wenn es Beiträge gibt, die zeigen, dass ästhetische Erfahrungen auch in der Arithmetik möglich sind (z. B. Gerdiken & Steinweg, 1999; Winter, 2001), sind diese Erfahrungen in der Geometrie aufgrund der *visuell geprägten* Ästhetik unmittelbarer. In der Arithmetik handelt es sich um eine stärker geschulte Wahrnehmung der Ästhetik (von Punktmustern, Zahlenfolgen, „schönen“ Formeln, „eleganten“ Beweisen, ...).

3.2.2 Sachrechnen

Das Sachrechnen leistet die wesentlichen Beiträge zu *Anwendungsorientierung* im Mathematikunterricht. Über die Geometrie hinaus werden hier die *Größen* Geldwerte, Zeitspannen und Massen thematisiert, die auch in der Lebenswelt der Schüler:innen eine Rolle spielen und zur Umwelterschließung beitragen (*Funktion: Lernstoff*). Im Sachrechnen liegt der Umgang mit Daten sowie die Entwicklung von Konzepten und Darstellungen der *Beschreibenden Statistik* besonders nahe, da viele Fragen eine datenbasierte Beantwortung erfordern.

Zentral im Sachrechnen ist der aufklärerische Beitrag zur *Umwelterschließung*, wobei die Sache im Vordergrund steht und Mathematik genutzt wird, um etwas über die Sache zu lernen (*Funktion: Lernziel*). In der Anwendung wird das verfügbare Wissen und Können häufig flexibilisiert und manche Probleme regen zur Entwicklung neuer Konzepte oder zur

Entdeckung neuer Zusammenhänge in der Mathematik an. Aus meiner Sicht wird mit dieser zentralen Funktion im Konzept der Anwendungsorientierung und des Sachrechnens von Winter (1985, 1987) die Frage, wie Realitätsbezüge im Mathematikunterricht behandelt werden sollten, erheblich klarer beantwortet als in vielen Beiträgen der modernen Didaktik des mathematischen Modellierens.

Viele *mathematische Konzepte*, die in der Grundschule und der frühen Sekundarstufe thematisiert werden, wurzeln in Fragen der uns umgebenden Welt und lassen sich – gedanklich für Schüler:innen gut zugänglich – von hier aus entwickeln (*Funktion: Lernprinzip*). Neben Beispielen die typisch für arithmetische oder geometrische Konzepte sind, bieten gehaltvolle „Fermi-Probleme“ Anlass, sich datenbasiert mit der Gewinnung von Schätzwerten zu befassen, dabei intuitiv Verteilungen zu betrachten und Kennwerte zu entwickeln. So führt die Frage „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?“ (Peter-Koop, 2003) neben anderen Betrachtungen dazu, dass Schüler:innen (z. B. durch Messen) feststellen, dass Autos unterschiedlich lang sind (Variabilität von Daten) und es für die die Beantwortung der Frage sinnvoll ist, mit einem Durchschnittswert (Konzept des Kennwerts) zu arbeiten.

3.3 War das alles?

Mit Blick auf die Bildungsstandards für die Primarstufe lässt sich fragen, ob das alles war. Ist sonst nichts wichtig? Was ist mit „Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang“ oder „Daten und Zufall“?

Aus meiner Sicht muss „Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang“ sich als grundsätzliche Betrachtungsweise durch die diskutierten Inhaltsbereiche ziehen. Es gibt hierfür zahlreiche Untersuchungen, Reflexionen und konkrete Vorschläge, vor allem für „Muster und Strukturen“ (z. B. Lüken, 2012; Steinweg, 2014; Akinwunmi & Steinweg, 2024), aber auch für „funktionales Denken“ im Sinne der „Meraner Reformvorschläge“ (z. B. Büchter, 2011). Eine inhaltliche Separierung des Bereichs schadet ggf. mehr als sie nutzt.

Im Bereich „Daten und Zufall“ sehe ich die Möglichkeit die Thematisierung von Wahrscheinlichkeiten in die Sekundarstufe zu verlagern, wo sie curricular besser vorbereitet und angebunden ist. Zwar gibt es gehaltvolle Ausarbeitungen für Stochastikunterricht in der Grundschule (z. B. Sill &

Kurtzmann, 2019), aber die Elemente der Kombinatorik gehören eigentlich nicht zur Stochastik (vgl. ebd.), sondern als „systematisches“ oder „rechnendes Zählen“ in die Arithmetik. Der Umgang mit Daten (Beschreibende Statistik) ist gut im Sachrechnen verankert (unter Anwendung der Arithmetik und mit Entwicklung geeigneter Konzepte und Darstellungen). Die Wahrscheinlichkeit (von Ereignissen) tritt schließlich durch Reduktion merkwürdig zurechtgestutzt in den Standards auf. In der aktuellen Version wird (nicht überschneidungsfrei) zwischen „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ unterschieden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sicherlich nicht für sichere oder unmögliche Ereignisse entwickelt worden. Wenn alle anderen aber unter „möglich“ zusammenfallen, bleibt sie hohl. Es scheint mir deutlich sinnvoller zu sein, mit den expliziten begrifflichen Betrachtungen zu warten, bis in der Bruchrechnung eine Anteilsvorstellung ausgebildet wurde. Zwar gibt es Vorschläge für die qualitative und relative Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten (ebd.), aber diese Propädeutik ist aus meiner Sicht zeitlich kurz vor der Thematisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in Klasse 6 oder 7 besser aufgehoben.

4 Schlussbemerkungen

Im Mathematikunterricht sind mathematisch gehaltvolle Betrachtungen wichtig, die auch die Anwendung von Mathematik zur Umweltschließung umfassen. Mathematikdidaktisch erfundene Sprechweisen oder verselbständigte Aufgabenformate sind hingegen nicht wichtig. So gibt es z. B. gehaltvolle „Fermi-Probleme“ und andere, die i. W. zum wiederholten proportionalen Hoch- oder Runterrechnen führen.

Für die curriculare Frage, was wann wie und warum unterrichtet wird, ist wichtig, dass nicht alles, was grundsätzlich bereits früh gelernt werden kann, auch früh thematisiert wird. Auch wenn Untersuchungen zeigen, dass lineare Funktionen (Stern et al., 2018) oder das explizite Arbeiten mit Variablen (z. B. nach Davydovs Konzept, vgl. Reitz-Koncebovski, 2023; zur Kritik an diesen Ansätzen vgl. Steinweg, 2013) bereits in der Grundschule erfolgreich unterrichtet werden können, bedeutet dies nicht, dass hier der beste Platz dafür ist.

Schließlich sollte man noch fragen: *Wer ist wichtig im Mathematikunterricht?* Neben den Schüler:innen sind dies natürlich die Lehrkräfte. Die

Lehrkräftebildung und die kooperative Unterrichtsentwicklung (zwischen Lehrkräften sowie zwischen Wissenschaft und Praxis) sind wichtig. In der Lehrkräftebildung ist wichtig, dass mehr Wissen über den tatsächlichen und einen sinnvollen curricularen Aufbau von Mathematikunterricht vom Elementar- bis zum Tertiärbereich bereitgestellt und genutzt wird. Schließlich ist wichtig, dass Lehrkräfte (auf allen Stufen des Bildungssystems) über eine geeignete fachliche Ausbildung verfügen. Für die Grundschule sollte diese zeitlich hinreichend umfangreich und inhaltlich stark auf Arithmetik (und Zahlentheorie) und Geometrie fokussiert sein.

Literatur

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule. Muster entdecken – Strukturen verstehen*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-68701-7>

Blum, W., Drüke-Noe, C., Leiß, D., Wiegand, B. & Jordan, A. (2005). Zur Rolle von Bildungsstandards für die Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(4), 267–274. <https://doi.org/10.1007/BF02655814>

Büchter, A. (2011). Funktionales Denken entwickeln – von der Grundschule bis zum Abitur. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Medien und Materialien* (S. 9–24). University of Bamberg Press. <https://doi.org/10.20378/irb-352>

Büchter, A. (2014). Das Spiralprinzip – Begegnen, Wiederaufgreifen, Vertiefen. *mathematik lehren*, Heft 182, 2–9.

Büchter, A. & Donner, L. (2024). Von 2 bis 100 – eine substanzielle Lernumgebung zur Dezimaldarstellung von Stammbrüchen. In B. Barzel, A. Büchter, C. Rütten, F. Schacht & S. Weskamp-Kleine (Hrsg.), *Inklusives Lehren und Lernen von Mathematik* (S. 159–174). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-43964-4>

Dexel, T. (2024). Gesellschaft im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel? Mathematiklernen in der Grundschule zwischen Singularisierung und Superdiversität. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel*. (S. 9–24). University of Bamberg Press. <https://doi.org/10.20378/irb-104036>

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. 2 Bde. Klett.

Gerdiken, K. & Steinweg, A. S. (1999). Ästhetik im Mathematikunterricht der Primarstufe – Arithmetische und geometrische Strukturen. In C. Selzer & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science* (S. 86–94). Ernst Klett Grundschulverlag.

Gutzmer, A. (1905). Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 36, 543–553.

Hamann, T. (2018). *Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland*. Universitätsverlag Siegen.

Hefendehl-Hebeker, L. & Rezat, S. (2023). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl.) (S. 85–121). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3>

Heil, C. (2020). *The Impact of Scale on Children's Spatial Thought. A Quantitative Study für Two Settings in Geometry Education*. Springer. Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-32648-7>

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H. & Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 3(3), 3–18.

KM NW – Kultusministerium des Landes Nordrhein-Westfalen (1985). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*. Ritterbach.

Kortenkamp, U. (2024). Wieviel Mathe braucht der Mensch? Mathematische Kernkompetenz im Angesicht von KI. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel*. (S. 57–72). University of Bamberg Press. <https://doi.org/10.20378/irb-104036>

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5>

Krüger, K. (2000). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47(2), 221–241. <https://doi.org/10.1007/s005910070004>

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Waxmann.

Neubrand, M. (i. Vorb.). Zwischen politischen Absichten und inhaltlicher Ausgestaltung: Zur Geschichte der deutschen Bildungsstandards und deren Begleitung durch die Mathematikdidaktik. In A. Büchter, R. Bruder, L. Donner, L. Hefendehl-Hebeker & R. Sträßler (Hrsg.), *Zur Geschichte der Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum*. Springer Spektrum.


Peter-Koop, A. (2003). „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?“ Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen. In S. Ruisch & dies. (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 111–130). Mildenberger.

- Reitz-Koncebovski, K. (2023). Die Algebra auf den Kopf gestellt – Davydovs Ansatz für den Anfangsunterricht im Kontext Didaktik der Algebra. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022* (S. 57–60). <http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-23487>
- Sill, H.-D. & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7>
- Stanat, P., Schipolowski, S., Schneider, R., Sachse, K. A., Weirich, S. & Hentschel S. (Hrsg.). (2022). *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783830996064>
- Stanat, P., Schipolowski, S., Gentrup, S., Sachse, K. A., Weirich, S. & Hentschel S. (Hrsg.). (2025). *IQB-Bildungstrend 2024. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der 9. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783818851002>
- Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2738-0>
- Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends – Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51–66). University of Bamberg Press. <https://doi.org/10.20378/irb-21023>
- Steinweg, A. S. (Hrsg.). (2022). *Mathematische Bildung heute und morgen: Herausforderungen und Perspektiven*. University of Bamberg Press. <https://doi.org/10.20378/irb-55799>
- Stern, E., Felbrich, A. & Schneider, M. (2018). Mathematiklernen. In D. H. Rost, J. R. Sparfeldt & S. R. Buch (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (5. Aufl.) (S. 507–514). Beltz.
- Sundermann, B. & Selter, C. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht*. Cornelsen Scriptor.
- Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 7(3), 106–116.
- Winter, H. (1985). *Sachrechnen in der Grundschule*. Cornelsen.
- Winter, H. (1987). *Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule*. Scriptor.
- Winter, H. (2001). Quadrat und Zahl. Ästhetische Erfahrungen im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, Heft 106, 19–41.
- Wittmann, E. (1974). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg.

Prof. Dr. Andreas Büchter
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Str. 9
45127 Essen
andreas.buechter@uni-due.de

Für ein Kind braucht es ein ganzes Dorf, für guten Mathematikunterricht ein ganzes System: Mehrebenenbetrachtung aus Governance-Perspektive

von Martina Diedrich

 0009-0004-9246-6365

Trotz intensiver Reformbemühungen um die Verbesserung des Mathematikunterrichts haben die Mathematikleistungen deutscher Kinder und Jugendlicher über die vergangenen Jahre zunehmend nachgelassen. Der Beitrag zeigt am Beispiel Hamburgs, dass eine kohärente Steuerung auf systemischer Ebene ein wirksamer Hebel sein kann, um bis auf die Ebene des Unterrichts Verbesserungen zu erzielen und ein besseres Lernen zu ermöglichen. Im Rahmen des Startchancen-Programms wird erstmalig in einer bundesweiten Initiative der Bedeutung der Governance-Ebene Rechnung getragen, indem die Steuerung im Mehrebenensystem gezielt adressiert und Reformen systemisch verankert werden.

Schlüsselwörter: Steuerung, Mehrebenensystem, Startchancen-Programm, Netzwerke, Transformation

1 Mathematikunterricht – von der Drosophila zum Sorgenkind

Der Mathematikunterricht ist seit vielen Jahrzehnten Gegenstand intensiver Reformbewegungen und in deren Folge entsprechender Forschung gewesen, weshalb unter Bildungsforschern vom Mathematikunterricht gern als der „Drosophila der Bildungsforschung“ gesprochen wurde. In Deutschland markiert die Einführung eines gänzlich neuen Mathematikunterrichts in der Grundschule im Jahr 1968 einen Einschnitt, dem nachfolgend immer wieder Bemühungen um die Verbesserung unterrichtlichen Lehrens und Lernens folgten (Hamann, 2018). Zahlreiche Reformbemühungen der Vergangenheit haben danach gefragt, wie sich der Mathematikunterricht verbessern kann, um Kindern und Jugendlichen ein besseres Mathematiklernen zu ermöglichen. So zielt eine der größten Fortbildungsoffensiven der Bundesrepublik, das Programm QuaMath¹, vor allem darauf, die Unterrichtsqualität in Mathematik weiterzuentwickeln. Gleichwohl lässt sich jüngst keine grundlegende Trendumkehr bei den Leistungsständen deutscher Schüler:innen erkennen. Vielmehr geben sie immer wieder Anlass zur Sorge (vgl. u.a. Klein, 2024 oder Pauli, 2024). Dieser Beitrag will deshalb den Blick weiten und danach fragen,

¹ https://quamath.de/?trk=public_post-text [abgerufen am 22.09.2025]

Für ein Kind braucht es ein ganzes Dorf, für guten Mathematikunterricht ein ganzes System

wie Reformen auf der Ebene des Unterrichts in darüber liegende Entscheidungs- und Gestaltungsebenen eingebettet sein müssen, damit sie ihre intendierte Wirkung erreichen können. Dabei wird vor allem auf Aspekte der systemischen Steuerung abgehoben, da diesen ein hohes Potenzial mit Blick auf die entscheidenden Weichenstellungen zugeschrieben wird. Blaupause für diese Betrachtungsweise ist das Startchancen-Programm, in dem Bund und Länder gemeinsam die 4.000 am meisten von sozialer Benachteiligung betroffenen Schulen unterstützen und in dem abgestimmten Governance-Prozessen eine hohe Bedeutung zugeschrieben wird.

1.1 Kompetenzentwicklung deutscher Schüler:innen in Mathematik

Die Mathematikergebnisse deutscher Schüler:innen weisen seit Jahren einen erkennbaren Abwärtstrend auf. So gab das Land Berlin jüngst Zahlen heraus, nach denen 45 Prozent der Berliner Schüler:innen in der Grundschule die Mindeststandards für das Fach Mathematik verfehlen (Abgeordnetenhaus Berlin, 2025). Betrachtet man die Ergebnisse der PISA-Studie im Zeitverlauf (s. Abb. 1), so sieht man nach einem anfänglichen Aufwärtstrend bis zum Jahr 2012, dass die Kompetenzstände der deutschen Jugendlichen im internationalen Vergleich wie auch absolut gesehen kontinuierlich abfallen und inzwischen wieder lediglich dem OECD-Durchschnitt entsprechen (wobei dessen Trend ebenfalls nach unten weist).

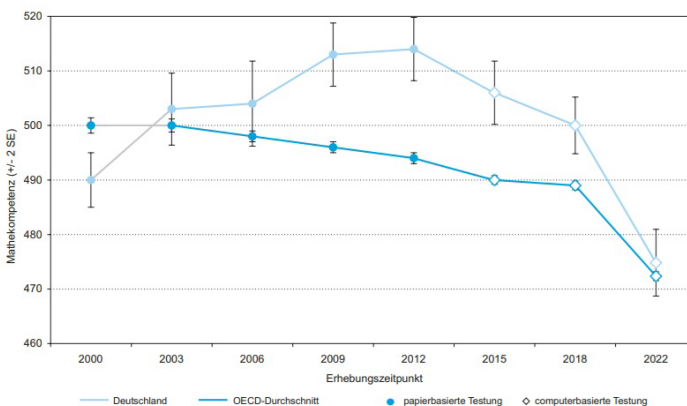


Abb. 1 Ergebnisse der PISA-Studie im internationalen Vergleich. Quelle: Lewalter et al. 2022, S. 76

Sehr viel differenzierter beschreibt der IQB-Bildungstrend die Leistungsentwicklung deutscher Schüler:innen, da er innerhalb eines Bildungssystems Vergleiche ermöglicht und so die Suche nach möglichen Ursachen fokussiert. Der jüngste Bildungstrend für die Grundschule (Stanat et al., 2022) bestätigt den PISA-Befund, dass die Leistungen in Mathematik abnehmen. Für die weiterführenden Schulen werden aktuelle Ergebnisse Ende 2025 erwartet, so dass eine abschließende Einschätzung noch nicht möglich ist. Ein erneut abwärts gerichteter Trend dürfte jedoch für niemanden eine echte Überraschung sein.

1.2 Hamburg als Gegenbeispiel

Anders als in vielen anderen Ländern, haben sich die Mathematikleistungen Hamburger Schüler:innen über die Zeit wenn auch nicht verbessert, so doch zumindest nicht verschlechtert (s. Abb. 2).

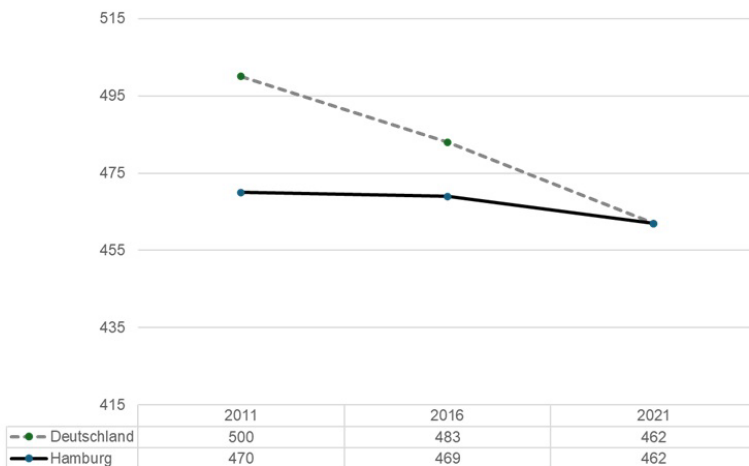


Abb. 2 Hamburger Ergebnisse im IQB-Bildungstrend 2021 (Stanat et al. 2021). Quelle: Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung (IfBQ) 2022

Dementsprechend konnte es seinen Rangplatz in Mathematik erheblich verbessern: War es 2011 nahezu Schlusslicht (gemeinsam mit Bremen und Berlin), hatte es sich 2021 auf einen mittleren Rangplatz 8 verbessert. In Verbindung mit den deutlich verbesserten Ergebnissen im Leseverstehen und Zuhören, in denen es Spitzenplätze belegte, richtete sich aller-

orten die Aufmerksamkeit auf die Frage, wie sich die positive Leistungsentwicklung Hamburger Schüler:innen trotz insgesamt gesteigener Herausforderungen – beispielsweise durch bedeutsame Zuzüge geflüchteter Kinder und Jugendlicher – erklären ließ.

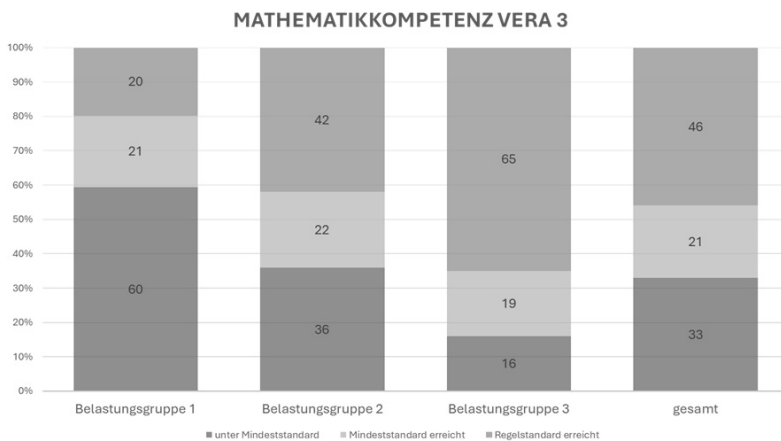
Die nachfolgenden, auch politischen Erklärungsversuche zeigten sehr deutlich, dass es nicht den einen entscheidenden Faktor gab, der für die positive Entwicklung in Hamburg verantwortlich zeichnete (s. beispielsweise Ties Rabe im TAGESSPIEGEL am 05.05.2025). Vielmehr deuteten alle Erklärungsmuster darauf hin, dass mehrere Ursachen oder vielmehr ein ganzes Maßnahmenbündel am Aufwärtstrend der Hansestadt beteiligt waren. Auch wenn es an einer systematischen, umfassenden Evaluation des Hamburger Wegs bislang fehlt, so lassen sich doch einige Plausibilitätsannahmen zugrunde legen, die vor allem die Gesamtkonstellation in den Blick nehmen. Diedrich und Köker (2023) machen eine kohärente Gesamtstrategie der Hamburger Bildungssteuerung aus, in der auf allen Ebenen des Schulsystems an entscheidenden Stellschrauben zugunsten besseren Lernens gedreht wurde. Dazu gehört zunächst ein gemeinsames Steuerungsverständnis, bei dem die Verfügbarkeit und Nutzung von Daten eine zentrale Rolle spielen. Daneben greifen zahlreiche gezielte Fördermaßnahmen und eine datenbasierte Qualitätssicherung ineinander, um so Kinder und Jugendliche in ihrer Leistungsentwicklung besser und passgenauer zu unterstützen. Tränkmann und Diedrich (2023) verstärken diese systemische Betrachtung, indem sie insbesondere die Kohärenz der Governance und die geteilte Ausrichtung aller Steuerungsakteure auf ein gemeinsames Ziel bei gleichzeitiger Übereinstimmung über die geeigneten Mittel in den Vordergrund stellen, um Hamburgs Erfolg einzuordnen:

Zum einen geht es um den Modus der Entscheidungsfindung bei der politischen Steuerung eines Systems (z. B. durch die Einführung eines Sozialindex oder das Ausrollen von wissenschaftlich als wirksam erachteten Programmen zum Spracherwerb). Zum anderen geht es darum, eine konsequente Datenorientierung an allen Stellen des Systems nachhaltig zu verankern (z. B. im aufsichtlichen Handeln, in der schulischen Steuerung, der Unterrichtsentwicklung oder in der Beratung von Schulen). In diesem Sinne etabliert die Steuerungsebene Datennutzung als durchgängiges Prinzip, indem sie

selbst vornimmt, was sie von den darunter liegenden Ebenen erwartet. (Tränkmann & Diedrich, 2023, S. 327)

1.3 Verfehlen von Mindeststandards – eine besondere Herausforderung

Trotz dieser allseits beachteten Erfolgsgeschichte besteht in Hamburg – wie in den übrigen Ländern auch – ein nicht zu übersehendes Problem: Ein zu großer Teil der Schüler:innen erreicht nicht die Mindeststandards in Mathematik. Nun fehlt bislang eine normative Debatte, welcher Anteil an Nichterfüllung als tolerabel gilt. Unzweifelhaft scheint jedoch, dass die in allen Studien regelmäßig wiederholten Befunde, dass etwa ein Fünftel bis ein Viertel der Schüler:innen die Mindeststandards verfehlt, als nicht hinnehmbar gelten muss – denn es bedeutet nichts anderes, als dass diese Schüler:innen nicht in der Lage sind, sich selbst neue Wissensinhalte zu erschließen, da ihnen grundlegende Kompetenzen zum eigenständigen Weiterlernen fehlen.



Hamburg, IfBQ 2022

Abb. 3 Hamburger Ergebnisse in den Vergleichsarbeiten VERA. Quelle: Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung (IfBQ) 2022

Dies gilt umso mehr für Kinder und Jugendliche an Schulen in struktureller Benachteiligung (s. Abb. 3). Wie die Ergebnisse der Hamburger Vergleichsarbeiten für die 3. Klasse zeigen, fallen an den am stärksten von sozioökonomischer Benachteiligung betroffenen Schulen 60 Prozent in diese Gruppe; für Hamburg insgesamt sind es ein Drittel.

Für ein Kind braucht es ein ganzes Dorf, für guten Mathematikunterricht ein ganzes System

Da dieses Befundmuster seit Jahren stabil ist und auch auf bundesweiter Ebene offensichtlich nicht zu beheben ist, haben sich Bund und Länder zusammengetan und ein Programm von enormer Reichweite aufgelegt: das Startchancen-Programm. Es adressiert die 4.000 am meisten von sozioökonomischer Benachteiligung betroffenen Schulen in Deutschland und unterstützt sie nicht nur monetär, sondern auch durch ein umfassendes Maßnahmenbündel zur Verbesserung ihrer Schul- und Unterrichtsentwicklung. Neu an dem Programm ist unter anderem, dass es erstmalig auch die Steuerungsebene in den Blick nimmt und damit alle Systemebenen in die Verantwortung für das Gelingen nimmt. Nachfolgend soll aufgezeigt werden, wie das Programm durch ein Ineinandergreifen aller Ebenen dafür Sorge tragen möchte, dass auch die Reformen im Unterricht ihre Wirksamkeit entfalten können.

2 Das Startchancen-Programm – kohärente Unterrichts-, Schul- und Systementwicklung

Das Startchancen-Programm² ist ein bundesweites, auf zehn Jahre angelegtes Fördervorhaben von Bund und Ländern, das am 1. August 2024 gestartet ist. Mit einem Gesamtvolumen von 20 Milliarden Euro – je zur Hälfte finanziert von Bund und Ländern, die jährlich jeweils 1 Milliarde Euro zur Verfügung stellen – gilt es als das bislang größte bildungspolitische Investitionsprogramm in Deutschland. Es richtet sich an diejenigen Schulen im gesamten Bundesgebiet, die aufgrund ihrer sozialen Zusammensetzung besonderen Herausforderungen gegenüberstehen, etwa durch einen hohen Anteil von Kindern aus einkommensarmen Familien oder mit Migrationshintergrund.

Neu an dem Programm war die erstmalige Abkehr vom Königsteiner Schlüssel, der die Verteilung von Bundesmitteln an die Länder regelt. So sind die Mittel an die Länder entlang eines Indikators geflossen, der den Migrationsanteil, die Armutsquote und die Negativabweichung vom Bruttoinlandsprodukt verrechnet und sich damit an zentralen Benachteiligungsdimensionen orientiert. Die Auswahl der teilnehmenden Schulen innerhalb der Länder erfolgte ebenfalls anhand eines Sozialindex, sodass

² Für alle konzeptionellen Grundlagen s. https://www.bmfr.bund.de/DE/Bildung/Schule/Startchancen-Programm/startchancen-programm_node.html [abgerufen am 28.09.2025]

die Förderung gezielt dort ansetzt, wo strukturelle Benachteiligungen den Bildungserfolg besonders stark beeinträchtigen. Mindestanforderungen an die durch die Länder zu definierenden Sozialindices waren die Berücksichtigung der Dimensionen Migration und Armut. Da die Länder über sehr unterschiedliche Erfahrungen mit der Nutzung von Sozialindices, aber auch über höchst unterschiedliche Datenvoraussetzungen verfügen, variieren die Grundlagen für die Bestimmung der Schulen teilweise erheblich.³

Das Programm beruht auf drei zentralen Säulen: Erstens sollen durch ein Investitionsprogramm Lernumgebungen modernisiert und pädagogisch unterstützend ausgestattet werden. Zweitens wird ein sogenanntes Chancenbudget zur Verfügung gestellt, das flexible Maßnahmen zur Unterrichts- und Schulentwicklung ermöglicht. Zwei Drittel der mit diesem Budget finanzierten Maßnahmen liegt in zentraler Verantwortung der Landesverwaltungen, ein Drittel wird an die Schulen direkt abgeführt. Drittens wird das Personal gestärkt, indem multiprofessionelle Teams aufgebaut werden, die neben Lehrkräften auch sozialpädagogische Fachkräfte einbinden. Für die erste Säule werden 40 Prozent, für die zweite und dritte Säule jeweils 30 Prozent der Mittel aufgewendet.

2.1 Zur Zielstruktur des Programms

Ziel des Programms ist es, mehr Chancengerechtigkeit im Bildungssystem herzustellen, Basiskompetenzen vor allem in der Mathematik und in der Sprachbildung zu sichern und den Zusammenhang zwischen sozialer Herkunft und Bildungserfolg nachhaltig zu reduzieren. Dabei legt das Programm anders als andere Programme ein ausgesprochen differenziertes Zieltabelleau zugrunde, das die Mehrebenenstruktur im Bildungssystem berücksichtigt (vgl. Abb. 4):

- Im Mittelpunkt steht die einzelne Schülerin bzw. der einzelne Schüler. Hier zielt das Programm zunächst auf die Stärkung von Basiskompetenzen in Deutsch und Mathematik. Konkret soll der Anteil der Schüler:innen, die die Mindeststandards in diesen Fächern verfehlen,

³ Für eine aufbereitete Übersicht der zugrunde gelegten Kriterien der Schulauswahl vgl. <https://www.wuebben-stiftung-bildung.org/startchancen/laendersteckbriefe/> [abgerufen am 28.09.2025]

um die Hälfte reduziert werden. Daneben werden aber weitere Persönlichkeitsbereiche im Sinne eines umfassenden Bildungsbegriffs in den Blick genommen: Es geht um die Stärkung sozio-emotionaler Kompetenzen insbesondere im Sinne der Lernvoraussetzungen wie beispielsweise Motivation oder Selbstregulation, um die Befähigung zu demokratischer Teilhabe und um die Vermittlung von Berufswahlkompetenzen. Anders als im Bereich der Basiskompetenzen werden diese Ziele nicht quantifiziert, was ihre Bedeutung für ein gutes Lernen und eine gute Entwicklung Heranwachsender jedoch nicht mindern sollte.

- Damit Schulen allen Schüler:innen diese Kompetenzen vermitteln können, braucht es eine umfassende Stärkung der Einzelschule insbesondere mit Blick auf die Schul- und Unterrichtsentwicklung. Deshalb zielt das Programm zunächst auf die professionelle Weiterentwicklung und Qualifizierung aller an Schule pädagogisch Tätigen, um so umfassend die Lehr- und Lernprozesse zu verbessern und auf ein besseres Lernen und eine bessere Entwicklung der Kinder und Jugendlichen auszurichten. Dabei bleibt es jedoch nicht stehen: Insbesondere angesichts der besonderen Herausforderungen der beteiligten Schulen setzt es darauf, dass sie sich im Sozialraum vernetzen, um einerseits die Ressourcen außerschulischer Partner:innen zu mobilisieren und an die Schule zu binden, und um andererseits selbst zu Zentren des Quartiers zu werden, die für alle am Aufwachsen von Kindern und Jugendlichen Beteiligten „gute Orte“ sein sollen. Neben der Sozialraumorientierung setzt das Programm auf ein weiteres Prinzip: das der durchgängigen Datenorientierung. Damit nimmt es die auch in Hamburg verfolgte Strategie auf, Entwicklungsprozesse informiert, mit einem evaluativen und auf datengestützten Rückkopplungsschleifen fußenden Mindset zu betreiben. Somit sollen die Akteure vor Ort befähigt werden, nicht im Blindflug, sondern in genauer Kenntnis von Erfolgen und Wirkungszusammenhängen zu agieren.
- Ein besonderes Novum des Startchancen-Programms ist die Einbeziehung der Governance-Ebene bzw. der Steuerungsakteure in die Programmarchitektur. Auf dieser Ebene geht es darum, alle an der Steuerung des Programms Beteiligten, die sogenannten intermediären

Akteure aus dem Verwaltungs-, Aufsichts-, Beratungs- und Unterstützungssystem, in abgestimmte, koordinierte und kohärente Prozesse zu involvieren und so dazu beizutragen, dass alle auf der Grundlage geteilter Ziele die Schulen begleiten und unterstützen. Letztlich geht es gemäß Fullan und Quinn (2016) nicht nur darum, eine Passung der Strukturen („structural alignment“) herzustellen, sondern auch Kohärenz im Sinne des gemeinsamen, auf geteilten Normen und Ziel basierenden Lernens des gesamten Systems zu ermöglichen.

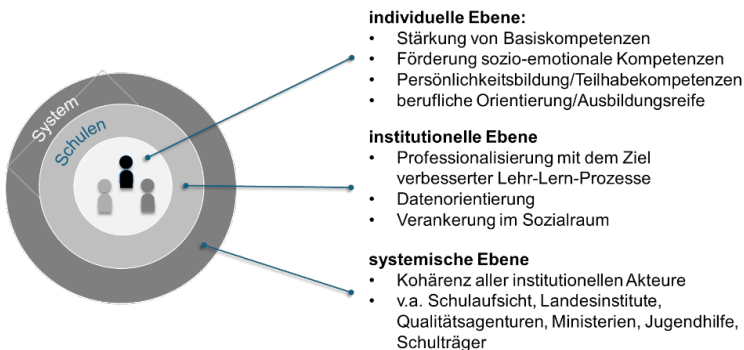


Abb. 4 Zieltableau des Startchancen-Programms im Mehrebenensystem

2.2 Fokus auf die Governance

Insbesondere mit der Betrachtung der Governance-Ebene verfügt das Programm über ein Novum, das in dieser Form bislang eher außen vor geblieben ist. Grundlegend ist die Idee, dass alle beteiligten Akteure, die das Programm steuern und für seine Umsetzung Verantwortung tragen, sich miteinander koordinieren und in Passung zueinander agieren. Im Einzelnen meint eine so verstandene Kohärenz Folgendes (vgl. auch Diedrich, 2021):

- Die beteiligten Akteure verfügen über geklärte, explizierte und gemeinsame Ziele, auf die sie ihr gemeinsames Lernen ausrichten. Somit handeln sie auf der Basis einer gemeinsamen normativen Grundausrichtung.
- Sie verständigen sich auf die geeigneten Mittel und Wege zur Zielerreichung.
- Sie agieren im Bewusstsein unterschiedlicher Perspektiven, die nicht zuletzt unterschiedlichen professionellen Hintergründen und Rollen

im System geschuldet sind. Dabei erkennen sie die Verschiedenheit der jeweils anderen Perspektive an und wissen die Vielfalt als Bereicherung zu schätzen.

- Ihre Schnittstellen und Anschlusspunkte sind geklärt und mit eindeutigen Prozessen hinterlegt. Dazu sind systematische Kommunikationsstrukturen und -gelegenheiten etabliert.

Im Startchancen-Programm wird eine so verstandene Governance in besonderer Weise durch die Struktur der wissenschaftlichen Begleitung durch den CHANCEN-Verbund⁴ abgebildet. Neben den Primärzielen, die auf das Lernen und die Entwicklung der Schüler:innen gerichtet sind, werden in einer eigenen Struktureinheit, dem Governance-Zentrum, Forschung und Begleitung der Governance-Praktiken in den Ländern adressiert. In einem intensiven Beratungsprozess werden die steuerungsverantwortlichen Akteure in den Ländern dabei unterstützt, ihre eigenen Governance-Prozesse zu reflektieren und im Verlaufe des Programms zielgerichtet auf mehr Kohärenz auszurichten. Dahinter steht die Rationale, dass eine mehrbenenübergreifende Zielerreichung nur gelingen kann, wenn alle Beteiligten zielgleich, im genauen Wissen voneinander und mit verbindlichen, klaren Schnittstellen miteinander agieren, weil ansonsten Abbrüche und Widersprüche erzeugt werden. Die Grundannahme lautet: Wenn auf allen Ebenen dieselben Ziele verfolgt werden, gegenüber Schulen konsistent und strategisch kommuniziert wird und alle Beteiligten ihre Aufgabe und Rolle kennen, entstehen auch bei Schulen eine klare Orientierung und eine klare Vorstellung davon, wie die nächsten Entwicklungsschritte aussehen können. Auf diese Weise kann es gelingen, dass die auf einer höheren Ebene angestoßenen Reformprozesse bis auf die Ebene des Unterrichts vordringen und so eine nachhaltige, systematische Transformation ermöglicht wird. Im Governance-Zentrum wird dementsprechend das Zusammenwirken der verschiedenen Akteure nicht nur analysiert, sondern konkret mit Blick auf seine Kohärenz und Zielgerichtetheit weiterentwickelt.

⁴ zum CHANCEN-Verbund s. <https://www.dipf.de/de/forschung/projekte/wissenschaftliche-begleitung-und-forschung-fuer-das-startchancen-programm> [abgerufen am 29.09.2025]

2.3 Ein Medium der Entwicklung: Fachliche Netzwerke

In Bezug auf die Frage, wie der Mathematikunterricht nachhaltig verbessert werden kann, kommt ein weiteres zentrales Entwicklungsmoment des Startchancen-Programms zur Entfaltung: die Einrichtung von fachlichen Netzwerken als Medium der professionellen Weiterentwicklung von Schulen und Lehrkräften. Aufbauend auf den Erfahrungen aus dem Bund-Länder-Programm „Schule macht stark“ (SchuMaS, Maaz & Marx, 2024), sind Netzwerke auch im Startchancen-Programm die zentrale Einheit für die fachliche Professionalisierung. Dabei werden jeweils Mathematiklehrkräfte aus 10 bis 20 Schulen gebündelt und von sogenannten Multiplizierenden geleitet und fortgebildet. Diese Multiplizierenden wiederum sind Adressat:innen für die Qualifizierung durch das fachliche Kompetenzzentrum Mathematik⁵ innerhalb des CHANCEN-Verbunds. Marx, Karst und van Ackeren-Mindl (2024) beschreiben Netzwerke als unterstützendes und ermöglichendes Element einer umfassenden Schulentwicklungsstrategie:

Die Möglichkeit, Einsicht in Perspektiven, Wissensbestände und Praktiken anderer Schulen zu erlangen, schafft innerhalb der Netzwerke Impulse für den eigenen Schulentwicklungsprozess und regt gleichzeitig auch eine Reflexion über die eigene schulische Praxis an. Netzwerke können somit eine wichtige Struktur für erfolgreiche schulische Entwicklungsarbeit sein und wurden entsprechend in der Vergangenheit als relevante Faktoren für die Verbesserung der Schulentwicklung sowie die Verbreitung und nachhaltige Implementation von Neuerungen im Schulsystem identifiziert. (Marx et al., 2024, S. 51)

Allerdings müssen für den Erfolg schulischer Netzwerkarbeit einige Voraussetzungen im Sinne von Gelingensbedingungen geschaffen werden, die nicht ohne Weiteres herzustellen sind und die auch im Kontext des Startchancen-Programms die Länder vor erhebliche Herausforderungen stellen:

- *Freiwilligkeit und Passung*: Schulen müssen ein echtes Interesse am Thema haben. Zwangsvernetzungen führen selten zu nachhaltiger Wirkung.

⁵ s. <https://dzlm.de/startchancen> [abgerufen am 29.09.2025]

Für ein Kind braucht es ein ganzes Dorf, für guten Mathematikunterricht ein ganzes System

- *Klare Ziele:* Netzwerke brauchen eine thematische Fokussierung und klare Vereinbarungen. Ohne gemeinsame Zielrichtung droht Beliebigkeit.
- *Vertrauen und Kommunikationskultur:* Nur in einem Klima gegenseitigen Respekts und offener Kommunikation können auch Probleme ehrlich thematisiert werden.
- *Unterstützung durch Leitung und Kollegium:* Wenn nur einzelne Personen im Netzwerk aktiv sind, ohne Rückhalt durch Schulleitung und Kollegium, versanden die Ergebnisse. Deshalb ist die Verankerung in der Organisation zentral.
- *Externe Begleitung und Ressourcen:* Netzwerkarbeit kostet Zeit. Gerade Schulen in schwierigen Lagen brauchen Unterstützung in Form von Entlastungsstunden, Koordinator*innen, Moderation oder Zugang zu Expertise.

Als typische Stolpersteine identifizieren Marx et al. unklare Zielsetzungen, Zeitmangel, Konkurrenzdenken oder die Gefahr, dass Netzwerkarbeit nur „Projektitis“ erzeugt – also kurzlebige Initiativen ohne nachhaltige Integration in den Schulalltag. Im Zusammenhang mit dem Startchancen-Programm zeichnet sich bereits jetzt ab, dass insbesondere der allerorten zu beklagende Lehrkräftemangel der Bildung von Netzwerken erhebliche Limitationen auferlegt. Es bleibt somit zum jetzigen – frühen – Zeitpunkt im Programm abzuwarten, inwieweit es gelingt, Netzwerke als zentrales Entwicklungselement durchgängig zu etablieren.

3 Fazit: Chancen nachhaltiger Transformation

Die vorausgehenden Betrachtungen sollten deutlich machen, dass eine mögliche Begrenzung bisheriger Bemühungen in der Verbesserung des Mathematikunterrichts auch darin zu sehen sind, dass seiner systemischen Einbettung in ein Mehrebenensystem der Steuerung nicht ausreichend Rechnung getragen wurde. Dadurch blieben Reformen häufig isoliert, nicht integriert in eine Gesamtstrategie und wenig nachhaltig – zumindest, wenn man die Mathematikleistungen deutscher Schüler:innen als Indikator für den Erfolg gelten lässt. Das Startchancen-Programm bietet nun erstmalig die Chance, dass das Schulsystem auf allen Ebenen Gegenstand von Entwicklungsbemühungen wird und auch das systemische Zusammenwirken der institutionellen Akteure in den Blick genommen

wird. Damit rücken geteilte Ziele, Passung, Anschlussfähigkeit und das gemeinsame Lernen im Sinne kohärenter Governance ins Zentrum der Aufmerksamkeit.

Allerdings ist auch dieser Zugriff voraussetzungsvoll und auf verschiedene Bedingungen angewiesen. Abschließend sollen deshalb einige wesentliche Gelingensbedingungen betrachtet werden, von denen es abhängt, ob das Startchancen-Programm am Ende tatsächlich zu einer nachhaltigen Verbesserung des Mathematikunterrichts beiträgt:

- *Umfassende Professionalisierung:* Die akteurs- und ebenenübergreifende Zusammenarbeit ist keineswegs selbstverständlich. Sie setzt bei den Beteiligten intensive Reflexionsprozesse und eine kontinuierliche Weiterentwicklung des eigenen Handelns voraus. Dazu sind entsprechende Räume im Sinne von Zeit- und Gelegenheitsstrukturen notwendig, aber auch zielgerichtete Angebote der externen Begleitung. Der CHANCEN-Verbund hält durch die Einrichtung der entsprechenden Struktureinheiten eine Angebotsstruktur vor, die diesen Bedürfnissen Rechnung trägt. Im Sinne eines Angebots-Nutzungs-Denkens (Helmke, 2015) gilt jedoch auch hier, dass diese Angebote nur insofern tragen, wie sie von den Beteiligten angenommen und im Sinne des gemeinsamen Lernens genutzt werden.
- *Ausrichtung des Systems auf eine Kultur der datengestützten Qualitätsentwicklung:* Auf Langfristigkeit und systemische Transformation angelegte Prozesse bedürfen der regelmäßigen Überprüfung, ob man sich auf dem Weg der Zielerreichung befindet und ob möglicherweise Kurskorrekturen erforderlich sind. Dazu bedarf es systematischer Daten, die insbesondere im formativen Sinne entsprechende Rückschlüsse zulassen. Allerdings ist eine Kultur der Datenorientierung keinesfalls voraussetzungslos: Sie benötigt nicht nur entsprechende Dateninfrastrukturen, sondern auch einen Kompetenzaufbau bei allen Beteiligten im Sinne der Data Literacy und entsprechende Zeit- und Austauschformate, um mit den Daten zu arbeiten (vgl. Karst et al., 2024). Auch hier wird erst die Zeit zeigen, ob die Länder bereit sind, das hochgesteckte Ziel datenorientierter Qualitätsentwicklung nachhaltig, systematisch und unter Hinterlegung der notwendigen Ressourcen zu verfolgen.

Für ein Kind braucht es ein ganzes Dorf, für guten Mathematikunterricht ein ganzes System

- *Professionalisierung aller Akteursgruppen:* Bislang ist die Professionalisierung mit dem Ziel der Verbesserung von Lehr-Lern-Prozessen oft primär auf die Lehrkräfte ausgerichtet. So zentral diese Personen-Gruppe ist, so sehr muss – insbesondere an Schulen in struktureller Benachteiligung – ein erweitertes Verständnis greifen. Nicht nur geht es in der Schule vor Ort darum, alle pädagogisch Tätigen zu involvieren und ihre spezifische Expertise für gelingende Lern- und Entwicklungsprozesse der Heranwachenden zu heben, sondern es müssen auch die intermediären Akteure in ihrer Verantwortung für die Verwaltung, Aufsicht, Beratung und Unterstützung der Einzelschule umfassend durch Professionalisierungsmaßnahmen adressiert werden. Dies gilt in besonderer Weise für die Schulaufsicht, die eine Schlüsselstellung in der Verbindung höher gelegener Steuerungsebenen mit der Einzelschule und ihrer Unterrichtsentwicklung einnehmen.
- *Reflexion von und Verständigung auf ein gemeinsames Steuerungsverständnis:* Angesichts von operativer Überlast besteht für die institutionellen Akteure der Governance häufig wenig Gelegenheit, die eigenen Steuerungsvorstellungen zu explizieren, Unterschiede aufzudecken und sich auf ein gemeinsames Verständnis zu einigen. Dies liegt vielfach auch schlicht am Mangel an Gelegenheiten. Indem im Rahmen der wissenschaftlichen Begleitung entsprechende Settings systematisch etabliert werden, möchte der CHANCEN-Verbund zu einer entsprechenden akteursübergreifenden Verständigung beitragen und an der Entstehung geteilter Steuerungsvorstellungen mitwirken.

Nicht zuletzt wird der weitreichende Transformationsanspruch des Startchancen-Programms auch davon abhängen, inwieweit es gelingt, ein entwicklungsförderliches Mindset zu etablieren. Notwendig dafür wird es sein, dass alle Beteiligten sich selbst als Lernende begreifen und auf den Anspruch finaler Gewissheit weitgehend verzichten. Eine entsprechende Haltung betont die Vorläufigkeit von Erkenntnissen, die Möglichkeit der Revidierbarkeit und erlaubt Unsicherheit und Ungewissheit in der Kommunikation. Dies ist in einem Feld, das häufig durch die Betonung der Überlegenheit des eigenen Wissensbestands geprägt ist, durchaus herausfordernd, verspricht aber ein weiterführender Ansatz in der wechselseitigen Anerkennung und des gemeinsamen Lernens zu sein.

Literatur

Abgeordnetenhaus Berlin (2025, Sep. 12). Schriftliche Anfrage des Abgeordneten Dr. Alexander King vom 26. August 2025 zum Thema: Ergebnisse der VERA-Vergleichsarbeiten 2025. *Parlamentsdokumentation, Drucksache 19/23711*. <https://pardok.parlament-berlin.de/starweb/adis/citat/VT/19/SchrAnfr/S19-23711.pdf>

Diedrich, M. & Köker, R. (2023). Steuerung der systemischen, einzelschulischen und unterrichtlichen Qualitätsentwicklung. *Schulverwaltung Bayern, 2023(7-8)*, 199–202.

Diedrich, M. (2021). Eine verhängnisvolle Affäre? Zum Verhältnis von Bildungsforschung, Bildungspolitik, Bildungsverwaltung und Bildungspraxis. In D. Kemethofer, J. Reitinger & K. Soukup-Altrichter (Hrsg.), *Vermessen? Zum Verhältnis von Bildungsforschung, Bildungspolitik, Bildungsverwaltung und Bildungspraxis: Beiträge zur Bildungsforschung*, 7 (S. 19–32). Waxmann.

Fullan, M. & Quinn, J. (2016). *Coherence. The right drivers in action for schools, districts, and systems*. Corwin.

Hamann, T. (2018). *Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland*. Dissertation im Fachbereich 4 der Universität Siegen. <https://hilpub.uni-hildesheim.de/handle/ubhi/13793>

Helmke, A. (2015). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Klett/Kallmeyer.

Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung (IfBQ, 2022). *Kompetenzen der Hamburger Schüler*innen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe*. <https://www.hamburg.de/resource/blob/149888/d4635c75847da751de5bbc9b17fc6da0/iqb-bildungstrend-2021-data.pdf>

Karst, K., Yendell, O., Marx, A., Lettau, WD. & Hawlitschek, P. (2024). Die Etablierung von Evidenzteams in SchuMaS – Eine Strategie zur systematischen Nutzung von Daten für die Schul- und Unterrichtsentwicklung. In K. Maaz & A. Marx (Hrsg.), *SchuMaS - Schule macht stark: Sozialraumorientierte Schul- und Unterrichtsentwicklung an Schulen in schwierigen Lagen. Aufbau und erste Arbeitsergebnisse des Forschungsverbunds* (S. 225–242). Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783830999102>

Für ein Kind braucht es ein ganzes Dorf, für guten Mathematikunterricht ein ganzes System

Klein, W. (2024, Jan. 25). Was PISA über die Qualität des Matheunterrichts in Deutschland verrät. *Deutsches Schulportal*. <https://deutsches-schulportal.de/expertenstimmen/was-pisa-ueber-die-qualitaet-des-matheunterrichts-in-deutschland-verraet/>

Lewalter, D., Diedrich, J., Goldhammer, F., Köller, O. & Reiss, K. (2023). *PISA 2022. Analyse der Bildungsergebnisse in Deutschland*. Waxmann.

Maaz, K. & Marx, A. (Hrsg.) (2024). *SchuMaS - Schule macht stark Sozialraumorientierte Schul- und Unterrichtsentwicklung an Schulen in schwierigen Lagen: Aufbau und erste Arbeitsergebnisse des Forschungsverbunds*. Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783830999102>

Marx, A., Karst, K. & van Ackeren-Mindl, I. (2024). Potenziale schulischer Netzwerkarbeit für Schulen in herausfordernden Lagen. In K. Maaz & A. Marx (Hrsg.), *SchuMaS - Schule macht stark: Sozialraumorientierte Schul- und Unterrichtsentwicklung an Schulen in schwierigen Lagen. Aufbau und erste Arbeitsergebnisse des Forschungsverbunds* (S. 51–66). Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783830999102>

Pauli, R. (2024, Dez. 4). Matheleistungen an Grundschulen: Ein Viertel kann nicht richtig rechnen. *taz*. <https://taz.de/Matheleistungen-an-Grundschulen!/6054795/>

Stanat, P., Schipolowski, S., Schneider, R., Sachse, K.A., Weirich, S. & Henschel, S. (2022). *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Waxmann.

Tränkmann, J. & Diedrich, M. (2023). Forschungs- und Evidenzorientierung in der Bildungspolitik und -administration. Good-Practice-Beispiel Hamburg. In KS. Besa, D. Demski, J. Gesang & JH. Hinzke (Hrsg.), *Evidenz- und Forschungsorientierung in Lehrer*innenbildung, Schule, Bildungspolitik und -administration. Educational Governance*, vol 55 (S. 325–348). Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-38377-0_16

Dr. Martina Diedrich

DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation


Warschauer Straße 34-36

10243 Berlin

m.diedrich@dipf.de

Anforderungen an den Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert

von Olaf Köller

 0000-0001-5652-8101

Der Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert steht vor der Aufgabe, Lernende auf eine zunehmend komplexe, datengetriebene, digitalisierte und global vernetzte Welt vorzubereiten. Neben der Vermittlung grundlegender mathematischer Fertigkeiten rückt die Förderung von mathematischer Problemlöse- und Kommunikationskompetenz, kritischem Denken und kreativer Anwendung in den Vordergrund. Schülerinnen und Schüler sollen die Mathematik nicht nur als Sammlung von Regeln und Verfahren begreifen, sondern als dynamisches Werkzeug zur Beschreibung, Analyse und Gestaltung realer Phänomene. Digitale Medien und adaptive Lernumgebungen eröffnen neue Möglichkeiten für individualisiertes, entdeckendes, didaktisch treffsicheres Lernen, erfordern aber zugleich moderne didaktische Konzepte und professionelle Kompetenzen seitens der Lehrkräfte. Darüber hinaus gewinnt die Förderung von Kommunikations- und Teamfähigkeit an Bedeutung, um kooperatives Lernen im Fach Mathematik zu ermöglichen. Der Mathematikunterricht soll somit fachliche Exzellenz mit lebensweltlicher Relevanz, überfachlichen Lernzielen, technologischer Offenheit und pädagogischer Vielfalt verbinden. Ziel ist es, mathematische Bildung als Grundlage für gesellschaftliche Teilhabe, wissenschaftliches Verständnis und lebenslanges Lernen zu stärken.

Diesem Anspruch an das Fach Mathematik stehen die ernüchternden Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern in Deutschland in den internationalen Schulleistungsstudien TIMSS und PISA gegenüber. In der Grundschule (TIMSS 2023) erreichten 25 % der Viertklässlerinnen und Viertklässler in Deutschland nicht die international definierten Mindeststandards mathematischer Bildung. Die 15jährigen in PISA 2022 schnitten ebenfalls enttäuschend ab. Fast 30 % der Jugendlichen erreichten nicht den international definierten Standard im Fach Mathematik. Im Spitzenbereich hat sich der Anteil der Hochleistenden in PISA in den letzten Jahren halbiert. Gleichzeitig attestieren die in PISA erhobenen Daten dem Mathematikunterricht in Deutschland, dass er wenig kognitiv aktivierend und unterstützend ist und bei vielen Jugendlichen Langeweile auslöst.

Im Rahmen dieses Beitrags soll zunächst eine knappe Situationsanalyse hinsichtlich der Ziele und der Outcomes mathematischen Lernens in der Primar- und Sekundarstufe vorgenommen werden. Anschließend sollen daraus Maßnahmen zur besseren Förderung mathematischer Kompetenzen abgeleitet werden.

Schlüsselwörter: Unterrichtsqualität, Large-Scale Assessments, basale Kompetenzen, frühe mathematische Bildung

1 Ziele mathematischer Bildung aus einer internationalen Perspektive

Mit Blick auf gesellschaftliche und berufliche Teilhabe haben sich vor allem auf internationaler Ebene die Bildungskonzeptionen und Curricula in den letzten Jahren erheblich modernisiert. So versucht die OECD im Rahmen von PISA zunehmend, ihre domänenbezogenen Frameworks (für Mathematik und die Naturwissenschaften) mit den sogenannten 21st Century Skills, hier vor allem mit den vier C's (Creativity, Critical Thinking, Collaboration und Communication) zu verknüpfen, und darüber hinaus einen Bezug zu den großen Herausforderungen (Grand Challenges) des 21. Jahrhunderts (Klimawandel, Energiekrise, Pandemien usw.) herzustellen. Dementsprechend beschreibt der OECD-Kompetenzrahmen für PISA 2022 mathematische Bildung als integralen Bestandteil allgemeiner Bildung. Er versteht die Mathematik als Werkzeug zur aktiven Auseinandersetzung mit einer zunehmend komplexen, datenbasierten und technologisierten Welt. Zentrale Zielsetzung von Lehr-Lernprozessen im Fach Mathematik ist es, Lernende zu befähigen, mathematische Konzepte nicht nur anzuwenden, sondern deren Bedeutung kritisch zu reflektieren und zur Lösung realer Probleme heranzuziehen. Dabei stehen drei Dimensionen mathematischer Kompetenz im Zentrum: mathematisches Denken und Argumentieren, mathematisches Modellieren sowie die Nutzung mathematischer Darstellungen und Werkzeuge. Mathematisches Denken umfasst die Fähigkeit, Strukturen zu erkennen, Zusammenhänge zu abstrahieren und logisch zu folgern. Argumentatives Denken befähigt dazu, mathematische Aussagen zu begründen, zu prüfen und kritisch zu hinterfragen – eine Schlüsselkompetenz in einer Zeit, in der Daten und Algorithmen zunehmend gesellschaftliche Entscheidungen beeinflussen. Das mathematische Modellieren schließlich dient der Übersetzung realer Phänomene in mathematische Strukturen und der Rückübertragung der Ergebnisse auf den Ausgangskontext.

Digitale Technologien erweitern diesen OECD-Kompetenzrahmen erheblich. Dynamische Visualisierungen, Simulationen und datenanalytische Werkzeuge ermöglichen neue Lernformen, erfordern aber zugleich eine vertiefte Medien- und Reflexionskompetenz. Damit unterstreicht das PISA-Framework, dass der Mathematikunterricht Schülerinnen und

Schüler auf eine aktive, reflektierte und handlungsfähige Teilhabe in einer daten- und zahlengeprägten Welt vorbereiten soll.

Aspekt	Science Framework 2025	Mathematics Framework 2022
Zentrale Kompetenz	Wissenschaftliche Phänomene erklären, Daten/Untersuchungen bewerten, wissenschaftliche Informationen nutzen	Probleme lösen, argumentieren, Mathematik in Alltags- und Gesellschaftskontexten anwenden
Wissensarten	Inhaltswissen (Biologie, Physik, Chemie, Geowissenschaften), Prozedurales Wissen (Methoden, Verfahren), Epistemisches Wissen (wie Wissenschaft funktioniert)	Inhaltswissen (Arithmetik, Algebra, Geometrie, Statistik, Funktionen), Prozesskompetenzen (Modellieren, Argumentieren, Kommunizieren, Problemlösen)
Didaktische Schwerpunkte	Forschend-entdeckendes Lernen, Problem- und projektorientierte Aufgaben, Kontextbezug (Gesundheit, Umwelt, Nachhaltigkeit)	Offene Problemstellungen mit Realitätsbezug; Förderung mathematischen Argumentierens und Begründens; Diskussion verschiedener Lösungswege
Besondere Akzente	<i>Science Identity:</i> Schüler:innen sollen sich als kompetente, handlungsfähige Akteure erleben; Verantwortung für Umwelt und Gesellschaft (<i>Agency in the Anthropocene</i>)	<i>Mathematical Reasoning:</i> Schwerpunkt auf logisches Denken, Schlussfolgerungen, Umgang mit Unsicherheit; Integration digitaler Werkzeuge in Lernprozesse
Implikationen für Unterricht	Naturwissenschaftliche Bildung mit Alltags- und Zukunftsbezug; Verbindung von Fachwissen mit gesellschaftlicher Verantwortung; Stärkere Kontextualisierung von Aufgaben	Mathematik als Werkzeug für Alltag und Gesellschaft sichtbar machen; Förderung von kreativen und reflektierenden Denkprozessen; Digitale Kompetenzen als festen Bestandteil von Mathematikunterricht
Zielrichtung	Vorbereitung auf wissenschaftlich informierte Teilhabe an Gesellschaft und Umweltfragen	Vorbereitung auf reflektierte, handlungsfähige Teilhabe in einer daten- und zahlenorientierten Welt

Tab. 1 Rahmenkonzeptionen in PISA 2022 und 2025

Die Tabelle 1 fasst das Framework in Mathematik noch einmal zusammen und stellt es dem Framework für Naturwissenschaften in PISA 2025 gegenüber. Auch dort gewinnen Daten und deren Analyse zunehmend an Bedeutung. Deutlich wird der erhebliche Überlappungsbereich beider

Konzeptionen. Im Bereich der mathematischen Kompetenzen ist weiterhin die Anschlussfähigkeit an die Bildungsstandards der KMK für das Ende der Sekundarstufe erkennbar (Wissensarten). Gleichzeitig wird bei den besonderen Akzenten der Umgang mit Unsicherheit in Daten hervorgehoben, eine zentrale Herausforderung in der datengetriebenen Welt.

Anders als im PISA-Framework hat sich die SWK in ihrem Gutachten von 2025 sehr stark auf die Förderung mathematischer Kompetenzen bei den leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern konzentriert (SWK, 2025, S. 44 f.). Ziel aller Bemühungen sollte es zunächst sein, die unverzichtbaren basalen und funktionalen Kompetenzen herauszuarbeiten. Zu den funktionalen Kompetenzen zählen u.a. das proportionale Denken, der flexible und verständige Umgang mit Prozenten und Zinsen, der flexible und verständige Umgang mit Datentabellen und Diagrammen, finanzbezogene Kompetenzen (z. B. Tabellenkalkulation, Angebotsvergleiche), Kommunizieren, elementares Problemlösen und Modellieren mit fachbezogenen Selbstregulationsstrategien. Basale Kompetenzen in der 5. Jahrgangsstufe umfassen demnach das Zahl- und Operationsverständnis sowie verständiges Rechnen für natürliche Zahlen, in den Jahrgängen 5 bis 7 den Umgang mit basalen Konzepten zu Daten und Zufall, Raum und Form, Größen und Messen sowie das Zahl- und Operationsverständnis und verständiges Rechnen für Brüche und Dezimalzahlen in den Jahrgängen 6 und 7.

2 Mathematische Leistungen in den internationalen Large-Scale Assessments

Durch die regelmäßige Teilnahme Deutschlands an den großen Large-Scale Assessments in der Grundschule und Sekundarstufe I liegen umfangreiche Trenddaten zu den mathematischen Leistungen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland vor.

Zu den mathematischen Kompetenzen in der Grundschule berichten Schwippert et al. (2024) aus der TIMS-Studie von 2023 relativ aktuelle Ergebnisse für das Ende der 4. Jahrgangsstufe. Ergänzend zu den Leistungen wurden dort auch Einstellungen und das fachspezifische Selbstver-

trauen der Kinder im Fach Mathematik erhoben. Schülerinnen und Schüler aus Deutschland erreichen im Jahre 2023 auf dem internationalen Leistungsmaßstab einen Mittelwert von 524 Punkten. Sie liegen damit auf dem OECD- und EU-Mittelwert. Die mittleren Leistungen der Kinder in Deutschland haben sich seit der erstmaligen Teilnahme an TIMSS 2007 nicht verändert. Die sogenannte Risikogruppe (Kinder unter Kompetenzstufe III) liegt bei rund 25 %, d.h. ein Viertel der Schülerinnen und Schüler verfehlen bei Weitem die Lernziele der Grundschule im Fach Mathematik. In dieser Gruppe befinden sich überproportional viele sozial benachteiligte Kinder und ebenso überproportional viele Schülerinnen und Schüler mit Zuwanderungsgeschichte. Der Anteil besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler liegt im Jahr 2023 in Deutschland bei 8,3 %. Hier sind Kinder mit Migrationsgeschichte und sozial benachteiligte Kinder unterrepräsentiert.

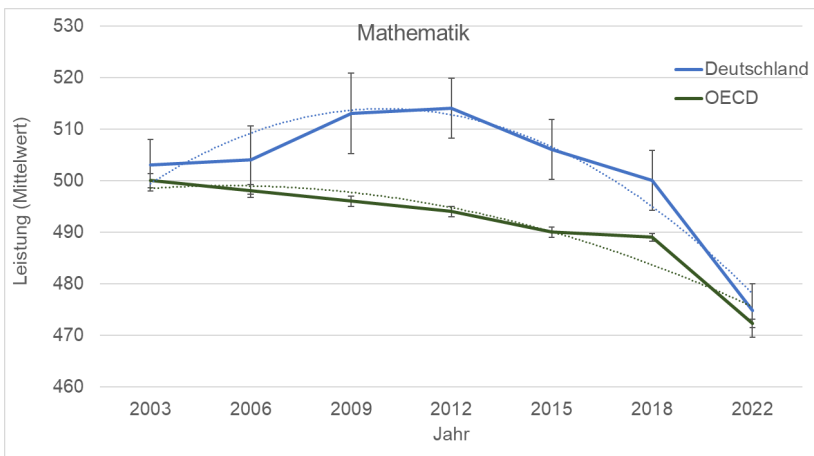


Abb. 1 Mathematikleistungen (inklusive Fehlerbalken) von 15jährigen in Deutschland in PISA nach Jahr (Vergleichsgruppe OECD-Mitgliedsstaaten; Quelle: Lewalter et al., 2023)

Für die Sekundarstufe I liegen aktuelle Zahlen zu den mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler aus PISA 2022 vor (vgl. Lewalter et al., 2023). Anders als in der Grundschule zeigt sich für die 15jährigen in PISA seit über 10 Jahren ein deutlich negativer Trend bei den

Leistungen (s. Abbildung 1). Allerdings liegen die Leistungen in Deutschland noch über dem OECD-Mittel, wenngleich diese Differenzen statistisch nicht signifikant sind.

Der ungünstige Trend in den mathematischen Kompetenzen in Deutschland ist dabei am Gymnasium noch ausgeprägter als im nicht gymnasialen Bereich. So haben die 15jährigen am Gymnasium seit 2009 im Fach Mathematik rund 50 Punkte verloren, was einem Lernverlust von mehr als eineinhalb Schuljahren entspricht.

Auch im emotionalen Bereich ergeben sich in PISA 2022 bemerkenswerte Befunde, die in Abbildung 2 visualisiert sind, wobei noch nach Jungen und Mädchen differenziert wird. Jungen fühlen sich im Mathematikunterricht insgesamt glücklicher, interessierter, weniger bedrückt, motivierter, weniger müde, sind mehr begeistert, zuversichtlicher und weniger ängstlich. Jenseits der Geschlechtsunterschiede belegt die Abbildung aber auch, dass erhebliche Teile aller 15jährigen ungünstige Einstellungen berichten. So sind die Werte bei müde und gelangweilt doch für beide Gruppen sehr hoch. Keine der positiven Einstellungen liegt über 50 Prozent.

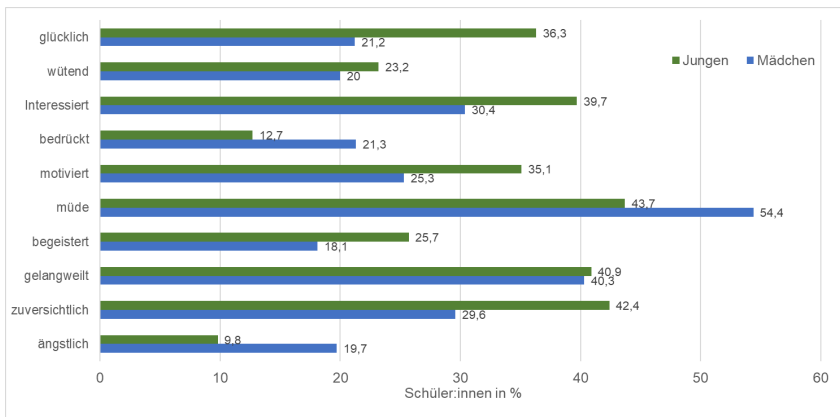


Abb. 2 Leistungsbezogene positive und negative Emotionen bezogen auf das Fach Mathematik in PISA 2022 nach Geschlecht (Quelle: Lewalter et al., 2023)

Betrachtet man für die mathematischen Kompetenzen die Entwicklung der Anteile in der Spitzen- und Risikogruppe, so ergibt sich das Bild in Abbildung 3.

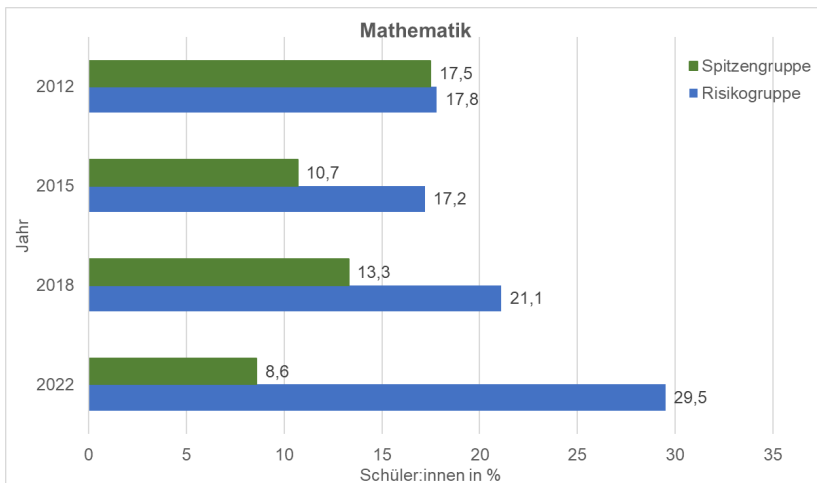


Abb. 3 Anteile der Risiko- und Spitzengruppe in PISA nach Jahr und Testdomäne (Quelle: Lewalter et al., 2023)

Während sich der prozentuale Anteil der Spitzengruppe über 10 Jahre halbiert hat, ist die Risikogruppe um fast 12 Prozentpunkte angestiegen. Die Befunde implizieren erhebliche Förderbedarfe sowohl in der Risiko- als auch in der Spitzengruppe. Weitere Analysen hinsichtlich der Zusammensetzung der Risikogruppe zeigen, dass in ihr 15-jährigen mit Zuwanderungsgeschichte deutlich überrepräsentiert sind. Dies gilt insbesondere für die 1. Generation, also Jugendliche, die gemeinsam mit ihren Eltern nach Deutschland zugewandert sind. In dieser Gruppe gehören 6 von 10 Jugendlichen zur Risikogruppe, dies sowohl in Mathematik als auch in den Naturwissenschaften.

Die unzureichende Unterrichtsqualität in Mathematik zeigt sich in PISA 2022 auch bei direkten Befragungen der Schülerinnen und Schüler deutlich. Die befragten Jugendlichen nehmen signifikant seltener einen Lebensweltbezug des Unterrichts wahr, als es von den Lehrkräften intendiert ist. Die Häufigkeit innermathematischer und einfacher Aufgaben

hat zwischen 2012 und 2022 zugenommen. Rund 38 % der 15-Jährigen nehmen ihren Unterricht als wenig unterstützend und aktivierend wahr, am Gymnasium sind es über 40 %. Seit 2012 hat die Lernmotivation der 15jährigen abgenommen.

Bei den sozialen Disparitäten schneidet Deutschland in PISA 2022 im Vergleich zu den OECD-Staaten ähnlich ab, die Leistungen der sozial benachteiligten Schülerinnen liegen dabei deutlich unter denen der privilegierten Jugendlichen.

Für das enttäuschende Abschneiden in PISA 2022 werden im Wesentlichen drei Ursachen diskutiert:

- Folgen der Schulschließungen in der Corona-Pandemie
- Nicht gelungene Integration der 2015/2016 geflüchteten Kinder und Jugendlichen in das deutsche Schulsystem
- Unzureichende Unterrichtsqualität

Abschließend kann zu den Leistungsständen im Fach Mathematik festgehalten werden, dass auch die IQB-Bildungstrends 2021 und 2024 vergleichbare Befunde für die Mathematikleistungen in der 4. und 9. Jahrgangsstufe liefern (vgl. Stanat et al., 2022, 2025). Der aktuelle Bildungstrend 2024, in dem die mathematisch-naturwissenschaftlichen Leistungen am Ende der 9. Jahrgangsstufe erhoben wurden, zeigt gegenüber dem Bildungstrend von 2018 ein weiteres Absinken der Leistungen, auch hier im Spitzenbereich wie im unteren Leistungsbereich. Den Optimalstandard im Fach Mathematik erreichen bundesweit 2,5 % der Schülerinnen und Schüler, die mindestens einen Mittleren Schulabschluss (MSA) anstreben. Den Mindeststandard für den MSA verfehlen 34 % der getesteten Jugendlichen.

3 Schlussfolgerungen für den erfolgreichen Aufbau mathematischer Kompetenzen

Die gerade skizzierten Befunde machen deutlich, dass es in allen Teilen der Leistungsverteilung in den letzten Jahren zu deutlichen Verlusten gekommen ist. Die Ständige Wissenschaftliche Kommission hat sich in ihren beiden Gutachten zur Grundschule und zur Sekundarstufe I (SWK,

2022, 2025) primär mit Fördermaßnahmen in den unteren Leistungsbereichen auseinandergesetzt. Grundlage der weiteren Erörterungen ist das Modell in Abbildung 4, das Determinanten mathematischen Lernens in den ersten 16 Lebensjahren skizziert.

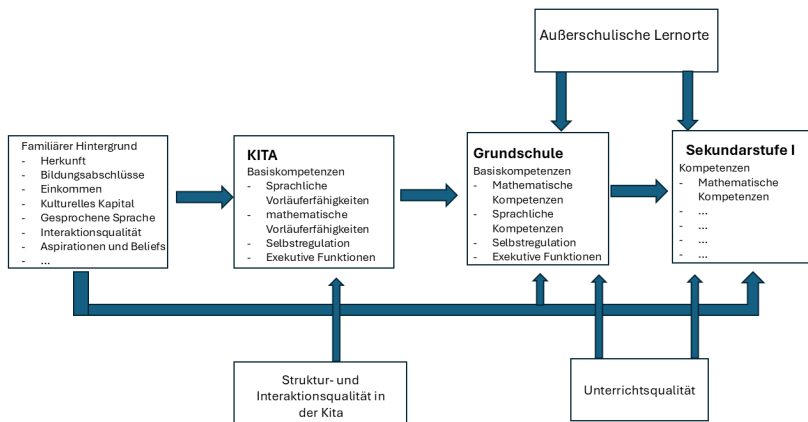


Abb. 4 Determinanten mathematischen Lernens in den ersten 16 Lebensjahren

Lernende wachsen in der familiären Umwelt auf, in der Struktur- (z. B. Bildungsabschlüsse der Eltern) und Prozessmerkmale (Interaktionsqualität) erhebliche Effekte auf die kindliche Entwicklung haben ebenso wie die Struktur- und Interaktionsqualität in der KITA. Bereits in diesen ersten sechs Lebensjahren kommt es entscheidend darauf an, auf Seiten der Kinder sprachliche und mathematische Vorläuferfähigkeiten ebenso zu fördern wie die selbstregulativen Kompetenzen (z. B. Umgang mit Ärger und Frustration) und die exekutiven Funktionen (z. B. Unterdrückung von Handlungsimpulsen, Wechsel zwischen unterschiedlichen kognitiven oder behavioralen Aktivitäten). Von besonderer Bedeutung sind mathematische Vorläuferfähigkeiten der Kinder. So sollten sie eine Mengenbewusstheit von Zahlen entwickeln (Teil-/Ganzes; Zu-/Abnahme) und auch Mengenrelationen verstehen. Hierzu zählen die Zusammensetzung und Zerlegung von (An-)Zahlen (Krajewski & Schneider, 2006).

Die Wirksamkeit vorschulischer Bildung ist allerdings voraussetzungs-
voll, d.h. notwendige Voraussetzungen für erfolgreiches vorschulisches
MINT-Lernen sind sprachliche Kompetenzen der Kinder (vgl. SWK,
2022). Dies umfassen die Bereiche Semantik/Wortschatz, phonologische
Bewusstheit, frühe Buchstabenkenntnis, Benennungsgeschwindigkeit für
Buchstaben und Zahlen, Benennungsgeschwindigkeit für Objekte und Far-
ben, Schreiben können des eigenen Namens und Funktionstüchtigkeit
des phonologischen Arbeitsgedächtnisses. Diese in der KITA erworbenen
Basiskompetenzen sind zentrale Determinanten für mathematische
Kompetenzen in der Grundschule.

Für das schulische Lernen kommt dann eine besondere Bedeutung der
Unterrichtsqualität zu. Die drei Basisdimensionen guten Unterrichts
(kognitive Aktivierung, konstruktive Unterstützung und Klassenführung)
ebenso wie spezielle Angebote für leistungsstarke und leistungsschwache
Schülerinnen und Schüler fördern das Lernen. Diese können durch au-
ßerschulische Angebote ergänzt werden, idealerweise sind dabei schuli-
sche und außerschulische Lerngelegenheiten aufeinander abgestimmt.
Schließlich kommt dem familiären Hintergrund auch eine Bedeutung
für das weitere Lernen zu, z. B. durch gemeinsame Aktivitäten.

3.1 Mathematikunterricht in der Schule

Ein zentrales Qualitätsmerkmal des Mathematikunterrichts in der
Grundschule ist der Aufbau von Grundvorstellungen zum Zahlbegriff
und zum Stellenwertsystem. Kinder müssen verstehen, dass Zahlen
Mengen repräsentieren, unterschiedliche Darstellungsformen besitzen
und in Beziehungen zueinanderstehen. Operationen wie Addition oder
Multiplikation sollen nicht nur als Rechenregeln erlernt, sondern in ihrer
Bedeutung verstanden werden (Padberg & Wartha, 2017). Forschungen
zeigen, dass Defizite in diesen Bereichen zu langfristigen Lernschwierig-
keiten führen. Darüber hinaus spielt das aktive Lernen eine zentrale
Rolle. Kinder erwerben mathematisches Verständnis nicht primär durch
abstrakte Instruktion, sondern durch Aktivitäten wie Zählen, Legen, Mes-
sen, Sortieren oder Visualisieren. Konkrete Materialien – etwa Würfel,
Rechenrahmen oder Zahlengeraden – unterstützen den Übergang vom

anschaulichen Handeln zum abstrakten Denken (Steinweg & Treiber, 2024).

Von besonderer Bedeutung ist die sprachliche Dimension mathematischen Lernens. Schwierigkeiten entstehen oft weniger durch Rechenoperationen als durch unklare Sprachverständnisse. Ein sprachsensibler Mathematikunterricht baut Fachbegriffe systematisch auf und unterstützt Kinder beim Beschreiben eigener Denkwege (Prediger & Hardy, 2023). Dadurch wird das gemeinsame Sprechen über Mathematik als zentrales Lernmedium etabliert.

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I ist es zentral, dass er sowohl basale Kompetenzen sichert – etwa Zahl- und Operationsverständnis sowie grundlegende Rechenfertigkeiten – als auch funktionale Kompetenzen fördert, d.h. das mathematische Problemlösen, Modellieren und Argumentieren. Ein zentrales Qualitätsmerkmal ist die kognitive Aktivierung. Lernende sollen dazu angeregt werden, über Routinen hinaus mathematische Strukturen zu erkennen, Lösungswege zu begründen und eigene Strategien zu reflektieren. Dies entspricht dem Kompetenzmodell der KMK-Bildungsstandards, das auf anwendungsbezogene und transferfähige Wissensbestände abzielt. Studien belegen, dass ein Unterricht, der regelmäßig herausfordernde Aufgaben mit hohem kognitivem Anspruch integriert, langfristig zu stabileren Kompetenzergebnissen führt als reine Instruktionsformate (Klieme, 2006). Darüber hinaus wird Lebenswelt- und Berufsrelevanz als zentrale Dimension hervorgehoben. Mathematikunterricht, der alltägliche Kontexte integriert, trägt dazu bei, die funktionale Einsetzbarkeit mathematischer Verfahren sichtbar zu machen. Solche Anwendungsbezüge unterstützen nicht nur die Motivation, sondern auch die Nachhaltigkeit und den Transfer des Lernens, indem sie Wissen in authentischen Situationen verankern (Blum et al., 2006).

Die zunehmende Heterogenität der Lerngruppen erfordert zugleich differenzierende Maßnahmen. Hierzu zählen adaptive Lernangebote, binendifferenzierte Aufgabenstellungen sowie eine gezielte (additive) Unterstützung von Schülerinnen und Schülern im unteren Leistungsbereich, die auf die unverzichtbaren basalen und funktionalen mathematischen Kompetenzen ausgerichtet ist. Die fortlaufende Diagnostik von Lernausgangslagen spielt dabei eine Schlüsselrolle: Nur wenn Kompe-

tenzstände regelmäßig erfasst werden, können Fördermaßnahmen passgenau ausgerichtet werden (SWK, 2025). Ein weiterer Qualitätsfaktor betrifft (wie auch schon in der Grundschule) die sprachliche Dimension des Mathematiklernens.

Darüber hinaus gewinnt der Einsatz digitaler Medien an Bedeutung (zur Wirksamkeit s. Hillmayr et al., 2020). Voraussetzung für ihren Erfolg ist jedoch eine didaktisch treffsichere Integration, die an klaren Kompetenzzielen orientiert ist (SWK, 2022). Zusammenfassend gilt, dass guter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I auf kognitiver Aktivierung, Lebensweltbezug, Differenzierung, Sprachsensibilität und einer reflektierten Nutzung digitaler Technologien basiert. Damit schafft er die Grundlage, um basale und funktionale Kompetenzen systematisch zu entwickeln und Schülerinnen und Schüler auf weiterführendes Lernen, berufliche Anforderungen und gesellschaftliche Teilhabe vorzubereiten.

4 Resümee

Anforderungen an mathematisches Lernen haben im 21. Jahrhundert dramatisch zugenommen. Lernende sind gefordert, datenbasiert Entscheidungen zu treffen und mit Unsicherheit in Daten umzugehen. Die OECD hat auf diese Anforderungen mit einem modernen Framework für PISA 2022 reagiert, gleichzeitig sind die erreichten Kompetenzstände von Schülerinnen und Schülern besorgniserregend. Ein moderner Mathematikunterricht ist daher gefordert, bei besonders leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern unverzichtbare basale und funktionale Kompetenzen zu fördern, dies vermutlich in der Verzahnung von unterrichtsintegrierten und additiven Angeboten. Für die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler ist ein kognitiv aktivierender, lebensweltnaher Unterricht gefordert, in dem die Kinder und Jugendlichen lernen, Mathematik als zentrale Basis eigener Entscheidungen und eigenen Handelns zu nutzen. Inwieweit die aktuellen didaktischen Modelle im allgemeinbildenden Schulsystem in Deutschland dies leisten können, bleibt eine offene Frage.

Literatur

Blum, W., Drüke-Noe, K., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2006). *Bildungsstandards Mathematik konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsideen und Fortbildungsmöglichkeiten*. Cornelsen/Scriptor.

Hillmayr, D., Zirnwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, 153, 103897, <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897>

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 53(4), 246–262.

Klieme, E. (2006). Empirische Unterrichtsforschung: aktuelle Entwicklungen, theoretische Grundlagen und fachspezifische Befunde. *Zeitschrift für Pädagogik*, 52(6), 765–773. <https://doi.org/10.25656/01:4487>

Lewalter, D., Diedrich, J., Goldhammer, F., Köller, O. & Reiss, K. (Hrsg.) (2023). *PISA 2022. Analyse der Bildungsergebnisse in Deutschland*. Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783830998488>

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0>

Prediger, S. & Hardy, I (2023). Fachliches und sprachliches Lernen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. In M. Becker-Mrotzek, I. Gogolin, H. J. Roth & P. Stanat (Hrsg.), *Grundlagen der sprachlichen Bildung* (S. 171–184). Waxmann. <https://doi.org/10.25656/01:32005>

Schwippert, K., Kasper, D., Eickelmann, B., Goldhammer, F., Köller, O., Selter, C. & Steffensky, M. (2024). *TIMSS 2023. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen in Deutschland im internationalen Vergleich*. Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783830999591>

Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK, 2022). *Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern. Perspektiven für die Grundschule. Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz*. <http://dx.doi.org/10.25656/01:25542>

Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK, 2025): *Kompetenzen für den erfolgreichen Übergang von der Sekundarstufe I in die berufliche Ausbildung sichern*. <http://dx.doi.org/10.25656/01:32815>

Stanat, P. Schipolowski, S., Schneider, R., Sachse, K. A., Weirich, S. & Henschel, S. (Hrsg., 2022). *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783830996064>


Stanat, P. Schipolowski, S., Gentrup, S., Sachse, K. A., Weirich, S. & Henschel, S. (Hrsg., 2025). *IQB-Bildungstrend 2024. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der 9. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Waxmann. <https://doi.org/10.31244/9783818851002>

Steinweg, A. S. & Treiber, E. (2024). Lernwirksam Mathematik unterrichten: Wissenschaftliche Grundorientierung und Umsetzung des Theorie-Praxis-Moduls Mathematik in der Grundschule In E. Plötz, T. Summer, D. Grötzbach, & B. Drechsel (Hrsg.), *Schulpraktische Studien an der Universität Bamberg: Impulse für die Lehrkräftebildung* (S. 213–244). University of Bamberg Press. <https://doi.org/10.20378/irb-95393>

Prof. Dr. Olaf Köller
IPN - Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstraße 62
24118 Kiel
koeller@leibniz-ipn.de

Mehrsprachigkeitsaktivierung im (Mathematik-)Unterricht der Grundschule: Vier Maxime der Mehrsprachigkeitssensibilität

von Taha Ertuğrul Kuzu

 0000-0001-7422-023 1

Rund ein Drittel aller Grundschul Kinder in Deutschland ist mehrsprachig. Mehrsprachigkeit stellt somit eine zentrale Bedingung schulischer Lehr-Lernprozesse dar. Unter einer translanguaging-orientierten Perspektive wird sie als dynamischer Modus der Bedeutungs- und Sprachprozessierung verstanden, der vielfältige Deutungsräume eröffnet. Der Beitrag bündelt zentrale Forschungsbefunde, entwickelt vier Maximen eines mehrsprachigkeitssensiblen Mathematikunterrichts und diskutiert deren Potenziale und Herausforderungen.

Schlüsselwörter: Mehrsprachigkeit, Translanguaging, Mathematikunterricht

1 Einleitung: Mehrsprachigkeit im Mathematikunterricht

Mindestens 50 % der Weltbevölkerung sprechen mehr als eine Sprache (Bialystok et al., 2012) und in Deutschland waren im Jahr 2015, also noch vor den großen Fluchtbewegungen aus Syrien und der Ukraine, schätzungsweise rund 31 % aller Lernenden mehrsprachig (Malecki, 2016) – heute dürften es weitaus mehr sein. Mehrsprachigkeit ist jedoch nicht nur ein weit verbreitetes, sondern zugleich auch ein hochkomplexes Phänomen, das unterschiedliche Ausprägungen und Dimensionen umfasst: Zum einen gibt es die sogenannte *innere Mehrsprachigkeit*, also die Fähigkeit, verschiedene Register und Varietäten innerhalb einer Sprache zu verwenden – etwa Alltags-, Bildungs- oder Fachsprache sowie Dialekte –, zum anderen gibt es die sogenannte *äußere Mehrsprachigkeit*, wenn mehr als eine Sprache beherrscht und genutzt wird (Busch, 2021) – wobei bei Mehrsprachigen mit äußerer Mehrsprachigkeit meist beide Formen der Mehrsprachigkeit vorliegen (so spricht z. B. ein deutsch-italienischer Mehrsprachiger in der Regel auch spezifische Regio- oder Dialekte des Italienischen und kann über die Sprachen hinweg verschiedene Sprachregister nutzen).

Dies bedeutet zugleich auch, dass *mehr als ein Viertel* aller Lernenden an deutschen Schulen im Sinne der äußeren Mehrsprachigkeit mehrsprachig sind – also ihr Denken und Sprechen über mehr als eine Sprache prozessieren –, aber darin weitestgehend ignoriert werden im Bildungsgeschehen, wenngleich sich hier auf curricularer Ebene inzwischen im-

mer mehr tut: In den neuesten Versionen der Lehrpläne und Bildungsstandards wird immer mehr die Aktivierung mehrsprachiger Ressourcen gefordert (Klose, 2022). Diese Forderung haben im deutschsprachigen mathematikdidaktischen Diskurs unter Anderem Meyer & Prediger (2012) vertreten und – unter Rückgriff auf internationale Erkenntnisse und Forderungen seit den 2000ern – betont, dass es für mehrsprachige Lernende *„lernförderlich sein [können], die ersten Ideen zu neuen Themen in Gruppen- oder Partnerinteraktionen in der Erstsprache zu formulieren und erst danach in der Unterrichtssprache“* (Meyer & Prediger, 2012, S. 9). Seither haben sich etliche mathematikdidaktische Studien im deutschsprachigen Diskurs mit der Thematik beschäftigt – u. A. Maisano (2019), Kuzu (2019), Klose (2022), Uribe (2024) – und im Rahmen von Prozessanalysen wiederholt gezeigt, dass es spezifische Potenziale und Gelingensbedingungen der Mehrsprachigkeitsaktivierung im Mathematikunterricht gibt und dass die Mehrsprachigkeitsaktivierung nicht bloß ein ‚hübsches Ideal‘ ist, sondern als Teil der schulischen und damit mathematikunterrichtlichen sprachlichen Heterogenität Ernst genommen werden sollte – als Lernendenressource sowie Lernbedingung, als Arbeits- sowie Denksprache zugleich (Redder et al., 2018). Damit ist die Frage nicht *ob*, sondern *wie* und *unter welchen Bedingungen*, zugleich aber auch mit *welchen Zielen und Maximen* die Mehrsprachigkeit im Mathematikunterricht aktiviert werden sollte.

In diesem theoretischen Artikel werden – auf Basis des Forschungsstands der letzten Jahre und ohne Anspruch auf Vollständigkeit – vier Maxime des mehrsprachigkeitssensiblen Mathematikunterrichts beschrieben, da sie einerseits Zieldimensionen sind und andererseits zentrale Gelingensbedingungen darstellen. Ziel dieser Maximen ist es, einen inklusiven Mathematikunterricht, der auch die Heterogenitätsdimension der Mehrsprachigkeit umfasst und diese als natürliche Ressource der Lernenden begreift, zu skizzieren (Korten, 2020). Dabei wird – im Sinne Montessoris – die Grundidee verfolgt, dass jede *„Erziehung von Kindern [...] begleitet werden [muss] durch dieses Prinzip – bei der Entwicklung aller geistigen und körperlichen Fähigkeiten des Kindes behilflich zu sein“* (Montessori, 1909, S. 177). Mehrsprachigkeit wird in diesem Sinne verstanden als Teil der geis-

tigen Fähigkeiten eines Kindes und Ziel ist die Erhaltung und Entwicklung der Mehrsprachigkeit, nicht die Verhinderung und/ oder Reduktion der Mehrsprachigkeit (vgl. Abbildung 2).

2 Vier Maximen eines mehrsprachigkeitssensiblen Mathematikunterrichts

Die nachfolgend skizzierten vier Maximen eines mehrsprachigkeitssensiblen (Mathematik-)Unterrichts sind eng miteinander verknüpft und bauen systematisch aufeinander auf. Sie stützen sich auf zentrale nationale und internationale Forschungserkenntnisse zur *Aktivierung mehrsprachiger Ressourcen im Mathematikunterricht* und bilden diese zwar mit Sicherheit nicht vollständig, geben jedoch exemplarische und repräsentative Einblicke. Als Maximen sind sie bewusst formuliert, da der schulische Alltag in der Grundschule häufig lediglich eine Annäherung an diese Leitlinien und nicht deren umfassende Umsetzung erlaubt, wenngleich Letzteres das langfristige Ziel sein sollte.

2.1 Maxime 1: Interpretative Annäherung an mehrsprachige Interaktionen und Bedeutungskonstruktionen


Mehrsprachigkeit im Mathematikunterricht erschöpft sich nicht in der bloßen Übersetzung von Fachbegriffen oder Aufgabenstellungen. Sie ist vielmehr als ein *interpretativer Prozess* zu verstehen, der durch fein nuancierte Bedeutungsunterschiede zwischen Sprachen und durch soziale und kulturelle Deutungsmuster, sogenannte ‚Rahmungen‘, geprägt ist – im translationalen Sinne ist dies Normalität und betrifft jeden Übersetzungsakt (Koller & Henjum, 2020; Pavlenko, 2011; Kuzu, 2019). In der Analyse von Unterrichtsinteraktionen zeigt sich immer wieder, dass Übersetzungen von Lernendenäußerungen keine bloßen „Übertragungen“ sind, sondern selbst interpretative Akte darstellen. Das bedeutet: Einerseits müssen mehrsprachige Lernende in ihren Sprachwechselprozessen stets auch nuancierte Bedeutungsunterschiede (mit-)deuten und koordinieren, andererseits unterliegen auch Mehrsprachigkeitsforschende einem vielschichtigen Deutungsprozess – etwa beim (sekundären) Übersetzen und Interpretieren mehrsprachiger Transkripte (Klose, 2022). Der Grund dafür ist, dass jede Übersetzung – bewusst oder unbewusst – die semantische Struktur einer Äußerung verändert, (Bedeutungs-)Nuancen verschiebt/ ergänzt und zusätzliche Deutungshorizonte und -möglichkei-

ten eröffnet. Darauf verweist bereits Vygotsky (1934/ 1986) in seinen frühen Arbeiten zur linguistischen Relativität: Die Interrelation zwischen ‚Sprache/ Wörter‘ und ‚Denken‘ ist maßgeblich beeinflusst durch ‚Kultur/ Kontext‘, also von lebensweltlichen und kulturellen Vorerfahrungen (‚Rahmungen‘). Diese Komplexität von mehrsprachigen Denk- und Deutungsprozessen zeigt sich auch in der Schulpraxis, wenngleich oft fein nuanciert. Ein Beispiel dafür zeigt sich in der nachfolgenden Sequenz:

Turn	Person	Äußerung (Deutsch in schwarz, Türkisch in blau)
1	Leh	Was hast du hier gemacht? [S6 hatte zuvor neun von 25 Würfeln weggenommen, gemäß der Aufgabe 25 – 9; nun liegen auf dem Tisch ein Zehner und 6 Einer, also die Menge 16]
2	S6	So, also – dokus aldım burdan (neun habe ich genommen von hier) [zeigt auf die Menge 16]
3	Leh	Ah okay - aldım derken (wenn du sagst genommen)? Was meinst du damit?
4	S6	So, işte (also/ so) [3 Sek.] kendime aldım, bana. Bu bana geldi (zu mir genommen, zu mir. Das kam zu mir) [zeigt auf die sechs Einerwürfel vor sich, die er zuvor weggenommen hatte] şuda sende kaldı, sana kaldı (und das ist bei dir geblieben, für dich geblieben) [zeigt auf Menge 16].

In dieser Sequenz löst der mehrsprachige Lernende S6 (Klassenstufe 2, türkisch-deutsch) verschiedene Subtraktionsaufgaben und soll diese mit Dienes-Material legen. Im Vorfeld hatte er bereits das geschickte Legen geübt (er ist also mit dem Material vertraut). Nun soll die Aufgabe 25 - 9 gelegt werden und S6 legt eine Zehnerstange, zehn Einer direkt darunter – an die Zehnerstange angelegt – und nochmal fünf Würfel darunter. Auch die Lehrkraft ist mehrsprachig (Deutsch, Türkisch) und Sprachwechsel im Rahmen von mathematischen Erklärprozessen sind explizit erlaubt und erwünscht. Die Transkriptsequenz verdeutlicht, welche Vielfalt an Deutungsmöglichkeiten im Rahmen mehrsprachiger Erklärprozesse aufkommen kann: S6 nimmt von 25 zwar 9 weg und handelt damit aufgabengemäß, erklärt es aber auf Türkisch mit dem Sprachmittel „aldım“ (Turn 2), also wörtlich übersetzt „(zu mir) genommen“. Dass im Türkischen beim Subtrahieren etwas *zu sich* genommen wird, also nicht einfach „abgezogen“ oder „weggenommen“ wird wie im Deutschen (was abstrakter/ nicht explizit personengebunden ist), führt vermutlich dazu, dass der Lernende S6 die Subtraktionsaufgabe erweitert, bzw. umdeutet zu einer Aufteilaufgabe (Turn 4): Er selbst bekommt das, was er abzieht (die Teilmenge 9), und der Lehrer bekommt die Restmenge (16) („zu mir

genommen, zu mir. Das kam zu mir [...] und das ist bei dir geblieben, für dich geblieben“). Diese semantische Erweiterung öffnet einen neuen Deutungsraum, der sich auch bei der Analyse weiterer bedeutungsbezogener Sprachmittel zur Subtraktion zeigt: So bedeutet z. B. der Fachbegriff „minus“ auf Türkisch „eksi (fehl)“, was Lernende wiederum als „eksi(k)/ fehlend“ umdeuten können (Kuzu, 2024). Dies wiederum kann dann dazu führen, dass sie bei enaktiven Handlungen nicht nur Teilmengen abzuziehen, sondern so abzuziehen, dass immer *Lücken* übrig bleiben, also immer etwas „Fehlendes“ übrig bleibt – wie in folgender Sequenz:

Turn	Person	Äußerung (Deutsch in schwarz, Türkisch in blau)
124	Leh	<p>Warum hast du das eigentlich so gelegt? [Der Schüler hat bei der Aufgabe 156 – 28 zuvor die unten abgebildete enaktive Handlung durchgeführt]</p>  <p style="text-align: center;"><i>vorher</i> <i>nachher</i></p>
125	Zeki	<p>Ja weil <i>eksi, eksik (minus, fehlend)</i>, also subt- wie soll ich sagen, das heißt ja da fehlt noch was, <i>yani şey, eksik gözükmelisi* gerekiyo (also dings, muss so fehlend aussehen)</i></p> <p><small>*fehlerhafte Nutzung des Suffixes „-li“, bzw. „-lisi“ für Markierung der Notwendigkeitsform, evtl. doppelte Betonung intendiert</small></p>

In der Transkriptsequenz sieht man, dass der Lernende Zeki (Klasse 3/4) aufgrund der nuancierten Bedeutungsunterschiede („eksik“ bedeutet im Türkischen „fehlend“) eine *Lücke* in der Menge hinterlässt (Turn 124), diese aber dennoch als Gesamtmenge deutet, wo aber etwas *“fehlend aussehen”* müsse (Turn 125). Diese nuanciert unterschiedliche Deutung führt zwar zu keinem Deutungsfehler – da trotz der Lücke noch die Gesamtmenge korrekt identifiziert wird (als „128“) –, aber denkbar wäre dennoch, dass hier auch eine Verstehenshürde auftreten *könnte* (etwa dann, wenn die Lücke zur Fehlinterpretation des oberen Teils als Gesamtmenge geführt hätte).

Die Aktivierung der Mehrsprachigkeit sowie die Reflexion von Lernendeninterpretationen ist damit nicht nur wichtig, um Lernendenressourcen zu aktivieren, sondern auch, um *diagnostisch rückprüfen zu können*, ob evtl. unbemerkt nicht tragfähige Deutungen zwischen den Sprachen existieren (Kuzu, 2024). Dies ist auch deshalb wichtig, weil die Sprachen von mehrsprachigen Lernenden in der Regel *immer* untrennbar co-aktiviert sind, da Sprachen und sprachgebundenes Wissen nicht – wie früher in

den 1980er/1990er Jahren noch angenommen und modelliert wurde (z. B. in Cummins, 1979) – auf isolierte Weise in ‚Containern‘ abgespeichert werden, sondern auf hochgradig vernetzte Weise (Garcia & Wei, 2014). Selbst wenn der Lernende Zeki hier also nicht hätte alle Sprachen einsetzen dürfen, wären die Deutungsunterschiede dennoch existent und koordinationsbedürftig, möglicherweise hätte er dennoch mit Lücke gelegt. Aus diesem Grund fordert die didaktische Mehrsprachigkeitsforschung eine proaktive, offensive Förderung von Sprachreflexionsprozessen mit dem Ziel der Förderung der ‚Sprachbewusstheit‘, also der *„Fähigkeit, sprachliche Erscheinungen ins Bewusstsein zu rufen, sei es in Form einer reflektierten Kontrolle eigener sprachlicher Tätigkeiten oder als bewusstes Nachdenken über Sprache und ihre Gebrauchskontexte“* (Bien-Miller et al., 2017, S. 194). Dabei zeigt sich, *„dass mehrsprachige Schüler/innen nicht nur häufiger metasprachliche Äußerungen produzieren als ihre monolingualen Altersgenossen, sondern dass dies auch häufiger auf einem höheren Niveau und in differenzierterer Art und Weise geschieht“* (Bien-Miller et al., 2017, S. 193).

Beide Beispiele illustrieren, wie eng Bedeutungskonstruktionen mit sprachlicher Vielfalt verknüpft sind und wie wichtig eine interpretative Sensibilität bei mehrsprachigen Daten und Interaktionen ist. In beiden Sequenzen zeigt sich – im Sinne des ‚bi-/ multilingualen Modus‘ nach Grosjean (2001) – ein schneller, fließender, dynamischer Gebrauch und Wechsel der Sprachen, der zwar hin und wieder Sprachfehler umfasst, aber dennoch können die vorliegenden mathematischen Objekte sprachübergreifend *gedeutet* werden. Mehrsprachigkeit ist hier mehr als nur ein Mittel zur Sprachförderung, es ist vor allem eine Ressource für ein ganzheitliches, sprachübergreifendes Verstehen (Planas & Chronaki, 2021). Zudem zeigt sich, dass eine langfristige Aktivierung mehrsprachiger Ressourcen das Lernen *nachhaltig* unterstützt: Mehrsprachige Lernende erlernen fachliche Inhalte über längere Zeiträume hinweg besser/ stabiler und zeigen in Post- und Follow-Up-Testungen einen deutlich höheren Wissenserhalt als Lernende, die ausschließlich monolingual unterrichtet wurden (Schüler-Meyer et al., 2019; Kuzu, 2019).

2.2 Maxime 2: Wiederholte & strukturierte Aktivierung der Mehrsprachigkeit – translanguaging-orientiert & technologisch unterstützt

Die Hintergründe zu Maxime 1 führen – wenn man sie konsequent in die Grundschulpraxis hineindenkt – zu Maxime 2, also der Notwendigkeit für

eine systematische Aktivierung der Mehrsprachigkeit. Die Aktivierung mehrsprachiger Ressourcen entfaltet ihr volles Potenzial insbesondere dann, wenn sie wiederholt und gezielt in unterschiedlichen Phasen des Lehr-Lernprozesses erfolgt. Einzelne isolierte Aktivierungsgelegenheiten oder symbolische „Sprachmomente“ bleiben häufig wirkungslos und können zu ‚Aktivierungsproblemen‘ führen: Mehrsprachige Lernende nutzen dann ihre Sprachen nicht oder kaum, z. B. weil sie es nicht gewohnt sind oder den Rahmenbedingungen misstrauen (Redder et al., 2018). Ursächlich dafür sind meist institutionelle Dynamiken: Die Mehrsprachigkeitsforschung betont immer wieder, dass insbesondere low-status-Mehrsprachige häufig sehr früh Sprachsanktionen und negative ‚Etikettierungen‘ im Schulsystem und Mathematikunterricht erleben (Barwell, 2016), was sich auch im deutschen Schulsystem immer wieder zeigt (Busch, 2021; Fürstenau, 2016).

Für Lehrkräfte hingegen entsteht oft das Problem, dass sie nicht alle Sprachen der Lernenden sprechen und oft nicht genau verstehen, welche reflektierbaren Inhalte und Bedeutungsunterschiede sich ergeben. Allerdings muss dies auch nicht immer der Fall sein, damit sich die Mehrsprachigkeitsaktivierung lohnt: Sogenannte Transfereffekte auf diskursiver Ebene – also bei mündlichen oder schriftlichen Sprachpraktiken wie dem ‚Erklären‘, ‚Beschreiben‘, ‚Anleiten‘ etc. – können ebenfalls entstehen. So rekonstruiert beispielsweise Maisano (2019) im Rahmen ihrer mathematikdidaktischen Prozessanalysen, wie mehrsprachige Grundschüler*innen im Mathematikunterricht im Rahmen der Sprachpraktiken ‚Beschreiben‘ und ‚Erklärung‘ davon profitieren, dass sie ihre mathematischen Entdeckungen und Erkundungen mehrsprachig erklären durften (Maisano, 2019). Dies lässt sich dadurch begründen, dass Merkmale von Sprachhandlungen – z. B. dem ‚Erklären‘ als Sprachhandlung, bei welcher angenommen wird, dass einem Zuhörenden kausales Wissen zu einem Sachverhalt fehlt, sodass die Ausführungen des Sprechenden auf Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge abzielen (Redder et al., 2018) – sprachunabhängig sind, oder anders gesagt: Wenn ich auf Türkisch, Italienisch, Arabisch etc. *gut erklären* gelernt habe und verstanden habe, dass es um gründliche Ausführungen von Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen geht (im Kontrast zu ‚Beschreibungen‘, wo es in der Regel nur um

Ausführungen zu Oberflächenmerkmalen geht), kann ich *auch auf Deutsch* gut erklären und vice versa.

Besonders fruchtbar ist dabei – und dies konstatieren für den Mathematikunterricht neben Maisano (2019) auch Kuzu (2019) sowie Uribe (2024) – der Einsatz translanguaging-orientierter Strategien in Verstehensphasen und Kleingruppenarbeiten, also in jenen Momenten, in denen mathematische Ideen gemeinsam ausgehandelt und reflektiert werden. Unter ‚Translanguaging‘ wird dabei verstanden, dass alle Sprachen von Lernenden *„auf eine dynamische und funktional-integrierte Weise genutzt werden, um mentale Prozesse beim Verstehen, Sprechen, bei der Literalität und nicht zuletzt beim Lernen zu organisieren und zu vermitteln. Translanguaging betrifft effektive Kommunikation, Funktion statt Form, kognitive Aktivität sowie Sprachproduktion“* (Lewis, Jones & Baker 2012, S. 641; übersetzt vom Autor). Dabei ist zentral, dass im Rahmen von *Translanguaging* keine Forcierung zur Nutzung bestimmter Einzelsprachen (A, B, C, ...) erfolgt, sondern Lernenden freigestellt wird, in welcher Sprache oder Sprachmischung sie denken und ihr Verstehen prozessieren möchten (García & Wei, 2014). Im Unterschied zu Immersionsmethoden steht nicht die „korrekte“ Verwendung einzelner Sprachen im Fokus, sondern der funktionale Gebrauch des gesamten sprachlichen Repertoires: Entscheidend ist, dass Lernende im Prozess des Verstehens und der Begriffsbildung sämtliche ihnen verfügbaren Sprachen und Sprachregister in der von ihnen präferierten Form (z. B. gemischt oder getrennt) einsetzen können (Kuzu, 2023). Metaphorisch gesprochen geht es somit darum, einem Menschen mit zwei Beinen zu ermöglichen, *beide Beine* zum Gehen zu nutzen – anstatt ihn/ sie zur Nutzung nur eines Beines zu forcieren.

In einer Unterrichtspraxis, die das ‚Translanguaging‘ normalisiert, entstehen langfristig auch sogenannte „translanguaging spaces“ – also Räume, in denen die Nutzung aller verfügbaren sprachlichen Ressourcen nicht nur erlaubt, sondern erwartbar und normalisiert ist (Garcia & Wei, 2014; Wei, 2011). Von besonderer Bedeutung ist dabei die Darstellungsvernetzung, insbesondere unter Einbezug des graphischen Registers als Schlüsselregister, da visuelle Repräsentationen häufig Brücken zwischen sprachlichen Ausdrucksformen und fachlichen Konzepten schlagen (Wessel, 2015). Gerade dann, wenn es Deutungsunterschiede oder Über-

setzungsschwierigkeiten zwischen Sprachen gibt, helfen Veranschaulichungen mehrsprachigen Lernenden, um präzise auf jene Teilobjekte etc. zu zeigen, die sie meinten (Wagner et al., 2018). Dies hilft zwar auch Verständigungsprozessen mit Lehrkräften, aber diese stehen, wenn sie mehrsprachige Interaktionsprozesse begleiten *wollen*, vor einer ‚Sprachbarriere‘, wenn sie die Sprachen der Lernenden nicht sprechen.

Hier helfen inzwischen technologische Innovationen – insbesondere KI-Technologie – und es lässt sich an die Potenziale von digitalen Medien anknüpfen (Walter, 2018). Beispielsweise ermöglichen leistungsfähige Large-Language Modelle (LLMs) inzwischen, mehrsprachige Aufgaben zu entwickeln und/ oder Aufgaben in verschiedene Sprachen zu übersetzen, mehrsprachige Wortspeicher oder Tippkarten zu erstellen, ad hoc Gesprochenes in eine andere Sprache zu übersetzen – falls Lernenden z. B. noch nicht genug Deutsch sprechen – etc. (Kuzu et al., 2025). Auch können sich Lehrkräfte inzwischen handschriftliche, mehrsprachige Lernendenprodukte via Fotoupload ins Deutsche übersetzen lassen und mehrsprachige Lernende können sich so adaptives Feedback einholen (Kuzu & Sprenger, 2025). Darüber hinaus können LLMs inzwischen auch Bedeutungsunterschiede zwischen Sprachen analysieren und sprachkontrastive Impulse geben sowie als ‚mehrsprachige buddies‘ fungieren – also mehrsprachige Interaktionen auch jenen Kindern ermöglichen, die mit ihrer Mehrsprachigkeit alleine sind in der Klasse oder in Kleingruppen (Kuzu, 2025). Diese technologischen Innovationen lassen sich auch gut in unterrichtsmethodische Zugänge zur Mehrsprachigkeitsaktivierung integrieren, z. B. den Einsatz von sogenannten ‚Mehrsprachigkeitskarten‘ (Abb. 1).



Abb. 1 Mehrsprachigkeitskarten zur strukturierten Aktivierung der Mehrsprachigkeit
Ziel dieser Mehrsprachigkeitskarten ist es einerseits, einen strukturierten Aktivierungsraum für mehrsprachige Ressourcen zu ermöglichen –

wenn diese z. B. als Großkarten an der Tafel hängen und auf die Vorder- und Rückseite geklappt werden oder im Kleinformat als ‚Tischkarten‘ genutzt werden –, und andererseits soll auch genug Raum für Übersetzungsprozesse zwischen Sprachen geschaffen werden (Kuzu, 2025). Dabei signalisieren die Mehrsprachigkeitskarten zum einen die Gleichwertigkeit aller Sprachen in der Klasse, zum anderen soll mehrsprachigen Lernenden genug Zeit für Übersetzungen zwischen Sprachen eingeräumt werden. Dabei wird das Deutsche als *gemeinsame Sprache* aller Klassenmitglieder gerahmt, und im Rahmen der Übersetzungsprozesse zwischen Sprachen können die Lernenden auch künstliche Intelligenz – z. B. via LLMs auf Tablets – einsetzen (ikonisch dargestellt in Abb. 1 durch den KI-Roboter).

Denkbar – und wichtig – ist ein wiederholter Einsatz im Rahmen von Kleingruppenphasen, die so der Mehrsprachigkeit geöffnet werden können: Im Rahmen von Erarbeitungsphasen kann dann z. B. die Vorderseite der Karten gedreht sein, damit mehrsprachige Lernende eine gewisse Zeit lang mehrsprachig interagieren können, um die Karten dann – kurz vor der Sicherungs- und/ oder Plenumsphase – auf die Rückseite zu drehen. So lässt sich einerseits die Entstehung und Akzeptanz eines wiederkehrenden ‚translanguaging space‘ und damit der Normalisierung der Aktivierung aller Sprachen im Rahmen von Verstehensprozessen fördern, andererseits lässt sich so technologischer Fortschritt auf eine Weise integrieren, dass auch kritische KI-Erfahrungen gesammelt und KI-Kompetenzen aufgebaut werden können, z. B. durch Reflexion der Passung und Güte von Übersetzungen (Kuzu, 2025). Damit diese translanguaging-orientierten Ansätze jedoch ihre Wirkung entfalten, bedarf es seitens der Lehrkräfte einer veränderten, kompetenzorientierten Haltung, und dies führt zu Maxime 3.

2.3 Maxime 3: Kompetenzorientierte Haltung statt defizitärer monolingualer Norm gegenüber der Mehrsprachigkeit

Ein zentrales Anliegen der internationalen Forschung zum mehrsprachigkeitssensiblen Mathematikunterricht ist die Abkehr vom defizitorientierten Blick auf sprachliche Vielfalt: Statt Mehrsprachigkeit als *Hindernis* oder *Risiko* für fachliches Lernen zu sehen, gilt es, sie als Ressource zu verstehen und aktiv in Lernprozesse einzubinden (Barwell, 2016; Pla-

nas, 2018; Planas & Chronaki, 2021; Kuzu, 2023). Dies erfordert eine *kompetenzorientierte Haltung* seitens der Lehrkräfte, das heißt einen Blick, der über Sprachfehler hinausgeht und vielmehr die Frage fokussiert, wie die Mehrsprachigkeit Lernenden im Rahmen ihrer Verstehensprozesse nützen kann. In den Transkriptsequenzen in Absatz 2.1 haben die mehrsprachigen Lernenden zwar auch Fehler bei der Sprachproduktion gezeigt (Wörter falsch ausgesprochen/ vergessen, in dialektaler Form genutzt etc.), *dennoch* konnten sie ihre Sprachen zum Verstehen und Deuten mathematischer Probleme einsetzen. Dabei taten sie dies auch noch hochgradig fluide und kreativ, mit und ohne unterschiedliche Bedeutungsnuancen. Häufig entscheidet die Perspektive, die Lehrkräfte beim Bewerten von mehrsprachigen Produkten und Prozessen einnehmen, darüber, was sie fokussieren und folglich (über-)sehen, und ein defizitärer Blick auf Sprachfehler verhindert häufig das Erkennen der Funktionalität und Kreativität von mehrsprachigen Prozessen (Planas & Setati-Phakeng, 2014).

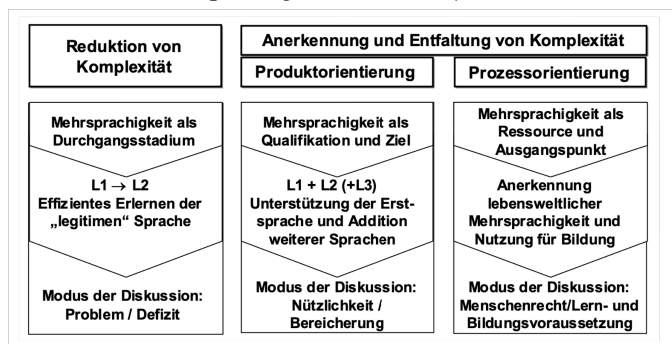


Abb. 2 Modi der Diskussion der Mehrsprachigkeit in der Schule nach Niedrig (2002)

Niedrig (2002) beschreibt bereits zur Jahrtausendwende diese Perspektivproblematik, indem sie drei verschiedene Modi der Diskussion der Mehrsprachigkeit in der Schule vorstellt (Abb. 2).

Diese drei Modi sind nach wie vor hochgradig vital und lassen sich auch heutzutage noch feststellen, wenn es z. B. Sprachverbote an Schulen gibt (Fürstenau, 2016). Beim defizitären Modus (Abbildung 2, links), werden Sprachen über die offizielle Sprache („Zielsprache“) hinaus verboten und/ oder nur als ‚Durchgangsstadium‘ angesehen, wohingegen bei der Produktorientierung (mittlere Schiene in Abb. 2) meist nur high-status-

Sprachen wie Englisch oder Französisch gefördert werden (z. B. im Rahmen von CLIL-Programmen). Lediglich die Prozessorientierung (rechte Seite in Abb. 2) kann als ein genuin inklusionsorientierter, mehrsprachigkeitssensibler Zugang zur Mehrsprachigkeitsaktivierung angesehen werden, da er ganzheitlich und lernendenorientiert ist, wohingegen die defizitäre Sichtweise (Modus der Diskussion: Problem/ Defizit) auf veralteten Hypothesen wie z. B. der doppelten Halbsprachigkeitshypothese oder der ‚Container-Sicht‘ basiert (vgl. Abs. 2.1). Bei der Prozessorientierung steht insbesondere die Agency der Lernenden im Fokus – und das führt zu Maxime 4.

2.4 Maxime 4: Die mehrsprachige Agency von Lernenden stärken

Mehrsprachigkeitsförderung darf sich nicht nur auf top-down gesteuerte Impulse durch Lehrkräfte beschränken (z. B. durch eklektische Reflexionen von Fallbeispielen zu Sprachunterschieden, die die Lehrkraft anregt/mitbringt) – wenngleich dies einen guten Anfangspunkt bilden kann, um z. B. Sprachwertigkeitsunterschieden entgegenzuwirken (Kuzu, 2019; Uribe, 2024). Ziel sollte vielmehr und primär sein, die mehrsprachige *Agency* der Lernenden zu stärken – verstanden als ihre Fähigkeit, selbstbestimmt, reflektiert und aktiv mit ihrer eigenen sprachlichen Vielfalt im Rahmen von Lehr-Lernprozessen umzugehen und diese als ‚Ressource‘ einzusetzen (Noren, 2015). Die internationale mathematikdidaktische Forschung betont dies bereits seit den frühen 2000er Jahren, u. a. im amerikanischen Kontext (Moschkovich, 2002). Diese Form von *Agency* ist eng verwandt mit dem Konzept der mathematischen *Agency*: Lernende sollen nicht nur Empfänger von Wissen sein, sondern aktiv mathematische Bedeutungen konstruieren, hinterfragen und aushandeln (Nührenbörger & Steinbring, 2009).

Ein Beispiel aus der mathematikdidaktischen Forschung, das gezielt auf die Stärkung der mehrsprachigen Lernenden-Agency abzielt, ist die Produktion mehrsprachiger mathematischer Erklärpodcasts, sogenannter *PriMAPodcasts* (Klose, 2022). Dabei zeigt sich, dass mehrsprachige Lernende durch die wiederholte Erklärung mathematischer Begriffe im Rahmen dieser Produktionsprozesse ihr fachliches Verständnis vertiefen und konsolidieren können. Gleichzeitig werden sie nicht nur in ihrer äußeren Mehrsprachigkeit (dem Gebrauch mehrerer Sprachen), sondern auch in

ihrer inneren Mehrsprachigkeit (v. a. der Entwicklung bildungssprachlicher Kompetenzen) gefördert: Durch die iterative und storyboardgestützte Produktion der Podcasts verdichten Lernende ihre mehrsprachigen Erklärungen zunehmend (Klose, 2022).

3 Zusammenfassung

Mehrsprachigkeit ist längst keine Randerscheinung mehr, sondern eine zentrale Bedingung schulischer Lehr- und Lernprozesse, die im (Mathematik-)Unterricht nicht nur als sprachliches Phänomen, sondern als bedeutsame Lernressource verstanden werden muss. Unter einer translanguaging-orientierten Perspektive eröffnet sie vielfältige Möglichkeiten, fachliche Konzepte aus unterschiedlichen sprachlich-kulturellen Perspektiven zu interpretieren, Bedeutungen auszuhandeln und sprachlich wie fachlich vertieft zu verstehen. Der vorliegende Beitrag hat zentrale theoretische und empirische Erkenntnisse der mathematikdidaktischen Mehrsprachigkeitsforschung aufgegriffen und diese in vier miteinander verknüpfte Maximen eines mehrsprachigkeitssensiblen Mathematikunterrichts überführt.

Maxime 1 (Abs. 2.1) betont die Bedeutung einer interpretativen Annäherung an mehrsprachige Interaktionen und Bedeutungskonstruktionen. Mehrsprachige Äußerungen und Übersetzungsprozesse sind keine bloßen Übertragungen, sondern hochgradig interpretative Akte, die neue Deutungsräume eröffnen, aber auch potenzielle Verstehenshürden sichtbar machen. Eine bewusste Reflexion solcher Prozesse ist daher sowohl didaktisch als auch diagnostisch zentral. Aufbauend darauf verdeutlicht *Maxime 2* (Abs. 2.2) die Notwendigkeit eines wiederholten und strukturierten Einsatzes von Mehrsprachigkeit im Sinne einer translanguaging-orientierten Unterrichtspraxis. Hierfür ist es entscheidend, dass Lernende ihre gesamten sprachlichen Ressourcen in unterschiedlichen Phasen der Lernprozesse nutzen dürfen und dass auch technologische Innovationen – etwa KI-gestützte Übersetzungstools – unterstützend integriert werden. *Maxime 3* (Abs. 2.3) fordert eine kompetenzorientierte Haltung seitens der Lehrkräfte, die sprachliche Vielfalt nicht defizitär betrachtet, sondern funktionale und kreative Potenziale mehrsprachiger Lernendenäußerungen erkennt. Nur so lassen sich sprachliche Fehler angemessen einordnen und Mehrsprachigkeit als Ressource für mathematisches Denken und Lernen fruchtbar machen. Schließlich hebt *Maxime*

4 (Abs. 2.4) die Bedeutung der Stärkung der mehrsprachigen Agency hervor. Ziel ist es, Lernende zu befähigen, aktiv, reflektiert und selbstbestimmt mit ihrer sprachlichen Vielfalt umzugehen und diese produktiv in Lehr-Lernprozesse einzubringen – etwa durch Formate wie mehrsprachige Erklärpodcasts, die sowohl äußere als auch innere Mehrsprachigkeit fördern.

Insgesamt zeigen die vier Maximen, dass ein mehrsprachigkeitssensibler Mathematikunterricht weit über additive Sprachförderung hinausgeht. Er versteht Mehrsprachigkeit als integralen Bestandteil mathematischer Lehr- und Lernprozesse, als epistemische Ressource für Bedeutungs- und Wissenskonstruktion und als Fundament für einen inklusiven Unterricht, der der sprachlichen Heterogenität heutiger Lerngruppen gerecht wird. Künftige Forschungsarbeiten sollten verstärkt untersuchen, wie diese Maximen systematisch und nachhaltig in die Unterrichtspraxis integriert werden können und welche Wirkungen sie auf fachliches Lernen, Sprachentwicklung und Agency entfalten.

Literatur

Barwell, R. (2016). A Bakhtinian perspective on language and content integration. In A. Ball & S. Freedman (Hrsg.), *Bakhtinian perspectives on language, literacy, and learning* (S. 101–120). Cambridge University Press.

Bialystok, E., Craik, F., & Luk, G. (2012). Bilingualism: consequences for mind and brain. *Trends in Cognitive Sciences*, 16(4), 240–250.

Bien-Miller, L., Akbulut, M., Wildemann, A. & Reich, H. H. (2017). Zusammenhänge zwischen mehrsprachigen Sprachkompetenzen und Sprachbewusstheit bei Grundschulkindern. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 2(82), 193–211. <https://doi.org/10.1007/s11618-017-0740-8>

Busch, B. (2021). *Mehrsprachigkeit* (3. Aufl.). UTB Verlag.

Cummins, J. (1979). Cognitive/academic language proficiency, linguistic interdependence, the optimum age question and some other matters. *Working Papers on Bilingualism*, 19, 121–129.

Fürstenau, S. (2016). Multilingualism and school development in transnational educational spaces. In A. Küppers, B. Pusch & P. Uyan-Semerci (Hrsg.), *Bildung in transnationalen Räumen* (S. 71–87). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-09642-7_4

Garcia, O. & Wei, L. (2014). *Translanguaging. Language, Bilingualism, and Education*. Palgrave Macmillan.

Grosjean, F. (2001). The bilingual's language modes. In J. Nicol (Hrsg.), *One Mind, Two Languages: Bilingual Language Processing* (S. 1–22). Blackwell.

Klose, R. (2022). *Mathematische Begriffsbildung – PriMaPodcasts im bilingualen Kontext*. Waxmann.

Koller, W. & Henjum, K.B. (2020). *Einführung in die Übersetzungswissenschaft*. Utb.

Korten, L. (2020). *Gemeinsame Lernsituationen im inklusiven Mathematikunterricht. Zieldifferentes Lernen am gemeinsamen Lerngegenstand des flexiblen Rechnens in der Grundschule*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-30648-9>

Kuzu, T. (2019). *Mehrsprachige Vorstellungsentwicklungsprozesse – Lernprozessesstudie zum Anteilskonzept bei deutsch-türkischen Lernenden*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-25761-3>

Kuzu, T. (2023). Multilingual meaning making – An explorative study of German-Turkish Learners' Translanguaging Processes Regarding the Part-whole-concept. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 44(4), 325–353. <https://doi.org/10.1007/s13138-023-00219-z>

Kuzu, T. (2024). Mehrsprachige Erklärvideos zur ‚Hilfsaufgabe‘ – Gelingensbedingungen und Potentiale einer mehrsprachigen digitalen Lehr-Lernumgebung. In E. Baschek, M. Fetzer, R. Klose, C. Schreiber & E. Söbbeke (Hrsg.), *Sprachlich-kulturelle Ressourcen im Mathematikunterricht der Primarstufe* (S. 39–62). WTM.

Kuzu, T. (2025). Potenziale von KI in mehrsprachigen Klassen von Anfang an. *Grundschule aktuell*, 170, 18–20.

Kuzu, T., Bay, W. & Irion, T. (2025). AI-based task development in teacher education: An empirical study on using ChatGPT to create complex multilingual tasks in the context of primary education. *Education and Information Technologies*, 30, 10. 1-35. <https://doi.org/10.1007/s10639-025-13673-8>

Kuzu, T. & Sprenger, P. (2025). AI-Supported Problem-Solving and Multilingual Interactions: Potentials and Challenges of AI-integrated Learning Environments. In J. Novotna & H. Moraova (Hrsg.), *Proceedings of the 25th SEMT* (10 Seiten). Charles University Prague. Im Druck.

Maisano, M.-L. (2019). *Beschreiben und Erklären beim Lernen von Mathematik: Rekonstruktion mündlicher Sprachhandlungen von mehrsprachigen Grundschulkindern*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-25370-7>

Malecki, A. (2016). *Schulen auf einen Blick*. Statistisches Bundesamt.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht – Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis Mathematik*, 54(45), 2– 9.

Montessori, M. (1909). *The Montessori Method. The Origins of an Educational Innovation*. Rowman & Littlefield.

Niedrig, H. (2002). Strategien des Umgangs mit sprachlicher Vielfalt: Analyse bildungspolitischer und konzeptioneller Ansätze. *Tertium comparationis*, 8(1), 1–13.


- Noren, E. (2015). Agency and positioning in a multilingual mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 89(2), 167–184. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9603-5>
- Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2009). Forms of Mathematical Interaction in Different Social Settings: Examples from Students' Teachers' and Teacher-Students' Communication about Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 111–132. <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-009-9100-9>
- Pavlenko, A. (2011). *Thinking and speaking in two languages*. Multilingual Matters.
- Planas, N. & Setati-Phakeng, M. (2014). On the process of gaining language as a resource in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 46(6), 883–893. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0610-2>
- Planas, N., & Chronaki, A. (2021). Multilingual mathematics learning from a dialogic-translanguaging perspective. In N. Planas, C. Morgan & M. Schütte (Hrsg.), *Classroom research on mathematics and language* (S. 151–166). Routledge.
- Redder, A., Çellikol, M., Wagner, J. & Rehbein, J. (2018). *Mehrsprachiges Handeln im Mathematikunterricht*. Waxmann.
- Uribe, A. (2024). *Mehrsprachigkeit im sprachbildenden Mathematikunterricht. Gelingenbedingungen und didaktische Potenziale in sprachlich heterogenen Klassen*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-46054-9>
- Vygotsky, L. (1934/ 1986). *Thought and language*. MIT Press.
- Wagner, J., Kuzu, T., Prediger, S. & Redder, A. (2018). Vernetzung von Sprachen und Darstellungen in einer mehrsprachigen Matheförderung - linguistische und mathematikdidaktische Fallanalysen. *Fachsprache - International Journal of Specialized Communication*, 40(1-2), 2–23. <https://doi.org/10.24989/fs.v40i1-2.1600>
- Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps: Eine Untersuchung bei zählend rechnenden Lernenden zu Beginn des zweiten Schuljahres*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-19067-5>
- Wei, L. (2011). Moment analysis and translanguaging space: Discursive construction of identities by multilingual Chinese youth in Britain. *Journal of Pragmatics*, 43(5), 1222–1235. <https://doi.org/10.1016/j.pragma.2010.07.035>
- Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-07063-2>


Jun.-Prof. Dr. Taha Ertuğrul Kuzu
Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd
Oberbettringer Straße 200
73525 Schwäbisch Gmünd
taha.kuzu@ph-gmuend.de

Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Solveig Jensen und Henning Sievert

solveig.jensen@uni-osnabrueck.de henning.sievert@uni-hildesheim.de

 0000-0001-5564-2041

 0000-0001-6921-1074

Diskussionsforum:

Vernetzung von Addition & Subtraktion: Strategie des Ergänzens

Nach der Diskussion zur vernetzten Einführung von Addition und Subtraktion in 2024 wird die Weiterführung der Verknüpfung von Addition und Subtraktion im größeren Zahlenraum mit dem Fokus auf der Strategie des Ergänzens betrachtet.

Diskussionsbeitrag I: Viktoria ter Laak und Birte Pöhler

viktoria.ter.laak@uni-potsdam.de  0009-0006-0796-4920

birte.friedrich@uni-potsdam.de  0000-0002-1145-2163

Beziehung von Addition & Subtraktion verstehen: Herausforderungen beim verständigen Rechnen

Die Grundrechenarten Addition und Subtraktion weisen enge strukturelle Beziehungen auf. Dies zeigt sich besonders bei halbschriftlichen Strategien wie dem Ergänzens, bei dem die Differenz durch sukzessives Addieren vom Subtrahenden zum Minuenden ermittelt wird – ein Ansatz, der ein tiefes Verständnis von Zahlbeziehungen und Rechenoperationen voraussetzt. Ohne explizite Thematisierung nutzen Grundschüler:innen diese Strategie nur selten (Hickendorff, 2020). Anders als bei Subtraktionsstrategien, bei denen die Differenz als Rest interpretiert wird, entspricht die Differenz beim Ergänzens dem hinzugefügten Wert und bildet den Abstand zwischen Minuend und Subtrahend (Selter et al., 2012).


Im Projekt divomath – digital und verstehensorientiert Mathematik lernen – wird in iterativen Zyklen eine digitale, differenzierte und verstehensorientierte Lehr-Lernumgebung zum verständigen Rechnen für den Regelunterricht in Jahrgang 5/6 entwickelt und beforscht. In 45-90-minütigen Unterrichtseinheiten wird neben anderen Strategien auch das Ergänzens thematisiert. Ziel ist nicht nur der Aufbau von Verständnis für

die Strategien, sondern u. a. auch das Festigen und Vertiefen von Verstehensgrundlagen (wie Operationsverständnis).

Erste Unterrichtserprobungen mit Viert- und Fünftklässler:innen zeigten Schwierigkeiten beim Verknüpfen von Addition und Subtraktion in der Einheit zum Ergänzen. Z. B. erkannten einige Viertklässler:innen die Subtraktionsaufgabe $217 - 214 = 3$ und die Additionsaufgabe $214 + 3 = 217$, die zur Lösung herangezogen wurde, nicht als zusammengehörig. Eine weitere Schwierigkeit stellte die Rechenrichtung beim Lösen von Subtraktionsaufgaben mithilfe des Ergänzens am Rechenstrich dar. Einige Lernende zeichneten die Subtraktion ausschließlich als Zurückspringen am Rechenstrich. Zudem erklärten sie mehrfach, dass das Ergebnis von Subtraktionsaufgaben links und das von Additionsaufgaben rechts am Rechenstrich abgelesen werden kann. In einer zweiten Erprobung im Förder- und Regelunterricht mit 35 Fünftklässler:innen wurden beim Einsatz der überarbeiteten Aufgaben, die die Interpretation der Differenz als Abstand fokussierten, weitere Herausforderungen deutlich. Das Ergänzen wurde anhand von zwei Türmen aus 2 und 6 Bausteinen eingeführt. Zunächst wurde erarbeitet, dass zum kleineren Turm vier Bausteine ergänzt werden müssten, damit beide Türme gleichgroß sind. Die Lernenden notierten die passende Additionsaufgabe ($2 + 4 = 6$) und erkannten, dass der Unterschied zwischen den Türmen vier Bausteine beträgt. Als Subtraktionsaufgabe nannten sie $6 - 4 = 2$, wobei ihr Fokus auf den zwei vorhandenen Bausteinen statt auf dem Unterschied zwischen den Türmen lag. Die nächste Überarbeitung thematisierte daher noch gezielter die Differenz als Abstand sowie Aufgaben mit größeren Zahlabständen.

Diskussionsbeitrag II: Stijn Van Der Auwera

stijn.vanderauwera@kuleuven.be

 0000-0002-7176-6308

Subtraction by addition:

A most efficient strategy for solving symbolic subtraction problems?

In the domain of multi-digit subtraction (e.g., $64 - 56$; $343 - 187$), two major types of strategies can be distinguished: direct subtraction (DS) and subtraction by addition (SBA). When using DS, the difference is obtained by subtracting the subtrahend from the minuend (e.g., solving

$343 - 187 = ?$ via $343 - 100 = 243$; $243 - 80 = 163$; $163 - 7 = 156$). In contrast, SBA consists of adding up from the subtrahend to the minuend until the difference is found (e.g., solving $343 - 187 = ?$ via $187 + 13 = 200$; $200 + 100 = 300$; $300 + 43 = 343$; so the answer is $13 + 100 + 43 = 156$). While SBA can be an interesting alternative to DS, especially on small difference items (e.g., $903 - 886$), in many countries, this strategy is typically not introduced to children (Van Der Auwera et al., 2022). In our recent line of research, we examined children's use of SBA, and how children's SBA use is associated to executive functions (EFs) and subtraction-related conceptual knowledge.

1 Do primary school children use SBA?

To examine children's SBA use, we made use of the choice/no-choice method (Siegler & Lemaire, 1997). When using this method, children have to solve similar subtractions in two conditions: A choice condition wherein they are allowed to choose either DS or SBA for each problem, and two no-choice conditions wherein they are forced to solve all problems with a given strategy, being either DS or SBA. The choice condition provides information about participants' strategy repertoire, frequency and whether they adapt their strategy choices to the numerical characteristics of the given subtractions (i.e., strategy adaptivity). The no-choice conditions provide unbiased strategy efficiency data.

Our study in fourth- to sixth-grade children found that children solved slightly less than half of the subtractions in the choice condition with the untaught SBA strategy, and used this strategy more efficiently compared to DS, especially on subtractions with a small difference. Also, children were adaptive for the numerical characteristics of the subtractions. In a subsequent study in third grade, in the choice condition, almost half of the children made use of SBA, and SBA was used on one in five subtractions. Also, children achieved a similar level of accuracy with SBA compared to DS, and one in five children made adaptive strategy choices. These studies provide evidence for the plea to introduce SBA as an alternative to DS in primary school.

2 SBA and its associations to children's executive functions and their subtraction-related conceptual knowledge

Following the above findings, we investigated the association between children's SBA use and their EFs and subtraction-related conceptual knowledge.

Our EFs-study showed that children's strategy selection was associated with working memory, whereas strategy execution was associated with working memory and shifting (i.e., the ability to fluently switch between multiple operations). Finally, our study on children's subtraction-related conceptual knowledge found that children's adaptive use of SBA was associated with their knowledge of the addition/subtraction complement principle (i.e., knowing that if $a + b = c$, then $c - b = a$ and $c - a = b$).



Literatur der Diskussionsbeiträge

Hickendorff, M. (2020). Fourth graders' adaptive strategy use in solving multidigit subtraction problems. *Learning and Instruction* 67, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101311>

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2012). Taking away and determining the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 389–408. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9305-6>

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126(1), 71–92. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.126.1.71>

Van Der Auwera, S., Torbeyns, J., De Smedt, B., Verguts, G., & Verschaffel, L. (2022). The remarkably frequent, efficient, and adaptive use of the subtraction by addition strategy: A choice/no-choice study in fourth- to sixth-graders with varying mathematical achievement levels. *Learning and Individual Differences*, 93. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2021.102107>

Beitrag I: Franziska Fischer, Henning Sievert, Aiso Heinze
ffischer@leibniz-ipn.de  0009-0009-0727-4059
henning.sievert@uni-hildesheim.de  0000-0001-6921-1074
heinze@leibniz-ipn.de  0000-0002-7408-0395

Auf den Punkt gebracht: Entwicklung einer Checkliste für die Schulbuchwahl

1 Theoretischer Hintergrund

Schulbüchern wird eine Vermittlerrolle zwischen Lehrplänen und deren unterrichtlichen Implementationen zugeschrieben. Dabei obliegt der Lehrkraft, welche Vorschläge des Schulbuchs im Unterricht umgesetzt werden. Grundschullehrkräfte aus Deutschland berichten, dass sie sich im Fach Mathematik sehr stark an den Vorgaben des Schulbuches orientieren (z. B. van den Ham & Heinze, 2018). Bei der Frage, ob das Schulbuch einen Einfluss auf die Mathematikleistungen der Schüler*innen hat, gibt es allerdings inkonsistente Ergebnisse (kein Einfluss: z. B. van Steenbrugge et al., 2013 deutlicher Einfluss: z. B. van den Ham & Heinze, 2018). Eine vertiefte Analyse von Sievert et al. zeigte in drei Studien Effekte der themenspezifischen Schulbuchqualität auf die Kompetenzen der Lernenden (z. B. bei der adaptiven Rechenkompetenz, Sievert et al., 2019).

Die Wahl eines Schulbuches erfolgt in der Regel durch das Lehrkräftekollegium einer Schule, wobei es in einigen Bundesländern eine Vorauswahl per Zulassungsverfahren gibt. Zu den Kriterien dieser Schulbuchauswahl in Schulen ist bisher nur wenig bekannt (vgl. Rezat, 2024; Polikoff et al. 2020). Polikoff et al. (2020) haben in ihrer Studie die Wahl von Mathematikschulbüchern in Kommissionen von Schuldistrikten in Kalifornien untersucht. Sie identifizierten verschiedene Schwierigkeiten bei der Schulbuchwahl: einen hohen zeitlichen Aufwand durch den Umfang der Bücher, keine klaren und validen Kriterien für die Schulbuchqualität und eine unzureichende Ausbildung der Lehrkräfte für die Schulbuchbewertung. Bei der systematischen Untersuchung, welche praxistauglichen Checklisten für die Schulbuchbewertung bereits existieren (deutsch- und englischsprachig), haben wir festgestellt, dass es überraschend wenige solcher Checklisten gibt, um die Schulbuchwahl auf der Praxisebene zu

unterstützen (Fischer et al., in Vorbereitung). Die existierenden Checklisten umfassen kaum fachdidaktische Kriterien, sondern fokussieren eher curricular notwendige mathematische Inhalte oder pädagogische Kriterien.

2 Forschungsziel

Mathematikschulbücher können einen Einfluss auf den Lernerfolg der Schüler*innen haben. Die Auswahl der Schulbücher ist für Lehrkräfte aber herausfordernd und es gibt dafür bisher wenig Unterstützung. Entsprechend streben wir die Entwicklung eines praxistauglichen Kriterienkatalogs an, der Lehrkräfte bei der Wahl des Mathematikschulbuchs unterstützen kann. Dafür werden für unterschiedliche Themen forschungsbasierte und valide Bewertungskriterien hergeleitet, die für Lehrkräfte nutzbar sind. Im Folgenden wird das Vorgehen am Beispiel des adaptiven Addierens und Subtrahierens vorgestellt. Leitend war bei diesem Thema die Frage, ob Kriterien aus der wissenschaftlichen Studie von Sievert et al. (2019) so angepasst werden können, dass sie (1) für Lehrkräfte nutzbar sind, (2) die von Polikoff et al. (2020) identifizierten Hürden reduziert werden und (3) die Bewertungsergebnisse valide sind.

3 Methode

Das Vorgehen folgt dem Educational Design Research, von dem der erste Schritt vorgestellt wird. Nach einer Problemanalyse wird ein Prototyp einer Checkliste entwickelt. Dazu werden curriculare Themen aus den Schulbüchern ausgewählt und zugehörige Qualitätskriterien formuliert, die zeiteffizient von Lehrkräften bewertet werden können. Die Qualität der Themen soll dabei repräsentativ für die Gesamtqualität der Schulbücher sein.

Für das Beispielthema der adaptiven Addition und Subtraktion in Klassenstufe 3 wurde auf die wissenschaftlich hergeleiteten Qualitätskriterien von Sievert et al. (2019) zurückgegriffen. Sie umfassen die vier Dimensionen Repertoire, Verteilung, Effizienz und Flexibilität der halbschriftlichen Rechenstrategien. Für die Adaption der Kriterien für die Schulpraxis wurde der Fokus auf die Dimensionen Repertoire (Qualität der Einführung der halbschriftlichen Strategien) und Flexibilität (Vergleich der Stra-

tegien) gelegt, da diese Dimensionen die Analyse von nur wenigen Schulbuchseiten benötigen (Zeiteffizienz), einfach zu bewerten sind (keine Lehrkräfteschulung nötig) und vermutlich valide Ergebnisse liefern, da die Dimensionen Verteilung und Effizienz bei Sievert et al. (2019) mit der Gesamtskala korrelierten. Mit den adaptierten Kriterien wurden dann die vier Schulbücher der Studie von Sievert et al. (2019) durch zwei unabhängige Personen mit Lehramtshintergrund bewertet und die Ergebnisse mit denen der wissenschaftlichen Studie verglichen.

4 Ergebnisse

Die Bewertung der Schulbücher mit den adaptierten Kriterien für die Checkliste konnte mit einer sehr guten Interrater-Reliabilität durchgeführt werden ($\kappa_w = .95$). Obwohl die Dimensionen Verteilung und Effizienz bei der adaptierten Bewertung der Schulbücher entfallen, kann die Qualität der Schulbücher mit den adaptierten Kriterien ähnlich der von Sievert et al. (2019) ermittelten Qualität abgebildet werden. In dem Gesamtscoreing werden die Unterschiede zwischen qualitativ besseren und schlechteren Schulbüchern deutlich. Lediglich kleinere Unterschiede zwischen Schulbüchern mit einer ähnlichen Qualität können mit den adaptierten Kriterien nicht so gut abgebildet werden wie bei Sievert et al. (2019). Die Qualitätsrangfolge der Schulbücher ist vergleichbar.

5 Diskussion

Die Ergebnisse für das adaptive Addieren und Subtrahieren zeigen, dass komplexe wissenschaftliche Bewertungskriterien für die Schulbuchqualität grundsätzlich in eine vereinfachte Form adaptiert werden können und dennoch valide relevante Qualitätsunterschiede zwischen Schulbüchern sichtbar machen. Die Nutzung der vereinfachten Qualitätskriterien weist eine hohe Interrater-Reliabilität auf, sodass nicht das ganze Kollegium, sondern nur zwei Lehrkräfte dieses Thema in mehreren Schulbüchern bewerten müssten. Durch die Auswahl einer begrenzten Themenanzahl erfolgt eine weitere Reduktion des Zeitaufwands. Das hier ausgewählte Thema steht exemplarisch für weitere Themen, die in der geplanten Checkliste vorkommen sollen. Liegt die Checkliste vor, werden ein Review durch Expert*innen aus der Mathematikdidaktik und anschließend eine Akzeptanzstudie mit Lehrkräften durchgeführt.

Literatur

Fischer, F., Sievert, H., & Heinze, A. (in Vorbereitung). In search of a good mathematics textbook: a review study on checklists for educational practice.

Polikoff, M. S., Campbell, S. E., Rabovsky, S., Koedel, C., Le, Q. T., Hardaway, T., & Gasparian, H. (2020). The formalized processes districts use to evaluate mathematics textbooks, *Journal of Curriculum Studies*, 52, 451-477. <https://doi.org/10.1080/00220272.2020.1747116>

Rezat, S. (2024). Research on curriculum resources in mathematics education: a survey of the field. *ZDM - The international journal on mathematics education*, 56, 223–237. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01559-x>

Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, 74, 101716. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.02.006>

van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 59, 133–140. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005>

van Steenbrugge, H., Valcke, M., & Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flanders: Does it (not) matter which mathematics textbook series schools choose? *Journal of Curriculum Studies*, 45(3), 322–353. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.713995>

Zwischen individueller Deutung und intendierter Struktur: Wie Kinder grafische Darstellungen mathematisch interpretieren

Die Vernetzung mathematischer Darstellungen bildet eine Grundlage für die Entwicklung tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen (Selter & Zannetin, 2018). Vor diesem Hintergrund erscheint es bedeutsam, vertiefte Einblicke in Interpretationen verschiedener Darstellungen aus Schülerinnenperspektive zu erlangen. Der vorliegende Beitrag eröffnet davon ausgehend eine Perspektive auf unterschiedliche kindliche Deutungen grafischer Schulbuchdarstellungen und verweist auf mögliche Verbindungen zum Feld der Muster und Strukturen (Akinwunmi & Lüken, 2021). Söbbeke (2005) zeigte in ihrer Studie, dass Deutungen grafischer Darstellungen individuell erfolgen und Lernende dabei eigene Strukturierungen vornehmen, die sich von intendierten Deutungen unterscheiden können. Zentral ist hierbei, dass mathematische Strukturen und Beziehungen erst aktiv in die jeweilige Darstellung hineingedeutet werden müssen (Lüken, 2012; Söbbeke, 2005). Die dabei erfolgende Vernetzung unterschiedlicher Darstellungsebenen miteinander ermöglicht wiederum die Konstruktion von Bedeutung, weil Inhalte auf einer Darstellungsebene mit analogen Inhalten auf einer anderen Darstellungsebene in Beziehung gesetzt werden (Lesh, 1979, S. 166).

1 Forschungsfrage

In diesem Beitrag sollen deshalb verschiedene Deutungen der Kinder im Vordergrund stehen, woraus sich der Fokus auf folgende Forschungsfrage ergibt:

- Welche Strukturierungen grafischer Darstellungen können aus den Gleichungen von Erstklässlerinnen und Erstklässlern zu Schulbuchdarstellungen der Addition und Subtraktion abgeleitet werden?

Untersucht wird also, welche Gleichungen Kinder der ersten Jahrgangsstufe zu grafischen Schulbuchdarstellungen der Addition und Subtraktion anfertigen, wobei diese Gleichungen genauer hinsichtlich des mathematischen Zusammenhangs zwischen grafischer und symbolischer Darstellung beschrieben werden. Auf diese Weise können Einblicke in Vorgänge bei der Darstellungsvernetzung gewonnen werden.

2 Forschungsdesign

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurde eine systematische Replikationsstudie zur Originalstudie von Schipper und Hülshoff (1984) realisiert. Dafür wurde im Frühjahr 2024 ein Paper-Pencil-Test mit 17 Items in insgesamt zehn ersten Klassen (N=199) durchgeführt. Die Items setzen sich aus unterschiedlichen arithmetischen, grafischen Darstellungen aus aktuellen Mathematikschulbüchern zusammen, die den grafischen Anordnungen der Darstellungen der Originalstudie ähneln und (alle) Grundvorstellungen zu Addition und Subtraktion mindestens einmal repräsentieren. Aufgabe der Kinder war es, zu den verschiedenen Schulbuchdarstellungen jeweils eine oder mehrere passende Gleichungen zu notieren. Die Aufgabenstellung sollte aktiv zum mehrperspektivischen Interpretieren der Darstellungen animieren. Für die Auswertung der Studie wurde anhand der häufigsten Interpretationen je Item analysiert, inwiefern die Lernenden die Darstellungen entsprechend der intendierten Strukturen deuten. Das dafür entwickelte Kategoriensystem entstand durch ein Zusammenspiel von induktiver und deduktiver Kategorienbildung unter Adaption des Kategorienmodells der visuellen Strukturierungsfähigkeit von Söbbeke (2005). Ziel war es, Qualität und Besonderheiten der Vernetzung grafischer und symbolischer Darstellungen zu konkretisieren.

3 Einblick in Ergebnisse

Im Zuge der Analyse der häufigsten Interpretationen der Schülerinnen und Schüler zu allen 17 Items konnten drei verschiedene Arten der Deutung identifiziert werden: Deutungen intendierter Strukturen, Deutungen individueller Strukturen und Deutungen von Teilstrukturen. Dabei dominiert insgesamt gesehen die Deutung individueller Strukturen vor

der Interpretation intendierter Strukturen und der Deutung von Teilstrukturen. Die folgende Abbildung illustriert die Arten der Deutung beispielhaft anhand der häufigsten Interpretationen zu Item D07:


Item	Interpretation	absolute Häufigkeit	Deutung
 Item D07 Nussknacker 1 (2021)	$6 - 3 = 3$	140	intendierte Struktur
	$3 + 3 = 6$	35	intendierte Struktur
	$3 - 3 = 0$	18	Teilstruktur
	$6 + 3 = 9$	9	Teilstruktur
	$2 + 1 = 3$	3	individuelle Struktur

Abb. 1 Häufigste Interpretationen zur Item D07

Bei Item D07 handelt es sich um die Grafik einer strukturierten Mengendarstellung sechs roter Plättchen auf einem Zehnerfeld. Drei dieser sechs Plättchen sind durchgestrichen, wodurch sich eine Gesamtmenge von sechs Plättchen und zwei Teilmengen mit jeweils drei Plättchen ergeben. Entsprechend kann die intendierte Gesamtstruktur durch die Teil-Ganzes-Beziehung dieser drei Mengen repräsentiert werden, wobei die drei Mengen für sich gesehen als Teilstrukturen bezeichnet werden. Zwei der häufigsten Interpretationen zu Item D07 entsprechen der intendierten Gesamtstruktur. Darüber hinaus kann anhand zweier weiterer Gleichungen die Deutung von Teilstrukturen rekonstruiert werden. Die Interpretation $2 + 1 = 3$ lässt schließlich Rückschlüsse auf eine Deutung individueller Strukturen zu.

4 Diskussion und Ausblick

Aus den Interpretationen der Lernenden lassen sich drei Arten der Deutung ableiten, die auf unterschiedlichen Strukturierungen grafischer Darstellungen beruhen. Finden Schülerinnen und Schüler individuelle Strukturierungen der Darstellungen ohne unmittelbaren Bezug zur intendierten Struktur oder deuten Teilstrukturen, wobei intendierte und individuelle Aspekte verbunden werden, kann dies ein Hinweis darauf sein,

dass die Lernenden zunächst auf der Musterebene arbeiten. Beide Herangehensweisen verdeutlichen weiterhin, dass zugrundeliegende mathematische Strukturen erarbeitet werden müssen. Wird entsprechend der intendierten Struktur gedeutet, zeigt sich auch auf Strukturebene eine Passung zwischen grafischer und symbolischer Darstellung, wobei die Vernetzung beider Darstellungen miteinander gelingt und Rückschlüsse auf mathematische Strukturen eher möglich sind. Dies kann auf Einblicke in das Verständnis mathematischer Beziehungen innerhalb der Darstellung oder ein Erlernen der jeweiligen Darstellungen verweisen.

Literatur

Akinwunmi, K. & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. Steinweg (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 10: Blick auf Schulcurricula Mathematik – Empirische Fundierung? Tagungsband des Arbeitskreises Grundschule der GDM* (S. 9–24). University of Bamberg Press (UBP). <https://doi.org/10.20378/irb-51936>

Lesh, R. (1979). Mathematical Learning Disabilities: Considerations for Identification, Diagnosis, Remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz & M. Kantowski (Hrsg.), *Applied Mathematical Problem Solving*. (S. 111–180). The Ohio State University. <https://eric.ed.gov/?id=ED180816>

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Waxmann.


Selter, C. & Zannetin, E. (2018). *Mathematik unterrichten in der Grundschule: Inhalte – Leitideen – Beispiele*. Klett Kallmeyer.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern: Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Verlag Franzbecker.

Arbeitsgruppe Daten und Zufall


Koordination: Grit Kurtzmann

grit.kurtzmann@uni-greifwald.de

 0009-0007-0700-7642

Beitrag I: Lisa Birk

lisa.birk@uni-muenster.de

 0009-0005-2138-2639

Untersuchung zur Integration von Kontextwissen bei der Interpretation statistischer Informationen:

Eine qualitative Studie unter Dritt- und Viertklässler*innen

Die Förderung eines kompetenten Umgangs mit Daten im Sinne einer frühen statistischen Allgemeinbildung ist aus dem Mathematikunterricht der Grundschule nicht mehr wegzudenken. Ziel sollte es hierbei sein, die Schüler*innen bereits in diesem frühen Stadium auf die Herausforderungen einer datengesteuerten Welt vorzubereiten (Frischemeier & Schnell, 2023). Die Struktur des Datenanalysezyklus *PPDAC* (*Problem – Plan – Daten – Analyse – Interpretation und Schlussfolgerung*), welchen Wild und Pfannkuch (1999) beschreiben, kann dabei helfen, den Unterricht entlang der Phasen einer statistischen Untersuchung zu planen und den Lernenden diese somit erfahr- und erlernbar zu machen. Dabei kommt der Phase *Interpretation und Schlussfolgerung* gerade in Zeiten von alternativen Fakten und Fake News eine zentrale Bedeutung zu.

1 Kontextwissen und dessen Relevanz in der Dateninterpretation

Für einen kompetenten Umgang mit Daten und für die Phase *Interpretation und Schlussfolgerung* ist der Datenkontext von besonderer Bedeutung. Krummenauer und Kuntze (2019) definieren dementsprechend das Kontextwissen der Lernenden als „alle Vorstellungen [...], über die ein Schüler / eine Schülerin zum Kontext bestimmter Daten verfügt.“ (S. 453). Eine Integration von Kontextwissen und Dateninterpretation wird in der Stochastikdidaktik immer wieder gefordert, um besonders auch kritisch auf Daten und deren Interpretation schauen zu können. In verschiedenen Studien konnte allerdings festgestellt werden, dass das

Kontextwissen Dateninterpretationen unterstützen, jedoch auch behindern kann, indem Daten beispielsweise außer Acht gelassen werden und somit Argumentationen rein kontextbasiert zustande kommen oder Daten sogar umgedeutet werden (Frischemeier & Schnell, 2023; Krummhauser & Kuntze, 2019). Um diese Nutzung von Kontextwissen, welche häufig unaufgefordert erfolgt, genauer zu charakterisieren, haben Langrall et al. (2011) in einer Studie mit 11- bis 13-jährigen Lernenden fünf situative Funktionen der Integration von Kontextwissen (*Neue Einsichten beitragen, Daten erklären, Hilfreiche Daten identifizieren, Dateninterpretation begründen oder qualifizieren, Irrelevante Fakten beitragen*) identifiziert, die von Frischemeier und Birk (2025) in einer Studie mit Grundschüler*innen um eine sechste Funktion (zusätzlich *Daten evaluieren*) erweitert wurden. Da beide Kategoriensysteme aus qualitativen Studien mit relativ geringem Stichprobenumfang stammen, soll in der hier beschriebenen Studie die Anwendbarkeit der situativen Funktionen der Integration von Kontextwissen bei der Dateninterpretation an weiteren Schüler*inneninterviews der Primarstufe überprüft werden.

2 Situative Funktionen der Integration von Kontextwissen: Empirische Einblicke

Um diesem Forschungsinteresse nachzugehen, wurden 14 leitfadengestützte Einzelinterviews mit Schüler*innen einer vierten Klasse durchgeführt. In diesen Interviews bearbeiteten die Lernenden zehn bzw. elf Aufgaben auf drei Arbeitsblättern, welche sie mit unterschiedlich umfangreichen Datensätzen (entsprechend dem Growing Sample Approach (Ben-Zvi et al., 2015) mit $n_1 = 3$, $n_2 = 21$, $n_3 = 553$) zu wöchentlichen Sport- und Konsolenzeiten von Grundschulkindern konfrontierten. Dies ermöglicht spätere Analysen zwischen den verschiedenen umfangreichen Datensätzen und der Integration von Kontextwissen. Ein aus der Lebenswelt der Lernenden stammender Datenkontext wurde gewählt, um Lernenden den Einbezug von persönlichen Erfahrungen und Wertungen zu ermöglichen. Ziel der Datenanalyse und -interpretation auf den Arbeitsblättern war es dabei unter anderem, eine fiktive Zeitungsschlagzeile („Sport leidet, weil Kinder zu viel zocken“) basierend auf den verschiedenen umfangreichen Datensätzen entweder zu bestätigen oder abzulehnen.

Die transkribierten Interviews wurden anhand einer strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring und Fenzl (2022) ausgewertet, um das Auftreten der einzelnen Kategorien zu überprüfen. Als Kodiereinheit wurden die Bearbeitungen der einzelnen Aufgaben festgelegt, Mehrfachkodierungen einer Kodiereinheit waren möglich. Äußerungen zu Aufgaben und Nachfragen, die explizit eine Integration von Kontextwissen notwendig machten, wurden von der Kodierung ausgeschlossen, da nicht sichergestellt ist, dass diese Äußerungen auch außerhalb des Interviewkontextes aufgetreten wären. Die Auswertung der Auftretenshäufigkeiten findet sich in Tabelle 1.

Situative Funktion der Integration von Kontextwissen bei der Dateninterpretation	Kodierhäufigkeit
Neue Einsichten beitragen	11 (20,37%)
Daten erklären	9 (16,67%)
Hilfreiche Daten identifizieren	0 (0 %)
Dateninterpretation begründen oder qualifizieren	9 (16,67%)
Irrelevante Fakten beitragen	10 (18,52%)
Daten evaluieren	15 (27,78%)
Gesamt	54 (100%)

Tab. 1 Verschiedene situative Funktionen der Integration von Kontextwissen bei der Dateninterpretation, angelehnt an Langrall et al. (2011), erweitert nach Frischemeier & Birk (2025)

Es zeigt sich, dass sich zu fünf der sechs situativen Funktionen der Integration von Kontextwissen im Korpus jeweils mindestens eine Äußerung zuordnen lässt. Zusätzliche situative Funktionen wurden nicht identifiziert. Die Kategorie *Daten evaluieren* wurde am häufigsten zugeordnet. Auffällig bei der Kategorie *Neue Einsichten beitragen* war, dass ein Großteil der Äußerungen zu einer Aufgabe getroffen wurden, die die Phase des *Plans* im PPDAC-Zyklus (Wild & Pfannkuch, 1999) ansprach – dies sollte genauer untersucht werden.

3 Fazit und Ausblick

Die Integration von Kontextwissen bei der Dateninterpretation tritt bei Lernenden immer wieder auf und nimmt dabei verschiedene situative Funktionen ein (siehe Tabelle 1). Mit Blick auf die Unterrichtspraxis muss in weiteren Studien geklärt werden, inwiefern die verschiedenen Funktionen eine Dateninterpretation behindern oder stärken und als Ausgangspunkt für unterrichtliche Impulse genutzt werden können, um eine ertragreiche Integration von Kontextwissen zu fördern.

Literatur

Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 291–303. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9593-3>

Frischemeier, D. & Birk, L. (2025). Different lenses on distributions and the integration of context knowledge in data-ing processes of primary school students. *ZDM Mathematics Education*, 57, 45–59. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01647-y>

Frischemeier, D. & Schnell, S. (2023). Statistical investigations in primary school – the role of contextual expectations for data analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 35, 217–242. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00396-5>

Krummenauer, J. & Kuntze, S. (2019). Die Rolle von Kontextwissen beim Argumentieren mit statistischen Daten – empirische Befunde von Kindern im Grundschulalter. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 453–456). WTM.

Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E. & Janssen, S. (2011). The role of context expertise when comparing data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1), 47–67. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538620>

Mayring, P. & Fenzl, T. (2022). Qualitative Inhaltsanalyse. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 691–706). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-37985-8_43

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999) Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–248. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

Beitrag II: Inken Marie Köhler
inken.koehler@leuphana.de
 0009-0005-4490-2641

Kernaspekte der Dateninterpretation in Schulbüchern: Eine systematische Untersuchung von Interpretationsaufgaben

Mit der zunehmenden Abhängigkeit der Gesellschaft von Daten wird der kompetente Umgang mit ihnen zu einer Notwendigkeit für ein Verständnis von gesellschaftlichen, politischen und wirtschaftlichen Prozessen (Frischemeier, 2020, S. 39). Deshalb ist es notwendig, bereits in der Grundschule Kompetenzen zu adressieren, um Statistical Literacy zu erzielen. Ein Teil von Statistical Literacy ist die Fähigkeit, Daten zu interpretieren. Datendarstellungen zu interpretieren, ist eine Kompetenz, die bereits in der Grundschule gefördert werden soll (Kultusministerkonferenz [KMK], 2022, S. 18). Im Folgenden soll diese Kompetenz genauer betrachtet und daraus die speziellen Anforderungen abgeleitet werden. Anschließend werden Schulbücher der dritten und vierten Klasse auf diese Anforderung überprüft.

1 Daten interpretieren

Die Interpretation von Daten ist der Prozess, der die Ergebnisse einer Datenanalyse in Bezug zum Kontext setzt (Wild & Pfannkuch, 1999, S. 230). Laut der Definition der KMK (2012, S. 2) sind die Suche nach Erklärungen und die Ausrichtung an einer Fragestellung ebenfalls Teil vom Interpretieren in mathematischen Kontexten. Die Dateninterpretation beinhaltet somit den Aspekt der *Kontextualisierung* von Analyseergebnissen (den Zahlen im Kontext eine Bedeutung geben), sowie den Aspekt der Suche nach *Erklärung(en)* für Phänomene und Strukturen in den Daten, die unter anderem für die Beantwortung der zugrundeliegenden Fragestellung relevant sind. Eine Identifizierung der Phänomene und Strukturen, die einer Erklärung bedürfen, muss der Erklärungssuche vorausgehen. Dieser Aspekt der *Auffälligkeitsbetrachtung* mithilfe des Kontextwissens ist ebenfalls ein Aspekt der Interpretation.

2 Analyse von Interpretationsaufgaben in Schulbüchern

Um einen Überblick über Lerngelegenheiten zum Interpretieren in der Grundschule zu erhalten, wurden die Seiten zum Inhaltsbereich „Daten und Häufigkeiten“ von 30 Schulbüchern der dritten und vierten Klasse analysiert. Für eine differenziertere Betrachtung des Aspekts der *Kontextualisierung* wurden die Kategorie „Visualization Task“ des Visualization Literacy Assessment Tests von Lee et al. (2017) adaptiert (s. Abb. 1). Die Unterkategorien „offene Aufgaben“ (Aufgaben, deren Kategorieuordnung von der Bearbeitung abhängt) und „Schwellenwertvergleiche“ (Einschätzung, ob Werte über oder unter einem bestimmten Wert liegen) wurden induktiv hinzugefügt. Doppelte Codierungen innerhalb der Unterkategorien waren möglich, wenn eine Aufgabe auf mehrere Aspekte abzielte.

Insgesamt wurden in den 30 Schulbüchern 316 Interpretationsaufgaben codiert. Die Anzahl an Interpretationsaufgaben pro Schulbuch reichen von null bis 21. Von den 316 codierten Aufgaben konnten 278 dem Aspekt *Kontextualisierung* zugeordnet werden, zwölf dem Aspekt *Erklärung* und zehn der *Auffälligkeitsbetrachtung*. 16 Aufgaben konnten keinem der drei Aspekte eindeutig zugeordnet werden. Neben Kontextualisierungsaufgaben sind in vier Schulbüchern zusätzlich nur Erklärungsaufgaben und in dreien zusätzlich nur Aufgaben zur Auffälligkeitsbetrachtung zu finden. In nur fünf Schulbüchern sind alle drei Kernaspekte der Interpretation vorhanden.

Werden die Unterkategorien der Kontextualisierung betrachtet, sind „Werte ermitteln/ablesen“ und „Vergleiche herstellen“ gefolgt von „Extremwerte identifizieren“ die am häufigsten vertretenen Aufgabentypen in den Schulbüchern (Abb. 1). Die Aufgaben dieser drei Unterkategorien zielen darauf ab, einzelne Daten oder Kategorien von Daten zu betrachten. Aufgaben, die auf eine Betrachtung der Gesamtverteilung der Daten abzielen (z. B. „Korrelationen/Trends identifizieren“, „Verteilung charakterisieren“ oder „Variationsbreite bestimmen“), sind selten in Schulbüchern zu finden (Abb. 1).

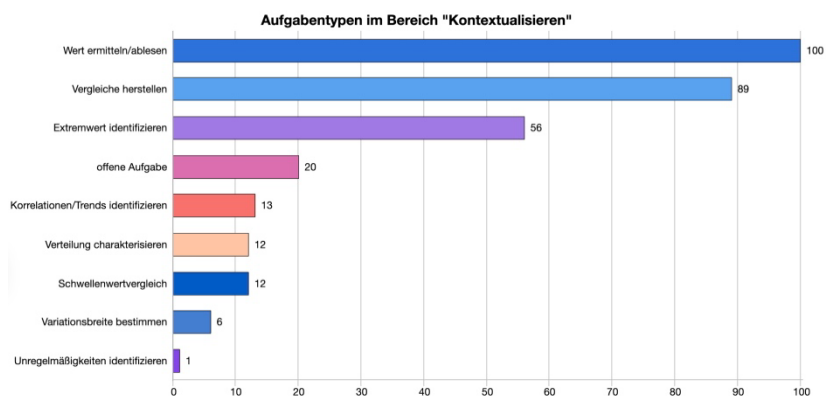


Abb. 1 Anzahl der codierten Aufgabentypen ($n = 309$) in den Subkategorien von "Kontextualisieren" (nicht aufgeführte Kategorien wurden nicht codiert).

3 Diskussion

Die untersuchten Schulbücher variieren deutlich in den Lerngelegenheiten zum Interpretieren von Daten. Die Ergebnisse der Schulbuchanalyse zeigen, dass viele Lerngelegenheiten zum Kernaspekt *Kontextualisierung* existieren. Viele dieser Lerngelegenheiten zielen auf Aspekte einer Datenverteilung mit niedriger Komplexität ab, sodass eine Beschäftigung mit komplexeren Phänomenen kaum erfolgen kann. Komplexere Aufgaben könnten jedoch in den höheren Klassenstufen im Sinne des Spiralcurriculums vermehrt vorkommen. Inwieweit Grundschulkinde bereits in der Lage sind, Trends, Zusammenhänge und andere Eigenschaften einer Gesamtverteilung von Daten zu interpretieren, ist noch nicht geklärt. Frischemeier (2020, S. 53) zeigt allerdings, dass zumindest Gruppenvergleiche, die auf die Gesamtverteilung ausgerichtet sind, von Grundschulkindern hergestellt werden können.

Zudem zeigen die Ergebnisse, dass die beiden Kernaspekte *Auffälligkeitsbetrachtung* und *Erklärung* kaum bzw. in den meisten Schulbüchern gar nicht berücksichtigt werden. Beide Kernaspekte können neben dem Interpretieren auch mit der kritischen Betrachtung von Daten in Verbindung gebracht werden, da Auffälligkeiten und dafür fehlende Erklärungen auf Probleme im Datensatz hinweisen. Um die angestrebte Kompetenz zu adressieren, kritisch mit Daten umzugehen (KMK, 2022, S. 18),

können die Auffälligkeitsbetrachtung und Erklärung einen wertvollen Beitrag leisten. Die Schulbuchanalyse zeigt trotz der Qualitätseinschränkung durch fehlende Zweitcodierung, dass Schulbücher nicht genügend Lerngelegenheiten bieten, um die Interpretationskompetenz in ihrer Gesamtheit zu adressieren. Weitere Forschung ist nötig, um Lerngelegenheiten zu schaffen, welche die Auffälligkeitsbetrachtung und Erklärungssuche fördern können, sowie Instrumente zu erstellen, um diese zu diagnostizieren. Die beiden Kernaspekte scheinen noch stärker als die Kontextualisierung vom Kontextwissen abhängig zu sein. Es stellt sich daher die Frage, in welchem Ausmaß Kontextwissen vorhanden sein muss, um die Anforderungen der Kernaspekte bereits in der Grundschule zu bewältigen.

Literatur

Frischemeier, D. (2020). Building Statisticians at an Early Age - Statistical Projects Exploring Meaningful Data in Primary School. *Statistics Education Research Journal*, 19(1), 39–56. <https://doi.org/10.52041/serj.v19i1.118>

Kultusministerkonferenz (KMK) (2012). *Operatoren für das Fach Mathematik an den Deutschen Schulen im Ausland*. <https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Bildung/Auslandsschulwesen/Kerncurriculum/Auslandsschulwesen-Operatoren-Mathematik-10-2012.pdf>

Kultusministerkonferenz (KMK) (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf


Lee, S., Kim, S.-H. & Kwon, B. C. (2017). VLAT: Development of a Visualization Literacy Assessment Test. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 23(1), 551–560. <https://doi.org/10.1109/TVCG.2016.2598920>


Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–248. <https://doi.org/10.2307/1403699>

Arbeitsgruppe Frühe mathematische Bildung

Koordination: Julia Bruns und Meike Grüßing


brunsj@math.uni-paderborn.de meike.gruessing@uni-vechta.de


 0000-0002-6604-5864

 0000-0003-0675-5976

Beitrag I: Lena Aumann und Maike Drostén

lena.aumann@uni-paderborn.de maike.drosten@uni-osnabrueck.de

 0000-0001-7941-1504

 0009-0000-4828-3933

Einfluss mathematikdidaktischer Kompetenzfacetten frühpädagogischer Fachkräfte auf die Interaktionsqualität in Spielsituationen

Im Spiel und Alltag der Kindertagesstätte entstehen zahlreiche Situationen mit mathematischem Potenzial, die für Kinder zu mathematischen Lerngelegenheiten werden können. Frühpädagogische Fachkräfte spielen eine zentrale Rolle, indem sie dieses Potenzial mittels Fragen und Impulsen aufgreifen und auf Aussagen und Handlungen des Kindes eingehen (Gasteiger & Benz, 2016). Für die frühe mathematische Entwicklung der Kinder ist daher die Interaktion mit der Fachkraft entscheidend. Diese Interaktion qualitativ hochwertig und mathematisch anregend zu gestalten, ist herausfordernd. Theoretische Modelle (z. B. Gasteiger & Benz, 2016; Hepberger et al., 2017) betonen, dass dafür mathematikdidaktisches Wissen (MPCK) sowie die Fähigkeit zur situativen Beobachtung und Wahrnehmung (SBW) erforderlich sind. Bisher gibt es jedoch nur begrenzte empirische Evidenz zu Zusammenhängen zwischen der Qualität von Interaktionen und MPCK sowie SBW frühpädagogischer Fachkräfte.

Die vorliegende Studie untersucht den Einfluss von MPCK und SBW auf die Interaktionsqualität. Dazu spielten $N = 182$ Fachkräfte mit je zwei Kleingruppen das Regelspiel „Schätze sammeln“. Die videografierten Interaktionen wurden anlehnend an das Ratinginstrument von Meier-Wyder et al. (2022) bewertet. Einstellungen zur Mathematik sowie kognitive Fähigkeiten wurden als Kontrollvariablen berücksichtigt. Die Daten wurden mittels Regressionsanalysen analysiert.

Die Ergebnisse zeigen, dass weder MPCK oder SBW noch die Kontrollvariablen die Interaktionsqualität signifikant vorhersagen. Es traten ledig-

lich Korrelationen zwischen MPCK, SBW und den kognitiven Fähigkeiten auf. Zwei theoretische Perspektiven bieten Erklärungsansätze: (1) Nach der dualen Prozesstheorie (u. a. Stanovich und West 2000) sind spontane Interaktionen stärker durch intuitive Prozesse (System 1) geprägt als durch reflektierte, analytische Prozesse (System 2), die auf mathematikdidaktisches Wissen zurückgreifen. (2) Im Sinne der Expertiseforschung (u. a. Berliner, 2004) verfügen Fachkräfte zwar über hohe pädagogische Expertise, sind im Bereich mathematikdidaktischer Kompetenzen jedoch eher als Noviz:innen einzustufen. Ihr Wissen könnte also vorrangig deklarativ und an kognitive Fähigkeiten gebunden sein. Demnach würde es (noch) nicht fallbasiert vorliegen und könnte in Interaktionen kaum genutzt werden. Die vorliegende Untersuchung stützt sich auf Daten der Basiserhebung der Interventionsstudie *MasiK* (Laufzeit 2024-2027). Ob die formulierten Annahmen durch Längsschnittdaten bestätigt werden, bleibt zu klären.

Literatur

Berliner, D. C. (2004). Describing the behavior and documenting the accomplishments of expert teachers. *Bulletin of Science, Technology & Society*, 24(3), 200–212. <https://doi.org/10.1177/0270467604265535>


Gasteiger, H., & Benz, C. (2016). Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(2), 263–287. <https://doi.org/10.1007/s13138-015-0083-z>

Hepberger, B., Lindmeier, A., Moser Opitz, E., & Heinze, A. (2017). „Zähl’ nochmal genauer!“ – Handlungsnahe mathematikbezogene Kompetenzen von pädagogischen Fachkräften erheben. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 239–253). Springer Fachmedien.

Meier-Wyder, A., Wullschleger, A., Lindmeier, A., Heinze, A., Leuchter, M., Vogt, F., & Moser Opitz, E. (2022). Konzeptualisierung und Messung der Qualität der adaptiven Lernunterstützung in Lernsituationen mit mathematischen Regelspielen im Kindergarten. Eine Studie in Deutschland und der Schweiz. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43(2), 405–434. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00195-2>

Stanovich, K. E., & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: Implications for the rationality debate? *Behavioral and Brain Sciences*, 23(5), 645–726. <https://doi.org/10.1017/s0140525x00003435>

Beitrag II: Ergi Acar Bayraktar

ergi.acar-bayraktar@zlb.tu-chemnitz.de  0000-0002-5121-5613

Mathematical Learning Support Systeme und interaktionale Nischen mathematischer Denkentwicklung im familialen Kontext

In diesem Beitrag werden zentrale Ergebnisse der Dissertation (Acar Bayraktar, 2017) sowie weiterführender empirischer Analysen vorgestellt, die in den Folgejahren vertieft und präzisiert worden sind. Ziel ist es aufzuzeigen, wie mathematische Lerngelegenheiten in familialen Interaktionen in Spielsituationen entstehen und welche Rolle Interaktion, Aushandlungsprozesse, Scaffolding und supportive Aktivitäten bei der Entwicklung mathematischen Denkens einnehmen.

Die empirische Basis bilden Video-Daten der erStMaL-FaSt-Studie (Acar Bayraktar, 2017). Transkriptionen familialer Spielsituationen wurden qualitativ-rekonstruktiv mittels *Interaktions-* und *Partizipationsanalyse* (Krummheuer & Brandt, 2001) ausgewertet. Die Analyse stützt sich auf die interaktionistische Perspektive, die Lernen als dualen Prozess versteht: einerseits als kognitive Umstrukturierung individueller Wissensstrukturen, andererseits als zunehmende Beteiligung an sozialen Aushandlungsprozessen, in denen Bedeutungen gemeinsam konstruiert und in taken-as-shared meanings stabilisiert werden. Ergänzt wird dieser Zugang durch das Konzept der *interaktionalen Nischen mathematischer Denkentwicklung*, das *Mathematics Learning Support System* (MLSS) als emergente Phänomene beschreibt (Acar Bayraktar, 2017).

Die Ergebnisse zeigen, dass mathematisches Lernen im familialen Kontext als dualer Prozess erfolgt: Kinder konstruieren Wissen kognitiv und beteiligen sich zunehmend autonom an gemeinsamen Handlungen und Argumentationen. Lernfortschritt bedeutet dabei eine Erweiterung von Teilhabe und Verantwortungsübernahme. Rollen im *Produktions- und Partizipationsdesign* sind dynamisch: Nicht nur Erwachsene, sondern auch Kinder können situativ als Expert:innen agieren, initiieren, modellieren oder korrigieren und so epistemische Autorenschaft übernehmen. *Supportive Aktivitäten* (Acar Bayraktar, 2017) wirken wechselseitig und strukturieren die gemeinsame Bedeutungsgenese. *Aushandlungsprozesse* in familialen Spielsituationen verlaufen *verbal*, *gestisch* und durch *konkrete*

Materialhandlungen (Acar Bayraktar & Brandt, 2023). Gesten und Materialhandlungen tragen eigenständige semantische Funktionen und stabilisieren Bedeutungen. Unterschiedliche *Verhandlungstypen* (Acar Bayraktar, 2017) – *disputational*, *kumulativ*, *explorativ* – koexistieren häufig und übernehmen komplementäre Funktionen: Disputationale Beiträge initiieren kollektive Argumentationen, kumulative Phasen schaffen Vertrauen, explorative Passagen eröffnen Hypothesenräume (Acar Bayraktar & Brandt, in press). Aufbauend auf Wood, Bruner und Ross (1976) wird *Scaffolding* als strukturierende Unterstützung verstanden, durch die eine Zone of Proximal Development eröffnet wird. In familialen Spielsituationen übernehmen Lernende durch die gezielte Umsetzung spezifischer Scaffolding-Funktionen schrittweise mehr Verantwortung und entwickeln epistemische Autonomie.

Die Ergebnisse unterstreichen die Bedeutung familialer Interaktionen für die Entwicklung frühen mathematischen Denkens. Sie zeigen, dass dynamische Rollenverteilungen, flexible Realisierungen von Scaffolding-Funktionen und supportive Aktivitäten sowie multimodale Aushandlungsformen und Verhandlungstypen zentrale Bedingungen für die Entstehung von MLSS und die Emergenz interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung darstellen.

Literatur

Acar Bayraktar, E. (2017). *Interactional niche in the development of geometrical and spatial thinking in the familial context* (Doctoral dissertation). Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt. <https://publikationen.ub.uni-frankfurt.de/frontdoor/index/index/docId/74492>

Acar Bayraktar, E., & Brandt, B. (2023) Wie machen wir ein E? In B. Brandt & K. Gerlach (Hrsg.), *Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive II* (S. 9–38). Waxmann.

Acar Bayraktar, E., & Brandt, B. (in press). Negotiation types and participation forms in a family interaction during block play. In *Proceedings of the POEM Conference 2024*.


Krummheuer, G., & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion. Partizipations-theoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim and Basel: Beltz Wissenschaft Deutsche Studien Verlag.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89–100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>

Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Simone Reinhold und Bernadette Thöne


simone.reinhold@uni-leipzig.de thoene@uni-bremen.de

 0000-0003-0253-7525

 0009-0000-3880-1477

Beitrag: Jonathan von Ostrowski

jvo@uni-bremen.de

 0000-0003-2554-5720

Ansichtssache: Ein Material zur Förderung der Raumvorstellung

Die Entwicklung der Raumvorstellung von Kindern ist unumstritten ein zentrales Ziel des Geometrieunterrichts der Grundschule (z. B. Franke & Reinhold, 2016, S. 80–83; KMK, 2022, S. 16). Mit dem neu entwickelten Material *Ansichtssache* kann die Raumvorstellung in allen vier Grundschuljahren gefördert werden.

1 Raumvorstellung

Fachdidaktisch kann unter Raumvorstellung das komplexe Zusammenspiel verschiedener Komponenten verstanden werden. Maier (1999, S. 14) unterscheidet zwischen fünf bzw. sechs Komponenten, die er anhand der Art der räumlichen Relationen (dynamisch oder statisch) und der Eingebundenheit der bearbeitenden Person (innerhalb oder außerhalb) voneinander abgrenzt. Franke und Reinhold (2016, S. 84–85) unterscheiden zwischen drei Komponenten der Raumvorstellung: dem Erkennen, Bilden und Vorstellen von intern statischen räumlichen Beziehungen, der räumlichen Veranschaulichung sowie dem räumlichen Orientieren. Für die Analyse des hier genutzten Materials nutze ich folgende Weiterentwicklung des Zusammenspiels der Komponenten (siehe Abb. 1; von Ostrowski, im Druck).

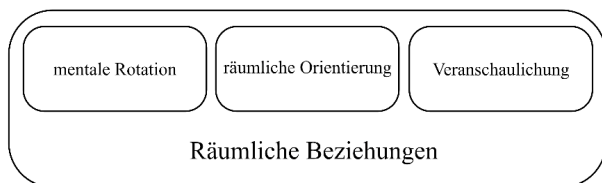


Abb. 1 Konzeption der Raumvorstellungskomponenten

Hierbei wird die Fähigkeit, räumliche Beziehungen erfassen und sich vorstellen zu können, als Grundlage der Raumvorstellung verstanden. Um räumliche Beziehungen erfassen zu können, kann es nötig sein, eine in sich unveränderte räumliche Konfiguration in der Vorstellung zu drehen – dies wird als mentale Rotation bezeichnet. Das gedankliche Hineinversetzen in eine andere Position ist die räumliche Orientierung. Die Veranschaulichung meint das Vorstellen von Veränderungen einer räumlichen Konfiguration.

2 Ansichtssache

Das Material *Ansichtssache* befindet sich zum Zeitpunkt des Vortrages noch in der Entwicklung. Es soll als OER-Material zur freien Verwendung veröffentlicht werden¹ und nutzt neun verschiedene geometrische Körper, die mit jedem herkömmlichen 3D-Drucker hergestellt werden können (siehe Abb. 2).

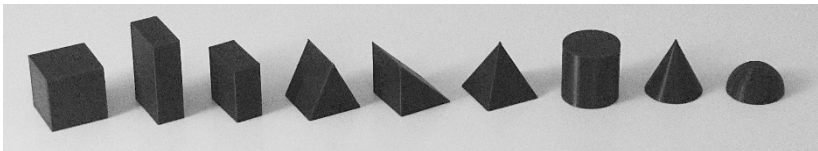


Abb. 2 Körper des Materials *Ansichtssache*

Diese Körper sollen anhand unterschiedlicher Aufgaben auf einem Rasterplan aufgestellt werden. Im Folgenden wird einer der bisher entwickelten Aufgabentypen vorgestellt.

2.1 Aufgabentyp Seitenansichten bauen

Den Kindern wird eine Karte mit zwei Seitenansichten einer räumlichen Konfiguration, bestehend aus zwei oder mehr Körpern, vorgelegt. Diese gilt es nachzubauen.

¹ Die aktuelle Version kann auf meiner Homepage heruntergeladen werden: <https://www.uni-bremen.de/fb12/arbeitsbereiche/abteilung-d-fachdidaktiken-des-primar-und-elementarbereichs/mathematikdidaktik/team/dr-jonathan-von-ostrowski>

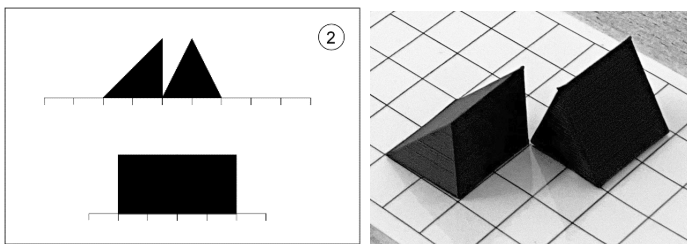


Abb. 3 Aufgabenkarte mit zwei Seitenansichten und Lösung aus Klasse 3

Bei dieser Aufgabenkarte (siehe Abb. 3) fällt auf, dass sich die beiden Dreiecksprismen in der oberen Seitenansicht deutlich unterscheiden, in der unteren Ansicht aber beide jeweils ein Quadrat zeigen und deshalb aus dieser Ansicht nicht unterschieden werden können. Ferner könnte der rechte Körper der oberen Ansicht auch die Pyramide oder der Kegel sein. Dass diese beiden Körper hier nicht genutzt werden können, wird erst durch die Betrachtung der zweiten Ansicht deutlich.

Während es bei der ersten Aufgabenkarte eindeutig ist, welche Körper zu nutzen sind, liegt die Besonderheit bei anderen Aufgabenkarten (siehe Abb. 4) darin, dass sie auf unterschiedliche Weise lösbar sind. So sind etwa die Seitenansichten von Kegel und Pyramide gleich, ebenso die von Zylinder und Würfel.

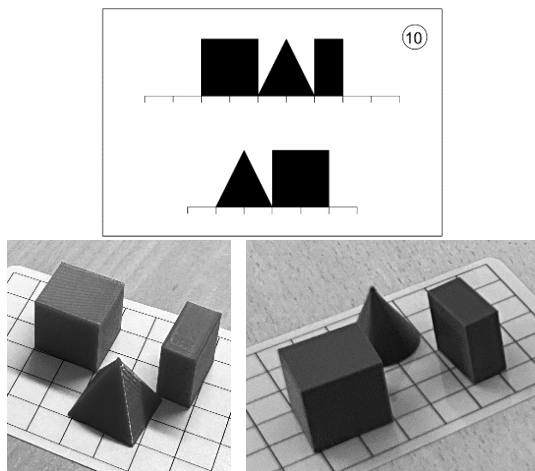


Abb. 4 Aufgabenkarte mit zwei Seitenansichten und Lösungen aus Klasse 2 und 3

Die unterschiedlichen Lösungen bieten beim Einsatz im Unterricht den Anlass zum mathematischen Kommunizieren („Wie hast du das gelöst?“) sowie ggf. zum mathematischen Argumentieren („Wie viele Lösungen finden wir für diese Aufgabe (und warum)?“).

In diesem Aufgabentyp geht es bezogen auf die Raumvorstellung primär um das Erfassen und korrekte Reproduzieren der räumlichen Beziehungen innerhalb der räumlichen Konfiguration. Dabei müssen zum einen die Verhältnisse der Kanten innerhalb der Seitenansichten analysiert werden, um mögliche Körper zur Bildung dieser Seitenansicht zu identifizieren. Zusätzlich müssen die beiden Seitenansichten zueinander in Beziehung gesetzt werden. Die identifizierten Körper müssen dann so auf dem Plan platziert werden, dass ihre räumlichen Beziehungen zueinander und auch auf dem Plan mit der Vorgabe durch die beiden Seitenansichten übereinstimmen.

Um die räumliche Konfiguration aus unterschiedlichen Richtungen in den Blick zu nehmen, könnte die mentale Rotation (durch das Vorstellen einer Drehung der Konfiguration) oder die räumliche Orientierung (durch ein vorgestelltes Herumbewegen um die Konfiguration) angesprochen werden.

Über diesen Aufgabentyp hinaus sind vielfältige Aktivitäten denkbar, die mit den Seitenan- und Draufsichten der Körper arbeiten und dadurch die Raumvorstellung der Kinder fördern. Diese Aufgaben sowie erste Erkenntnisse aus Erprobungen werden im Vortrag vorgestellt und diskutiert.

Literatur

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. 3. Auflage. Springer Spektrum.

KMK - Kultusministerkonferenz (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf


Maier, P. H. (1999). Raumgeometrie mit Raumvorstellung - Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, 3, 4–18.

Von Ostrowski, J. (im Druck). Raumvorstellung mit dem Spiel TrioVision fördern. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2025*.


Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt und Uta Häsel-Weide

birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de


 0000-0002-3508-3032

uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de

 0000-0001-6278-4240

Beitrag: Susanne Wöller

susanne.woeller@tu-dresden.de

 0009-0009-5203-1718

Phasenübergreifende Reflexionen über Mathematikunterricht: Analysen von kooperativ entwickelten Unterrichtssequenzen

Im Projekt findet in besonderer Weise eine Kooperation von schulischen Akteur:innen der 1. und 2. Phase der Lehrer:innenbildung statt. Gemeinsam mit Referendar:innen entwickeln und erproben Studierende offene Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Grundschule. Anschließend wird innerhalb der Studierenden-Peer-Group im Rahmen eines offenen Interviews über den durchgeführten Unterricht gesprochen und dieser gemeinsam reflektiert.

1 Reflektieren von Unterrichtssituationen

Fähigkeiten im Reflektieren des eigenen Unterrichts sind ein bedeutsamer Bestandteil professioneller Lehrer:innenkompetenz (Kaiser et al., 2017). Diese Fähigkeiten beschreiben den *professionellen Blick* von Lehrer:innen bei der retrospektiven Betrachtung und Interpretation von Unterrichtssituationen (Van Es & Sherin, 2021). Van Es und Sherin (2021) prägen diesbezüglich den Begriff des (*professional*) *noticing* und subsumieren darunter die drei komplex miteinander verwobenen Schlüsselaspekte *attending*, *interpreting* und *shaping*:

Nach Van Es und Sherin (2021) beschreibt *attending* das Wahrnehmen relevanter Situationen des (eigenen) Unterrichts durch die Lehrperson. Dabei werden u.a. die Handlungen der Schüler:innen, ihre (Nach-)Fragen und sich entwickelnde Unterrichtsgespräche beleuchtet. Zur Erklärung dieser Situationen nutzt die Lehrperson ihr pädagogisches, fachliches und fachdidaktisches Wissen sowie ihre Erfahrungen im Umgang mit der Klasse (*interpreting*). Zur Ausdifferenzierung der Interpretationen werden zudem relevante Situationen zueinander in Beziehung gesetzt. Sukzes-

sive werden innerhalb dieser komplexen Interpretationsprozesse Interaktionen zwischen den Beteiligten der Unterrichtssituation konstruiert (*shaping*) (Van Es & Sherin, 2021).

2 Ziele der Studie und Forschungsfragen

Ziel der qualitativen Studie ist die Ausdifferenzierung der Schlüsselaspekte *attending*, *interpreting* und *shaping* (Van Es & Sherin, 2021) für die Gruppe der Grundschullehramtsstudierenden im Fach Mathematik. Darauf basierend ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Welche Situationen des eigenen kooperativ entwickelten Unterrichts nehmen Studierende retrospektive als bedeutsam wahr?
- Wie interpretieren die Studierenden diese besonderen Unterrichtssituationen in der Gruppe mit anderen Studierenden?

3 Methoden der Datenerhebung und -auswertung

Die Datenerhebung mit Studierenden findet im Rahmen eines Seminars an der TU Dresden statt. Im 15-wöchigen Kurs arbeiten jeweils zwei bis drei Studierende eng mit einer Referendarin bzw. einem Referendar zusammen. Dabei wird eine phasenübergreifende *gemeinsame* Konzeption, Durchführung und Reflexion von offenen Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule (1. bis 4. Klasse) realisiert. Die selbst entwickelten offenen Aufgaben werden von den Studierenden in den Klassen der Referendar:innen erprobt. In diesem Kontext werden Sequenzen des Unterrichts gefilmt, sodass pro Gruppe ca. 30-minütige Videovignetten entstehen. Die Vignetten zeigen Ausschnitte aus den Bearbeitungsprozessen der Schüler:innen sowie die Unterrichtshandlungen der Studierenden.

Das phasenübergreifende Seminar findet seit drei Jahren immer im Wintersemester statt. Mit jeder Studierendengruppe wurden einige Tage nach deren Erprobungen in den Grundschulklassen offene Interviews auf Grundlage der erstellten Videovignetten geführt. Dazu erhielten die Studierenden einen offenen Prompt, der sie ermutigt, das Video an für sie bedeutsamen Sequenzen zu pausieren und über ihren durchgeführten Unterricht zu reflektieren. Während des Interviews wurde eine Bildschirmaufnahme des Videos sowie eine Tonaufnahme der Gespräche angefertigt. Das Sampling besteht aus 46 Lehramtsstudierenden aus dem

Raum Dresden. Insgesamt entstanden 22 Interviews mit einer Länge von 45 bis 60 Minuten pro Gruppe.

Von den Gesprächen wurden Transkripte angefertigt. Zu den pausierten Stellen im Video wurden Screenshots erstellt und passend in das Transkript eingefügt. Die Daten werden qualitativ mit Methoden der Grounded Theory ausgewertet.

4 Ergebnisse

Im Interview pausierten die Studierenden ihre Videovignette sowohl an den Sequenzen, in denen die Bearbeitungsprozesse der Schüler:innen mit der offenen Aufgabe zu beobachten waren, als auch an den Sequenzen, in denen ihre eigenen Unterrichtshandlungen eine Rolle spielten. Sie fokussierten u.a. auf den Erwerb mathematischer Begriffe und diesbezüglich aufgetretener Schwierigkeiten bei den Schüler:innen, aber auch auf Interaktionen und Gespräche in der Lerngruppe. Zudem beleuchteten die Studierenden u.a. ihre getroffenen methodischen Entscheidungen, diskutierten kritisch die didaktische Bedeutsamkeit ihrer Instruktions- und Interventionsphasen für den Lernprozess der Schüler:innen und reflektierten sogar ihr eigenes mathematisches Verständnis der zu vermittelnden Inhalte.

In einem der Interviews (2_7_24012024) reflektiert eine Gruppe von drei Studierenden ihren durchgeführten Unterricht in einer jahrgangsgemischten Klasse (Klasse 1 bis 3). Dabei sollten die Schüler:innen alle verschiedenen Quadratvierlinge finden. Das Thema *Kongruenzabbildung* (Drehung und Spiegelung) stand hier im Fokus. Im nachfolgenden Transkriptausschnitt wird deutlich, dass auch die gesetzten Unterrichtsziele kritisch beleuchtet werden:

- A [...] Da gab es in dem anderen Raum auch einen Jungen, der hatte glaube ich acht (.) Vierlinge aufgezeichnet und drei davon waren das L (..). Also manchmal war es gespiegelt und einmal war es gedreht [...] und er war dann aber auch der Meinung, ach so, ja ne, die gehören ja alle drei dazu, aber hier habe ich es ja in die Richtung gemalt und hier in die andere. [...] Also mir ist tatsächlich die Frage gekommen, wie wichtig ist das, dass am Ende jedes Kind wirklich diese fünf verschiedenen Haufen Papier hat.

- C Genau, und ich habe mir dann auch gedacht, ich will jetzt eigentlich nicht sagen nein und ihm das nochmal so erklären.
- B Aber ich finde es auch nicht so schlimm. Die verstehen es ja und die zählen es ja nur trotzdem dazu. Aber sie verstehen ja, dass es die Spiegelung ist. [...]

Im Video suchten die Studierenden außerdem in den Produkten und Verschriftlichungen der Schüler:innen nach ‚Beweisen‘, um ihre Überlegungen zum mathematischen Lernprozess der Kinder zu untermauern oder ausdifferenzieren. Dadurch entstand ein komplexes Netzwerk von Deutungen, das die Vielschichtigkeit schulischer Praxis widerzuspiegeln scheint. Die Ergebnisse zeigen damit, dass die Studierenden, die am Seminar teilnahmen, die Auswirkungen ihres Unterrichtshandelns auf das mathematische Lernen der Schüler:innen begründet einschätzen konnten. Umgekehrt konnten sie diese Erkenntnisse nutzen, um Annahmen für ihre zukünftigen Unterrichtshandlungen zu treffen.

Zusammenfassend unterstreichen die Ergebnisse die Relevanz kollektiver Reflexionsphasen in der Lehrer:innenbildung durch den Einsatz von selbst erstellten Videovignetten. Dieses Instrument gibt Studierenden die Möglichkeit, sowohl aus ihren eigenen Unterrichtserfahrungen zu lernen als auch die Lernprozesse der Schüler:innen tiefgreifend in der Gruppe zu analysieren.


Literatur

- Kaiser, G., Blömeke, S., König, J., Busse, A., Döhrmann, M., & Hoth, J. (2017). Professional competencies of (prospective) mathematics teachers – cognitive versus situated approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 94(2), 161–182. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9713-8>
- Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM Mathematics Education*, 53(1), 17–27. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01211-4>

Arbeitsgruppe Lehrkräftebildung


Koordination: Gerald Wittmann

gerald.wittmann@ph-freiburg.de

 0000-0003-2094-0908

Beitrag: Inga Neufeld

inga.neufeld@math.upb.de

 0009-0007-4291-8521

Berichtete Praktiken der Lernbegleitung bei der Förderung von arithmetischen Basiskompetenzen

Zentrale Aufgabe von Lehrkräften ist es, einen Verständnisaufbau bei den Lernenden anzuregen und sie dabei zu unterstützen. Die Gestaltung einer solchen Lernbegleitung bei der Förderung scheint allerdings nicht automatisch produktiv zu sein. In einer Unterrichtsstudie von Foster und Kolleg*innen (2023) erwies sich nur ca. 1/6 der Lernbegleitung von Lehrkräften während Fördersitzungen in arithmetischen Basiskompetenzen als produktiv im Hinblick auf die Initiierung von Verständnis. Es lohnt sich also, genauer auf die Lernbegleitung zu schauen und diese gezielt zu professionalisieren.

1 Professionalisierung von Praktiken

Nach Prediger (2019) bewältigen Lehrkräfte Anforderungssituationen wie die Lernbegleitung durch Praktiken. Diese definiert sie im gegenstandsspezifischen Expertisemodell als „the recurrent patterns of teachers' utterances and actions for coping with jobs“ (S. 370). Damit werden nicht nur einzelne Lehrkräftehandlungen betrachtet, sondern die Handlungsmuster der Lehrkräfte. Die Praktiken werden ausgeführt, in dem sie situativ an den fachdidaktischen Gegenstand angepasst werden. Diese Ausführung wird von der Disposition, also dem Wissen und den Beliefs der Lehrkräfte, geleitet, sodass hier die situationale Perspektive mit der kompetenztheoretischen Perspektive verknüpft wird.

Es zeigt sich, dass die Professionalisierung der Praktiken von Lehrkräften nicht allein durch die Veränderung der Disposition erfolgt. Gleichzeitig sind auch die Erprobung und die Reflexion der Praktiken wichtige Elemente der Professionalisierung (Clarke & Hollingsworth, 2002). Zentral

ist dabei, dass wissenschaftlich fundiert reflektiert wird, welche Auswirkungen die Praktiken auf den Lernprozess der Lernenden haben und mögliche alternative Praktiken einbezogen werden. Dies führt dazu, dass zum einen die eigene Disposition weiterentwickelt und zum anderen neue Praktiken erörtert und in weiteren Anlässen explorativ erprobt werden können. Das bedeutet für die universitäre Lehre, dass Anlässe geschaffen werden müssen, in denen die angehenden Lehrkräfte in authentischen Anforderungssituationen Praktiken erproben können und dies eingebettet in wissenschaftlich fundierte Reflexionsprozesse ist. Gleichzeitig braucht es produktive Praktiken als Beispiele, die die angehenden Lehrkräfte diskutieren und an denen sie sich orientieren können (Lampert et al., 2013).

2 Seminar Zahlenstark im Lehr-Lern-Labor

Lehr-Lern-Labore an Universitäten bieten die Möglichkeit, Wissenserwerb mit Handlungserfahrungen zu kombinieren und Reflexionen gezielt anzuregen und wissenschaftlich zu fundieren. In diesem Sinne haben die Studierenden der sonderpädagogischen Förderung an der Universität Paderborn im Seminar Zahlenstark die Möglichkeit, als Zweierpaar ein Kind in Schwierigkeiten in den arithmetischen Basiskompetenzen über ein Semester zu fördern. Das bedeutet, sie planen wöchentlich Fördersitzungen und führen diese durch. Gleichzeitig werden in den Zweierpaaren und im begleitenden Seminar Reflexionsanlässe geschaffen, in denen die angehenden Lehrkräfte die Auswirkungen ihrer Lernbegleitung auf den Lernprozess des Kindes analysieren und Alternativen diskutieren. Durch die Möglichkeit, diese in folgenden Fördersitzungen zu erproben, ergibt sich ein zyklisches Lernen (Hähn et al., 2022).

3 Forschungsinteresse und Methode

Die eingebettet in das Seminar durchgeführte Interviewstudie hat zum Ziel, die berichteten Praktiken der Lernbegleitung der angehenden Lehrkräfte zu rekonstruieren. Dazu wurden 12 Paare von angehenden Lehrkräften nach der zweiten bzw. dritten und nach der siebten bzw. achten von neun Fördersitzungen als Paar interviewt. Um die Handlungen der angehenden Lehrkräfte so konkret wie möglich zu beleuchten, wurden sie zunächst darum gebeten, jeweils eine Situation aus der Fördersitzung

auszuwählen, die sie als besonders entscheidend im Lernprozess des Kindes erachten. Zu diesen Situationen berichteten die Studierenden ihre Beobachtung im Hinblick auf das Lernen des Kindes und ihre Lernbegleitung sowie deren Auswirkungen. Die Transkripte der Berichte bilden die Datenbasis, um die berichteten Praktiken der Lernbegleitung der angehenden Lehrkräfte zu rekonstruieren.

Da diese als wiederkehrende Handlungsmuster definiert sind, und somit in ihre einzelnen Elemente zerlegt werden können, wurden in den Berichten der angehenden Lehrkräfte zunächst die einzelnen Lehrkräftehandlungen mittels qualitativer Inhaltsanalyse identifiziert. Die Kategorien wurden zunächst deduktiv aus anderen Studien übernommen (u. a. Foster et al., 2023) und nach Abgleich mit dem Material induktiv ergänzt. Anschließend wurde aus den Berichten der Handlungsverlauf in Bezug auf die Handlung des Kindes in Anlehnung an die Pfadanalyse (Erath, 2017) rekonstruiert und in der Auswertungsübersicht dargestellt (Abb.1). Dafür wurden die codierten Lehrkräftehandlungen in die rekonstruierte Reihenfolge gebracht. Außerdem wurde die Handlung des Kindes durch die Art und Weise des Pfeils verdeutlicht. Damit der Kontext der Situation und der fachdidaktische Gegenstand ersichtlich wurden, wurde das Handlungsmuster kurz inhaltlich beschrieben.

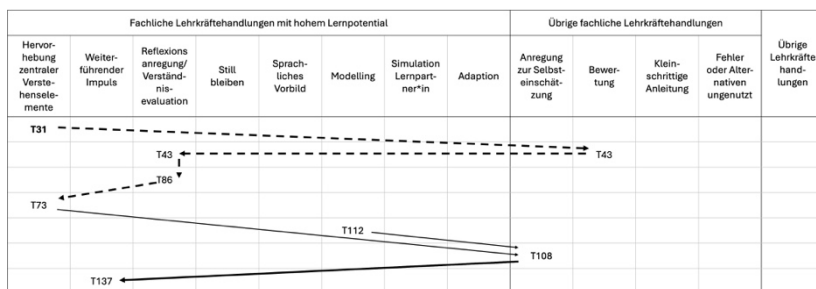


Abb. 1 Exemplarische Auswertungsübersicht zur Darstellung der Handlungsmuster

Nachdem in allen 46 berichteten Situationen das Handlungsmuster rekonstruiert wurde, erfolgte fallübergreifend eine Typenbildung, da Praktiken die wiederkehrenden Handlungsmuster beschreiben. So konnten insgesamt sechs berichtete Praktiken rekonstruiert werden. Diese werden

hinsichtlich ihres Umgangs mit Schwierigkeiten und dem Potential, einen Verständnisaufbau zu initiieren, weiter charakterisiert. Die rekonstruierten berichteten Praktiken scheinen sich in einem Spannungsfeld von Fokus auf den Verständnisaufbau über Fokus auf das richtige Ergebnis bzw. die richtige Prozedur zum Stehenlassen der Schwierigkeiten zu befinden. Es wird sich zeigen, inwiefern die rekonstruierten berichteten Praktiken einen weiteren Ansatzpunkt für die Professionalisierung von angehenden Lehrkräften in der ersten Phase der Lehrkräftebildung bieten.


Literatur

- Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 18(8), 947–967. [https://doi.org/10.1016/S0742-051X\(02\)00053-7](https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00053-7)
- Erath, K. (2017). *Mathematisch diskursive Praktiken des Erklärens. Rekonstruktion von Unterrichtsgesprächen in unterschiedlichen Mikrokulturen*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-16159-0>
- Foster, M., Diener, M., Schnepel, S., & Moser Opitz, E. (2023). Individuelle Lernunterstützung in der Arbeitsphase einer standardisierten Mathematikstunde im ersten Schuljahr – eine Videostudie. *Unterrichtswissenschaft*, 52, 353–380. <https://doi.org/10.1007/s42010-023-00180-3>
- Hähn, K., Häsel-Weide, U., & Scherer, P. (2021). Diagnosegeleitete Förderung im inklusiven Mathematikunterricht der Grundschule. Professionalisierung durch reflektierte Handlungspraxis in der Lehrer*innenbildung. *QfI – Qualifizierung für Inklusion*, 3(2). <https://doi.org/10.21248/qfi.72>
- Lampert, M., Franke, M. L., Kazemi, E., Ghouseini, H., Turrou, A. C., Beasley, H., Cunard, A., & Crowe, K. (2013). Keeping It Complex: Using Rehearsals to Support Novice Teacher Learning of Ambitious Teaching. *Journal of Teacher Education*, 64(3), 226–243. <https://doi.org/10.1177/0022487112473837>
- Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, 31(4), 367–392. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00258-1>

Arbeitsgruppe PriMaMedien

Koordination: Melanie Platz und Aileen Steffen-Delplanque


melanie.platz@uni-saarland.de aileen.steffen@uni-osnabrueck.de

 0000-0002-4725-9955

 0009-0004-0495-7923

Beitrag: Julian Kriegel

julian.kriegel@tu-dresden.de

 0009-0003-9973-3406

KI-gestütztes Mathematiklernen:

Wie Kinder den KI-Tutor Knobelix beim Problemlösen nutzen

Aus der mathematikdidaktischen Forschung ist bekannt, dass Grundschüler:innen auf vielfältige Barrieren beim Lösen mathematischer Probleme stoßen (z. B. Rasch, 2001). Gleichzeitig stellt das Problemlösen eine zentrale prozessbezogene Kompetenz dar, die Schüler:innen am Ende der Grundschulzeit erworben haben sollen (KMK, 2022). Eine passende Unterstützung der Lernenden im Problemlöseprozess ist auch für Mathematiklehrkräfte herausfordernd, weil sie sich mit der Heterogenität an Vorwissen, Problemlösestrategien und -barrieren der Schüler:innen konfrontiert sehen (Herold-Blasius et al., 2019).

Große Sprachmodelle (LLM) können aufgrund ihrer Funktionsweise über Schnittstellen wie ChatGPT, fobizz u. a. einen Dialog mit Lernenden während des Problemlösens ermöglichen. Inwiefern die Einbindung von LLM in den Problemlöseprozess dazu beitragen kann, neue Lösungsansätze zu generieren und passend umzusetzen, ist hingegen noch nicht umfassend erforscht. Kriegel und Baumanns (ang.) konnten sieben unterschiedliche Nutzungsweisen eines KI-Chatbots durch mathematisch interessierte Kinder beim Problemlösen aufzeigen. Dabei wurden zwei Herausforderungen deutlich: Erstens generieren LLM aufgrund stochastischer Berechnungen teilweise fehlerhafte Ausgaben. Zweitens reflektieren Schüler:innen die (fehlerhaften) LLM-Ausgaben größtenteils nicht, sondern übernehmen diese oder arbeiten mit ihnen weiter. Beispielhaft hierfür ist die KI-Nutzungsweise ‚Lösungshilfe‘, d. h. die Eingabe der Aufgabenstellung als Prompt und das anschließende Abschreiben der Lösung. Es kann vermutet werden, dass die eigenständige Generierung von Heuristiken durch KI-Nutzungsweisen wie die ‚Lösungshilfe‘ zukünftig abnehmen wird.

Diese Ergebnisse bringen weiterführende mathematikdidaktische Überlegungen mit sich: Welche KI-Nutzungsweisen führen zu einem individuell passenden, aktivierenden Problemlöseprozess? Wie kann insbesondere die Vorgabe der Lösung durch das LLM vermieden und zugleich die Entwicklung und Anwendung von Heurismen gestärkt werden? Ein aktueller Ansatz, welcher neue Chancen für ein individualisiertes und KI-gestütztes Problemlösen eröffnet, ist der Einsatz aufgabenspezifischer KI-Tutoren (Rühl & Thurm, ang.). Diese greifen, wie KI-Chatbots, ebenfalls auf große Sprachmodelle zurück, verfügen darüber hinaus jedoch über spezifische Instruktionen (Systemprompts) und Hintergrundinformationen zum jeweiligen Aufgabenkontext (Dateien). Derzeit liegen jedoch keine empirischen Untersuchungen vor, welche die Nutzung von KI-Tutoren durch Grundschüler:innen beim Mathematiklernen fokussieren.

1 Forschungsfragen

Der vorliegende Beitrag möchte einen Teil dieser Forschungslücke schließen. Es wird eine qualitative Studie vorgestellt, welche die Problemlöseprozesse mathematisch interessierter Kinder unter Nutzung des konzipierten KI-Tutors ‚Knobelix‘ analysieren soll. Dabei wird untersucht, *wie mathematisch interessierte Kinder einen KI-Tutor beim Problemlösen nutzen*. Es ergeben sich folgende Teilfragen:

- (RQ1) Inwiefern unterscheiden sich die Nutzungsweisen der Kinder bezüglich eines KI-Tutors und eines KI-Chatbots?
- (RQ2) Zu welchen Zeitpunkten innerhalb des Problemlöseprozesses nutzen die Kinder einen KI-Tutor?
- (RQ3) In welchem Zusammenhang stehen die Nutzungsweisen der Kinder bezüglich des KI-Tutors und der Heurismeneinsatz der Kinder?
- (RQ4) Aus welchen Motiven setzen die Kinder einen KI-Tutor beim Problemlösen ein oder verzichten darauf?

2 Studiendesign und Ausblick

Um diese Forschungsfragen zu beantworten, wurde im Sommersemester 2025 eine erste Teilerhebung einer qualitativen videografierten Beobachtungsstudie durchgeführt. Es liegen Daten von 31 Kindern aus den Klassenstufen drei bis fünf vor, die am Enrichment-Programm ‚Mathe für Cracks‘ teilgenommen haben (Schorcht & Peters, 2020). In unterschiedlich zusammengesetzten Tandems bearbeiteten die Kinder in insgesamt 18 Problemlöseprozessen eines von drei mathematischen Problemen unter optionaler Zuhilfenahme des KI-Tutors ‚Knobelix‘. Der KI-Tutor wurde vom Autor mithilfe der Assistenten-Funktion in fobizz konzipiert und ist mit spezifischen Instruktionen ausgestattet. Der Systemprompt umfasst die Rollenbeschreibung als Tutor beim Problemlösen sowie Hinweise zu den Rahmenbedingungen der Aufgabenbearbeitung und dem sprachlichen Ausgabeformat. Neben diesen Instruktionen greift Knobelix bei der Generierung von Antworten auf eine PDF-Datei mit Hintergrundinformationen zum Problemlösen (relevante Begriffe, deskriptives Phasenmodell, Heuristiken, minimale Hilfen, Aufgabenstellungen mit Musterlösungen) zurück.

Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung wurde jeweils ein leitfadengestütztes Interview durchgeführt. Die Schüler:innen wurden zu ihren Vorerfahrungen im Umgang mit KI sowie zu ihren Gründen für oder gegen die Nutzung von Knobelix während der Problemlösung befragt. Das erhobene Datenmaterial umfasst sowohl die Problemlöseprodukte (KI-Chatverläufe, Notizen) als auch die Prozesse (Video- und Bildschirmaufnahmen) der Kinder.

Zur Aufbereitung der Daten wird jeweils eine Prozessbeschreibung erstellt, welche die Grundlage für die anschließende Auswertung mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2022) bildet. Unter Nutzung eines Kodiermanuals (Herold-Blasius, 2021; Rott, 2013) werden die *Problemlöseepisoden*, die verwendeten *Heuristiken* und die *Lösungskategorie* kodiert. Im Hinblick auf die *KI-Nutzungsweisen* können die Kategorien aus Kriegel und Baumanns (ang.) genutzt und bei Bedarf induktiv erweitert werden. Die Codes zu den *Motiven* der Kinder bezüglich der KI-Nutzung werden ebenfalls induktiv gebildet. Abschließend werden alle Kodierebenen in einer Grafik in Anlehnung an Herold-Blasius (2021) zur besseren Vergleichbarkeit zusammengelegt.

Erste Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Schüler:innen Knobelix, im Vergleich zu einem KI-Chatbot ohne spezifische Instruktionen, seltener zur Ausgabe der Lösung auffordern. Zugleich stellen sie inhaltliche Nachfragen oder nutzen den KI-Tutor zur Überprüfung von Teil- und Endergebnissen.

Literatur

Herold-Blasius, R., Holzäpfel, L. & Rott, B. (2019). Problemlösestrategien lehren lernen – Wo die Praxis Probleme beim Problemlösen sieht. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht. Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 295–310). Springer.

Herold-Blasius, R. (2021). *Problemlösen mit Strategieschlüsseln. Eine explorative Studie zur Unterstützung von Problembearbeitungsprozessen bei Dritt- und Viertklässlern*. Springer.

[KMK] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*.

Kriegel, J. & Baumanns, L. (ang.). Wie nutzen mathematisch interessierte Kinder KI beim Problemlösen? Eine explorative Untersuchung. *Mathematica didactica*.

Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Eine Studie zu Herangehensweisen von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert*. Franzbecker.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie*. WTM.


Rühl, L. & Thurm, D. (ang.). KI-Tutoren zur konstruktiven Unterstützung bei Übungsaufgaben. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2025*.

Schorcht, S. & Peters, F. (2020). Mathe für Cracks. Förderung von mathematisch interessierten Kindern. *Grundschulunterricht Mathematik, 2020(3)*, 14–18.

Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Dinah Reuter und Stephanie Schuler

dinah.reuter@ph-freiburg.de


 0000-0003-0454-6214

stephanie.schuler@rptu.de


 0000-0002-4203-9910

Beitrag I: Ricarda Holland und Jessica Hoth

holland@math.uni-frankfurt.de

 0009-0007-6966-148X

jessica.hoth@uni-rostock.de

 0000-0002-7445-0683

Strategiewahl und Schwierigkeiten von Grundschulkindern beim Schätzen von Längen

Das Schätzen von Längen ist eine alltagsrelevante Fähigkeit, die curricular verankert ist. Ziel ist u. a., dass die Kinder zu möglichst genauen Schätzungen gelangen. Im Beitrag wird einerseits der Zusammenhang zwischen der Schätzgenauigkeit und Strategiewahl von Kindern der vierten Klasse in unterschiedlichen Schätzsituationen analysiert und andererseits rekonstruiert, welche Schwierigkeiten der Kinder zu ungenauen Schätzungen führen.

1 Theoretische Grundlagen

Das Schätzen von Größen wird als kognitiver Prozess verstanden, bei dem eine Größenangabe ohne die Verwendung von standardisierten Messinstrumenten bestimmt wird (Heinze et al., 2018). Dieser kognitive Prozess startet mit einer Schätzsituation, die unterschiedliche Charakteristika aufweisen kann, bspw. kann ein Objekt berührbar oder nicht berührbar sein (ebd.).

Es hat sich gezeigt, dass die Größe des Schätzobjekts und seine Berührbarkeit die Charakteristika sind, die die Schätzgenauigkeit von Grundschulkindern beeinflussen (Hoth et al., 2023). Dabei konnten drei Dimensionen der Längenschätzkompetenz unterschieden werden: das Schätzen der Länge von (k) kleinen, (nkb) nicht kleinen, berührbaren und (nknb) nicht kleinen, nicht berührbaren Schätzobjekten.

Neben den Merkmalen der Schätzsituation hat auch die Verwendung von Schätzstrategien einen Einfluss auf den Schätzprozess und die hieraus resultierende Schätzgenauigkeit (u. a. Holland et al., 2023; Siegel et al., 1982).

In der Theorie werden drei Hauptstrategien unterschieden (Siegel et al., 1982): Das Vorgehen im Sinne der Strategie Unit Iteration (UI) beschreibt die aktive oder mentale Verwendung einer konsistenten Einheit, die wiederholt verwendet und gezählt wird. Wird die vorgegebene Länge mit einem Referenzobjekt (Stützpunkt) verglichen, von dem die Länge bekannt ist, spricht man von der Strategie Benchmark Comparison (BC). Schließlich wird die Decomposition-/Recomposition-Strategie (DR) verwendet, wenn das Objekt in Teile zerlegt und die geschätzten Teilwerte zu einem Ergebnis zusammengefasst werden.

Es gibt bereits Erkenntnisse darüber, dass Kinder, die diese Strategien anwenden, zu genaueren Schätzungen kommen als Kinder, bei denen diese Strategien nicht erkennbar sind (Holland et al., 2023). Inwiefern die Schätzgenauigkeit aber auch von der Wahl einer spezifischen Strategie in einer bestimmten Schätzsituation abhängt, soll in diesem Beitrag analysiert werden.

Zusätzlich zu Strategiewahl und Schätzsituation wird der Schätzprozess und die Schätzgenauigkeit von weiteren Merkmalen der schätzenden Personen beeinflusst, wie ihrem Wissen und diversen Fähigkeiten (D’Aniello et al., 2015). Daher können aufgrund der Komplexität des Schätzprozesses und der involvierten Komponenten Schwierigkeiten bei den schätzenden Kindern auftreten bzw. Schätzungenauigkeiten unterschiedliche Ursachen haben.

2 Forschungsfragen

Vor diesem Hintergrund sollen die folgenden zwei Forschungsfragen beantwortet werden:

- (1) Welche Strategien führen zu besonders genauen Längenschätzungen in den drei Schätzsituationen (k, nkb, nknb)?
- (2) Welche Schwierigkeiten der Kinder führen zu besonders ungenauen Längenschätzungen in den drei Schätzsituationen?

3 Methodisches Vorgehen

Im Rahmen des Forschungsprojekts ELF (Estimation of Length by Fourth Graders) bearbeiteten Lernende der vierten Jahrgangsstufe in Hessen ($N=1060$) 30 Aufgaben zum Schätzen von Längen. Der Paper & Pencil-Test enthielt Aufgaben mit Objekten in den drei genannten Situationen.

Im Anschluss an die Erhebung wurden diejenigen Kinder aus jeder Klasse, die besonders genau bzw. besonders ungenau geschätzt hatten, gebeten, ihr Vorgehen beim Lösen der Aufgaben zu beschreiben. Anhand der Interviews wurden die Schätzstrategien entlang der in der Theorie unterschiedenen drei Hauptstrategien deduktiv kodiert, die Schwierigkeiten der Kinder wurden durch eine induktive Kodierung erfasst. Um diejenigen Strategien zu identifizieren, die in den drei Schätzsituationen zu besonders genauen Schätzungen führen, wurden für jede der drei Situationen die 25 Kinder für die Analyse ausgewählt, die die geringste prozentuale Abweichung von der tatsächlichen Länge aufwiesen. Zur Analyse der Schwierigkeiten, die in den Situationen zu besonders ungenauen Schätzungen führten, wurden die 25 Kindern mit der jeweils höchsten Abweichung ausgewählt.

4 Ergebnisse und Diskussion

Die Auswertung zeigt, dass die 25 Kinder mit den genauesten Schätzungen überwiegend die Strategie BC verwenden. Bei den Kindern mit besonders hoher prozentualer Abweichung konnten unterschiedliche Schwierigkeiten identifiziert werden, wie die Nutzung eines falschen/unpassenden Stützpunkts, falscher/unpassender Standardeinheiten oder falscher Rechnungen (siehe auch Holland & Hoth, 2024). In Tabelle 1 sind die erfolgreichsten Strategien und häufigsten Schwierigkeiten in den drei Schätzsituationen dargestellt.

	K	nkb	nknb
Erfolgreiche Strategien	23 %: Multiple Benchmark	29 %: Adapted Benchmark	32 %: Adapted Benchmark
Schwierigkeiten	40 %: Falsche/unpassende Standardeinheit	25 %: Missachtung der Einheit	29 %: Falsche/unpassende Standardeinheit

Tab. 1 Übersicht der häufigsten Strategien genau schätzender und der häufigsten Schwierigkeiten ungenau schätzender Lernender je Schätzsituation

Die Strategien, welche von genau schätzenden Lernenden in den drei zentralen Schätzsituationen besonders häufig angewandt wurden, sind Versionen der Strategie BC – also dem Vergleich mit einem Stützpunkt,

durch wiederholtes Anwenden des Stützpunktes (k) oder durch Anpassen des Stützpunkts (nkb oder nknb).

Besonders negativ wirkt sich die Nutzung unpassender Standardeinheiten oder der Missachtung der Einheit auf die Schätzgenauigkeit aus.

Die Ergebnisse legen nahe, dass eine systematische Behandlung unterschiedlicher Schätzstrategien und -situationen für den Unterricht gewinnbringend sein könnten. Um Schwierigkeiten zu begegnen, sind neben der Auseinandersetzung mit Körpermaßen der Aufbau von sinntragenden Stützpunkten und das vielfältige Thematisieren der Konzepte des Messens und Vergleichens relevant.

Literatur

D’Aniello, G. E., Castelnovo G. & Scarpina, F. (2015). Could cognitive estimation ability be a measure of cognitive reserve? *Frontiers in Psychology*, 6, 1–4. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00608>

Heinze, A., Weiher, D. F., Huang, H.-M., & Ruwisch, S. (2018). Which estimation situations are relevant for a valid assessment of measurement estimation skills? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 67–74). PME.

Holland, R., Hoth, J. & Heinze, A. (2023). Examining accuracy and strategy choice on the estimation of length. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, M. Tabach (Hrsg.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, S. 257). PME.


Holland, R. & Hoth, J. (2024). Exploring students’ errors on estimating lengths. In T. Evans, O. Marmur, J. Hunter, G. Leach & J. Jhagroo (Hrsg.), *Proceedings of the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, S. 150). PME.

Hoth, J., Heinze, A., Huang, H.-M.E., Weiher, D. F., Niedermeyer, I. & Ruwisch, S. (2023). Elementary School Students’ Length Estimation Skills—Analyzing a Multidimensional Construct in a Cross-Country Study. *IJSME*, 21, 1841–1864. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10323-0>

Siegel, A., Goldsmith, L., & Madson, C. (1982). Skill in Estimation Problems of Extent and Numerosity. *JRME*, 13(3), 211–232.

Beitrag II: Silke Ruwisch

silke.ruwisch@leuphana.de

 0000-0001-8587-3414

Modelle zum Aufbau des Größenverständnisses

In der Literatur werden – sowohl in Abgrenzung als auch in Erweiterung zur didaktischen Stufenfolge – verschiedene Modelle zum Aufbau des Größenverständnisses verwendet, die sachanalytisch bzw. stoffdidaktisch argumentativ verankert sind. Empirische Evidenz z. B. bzgl. typischer Lernpfade (z. B. die Beiträge in Barrett, Clements & Sarama 2017) oder Ausprägungsgrade (z. B. Clarke et al. 2002, s. auch Becker 2009) liegen in der deutschen Fachdidaktik bzgl. der postulierten Modelle bislang nicht vor.

1 Teilkonzepte des Größenverständnisses

Die Modelle unterscheiden sich erstens hinsichtlich der (Anzahl an) Teilkonzepte(n), welche auch als identifizierte Bausteine des jeweiligen Größenverständnisses bezeichnet werden (z. B. Nührenbörger 2002, Kuhlmann 2024, Reuter 2011, Zöllner 2020).

Nührenbörger (2002) arbeitete zwölf Bausteine des Längenkonzeptes auf Basis der Literatur heraus. Auch Zöllner (2020) befasste sich mit dem Längenkonzept und unterscheidet 15 Teilkonzepte, teilweise noch weiter zerlegt. Beide Autor:innen identifizieren nicht nur verschiedene Bausteine, sie fassen auch Teilaspekte unterschiedlich zusammen. So benennt Nührenbörger einen Baustein als „Stützpunktvorstellungen und Fähigkeiten des Schätzens von Längenmaßen“, während Zöllner die Stützpunktvorstellungen als wesentlichen Aspekt des Teilkonzepts „standardisierte Einheiten“ ansieht.

Reuter (2011) legte ihrem Modell des Gewichtsverständnisses ebenfalls zwölf Teilkonzepte zugrunde, welche zu den Bausteinen des Längenkonzeptes Überschneidungen aufweisen, jedoch anders zugeschnitten wurden. So unterscheidet sie bspw. zwischen Schätzen, Stützpunktvorstellungen und Stützpunktwissen als drei Teilkonzepten von „Gewichte schätzen“. Kuhlmann (2024) differenzierte dieses Modell aus, indem er zum einen weitere Bausteine, wie bspw. die Vorstellung von Schwere, identifizierte, andererseits die Teilkonzepte noch weiter zerlegte, sodass er schlussendlich 19 Teilkonzepte unterscheidet.

2 Zusammenhänge zwischen den Teilkonzepten

Ein zweites Unterscheidungsmerkmal betrifft die zugrundeliegende Annahme bzgl. der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Teilkonzepten. Während Nührenböcker (2002) keine Zusammenhänge zwischen den Bausteinen thematisiert, versuchen andere Autor:innen diese genauer herauszuarbeiten. Grob kann zwischen netzartigen (z. B. Zöllner 2019, Kuhlmann 2020) und hierarchischen (z. B. Grassmann et al. 2005) Modellen unterschieden werden.

Netzartig strukturierten Modellen gelingt es zumeist gut, Zusammenhänge zwischen einzelnen Teilkonzepten genauer aufzuzeigen. So befasst sich Zöllner (2020) insbesondere mit dem Einheitenkonzept und dessen Wechselwirkungen zu anderen Teilkonzepten. Kuhlmann (2024) arbeitet dezidiert Zusammenhänge zwischen prozeduralen und konzeptuellen Teilkonzepten und die jeweils angenommenen Wirkmechanismen heraus. Zwar wird die Verwobenheit der Bausteine in der Netzstruktur in beiden Modellen so gut visualisiert, doch führt die Zusammenführung aller Einzelbeziehungen eher zu Unübersichtlichkeit denn zu mehr Klarheit.

Ein hierarchisches Modell mit fünf Phasen stellen bspw. Grassmann et al. (2005) zur Diskussion: Ausgehend von einem naiven Umgang mit Größen entwicklele sich zunächst das konkrete Vergleichen, gefolgt vom Messen sowie vom Rechnen. In einer sich anschließenden letzten Phase würden die Kinder schließlich Metawissen erwerben, z. B. zur angemessenen Genauigkeit. Während die Ausführungen bei Grassmann et al. (2005) eher grob verbleiben, präsentiert Reuter (2011) als Ergebnis von Einzelfallstudien mit Drittklässler:innen ein differenzierteres Modell für ein sich in Ansätzen hierarchisch entwickelndes Gewichtsverständnis. Die oben bereits erwähnten zwölf Teilkonzepte des Wissens, der Vorstellungen und der Fertigkeiten ordnet die Autorin vier Bereichen des Gewichtsverständnisses zu. Sie kommt zu dem Schluss, dass die Teilkonzepte der Bereiche „Gewichte vergleichen“ und „mit Gewichten rechnen“ grundlegend für einen verständigen Umgang mit Waagen sind und den Aufbau eines adäquaten Messverständnisses beeinflussen. Der Bereich „Gewichte schätzen“ bedarf darüber hinaus eines soliden Unterbaus durch die anderen drei Bereiche. In ähnlicher Weise postuliert Rechtstei-

ner (2018) drei Säulen des Größenverständnisses – für jeden Größenbereich –, die in gegenseitiger Stützung spiralcurricular angereichert zu entwickeln sind, ohne allerdings hierarchische Zusammenhänge anzunehmen. Auch die Modelle von Ruwisch (2014) und Reuter und Schuler (2023) nehmen zwar wesentlich ihren Ausgangspunkt in konkreten Vergleichsprozessen, betonen allerdings durchgehend die Wechselwirkung der vier Teilkonzepte in der Entwicklung des individuellen Größenverständnisses.

3 Umfang der Modelle zum Größenverständnis

Die Modelle unterscheiden sich nicht nur in Bezug auf die einzelnen Teilkonzepte, deren Zusammenhang und Entwicklung, sondern auch bzgl. des einbezogenen inhaltlichen Umfangs. Während bspw. Ruwisch (2014) und in der Weiterentwicklung dieses Modells Reuter und Schuler (2023) auf Vergleichsprozesse fokussieren – konkrete und mentale – und die damit verbundenen Stützpunktvorstellungen genauer unter die Lupe nehmen, beziehen andere Modelle das Rechnen mit Größen (Reuter 2011) und metakognitives Wissen zum Umgang mit Größen mit ein (z. B. Grassmann et al. 2005).

Ebenfalls im Umfang unterscheiden sich die Modelle in Bezug auf die fokussierten Größenbereiche. Während Kuhlmann (2024), Nührenböcker (2002), Reuter (2011) und Zöllner (2020) die Teilkonzepte *eines* Größenbereiches (Länge bzw. Masse/Gewicht) thematisieren, finden sich in der Literatur auch allgemeine auf alle Größenbereiche bezogene Modelle (z. B. Grassmann et al. 2005, Reuter & Schuler 2023, Ruwisch 2014).

4 Empirische Evidenz

Bislang konnte noch kein Modell empirisch validiert werden, weder die Differenzierung in verschiedene Teilkonzepte (vgl. jedoch Schnittjer et al. 2024) noch eine Entwicklung des Größenverständnisses in den postulierten Phasen (vgl. jedoch Schadl & Hoth 2024).

Literatur

Barrett, J. E., Clements, D. H. & Sarama, J. (2017). *Children's Measurement: A Longitudinal Study of Children's Knowledge and Learning of Length, Area, and Volume*. JRME Monograph Number 16. NCTM.

- Becker, N. (2009). *Entwicklung des Größenverständnisses von Vor- und Grundschulkindern. Konzeption und Erprobung eines diagnostischen Interviews*. Mildenerger.
- Clarke, D., Cheeseman, J., Gervasoni, A., Gronn, D., Horne, M., McDonough, A., Montgomery, P., Roche, A., Sullivan, P., Clarke, B. & Rowley, G. (2002). *Early Numeracy Research Project*. Final Report. https://www.researchgate.net/publication/237837181_Early_Numeracy_Project_Final_Report
- Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E. & Raudies, M. (2005). *Kinder wissen viel – auch über die Größe Geld? Teil 1*. Potsdam Universitätsverlag. <http://digital.ub.uni-potsdam.de/content/titleinfo/112894>
- Kuhlmann, J. (2024). *Konzeptuelles und prozedurales Wissen zur Größe Gewicht in der Grundschule – Ein Katalog zur Analyse von Schulbüchern*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Leuphana Universität Lüneburg.
- Nührenbörger, M. (2002). *Denk- und Lernwege von Kindern beim Messen von Längen. Theoretische Grundlegung und Fallstudien kindlicher Längenkonzepte im Laufe des 2. Schuljahres*. Franzbecker.
- Rechtsteiner, Ch. (2018). Größenvorstellungen entwickeln. Zwei Modelle im Vergleich. *Die Grundschulzeitschrift*, 318, 6–11.
- Reuter, D. (2011). *Kindliche Konzepte zur Größe Gewicht und ihre Entwicklung: theoretische Modellierung und zwei Einzelfallstudien mit Drittklässlern*. HU Berlin. <https://doi.org/10.18452/16357>
- Reuter, D. & Schuler, S. (2023). *Vergleichen, Messen, Schätzen – Größen im Mathematikunterricht*. Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Ruwisch, S. (2014). Reichhaltiges Schätzen. *Grundschule Mathematik* 42, 40–43.
- Schadl, C. & Hoth, J. (2024). Größenvorstellungen zu Längen - Analyse eines Kompetenzstufenmodells. In P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 285–288). wtm.
- Schnittjer, I., Reuter, D. & Schuler, S. (2024). Größenverständnis zum Größenbereich Gewichte erfassen – Entwicklung eines Paper-Pencil-Tests. In P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 289–292). wtm.
- Zöllner, J. (2020). *Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-27671-3>



University
of Bamberg
Press

Dieser Tagungsband dokumentiert die Ergebnisse der 32. Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), die dieses Mal mit Unterstützung des IPN | Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik ausgerichtet wurde und vom 14. bis zum 16. November 2025 in den Räumen der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel stattfand. Das Thema der Tagung lautete „Was ist wichtig? – Perspektiven auf den Mathematikunterricht in der Grundschule“. Die vier Hauptvorträge, die in diesem Band enthalten sind, betrachten das Thema aus verschiedenen Perspektiven.

Im Rahmen der Tagung setzten sich weiterhin acht Arbeitsgruppen intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander. Die zentralen Inhalte der Arbeitsgruppen sind in diesem Band ebenfalls dokumentiert. Ein „Round Table“ eröffnete Doktorandinnen und Doktoranden die Möglichkeit, ihre Forschungsprojekte zu diskutieren.

Die jährlich stattfindende Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule der GDM richtet sich seit ihrem Bestehen an Personen, die den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schulischer Praxis sowie den schulverwaltenden Institutionen suchen. Die Tagung ist in besonderer Weise durch eine offene und kollegiale Kooperation von Vertreterinnen und Vertretern aus Praxis und Theorie geprägt.



ISBN 978-3-98989-074-9



9 783989 890749

www.uni-bamberg.de/ubp