

ZUR AFFINGEOMETRIE AUF MANNIGFALTIGKEITEN

Kurventheorie
und
Fragen der Normalisierung von p -Flächen

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
des Naturwissenschaftlichen Fachbereichs IV
Mathematik
der Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von
Irmgard A r n o l d
aus Nürnberg

Würzburg 1978

Eingereicht am: 11.7.1978

1. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Barthel
2. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Wagner

Tag der mündlichen Prüfung: 14.12.1978

Zusammenfassung

Auf die in der Affingeometrie häufig verwendete Volumenstruktur wird verzichtet und als Raum eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit linearem Zusammenhang zugrunde gelegt.

Mittels eines eindimensionalen Zusammenhangs, des "inneren" Zusammenhangs, lassen sich Affinkrümmungen für eine Kurve als Tensoren der Parametermannigfaltigkeit definieren, so daß die Auszeichnung eines Parameters im Sinne des unzulässigen Affinbogens der klassischen Blaschkeschen Affingeometrie vermeidbar wird. Unter Benutzung eines modifizierten, der affinen Arbeitsweise angepaßten, Kurvenbegriffs wird ein Fundamentalsatz bewiesen. Der innere Zusammenhang und die Affinkrümmungen sind nicht nur charakteristisch für eine Kurve, sondern erweisen sich auch als in erster Ordnung invariant bei infinitesimalen Affinitäten.

Nach kurzer Betrachtung von p -Flächen ohne feste Begleitbasis wird der Begriff der "affinen" p -Fläche definiert.

Für affine p -Flächen wird eine invariante Normalisierung angegeben, derart, daß eine Reduktion auf den Blaschkeschen Fall bei Kurven und Hyperflächen möglich ist. Auch die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Kurventheorie fügt sich als 1-Flächentheorie in diesen Rahmen ein.

Größen invariant normalisierter affiner p -Flächen haben Invarianzeigenschaften bei infinitesimalen Affinitäten.

Durch den weitgehenden Verzicht auf Raumstrukturen und die Betrachtung der Übergänge zwischen verschiedenen Normalisierungen sollte hier nicht nur eine rein affine Geometrie geschaffen werden, sondern gleichzeitig eine Möglichkeit, um unter Bezug auf den affinen Fall Flächengeometrien solcher Räume, die zusätzliche Strukturen tragen, anhand der Normalisierungen vergleichen zu können.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	3
0. Strukturelle Voraussetzungen	9
1. Affine Kurventheorie auf n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten	11
1.0 Grundgrößen	11
1.1 Fundamentalsatz	18
1.2 Spezialisierung auf Mannigfaltigkeiten mit Volumenstruktur	22
1.3 Erste Variation von Affinkrümmungen und innerem Zusammenhang	28
2. Affine p-Flächen-Theorie auf n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten	40
2.0 Fragen der p-Flächen-Theorie bei variabler Ausstattung	41
2.1 Zur invarianten (affinen) Normalisierung affiner p-Flächen	45
2.1.0 Problemstellung	50
2.1.1 Festlegung einer invarianten Normalisierung für affine p-Flächen mit $R=1$	56
2.1.2 Hyperflächennormalisierung als Spezialfall und Kurvennormalisierung als spezielle Verallgemeinerung auf $R>1$	66
2.2 Erste Variation von Größen invariant normalisierter affiner p-Flächen	69
Anhang	73
Literaturverzeichnis	75

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. W. Barthel, sage ich aufrichtigen Dank für die Anregung und Förderung dieser Arbeit.

Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst möchte ich für die Gewährung eines Stipendiums zum Kurs "Russisch-Passiv" danken, weil mir dadurch die direkte Erschließung der russischen Literatur möglich wurde.

Einleitung

Blaschkes "Vorlesungen über Differentialgeometrie II" (vgl. Blaschke (1923)^{I)}) - weit mehr durch originäre Überlegungen als durch die bloße Darstellung des damaligen Standes dieser Disziplin geprägt - beschreiben eine Geometrie des affinen Raumes als Invariantentheorie bei volumentreuen affinen Abbildungen; d.h. diese klassische Affingeometrie läßt sich in das Schema des Erlanger Programms von Felix Klein einordnen.

Die Einseitigkeit dieses Programms, das u.a. Veblen und Whitehead (1932) durch die Ausformulierung eines neuen Konzeptes ersetzt haben, schmälert nicht die Bedeutung, die dem Gedankengut Blaschkes zum einen als Gegenstand, zum andern als Ausgangspunkt weiterer Forschungen zukommt:

Während beispielsweise in der Kurventheorie Haack (1934), Maeda (1939), Santaló (1946) und Merza (1960) die bei Blaschke definierten Kurvengrößen zum Objekt ihrer Untersuchungen haben und geometrisch interpretieren, verläßt Hlavatý (1929^{1,2}, 1934) den Rahmen des Erlanger Programms und liefert Ansätze einer Kurventheorie auf Mannigfaltigkeiten. Anlehnung an die Definitionen der klassischen Affingeometrie ist auf Mannigfaltigkeiten indes nur möglich, wenn der Einfluß der Koordinatentransformationen ausgeschaltet wird. Dies versucht Hlavatý zu erreichen, indem er, jeweils nur längs der betrachteten Kurve, gewisse Skalardichten zur Bildung von koordinatenunabhängigen

I) In den Klammern steht das Erscheinungsjahr der im Literaturverzeichnis angegebenen Arbeit.

Größen heranzieht. Die tensoriell nicht faßbare Unbestimmtheit dieser Skalardichten aber führt dazu, daß Hlavatý's Affinbogen und -krümmungen keine Invarianten sind, und folglich der von ihm formulierte Fundamentalsatz (Hlavatý (1929)^I, S.384) gar nicht beweisbar ist. Benutzt man dagegen die global und eindeutig definierte Struktur einer kovariant konstanten Skalardichte zur Volumenmessung, so lassen sich skalare Affininvarianten angeben. Ein versteckter Hinweis hierzu findet sich bei Schouten (1954), S.233/234. Ausgeführt ist die affine Kurventheorie auf 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Volumenstruktur und volumentreuem linearem Zusammenhang bei Barthel-Arnold (1975). In dieser Arbeit wird insbesondere bemerkt, daß die klassische Affinbogenlänge und ihre natürliche Verallgemeinerung für eine C^λ -Kurve bei endlicher Differenzierbarkeit i.allg. einen unzulässigen Parameter liefern. Eine Charakterisierung^{II)} von C^λ -Kurven durch Affininvarianten ist für diese Situation also nicht möglich. Erst der Begriff der $C_{\mu-1}^\mu$ -Kurve (vgl. Barthel-Arnold (1975), Definition 4) läßt einen Fundamentalsatz zu.

Die hier vorgelegte Arbeit nun behandelt in Teil 1 eine affine Kurventheorie, die sich von der eben zitierten

1. durch die allgemeine Dimension n der Mannigfaltigkeit
und
2. durch den Verzicht auf eine Volumenstruktur abhebt. Ein ausgezeichneter Parameter, der dem (unzulässigen!) Affinbogen entspräche, wird nicht benutzt; vielmehr werden Begleitbasis und Affinkrümmungen

^{II)} Blaschke und Hlavatý nennen zwar Fundamentalsätze, beweisen sie aber nicht.

einer Kurve mittels einer kovarianten Ableitung auf der eindimensionalen Parametermannigfaltigkeit definiert. Der eindimensionale "innere" Zusammenhang, mit dem diese Ableitung gebildet wird, ist zusammen mit den Affinkrümmungen, die jetzt eindimensionale Tensoren sind, charakteristisch für eine $C_{\mu-1}^{\mu}$ -Kurve. Nach dem Beweis des Fundamentalsatzes wird gezeigt, wie sich speziell bei Existenz einer Volumenstruktur aus dem inneren Zusammenhang die Affinbogenlänge herleiten läßt. Bei Bezug auf den Affinbogenlängenparameter verschwindet der innere Zusammenhang und es lassen sich parameterunabhängige Affinkrümmungen angeben, die für $C_{\mu-1}^{\mu}$ -Kurven wieder einen Fundamentalsatz ermöglichen. Es bleibt aber festzuhalten, daß das Verwenden einer Volumenstruktur lediglich die Verbindung der hiesigen Überlegungen zu früheren Arbeiten, insbesondere der Blaschkeschen Affingeometrie, herzustellen vermag, jedoch nicht eine handsamere Theorie liefert und insofern überflüssig ist. Das wird bestätigt durch die Invarianz (in erster Ordnung) der in der vorliegenden Arbeit definierten allgemeinen Kurveninvarianten bei beliebigen infinitesimalen Affinitäten; in der volumenbezogenen Theorie dagegen induzieren erst volumentreue Affinitäten diese Eigenschaft.

Zur Affingeometrie auf Mannigfaltigkeiten liegen uns u.a. die Hyperflächentheorien von Barthel (1966), Attallah (1971) und Volkmer (1974) vor, die alle den Volumenbegriff benötigen. Es drängt sich nun die Frage auf, ob das Verzichtkönnen auf die Volumenstruktur an die spezielle Dimension 1 der Kurven gebunden ist, oder ob nicht auch für Hyperflächen eine affine Geometrie ohne Volumen möglich

ist. Die positive Antwort auf diese Frage erhalten wir in einem größeren Zusammenhang:

In Teil 2 nachstehender Arbeit werden Flächen beliebiger Zwischendimension p betrachtet, so daß Kurven und Hyperflächen als Träger der Grenzdimensionen $p = 1$ und $p = n-1$ mit berücksichtigt sind. Eine Begleitbasis zu fixieren, ist schon bei Hyperflächen ein nichttriviales Problem, erst recht bietet sich für allgemeine p -Flächen eine Lösung hierzu nicht unmittelbar an. Daher werden zunächst p -Flächen ohne feste Begleitbasis untersucht. Die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen solcher beliebig "ausgestatteter" p -Flächen verhalten sich bei Transformationen der Begleitbasis wie Zusammenhangskoeffizienten. Ein Fundamentalsatz in herkömmlicher Form ist für derartige Flächen nicht beweisbar mangels vollständiger Integrabilität des betreffenden Differentialgleichungssystems - ein Grund, der auch schon im Riemannschen Fall (vgl. Eschmann (1973)) den Ausschlag gab, die Fragestellung nach einer Fundamentalsatztheorie abzuändern. Hier wird darauf nicht näher eingegangen, sondern nach der Definition des Begriffs der "affinen" p -Fläche das Problem der Festlegung einer Flächennormalisierung aufgenommen:

In Satz 19 wird eine invariante Normalisierung angegeben, die sich von den bei Weise (1939), Klingenberg (1951, 1952) und Atanasjan (1954) konstruierten besonders durch ein Minimum an Voraussetzungen und außerdem - auch im Gegensatz zu den Liberschen Arbeiten (1952, 1953, 1966, 1974) - durch die Anwendbarkeit auf Mannigfaltigkeiten mit allgemeinem linearem Zusammenhang unterscheidet^{III)}.

Im Spezialfall $p = n-1$ ergibt sich somit die Affinormale einer Hyperfläche ohne Verwendung eines Volumens, und zwar so, daß bei jeweils gleichen

^{III)} Vgl. hierzu auch den Anfang von Kapitel 2.1 und den Anhang.

Grundstrukturen unsere Normalisierung mit den Affinormalen bei Barthel (1966) bzw. Volkmer (1974) zusammenfällt. Im Spezialfall $p = 1$ wird die Normalisierung der in Kapitel 1 behandelten Kurventheorie geliefert.

Abgeschlossen wird die hier vorgelegte Arbeit durch die Berechnung der ersten Variationen von Größen normalisierter p -Flächen, insbesondere durch den Nachweis der Invarianz (in erster Ordnung) der invarianten Normalisierung bei infinitesimalen Affinitäten.

Vereinbarung:

Wir benutzen die Einsteinsche Summationskonvention, wonach über gleiche oben und unten stehende Indizes zu summieren ist.

Dabei laufen in der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen kleine und große lateinische Indizes von 1 bis n , kleine griechische Indizes (außer ϵ und ξ) von 1 bis p , und kleine gequerte griechische Indizes von $p+1$ bis n .

Die Summationsbereiche anderer Indizes werden an geeigneter Stelle im Text genannt.

0. Strukturelle Voraussetzungen

Wir werden unsere Untersuchungen in n-dimensionalen C^r -Mannigfaltigkeiten M durchführen. In Kapitel 1. muß $r \geq 2n$ (oder $r = \infty$ oder $r = \omega$) sein, im restlichen Teil der Arbeit wird der minimale Wert für r jeweils durch die höchste verwendete Ableitung der Flächendarstellung bestimmt (d.h. $\text{Min}(r) \geq 2n$ in 2.0 und ≥ 3 in 2.1).

Punkte $x \in M$ schreiben wir in Koordinaten als n -Tupel (x^i) . $T_x M$ bezeichne den Tangentialraum in $x \in M$, TM das Tangentialbündel, und

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

das natürliche Basisfeld bezüglich eines Koordinatensystems.

M sei mit der Struktur eines linearen C^{r-2} -Zusammenhangs ausgestattet, der in einem Koordinatensystem die Koeffizienten $\Gamma_{k h}^i$ habe. Damit lassen sich Tensorfelder invariant und kovariant ableiten⁰⁾. Beispielsweise ist für ein C^1 -Vektorfeld $t \mapsto z(t)$ längs eines C^1 -Weges $x:t \mapsto x(t)$ die invariante Ableitung¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{Dz}{dt} &:= \left(\frac{Dz^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &:= \left(\frac{dz^i}{dt} + z^k \Gamma_{k h}^i(x) \frac{dx^h}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

und für ein C^1 -Vektorfeld $x \mapsto z(x)$ die kovariante

⁰⁾Vgl. Schouten (1954), III §2 und Spivak (1970), S.5-3. Wir benutzen aber eine andere Indexstellung.

¹⁾Wir kennzeichnen die Ableitung der Komponenten nur durch Angabe des Index und ändern nicht die Bezeichnung für den Operator.

Ableitung

$$\begin{aligned} D_j z &:= (D_j z^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &:= \left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j} + z^k \Gamma_{kj}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Beide Ableitungen sind linear, genügen der Leibnizschen Produktregel, und ihr Verschwinden kennzeichnet Parallelfelder.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß sich unsere Überlegungen für Kurven und Hyperflächen ebenso bei nicht-linearem Zusammenhang anstellen lassen, da in diesen Spezialfällen²⁾ auch nichtlineare Zusammenhänge eine lineare invariante Ableitung liefern.

²⁾Für Hyperflächen vgl. Attallah (1971) und Volkmer (1974), S.34

Die Repräsentanten von K nennen wir, wie üblich, zulässige Parameterdarstellungen und unterscheiden sie nur in der Wahl des Buchstabens für den zulässigen Parameter. Die Abbildungen T heißen zulässige Parametertransformationen.

Sei $T:u \mapsto t(u)$ eine solche. Wenn sich dann eine Größe G nach dem Gesetz

$$G(u) = \left(\frac{dt}{du}(u) \right)^q G(t(u)) \quad (q \text{ ganzzahlig})$$

transformiert, so wollen wir G als K -Tensor(feld) der Stufe q bezeichnen⁵⁾. Im Fall $q > 0$ ist G also kovarianter, für $q < 0$ kontravarianter K -Tensor, und für $q = 0$ ein K -Skalar.

Im folgenden betrachten wir C^λ -Kurven K mit

$$r > \lambda > 2n$$

Für zulässige Parameterdarstellungen $t \mapsto x(t)$ und $u \mapsto x(u)$ von K existieren wegen der Parameterunabhängigkeit der Schmiegräume Beziehungen der Form

$$(3) \quad \frac{D^A x'}{du^A}(u) = \sum_{N=0}^A \alpha_A^N(t(u)) D_N \dot{x}(t(u))$$

für $A \in \{0, \dots, n-1\}$,

wobei der "Strich" die gewöhnliche Ableitung nach u bedeutet. Sukzessives Ableiten liefert unmittelbar

$$(4) \quad \bigvee_{N=0}^{n-1} \alpha_N^N(t(u)) = t'^{N+1}(u) \quad (\text{keine Summation}).$$

⁵⁾ Ist G ein Tensor der Mannigfaltigkeit, so heiße G auch MK-Tensor der K -Stufe q .

Satz 1:

Längs einer C^λ - Kurve repräsentiert

$$(5) \quad t \mapsto \mathbb{G}(t) := \dot{x} \wedge D\dot{x} \wedge \dots \wedge D_{n-1}\dot{x}(t)$$

ein K-Tensorfeld \mathbb{G} der Stufe $n(n+1)/2$ von der Klasse $C^{\lambda-n}$ und⁶⁾

$$(6) \quad t \mapsto \gamma(t) := \frac{2}{n(n+1)} \mathbb{G}^{-1}(t) D\mathbb{G}(t)$$

einen linearen K-Zusammenhang γ der Klasse $C^{\lambda-(n+1)}$, d.h. bei Parametertransformationen $u \mapsto t(u)$ gilt

$$(7) \quad \gamma(u) = t'(u) \gamma(t(u)) + \frac{t''}{t'}(u) .$$

Wir nennen γ inneren Zusammenhang der Kurve.

Beweis:

Nach (3) und (4) erhält man

$$(8) \quad \mathbb{G}(u) = t'^{n(n+1)/2}(u) \mathbb{G}(t(u))$$

und daraus

$$\mathbb{G}^{-1}(u) \frac{D\mathbb{G}}{du}(u) = \frac{n(n+1)}{2} \frac{t''}{t'}(u) + t'(u) \mathbb{G}^{-1}(t(u)) D\mathbb{G}(t(u)) .$$

Folgerung:

Zu einem differenzierbaren MK-Tensorfeld z der K-Stufe q wird durch

$$\frac{Dz}{dt} := \frac{Dz}{dt} - q\gamma z$$

ein MK-Tensorfeld der K-Stufe $q+1$ bestimmt; wir nennen es MK-Ableitung von z .

⁶⁾ $\mathbb{G}^{-1} = 1/\mathbb{G}$ ist die zum n -Vektor $\mathbb{G} \neq 0$ eindeutig existierende duale n -Form. Da der Raum der n -Vektoren (Skalardichten vom Gewicht -1) eindimensional ist, benutzen wir für die Dualenbildung und Tensormultiplikation die für Skalare üblichen Schreibweisen der Inversenbildung und Multiplikation.

Beweis:

für $u \mapsto z(u)$ und $u \mapsto t(u)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{D}z}{du} &= \frac{\mathbb{D}}{du}(t'^q z(t)) \\ &= \frac{D}{du}(t'^q z(t)) - q\gamma t'^q z(t) \\ &= q t'^{q-1} t' z(t) + t'^q \frac{D}{du} z(t) - q \left(t' \gamma(t) + \frac{t''}{t'} \right) t'^q z(t) \\ &= t'^{q+1} \frac{\mathbb{D}}{dt} z(t). \end{aligned}$$

Bezüglich des Parameters t schreiben wir analog (2) kurz

$$\mathbb{D}_N := \frac{\mathbb{D}^N}{dt^N} \quad \text{und} \quad \mathbb{D} := \frac{\mathbb{D}}{dt} .$$

Satz 2:

Die durch

$$(9) \quad z_A := \begin{cases} \dot{x} & \text{für } A = 1 \\ \mathbb{D}z_{A-1} & \text{für } A \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

definierten M - Vektorfelder z_A sind K -Tensorfelder der Stufe A . $z_A(t)$ liegt im A -ten Schmiegraum der Kurve im Punkt $x(t)$, und in der Basisdarstellung

$$(10) \quad z_A = \sum_{N=0}^{A-1} \beta_A^N \mathbb{D}_N \dot{x}$$

gilt

$$(11) \quad \bigvee_{A=1}^n \beta_A^{A-1} = 1, \quad \bigvee_{A=2}^n \beta_A^{A-2} = - \frac{(A-1)A}{2} \gamma .$$

Beweis:

Für $A = 1$ ist nichts zu beweisen. Gilt (10) für beliebiges z_A mit $A \leq n-1$, so kann man schließen für $A \leq n$

$$\begin{aligned}
 z_A &= Dz_{A-1} = Dz_{A-1} - (A-1)\gamma z_{A-1} \\
 &= D_{A-1}\dot{x} - \frac{(A-2)(A-1)}{2}\gamma D_{A-2}\dot{x} - \frac{(A-2)(A-1)}{2}\dot{\gamma} D_{A-3}\dot{x} \\
 &\quad + \sum_{N=0}^{A-4} (\dot{\beta}_{A-1}^N D_N \dot{x} + \beta_{A-1}^N D_{N+1} \dot{x}) \\
 &\quad - (A-1)\gamma \left(D_{A-2}\dot{x} - \frac{(A-2)(A-1)}{2}\gamma D_{A-3}\dot{x} + \sum_{N=0}^{A-4} \beta_{A-1}^N D_N \dot{x} \right) \\
 &= D_{A-1}\dot{x} - \frac{(A-1)A}{2}\gamma D_{A-2}\dot{x} + \sum_{N=0}^{A-3} \beta_A^N D_N \dot{x} \quad ,
 \end{aligned}$$

wobei für $A \geq 3$ und $N \in \{0, \dots, A-3\}$ gilt

$$(12) \quad \beta_A^N = \dot{\beta}_{A-1}^N + \beta_{A-1}^{N-1} - (A-1)\gamma \beta_{A-1}^N \quad ,$$

wenn man $\beta_A^{-N} := 0$ für $N > 0$ setzt.

Aus (10) folgt

$$\bigwedge_{A=1}^n z_1 \wedge \dots \wedge z_A = \dot{x} \wedge D\dot{x} \wedge \dots \wedge D_{A-1}\dot{x} \quad ,$$

speziell also

$$(13) \quad z_1 \wedge \dots \wedge z_n = \mathbb{G} \quad .$$

Nach (1) ist $\{z_1, \dots, z_n\}$ eine Begleitbasis der Kurve.

Die Form der Ableitungsgleichungen bezüglich dieses Basisfelds ergibt sich aus folgendem

Satz 3:

Das Feld der von den Vektoren $z_A(t)$ aufgespannten n -Parallelotope ist MK-konstant, d.h.

$$D(z_1 \wedge \dots \wedge z_n) = z_1 \wedge \dots \wedge z_{n-1} \wedge Dz_n = 0 \quad .$$

Beweis:

Nach (6) gilt $D\mathbb{G} := D\mathbb{G} - \frac{n(n+1)}{2}\gamma \mathbb{G} = 0$, woraus mit (13) die Behauptung folgt.

Folgerung:

Die Ableitungsgleichungen einer C^λ - Kurve lauten

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= z_1 \\ \bigvee_{A=1}^{n-1} Dz_A &= z_{A+1} \\ Dz_n &= \kappa^B z_B \quad \text{mit } \kappa^n = 0. \end{aligned}$$

Die durch die letzte Gleichung festgelegten Affin-
krümmungen

$$\kappa^B = \mathbb{G}^{-1} z_1 \wedge \dots \wedge z_{B-1} \wedge Dz_n \wedge z_{B+1} \wedge \dots \wedge z_n$$

für $B \in \{1, \dots, n-1\}$ sind also M -Skalare und K -Tensoren jeweils der Stufe $n+1-B$ und mindestens $C^{\lambda-2n}$ -differenzierbar. Genauere Angaben über die Differenzierbarkeitsklassen der Affinkrümmungen erhält man mittels (10).

Danach gilt mit $\beta_n^{-1} := 0$ und $\dot{\beta}_n^n := 0$

$$\begin{aligned} Dz_n &= D \left(\sum_{N=0}^{n-1} \beta_n^N D_N \dot{x} \right) \\ &= \sum_{N=0}^n (\dot{\beta}_n^N + \beta_n^{N-1}) D_N \dot{x} \quad , \end{aligned}$$

woraus sich die Darstellung

$$(15) \quad \begin{aligned} \kappa^B &= \mathbb{G}^{-1} \dot{x} \wedge \dots \wedge D_{B-2} \dot{x} \wedge \left(\sum_{N=B-1}^n (\dot{\beta}_n^N + \beta_n^{N-1}) D_N \dot{x} \right) \wedge \\ &\quad \wedge \left(\sum_{N=B-1}^B \beta_{B+1}^N D_N \dot{x} \right) \wedge \left(\sum_{N=B-1}^{B+1} \beta_{B+2}^N D_N \dot{x} \right) \wedge \dots \wedge \\ &\quad \wedge \left(\sum_{N=B-1}^{n-1} \beta_n^N D_N \dot{x} \right) \end{aligned}$$

ergibt. Nach (11) und (12) folgt für β_A^N die Differenzierbarkeitsklasse $C^{\mu-(A-2-N)}$, sofern γ der Klasse C^μ angehört. In (15) ist also der Term $\dot{\beta}_n^{B-1} + \beta_n^{B-2}$

von niedrigster Differenzierbarkeitsklasse, nämlich $C^{\lambda-(n+1)-(n-B)} = C^{\lambda-(2n+1-B)}$. Daher sind die Affin-
krümmungen κ^B einer C^λ - Kurve in (15) jeweils als $C^{\lambda-(2n+1-B)}$ - Abbildungen dargestellt.

1.1 Fundamentalsatz

Wir wollen das Problem, Kurven durch die Affinkrümmungen und den inneren Zusammenhang zu charakterisieren, untersuchen: Wie bei Barthel-Arnold (1975) hat das zu den Ableitungsgleichungen (14) analoge System für vorgegebene $C^{\lambda-(2n+1-B)}$ -Funktionen $\bar{\kappa}^B$ und eine $C^{\lambda-(n+1)}$ -Funktion $\bar{\gamma}$ i.allg. nur eine mindestens $C^{\lambda+1-n}$ -Lösung, und nicht eine C^λ -Lösung $t \mapsto x(t)$. Ein Fundamentalsatz für C^λ -Kurven ist also bei endlichem λ nicht beweisbar. Um dennoch auch bei endlicher Differenzierbarkeit eindimensionale Gebilde der Mannigfaltigkeit durch "natürliche Gleichungen" kennzeichnen zu können, müssen wir den Kurvenbegriff modifizieren. Als Verallgemeinerung von Definition 4 bei Barthel-Arnold (1975) verwenden wir die

Definition:

Eine (orientierte affine) $C^{\mu}_{\mu-1}$ -Kurve ($r \geq \mu \geq n$) ist ein (orientierte affine) C^μ -Kurve, für die \mathbb{G} von der Klasse $C^{\mu-1}$ ist.

Diese Definition ist wegen (8) parameterinvariant.

Im folgenden sei

$$r \geq \mu \geq n+1.$$

Wegen

$$\mathbb{G}(t) = \exp \int \left(\frac{n(n+1)}{2} \gamma - \Gamma_{j h}^j(x) \dot{x}^h \right) (t) dt \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n}$$

ist dann eine $C^{\mu}_{\mu-1}$ -Kurve auch durch die $C^{\mu-2}$ -Differenzierbarkeit von γ charakterisiert. Bei $C^{\mu}_{\mu-1}$ -Kurven sind daher

$$z_A, \quad \kappa^B, \quad \beta_A^N$$

jeweils von der Klasse

$$C^{\mu-A}, \quad C^{\mu-(n+1)}, \quad C^{\mu-(A-1-N)}$$

7) Dies erkennt man aus (14) bzw. (16) bei sukzessivem Einsetzen der A-ten Ableitungsgleichung in die (A+1)-te

In der Darstellung (15) ist nun der Term $D_n \dot{x}$ von niedrigster Differenzierbarkeitsklasse, woraus noch einmal für alle κ^B die $(\mu - (n+1))$ -fache stetige Differenzierbarkeit folgt. Die Affinkrümmungen sind also jetzt durch (15) sämtlich in derselben Differenzierbarkeitsklasse dargestellt. Mit dem so modifizierten Kurvenbegriff kommen wir zu einem

Fundamentalsatz der affinen Kurventheorie (Satz 4):

$J \subset \mathbb{R}$ sei ein nichtleeres offenes Intervall,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : J &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \bar{\gamma}(t) \end{aligned}$$

Darstellung eines linearen $C^{\mu-2}$ -Zusammenhangs der eindimensionalen Parametermannigfaltigkeit und

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}^B : J &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \bar{\kappa}^B(t) \end{aligned}$$

für $B \in \{1, \dots, n-1\}$ die Komponenten von $C^{\mu-(n+1)}$ -Tensoren der Parametermannigfaltigkeit jeweils der Stufe $n+1-B$.

Zu Anfangswerten $t_0 \in J$, $x_0 \in M$ und linear unabhängigen $z_{A_0} \in T_{x_0} M$ für $A \in \{1, \dots, n\}$ gibt es dann eine offene Umgebung $I \subset J$ von t_0 und eindeutig eine $C^{\mu}_{\mu-1}$ -Kurve

$$K := \left[\begin{array}{l} x: I \rightarrow M \\ t \mapsto x(t) \end{array} \right]$$

mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $x(t_0) = x_0$, $\bigvee_{A=1}^n z_A(t_0) = z_{A_0}$,
- 2) $\bar{\gamma}|_I = \gamma$, $\bigvee_{B=1}^{n-1} \bar{\kappa}^B|_I = \kappa^B$.

Beweis:

a) Das Differentialgleichungssystem⁸⁾

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \bar{z}_1 \\ \bigvee_{A=1}^{n-1} \bar{D} \bar{z}_A &= \bar{z}_{A+1} \\ \bar{D} \bar{z}_n &= \bar{\kappa}^B \bar{z}_B \quad \text{mit } \bar{\kappa}^n := 0 \end{aligned}$$

hat in Komponenten die Form

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \phi_O^i(\bar{z}_1^j) \\ \bigvee_{A=1}^n \frac{d\bar{z}_A^i}{dt} &= \phi_A^i(x^j, \bar{z}_1^j, \dots, \bar{z}_n^j) \end{aligned}$$

und daher zu den Anfangswerten lokal mindestens eine Lösung $L: \tilde{I} \subset J \rightarrow \mathbb{R}^{n+n^2}$

$t \mapsto (x^j(t), \bar{z}_A^j(t))$.
 $\phi_O^i, \dots, \phi_n^i$ sind nach \bar{z}_B^j und x^j stetig partiell differenzierbar, weshalb⁹⁾ L eindeutig ist.

b) $t \mapsto x(t)$ ist von der Klasse C^u nach den Voraussetzungen über $\bar{\kappa}^B$ und $\bar{\gamma}$.⁷⁾

c) Wegen $z_{1o} \wedge \dots \wedge z_{no} \neq 0$ und der Stetigkeit von $\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \bar{z}_n$ existiert zu t_o eine offene Umgebung $I \subset \tilde{I}$, in der $\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \bar{z}_n$ nullstellenfrei ist.

d) Analog dem Beweis von Satz 2 für \bar{z}_A und $\bar{\gamma}$ erhält man aus (16)

$$\bigvee_{A=1}^n \bar{z}_A = D_{A-1} \dot{x} - \frac{(A-1)A}{2} \bar{\gamma} D_{A-2} \dot{x} + \sum_{N=0}^{A-3} \bar{\beta}_A^N D_N \dot{x}.$$

⁸⁾ \bar{D} wird mit $\bar{\gamma}$ analog D gebildet.

⁹⁾ Vgl. Kamke (1969), S.104.

Daher gilt

$$\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \bar{z}_n = \dot{x} \wedge D\dot{x} \wedge \dots \wedge D_{n-2}\dot{x} \wedge D_{n-1}\dot{x} = \mathbb{G}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \bar{z}_{n-1} \wedge D\bar{z}_n &= \dot{x} \wedge \dots \wedge D_{n-2}\dot{x} \wedge (D_n\dot{x} - \frac{(n-1)n}{2} \bar{\gamma} \wedge D_{n-1}\dot{x}) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \gamma - \frac{(n-1)n}{2} \bar{\gamma} \right) \mathbb{G} \quad . \end{aligned}$$

Andererseits folgt mit (16)

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \bar{z}_{n-1} \wedge D\bar{z}_n &= \bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \bar{z}_{n-1} \wedge (\bar{D}\bar{z}_n + n \bar{\gamma} \wedge \bar{z}_n) \\ &= n \bar{\gamma} \mathbb{G} \quad . \end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{G}(t) \neq 0$ für $t \in I$ (vgl. c) liefert Vergleich nun

$$\bar{\gamma}|_I = \gamma \quad ,$$

also $\bar{D} = D$ und damit nach (16)

$$\bar{z}_A|_I = z_A \quad \text{und} \quad \bar{\kappa}^B|_I = \kappa^B \quad .$$

e) Wegen der $C^{\mu-2}$ -Differenzierbarkeit von γ und der Nullstellenfreiheit von $\mathbb{G}|_I$ repräsentiert $t \mapsto x(t)$ eine $C_{\mu-1}^\mu$ -Kurve.

1.2 Spezialisierung auf Mannigfaltigkeiten mit Volumenstruktur

Als zusätzliche Struktur auf M verwenden wir nun eine kovariant konstante C^{r-1} -Skalardichte F vom Gewicht 1 mit der Komponente

$$x \mapsto f(x) \neq 0$$

bezüglich eines Koordinatensystems. Mit Hilfe von F definieren wir das Volumen eines kontravarianten n -Parallelotops H (Skalardichte vom Gewicht (-1)) in $x \in M$ durch

$$v(x,H) := F(x) H \quad .$$

Kovariant konstantes F bedeutet für ein Parallelfeld von n -Parallelotopen gerade die Konstanz des Volumens. Analytisch ist diese Volumentreue eine Kopplung der beiden Raumstrukturen, nämlich

$$\partial_h \log |f| := \frac{\partial}{\partial x^h} \log |f| = \Gamma_j^j{}_h \quad ,$$

was ja äquivalent zu $D_h f = 0$ ist.

Durch eine Relation zwischen F und G werden wir ausgezeichnete Parameterdarstellungen der Kurve gewinnen und damit zu einfachen Ableitungsgleichungen kommen.

Schreiben wir für die Komponente des inneren Zusammenhangs zur Unterscheidung γ_t bzw. γ_u , wenn die Kurve im Parameter t bzw. u dargestellt wird, so ergibt sich aus (7)

$$\gamma_t(t) = \dot{u}(t) \gamma_u(u(t)) + \ddot{u}(t) \quad .$$

Wir suchen nun jene Parameterdarstellungen $u \mapsto x(u)$, für die

$$\gamma_u = 0 \quad .$$

Dies führt auf die Differentialgleichung

$$\gamma_t(t) = \ddot{u}(t)$$

mit den Lösungen¹⁰⁾

$$U: t \mapsto u(t) = \int (\exp \int \gamma_t(t) dt) dt \quad ,$$

die bis auf affine Transformationen

$$(17) \quad U \mapsto c_1 U + c_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 > 0$$

eindeutig sind.

Jede Lösung U ist wegen $\dot{U} > 0$ umkehrbar. Nimmt man $U^{-1}: u \mapsto t(u)$ als Parametertransformation, so ist also wegen $\gamma_u = 0$ das Feld

$$(18) \quad u \mapsto G(u) = \left(\frac{dt}{du}(u) \right)^{n(n+1)/2} G(t(u))$$

kovariant konstant, d.h.

$$(19) \quad \forall_u \frac{DG}{du}(u) = 0.$$

¹⁰⁾ Da wir orientierte Kurven betrachten, interessieren uns die restlichen Lösungen der Form $(-U)$ nicht.

Satz 5:

U^{-1} ist genau dann eine zulässige Parametertransformation, wenn eine $C_{\mu-1}^{\mu}$ -Kurve vorliegt.

Beweis:

Für eine $C_{\mu-1}^{\mu}$ -Kurve ist jedes U ein C^{μ} -Diffeomorphismus, also auch U^{-1} . Ist umgekehrt eine Lösung U von der Klasse C^{μ} , so sind wegen (17) alle U C^{μ} -Lösungen und folglich γ von der Klasse $C^{\mu-2}$.

Satz 6:

Unter den Abbildungen U lassen sich solche auszeichnen, die in jedem Kurvenpunkt

$$(20) \quad \mathbb{G}(u) = \mathbb{F}^{-1}(x(u)) \operatorname{sig} v(x(u), \mathbb{G}(u)) \\ =: \mathbb{F}^{-1}(x(u)) \cdot \sigma$$

d.h. $|v(x(u), \mathbb{G}(u))| = 1$,
erfüllen. Sie sind durch

$$A := U: t \mapsto u(t) = \int |v(x, \mathbb{G})|^{\frac{2}{n(n+1)}}(t) dt$$

definiert, also bis auf eine additive Konstante eindeutig und unabhängig von der Parameterdarstellung der Kurve.

Jedes A nennen wir Affinbogenlänge.

Beweis:

Wegen (8) ist (20) äquivalent zu $\frac{du}{dt} = |v(x, \mathbb{G})|^{\frac{2}{n(n+1)}}$.

Für eine $C_{\mu-1}^{\mu}$ -Kurve heißt die (zulässige) C^{μ} -Parameterdarstellung

$$a \mapsto A^{-1}(a) \mapsto x(A^{-1}(a)) =: x(a)$$

Affinbogenlängenparameterdarstellung. Wegen (19) gilt

$$\forall_a \quad \gamma(a) = 0$$

und daher auch

$$\frac{D}{da} = \frac{D}{da} .$$

Ein " Strich" bezeichne im folgenden die gewöhnliche Ableitung nach a und

$$D := \frac{D}{da} .$$

Die K-Skalare

$$y_1 := x'$$

$$\forall_{A=2}^n y_A := D_{A-1} x'$$

bilden eine invariante Begleitbasis der $C_{\mu-1}^\mu$ - Kurve mit der Eigenschaft

$$v(x, y_1 \wedge \dots \wedge y_n) = \sigma$$

und den Ableitungsgleichungen

$$x' = y_1$$

$$\forall_{A=1}^{n-1} Dy_A = y_{A+1}$$

$$(21) \quad Dy_n = k^B y_B \quad \text{mit } k^n = 0.$$

Die hierdurch definierten Affinkrümmungen k^B sind K-Skalare der Klasse $C^{\mu-(n+1)}$.

Satz 7 (Fundamentalsatz):

Gegeben seien ein Vorzeichen $\bar{\sigma} \in \{-1, 1\}$, ein nicht-leeres offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$, und $C^{\mu-(n+1)}$ - Funktionen

$$\begin{aligned} \bar{k}^B: J &\rightarrow \mathbb{R} && \text{für } B \in \{1, \dots, n-1\} . \\ \bar{a} &\rightarrow \bar{k}^B(\bar{a}) \end{aligned}$$

Zu Anfangswerten $a_0 \in J$, $x_0 \in M$ und $y_{A0} \in T_{x_0} M$ für $A \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$(22) \quad v(x_0, y_1 \wedge \dots \wedge y_n) = \bar{\sigma}$$

gibt es dann eine offene Umgebung $I \subset J$ von a_0 und eindeutig eine C_{u-1}^u -Kurve

$$K := \begin{bmatrix} x: I \rightarrow M \\ \bar{a} \mapsto x(\bar{a}) \end{bmatrix}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $x(a_0) = x_0$, $\bigvee_{A=1}^n y_A(a_0) = y_{A0}$,
- 2) $\bigvee_{\bar{a}} v(x, \mathbb{G})(\bar{a}) = \bar{\sigma}$, d.h. \bar{a} ist Affinbogenlängenparameter,
- 3) $\bigvee_{B=1}^{n-1} \bar{k}^B|_I = k^B$.

Beweis:

a) Das Differentialgleichungssystem

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\bar{a}} &= \bar{y}_1 \\ \bigvee_{A=1}^{n-1} \frac{D\bar{y}_A}{d\bar{a}} &= \bar{y}_{A+1} \\ \frac{D\bar{y}_n}{d\bar{a}} &= k^B \bar{y}_B \quad \text{mit } \bar{k}^n := 0 \end{aligned}$$

besitzt lokal eine eindeutige Lösung zu den vorgegebenen Anfangswerten. Dabei ist $\bar{y}_1 \wedge \dots \wedge \bar{y}_n$ nullstellenfrei und $\bar{a} \mapsto x(\bar{a})$ von der Klasse C^u (vgl. Beweis von Satz 4).

b) Aus (23) erhält man

$$\frac{d}{d\bar{a}} v(x, \bar{y}_1 \wedge \dots \wedge \bar{y}_n) = v(x, \bar{y}_1 \wedge \dots \wedge \bar{y}_{n-1} \wedge \frac{D\bar{y}_n}{d\bar{a}}) = 0,$$

also wegen (22)

$$v(x, \bar{y}_1 \wedge \dots \wedge \bar{y}_n) = \bar{\sigma} \quad ,$$

d.h.
$$\bigvee_{\bar{a}} \mathbb{G}(\bar{a}) = \mathbb{F}^{-1}(x(\bar{a})) \cdot \bar{\sigma} \quad .$$

$\bar{a} \mapsto \mathbb{G}(\bar{a})$ ist daher bezüglich \bar{a} C^μ -differenzierbar, und wegen (8) ist \mathbb{G} also K -Tensor der Klasse $C^{\mu-1}$.

$\bar{a} \mapsto x(\bar{a})$ repräsentiert somit eine $C_{\mu-1}^\mu$ -Kurve in Affinbogenlängenparameterdarstellung.

c) (23) liefert nun unmittelbar $\bar{y}_A = y_A$ für $A \in \{1, \dots, n\}$ und $\bar{k}^B = k^B$ für alle $B \in \{1, \dots, n-1\}$.

Natürlich läßt sich eine $C_{\mu-1}^\mu$ -Kurve $[t \mapsto x(t)]$ auf einer Mannigfaltigkeit mit Volumenstruktur auch mittels der Begleitbasis (9) beschreiben. Dann ergeben sich die Beziehungen

$$(24) \quad \bigvee_{B=1}^n y_B(a) = \left(\frac{dA^{-1}}{da}(a) \right)^B z_B(A^{-1}(a))$$

(keine Summation) ,

$$\bigvee_{B=1}^n k^B(a) = \left(\frac{dA^{-1}}{da}(a) \right)^{n+1-B} \kappa^B(A^{-1}(a)) .$$

1.3 Erste Variation von Affinkrümmungen und innerem Zusammenhang

L sei eine offene Teilmenge der C^r -Mannigfaltigkeit M ,
und das offene Intervall $]-\delta, \delta[$ sei nicht leer. Dann
nennen wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}\bar{x}:]-\delta, \delta[\times L &\rightarrow M \\ (\epsilon, x) &\mapsto \bar{x}(\epsilon, x)\end{aligned}$$

infinitesimale C^r -Transformation¹¹⁾, wenn sie fol-
gende Eigenschaften hat:

\bar{x} ist nach ϵ einmal, nach x^j r -mal stetig partiell
differenzierbar,

$$\bar{x}(0, \cdot) = \text{id}|_L \quad ,$$

$\bar{x}(-\epsilon, \cdot)$ ist invers zu $\bar{x}(\epsilon, \cdot)$, d.h. $\bar{x}(-\epsilon, \bar{x}(\epsilon, x)) = x$.

Jede infinitesimale Transformation bestimmt auf L
ein kontravariantes Vektorfeld

$$x \mapsto \xi(x) := \frac{\partial \bar{x}}{\partial \epsilon}(0, x) \quad .$$

Der für festes ϵ durch die Abbildung

$$\begin{aligned}\bar{x}(\epsilon, \cdot): L &\rightarrow M \\ x &\mapsto \bar{x}(\epsilon, x)\end{aligned}$$

induzierte Homomorphismus $\bar{x}_*(\epsilon, \cdot)$ der Tangential-
räume führt genau dann in 1.Näherung Parallelfelder

¹¹⁾ Vgl. etwa Barthel (1966), S.37, Sewering (1973),
S.29 oder Yano (1955), Chap.I, wobei sich die
dortigen Definitionen untereinander und mit der
hiesigen nicht voll decken.

in ebensolche über, wenn die Lie-Ableitung¹²⁾ der Zusammenhangskoeffizienten identisch verschwindet, d.h. wenn¹³⁾

$$(25) \quad 0 = \mathbb{L}_\xi \Gamma_{k h}^i \\ := D_h (D_k \xi^i + S_{k l}^i \xi^l) + R_{k h l}^i \xi^l.$$

In diesem Fall heißt \bar{x} infinitesimale Affinität.

Weiter nennen wir eine Transformation \bar{x} volumentreu, wenn

$$(26) \quad 0 = \mathbb{L}_\xi f \\ := f \cdot (\partial_k \xi^k + \xi^k \partial_k \log|f|),$$

weil gerade dann ~~sich~~ das Volumen eines Parallelfelds von n-Parallelotopen in 1. Ordnung invariant ist.

Schreiben wir kurz

$$(27) \quad D_k^* \xi^i := D_k \xi^i + S_{k l}^i \xi^l,$$

so gilt

$$\mathbb{L}_\xi \Gamma_{k h}^i = D_h D_k^* \xi^i + R_{k h l}^i \xi^l$$

und bei volumentreuem Zusammenhang

$$\mathbb{L}_\xi f = f D_k^* \xi^k.$$

Betrachten wir nun eine C^λ - Kurve $K = [x: t \mapsto x(t)]$ und eine infinitesimale C^r - Transformation derart, daß L alle Kurvenpunkte $x(t)$ umfaßt. Dann gibt es

¹²⁾ Zur Definition vgl. Yano (1955), Chap. I und Sewering (1973), S. 29.

¹³⁾ Die Lie-Ableitung des Zusammenhangs ist also ein Tensor.

in einer Umgebung von $\epsilon = 0$ eine einparametrische Schar

$$\epsilon \mapsto K_\epsilon$$

von C^λ - Kurven

$$K_\epsilon := \left[\bar{x}(\epsilon, x) : t \mapsto \bar{x}(\epsilon, x(t)) \right] ;$$

wegen der Stetigkeit von \bar{x} bezüglich ϵ existiert nämlich eine Umgebung von $\epsilon = 0$, in der jedes

$$\mathbb{G}(\epsilon,) : t \mapsto \mathbb{G}(\epsilon, t)$$

nullstellenfrei ist, wobei $\mathbb{G}(\epsilon,)$ gemäß (5) für K_ϵ gebildet wird.

Im weiteren kennzeichnen wir infinitesimal transformierte Größen durch einen Querstrich und schreiben ihre Argumente nicht (z.B. $\bar{\mathbb{G}}$ statt $\mathbb{G}(\epsilon, t)$). Ein Punkt über solchen Größen bedeutet dann partielle Ableitung nach t .

Wir untersuchen nun, wie sich innerer Zusammenhang und Affinkrümmungen der Kurven K_ϵ infinitesimal ändern, d.h. genauer die Ableitungen¹⁴⁾

$$\partial_\epsilon \bar{\gamma} \Big|_0 \quad \text{und} \quad \partial_\epsilon \bar{\kappa}^B \Big|_0 \quad \text{für } B \in \{1, \dots, n-1\},$$

wobei $\partial_\epsilon := \frac{\partial}{\partial \epsilon}$ gesetzt wurde.

Für ein Tensorfeld z liefert $\partial_\epsilon \bar{z} \Big|_0$ i.allg. kein Tensorfeld. Wir führen daher eine invariante Ableitung ∇_ϵ nach ϵ ein, so daß für kontravariante Vektorfelder z gilt

$$\nabla_\epsilon \bar{z}^i := \partial_\epsilon \bar{z}^i + \bar{z}^k \bar{\Gamma}_{k h}^i \partial_\epsilon \bar{x}^h ,$$

¹⁴⁾ $\Big|_0$ bezeichnet die Stelle $\epsilon = 0$.

also

$$\nabla_{\epsilon} \bar{z}^i |_{\circ} = \partial_{\epsilon} \bar{z}^i |_{\circ} + z^k \Gamma_{k h}^i \xi^h.$$

Analog bilden wir für Skaldichten H vom Gewicht w

$$\nabla_{\epsilon} \bar{H} |_{\circ} := \partial_{\epsilon} \bar{H} |_{\circ} - w H \Gamma_{k h}^k \xi^h.$$

Für ∇_{ϵ} gilt die Leibnizsche Produktregel.

Lemma 1:

Für ein differenzierbares, kontravariantes Vektorfeld z längs K gilt

$$(27) \quad \nabla_{\epsilon} \bar{D} \bar{z}^i |_{\circ} = D(\nabla_{\epsilon} \bar{z}^i |_{\circ}) + z^k \dot{\chi}^h R_{k h l}^i \xi^l.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla_{\epsilon} \bar{D} \bar{z}^i |_{\circ} &= \partial_{\epsilon} \dot{\bar{z}}^i |_{\circ} + \partial_{\epsilon} \bar{z}^k |_{\circ} \Gamma_{k h}^i \dot{\chi}^h + z^k \partial_{\epsilon} \bar{\Gamma}_{k h}^i |_{\circ} \dot{\chi}^h \\ &\quad + z^k \Gamma_{k h}^i \partial_1 \xi^h \dot{\chi}^l + D z^k \Gamma_{k h}^i \xi^h \\ &= \frac{d}{dt} (\partial_{\epsilon} \bar{z}^i |_{\circ}) + (\nabla_{\epsilon} \bar{z}^k |_{\circ} - z^m \Gamma_{m l}^k \xi^l) \Gamma_{k h}^i \dot{\chi}^h \\ &\quad + z^k \partial_1 \Gamma_{k h}^i \xi^l \dot{\chi}^h + z^k \Gamma_{k h}^i \partial_1 \xi^h \dot{\chi}^l + D z^k \Gamma_{k h}^i \xi^h, \end{aligned}$$

$$D(\nabla_{\epsilon} \bar{z}^i |_{\circ}) = \frac{d}{dt} (\partial_{\epsilon} \bar{z}^i |_{\circ} + z^k \Gamma_{k h}^i \xi^h) + \nabla_{\epsilon} \bar{z}^k |_{\circ} \Gamma_{k h}^i \dot{\chi}^h,$$

also

$$\begin{aligned} \nabla_{\epsilon} \bar{D} \bar{z}^i |_{\circ} - D(\nabla_{\epsilon} \bar{z}^i |_{\circ}) &= -z^m \Gamma_{m l}^k \xi^l \Gamma_{k h}^i \dot{\chi}^h \\ &\quad + z^k \partial_1 \Gamma_{k h}^i \xi^l \dot{\chi}^h \\ &\quad + z^m \Gamma_{m l}^k \dot{\chi}^l \Gamma_{k h}^i \xi^h \\ &\quad - z^k \partial_m \Gamma_{k h}^i \dot{\chi}^m \xi^h. \end{aligned}$$

Lemma 2:

Mit

$$L_0^i := 0,$$

$$L_N^i := DL_{N-1}^i + D_{N-1} \dot{x}^k \dot{x}^h L_{\xi \Gamma_k h}^i \quad \text{für } N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

gilt

$$\bigvee_{N \in \mathbb{N}} \nabla_\epsilon \bar{D}_N \dot{x}^i \Big|_0 = D_N \dot{x}^k D_k^* \xi^i + L_N^i.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon \dot{x}^i \Big|_0 &= \frac{d}{dt} \partial_\epsilon \dot{x}^i \Big|_0 + \dot{x}^k \Gamma_k^i \xi^h \\ &= \dot{x}^k (\partial_k \xi^i + \Gamma_k^i \xi^h) \end{aligned}$$

bestätigt die Behauptung für $N = 0$. Wir machen die Induktionsannahme für $N-1$ und schließen mit dem letzten Lemma

$$\nabla_\epsilon (\bar{D}(\bar{D}_{N-1} \dot{x}^i)) \Big|_0 = D(\nabla_\epsilon \bar{D}_{N-1} \dot{x}^i \Big|_0) + D_{N-1} \dot{x}^k \dot{x}^h R_{k h l}^i \xi^l$$

und nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned} &= D(D_{N-1} \dot{x}^k D_k^* \xi^i + L_{N-1}^i) + D_{N-1} \dot{x}^k \dot{x}^h R_{k h l}^i \xi^l \\ &= D_N \dot{x}^k D_k^* \xi^i + DL_{N-1}^i + D_{N-1} \dot{x}^k \dot{x}^h L_{\xi \Gamma_k h}^i. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2 beweisen wir den folgenden

Satz 8:

Die invarianten ersten Variationen von \mathbb{G} und dem inneren Zusammenhang γ von K lauten:⁶⁾

$$(28) \quad \nabla_\epsilon \bar{\mathbb{G}} \Big|_0 = \mathbb{G} D_k^* \xi^k + \mathbb{J}, \quad \text{sowie}$$

$$(29) \quad \partial_\epsilon \bar{\gamma}|_0 = -\frac{J}{G} \gamma + \frac{2}{n(n+1)} \left(\frac{DJ}{G} + \dot{x}^h L_{\xi^k} \Gamma_{kh} \right) \\ =: g,$$

wobei

$$J := \sum_{N=1}^{n-1} \dot{x} \wedge \dots \wedge D_{N-1} \dot{x} \wedge L_N \wedge D_{N+1} \dot{x} \wedge \dots \wedge D_{n-1} \dot{x}.$$

Beweis:

$$\nabla_\epsilon \bar{G}|_0 = \sum_{N=0}^{n-1} \dot{x} \wedge \dots \wedge D_{N-1} \dot{x} \wedge (D_N \dot{x}^k D_k^* \xi + L_N) \wedge D_{N+1} \dot{x} \wedge \dots \wedge D_{n-1} \dot{x}$$

und mit (30)¹⁶⁾ folgt (28).

Wegen der Produktregel ergibt sich aus Lemma 1

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon (\bar{D}\bar{G})|_0 &= D(\nabla_\epsilon \bar{G}|_0) + G \dot{x}^h R_{kh} \xi^1 \\ &= D(G D_k^* \xi^k) + DJ + G \dot{x}^h R_{kh} \xi^1 \\ &= DG D_k^* \xi^k + DJ + G \dot{x}^h (D_h D_k^* \xi^k + R_{kh} \xi^1) \\ &= DG D_k^* \xi^k + DJ + G \dot{x}^h L_{\xi^k} \Gamma_{kh}, \end{aligned}$$

also mit

$$\partial_\epsilon \bar{\gamma}|_0 = \frac{2}{n(n+1)} \left(\frac{1}{G} \nabla_\epsilon \bar{D}\bar{G}|_0 - \frac{DG}{G^2} \nabla_\epsilon \bar{G}|_0 \right)$$

schließlich (29).

Zur Berechnung der 1.Variation der Affinkrümmungen brauchen wir noch das nachstehende Lemma.

¹⁶⁾ Für $n \times n$ -Matrizen (a_k^j) und (b_k^j) mit $b := \det b_k^j \neq 0$ gilt

$$(30) \quad \sum_{N=1}^n \det(b_1^j, \dots, b_{N-1}^j, b_{N+1}^j, \dots, b_n^j) = a_k^k b.$$

Wegen $b \neq 0$ hat nämlich das System $b_i^j x_k^i = a_k^j$ nach der Cramerschen Regel die Lösungen

$$x_k^i = b^{-1} \det(b_1^j, \dots, a_k^j, \dots, b_n^j).$$

(i)

Lemma 3:

Seien

$$\begin{aligned}
 l_1^i &:= 0, \\
 l_{N+1}^i &:= D l_N^i + D_{N-1} \dot{x}^k \dot{x}^h L_{\xi^i} \Gamma_{k h}^i - N D_{N-1} \dot{x}^i g \\
 &\quad \text{für } N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\
 D_0 &:= \text{id}.
 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\forall_{N \in \mathbb{N}} \nabla_{\varepsilon} (\bar{D}_N \dot{x}^i) \Big|_0 = D_N \dot{x}^k D_k^* \xi^i + l_{N+1}^i.$$

Beweis:

Für $N = 0$ ist die Aussage trivial. Mit $z_N := D_{N-1} \dot{x}$ auch für $N > n$ führen wir den Induktionsschluß durch:

$$\nabla_{\varepsilon} \bar{z}_{N+1}^i \Big|_0 = \nabla_{\varepsilon} (\bar{D}_N \bar{z}_N^i - N \bar{\gamma} \bar{z}_N^i) \Big|_0$$

und mit Lemma 1

$$= D(\nabla_{\varepsilon} \bar{z}_N^i \Big|_0) + z_N^k \dot{x}^h R_{k h l}^i \xi^l - N g z_N^i$$

und nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
 &= D(z_N^k D_k^* \xi^i + l_N^i) + z_N^k \dot{x}^h R_{k h l}^i \xi^l - N g z_N^i \\
 &= z_{N+1}^k D_k^* \xi^i + l_{N+1}^i.
 \end{aligned}$$

Satz 9:

Die 1. Variation der Affinkrümmungen κ^B von K hat die Form

$$\partial_{\varepsilon} \bar{\kappa}^B \Big|_0 = \frac{1}{\mathbb{G}} z_1 \wedge \dots \wedge z_{B-1} \wedge (1_{n+1}^{-\kappa^A} 1_A) \wedge z_{B+1} \wedge \dots \wedge z_n$$

für $B \in \{1, \dots, n-1\}$.

Beweis:

Mit $\kappa^n := \bar{\kappa}^n := 0$ gilt

$$\nabla_{\epsilon} \bar{D}_n \dot{\bar{X}}^i \Big|_0 = \nabla_{\epsilon} (\bar{\kappa}^A \bar{z}_A^i) \Big|_0 = \partial_{\epsilon} \bar{\kappa}^A \Big|_0 z_A^i + \kappa^A \nabla_{\epsilon} \bar{z}_A^i \Big|_0$$

und nach dem letzten Lemma

$$= \partial_{\epsilon} \bar{\kappa}^A \Big|_0 z_A^i + \kappa^A z_A^k D_k^* \xi^i + \kappa^A l_A^i .$$

Andererseits gilt nach Lemma 3 auch

$$\begin{aligned} \nabla_{\epsilon} \bar{D}_n \dot{\bar{X}}^i \Big|_0 &= D_n \dot{\bar{X}}^k D_k^* \xi^i + l_{n+1}^i \\ &= \kappa^A z_A^k D_k^* \xi^i + l_{n+1}^i . \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\partial_{\epsilon} \bar{\kappa}^A \Big|_0 z_A^i = -\kappa^A l_A^i + l_{n+1}^i \text{ und daraus die Behauptung.}$$

Hat man zusätzlich wie in 1.2 eine an den Zusammenhang gekoppelte Volumenstruktur zur Verfügung und damit Affinkrümmungen k^B nach (21) bzw. (24) für $C_{\mu-1}^H$ -Kurven, so folgt wegen

$$\frac{dA^{-1}}{da} = |\mathbf{F} \mathbf{G}|^{-\frac{2}{n(n+1)}}$$

für die 1.Variation

$$\begin{aligned} \partial_{\epsilon} \bar{k}^B \Big|_0 &= \partial_{\epsilon} \left(|\bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{G}}|^{\frac{-2(n+1-B)}{n(n+1)}} \bar{\kappa}^B \right) \Big|_0 \\ &= -2 \frac{n+1-B}{n(n+1)} k^B |\mathbf{F} \mathbf{G}|^{-1} \sigma \left(\nabla_{\epsilon} \bar{\mathbf{F}} \Big|_0 \bar{\mathbf{G}} + \mathbf{F} \nabla_{\epsilon} \bar{\mathbf{G}} \Big|_0 \right) \\ &\quad + |\mathbf{F} \mathbf{G}|^{\frac{-2(n+1-B)}{n(n+1)}} \partial_{\epsilon} \bar{\kappa}^B \Big|_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{2(n+1-B)}{n(n+1)} k^B (\partial_j \log|f| \cdot \xi^j + \partial_j \xi^j + \frac{J}{G}) \\
 &+ (FG)^{-1} v(x, z_1 \wedge \dots \wedge z_{B-1} \wedge (t^{n+1-B} l_{n+1} - \\
 &\quad - t^{A-B} k^A l_A) \wedge z_{B+1} \wedge \dots \wedge z_n) .
 \end{aligned}$$

Folgerung:

Unter infinitesimalen Affinitäten sind die Affinkrümmungen κ^B und der innere Zusammenhang γ in 1. Ordnung invariant, d.h.

$$(31) \quad \partial_\epsilon \bar{\gamma}|_0 = 0 \quad \text{und} \quad \bigvee_{B=1}^{n-1} \partial_\epsilon \bar{\kappa}^B|_0 = 0,$$

und es gilt

$$\bigvee_{B=1}^{n-1} \partial_\epsilon \bar{\kappa}^B|_0 = - \frac{2(n+1-B)}{n(n+1)} k^B \frac{\mathbb{L}_\xi f}{f} .$$

Beweis:

Aus $\mathbb{L}_\xi \Gamma_{k^i h} = 0$ folgt $J = 0$, $g = 0$ und $l_N = 0$ für alle $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Weitere Aussagen über die 1.Variation der Affinkrümmungen κ^B folgen aus dem nächsten

Satz 10:

Für jede Skalardichte F mit der Komponente $f \neq 0$ und dem Gewicht $+1$ gilt allgemein¹⁷⁾

$$\partial_h \left(\frac{\mathbb{L}_\xi f}{f} \right) = \mathbb{L}_\xi \partial_h \log|f| .$$

¹⁷⁾ Der Beweis benutzt nicht eine Volumentreue des Zusammenhangs.

Beweis:

Es sei

$$W_h(x) := \frac{\partial_h f(x)}{f(x)}, \quad \bar{W}_h(\epsilon, x) := W_h(\bar{x}(\epsilon, x)).$$

Bei einer Koordinatentransformation

$$x^i \mapsto x^{i'}(x^i)$$

mit $\Delta := \det x_i^{i'} := \det \partial_i x^{i'}$ und $(x_h^h) := (x_h^{h'})^{-1}$ gilt in x

$$W_{h'} = x_h^h W_h + x_h^h \frac{\partial_h \Delta^{-1}}{\Delta^{-1}} \quad \text{und}$$

$$\bar{W}_{h'}(\epsilon,) = x_h^h \bar{W}_h(\epsilon,) + x_h^h \frac{\partial_h \Delta^{-1}}{\Delta^{-1}} (\bar{x}(\epsilon,)) .$$

Wird \bar{W}_h der "Koordinatentransformation"

$$x \mapsto \bar{x}(-\epsilon, x)$$

unterworfen mit der inversen Transformation

$$x \mapsto \bar{x}(\epsilon, x),$$

dann gilt für die transformierten Komponenten

$$\bar{W}_{h'}^i(\epsilon,) = \partial_h \bar{x}^k(\epsilon,) \left(W_k(\bar{x}(\epsilon,)) + \frac{\partial_k \det(\partial_j \bar{x}^i(\epsilon,))}{\det(\partial_j \bar{x}^i(\epsilon,))} \right) .$$

Wegen

$$\begin{aligned} \partial_\epsilon \det(\partial_j \bar{x}^i(\epsilon,))|_0 &= \sum_{N=1}^n \det(\delta_1^j, \dots, \delta_{N-1}^j, \partial_N \xi^j, \delta_{N+1}^j, \dots, \delta_n^j) \\ &= \partial_j \xi^j \end{aligned}$$

ergibt sich

$$L_\xi W_h := \partial_\epsilon \bar{W}_h^i|_0 = \partial_h \xi^k W_k + \delta_h^k (\partial_j W_k \cdot \xi^j + \partial_k \partial_j \xi^j) ,$$

also

$$\mathbb{L}_\xi \partial_h \log|f| = \partial_h \xi^k \partial_k \log|f| + \partial_j \partial_h \log|f| \cdot \xi^j + \partial_h \partial_j \xi^j.$$

Andererseits gilt nach (26)

$$\partial_h \left(\frac{\mathbb{L}_\xi f}{f} \right) = \partial_h (\partial_j \log|f| \cdot \xi^j + \partial_j \xi^j).$$

Folgerung:

Ist der Zusammenhang volumentreu, so gilt bei infinitesimalen Affinitäten

$$\partial_h \left(\frac{\mathbb{L}_\xi f}{f} \right) = 0, \text{ d.h. } \exists_{c \in \mathbb{R}} \frac{\mathbb{L}_\xi f}{f} = c,$$

und damit

$$\exists_{c \in \mathbb{R}} \bigvee_{B=1}^{n-1} \partial_\varepsilon \bar{k}^B|_0 = - \frac{2(n+1-B)}{n(n+1)} c k^B.$$

Ist die Affinität speziell volumentreu, dann sind die Affinkrümmungen k^B einer $C_{\mu-1}^\mu$ -Kurve in 1.Näherung invariant, d.h.

$$\bigvee_{B=1}^{n-1} \partial_\varepsilon \bar{k}^B|_0 = 0.$$

Die in der Blaschkeschen Affingeometrie a priori postulierten Invarianzeigenschaften bei volumentreuen Affinitäten folgen in unserer allgemeineren, aus dem Rahmen des Erlanger Programms gelösten Theorie in natürlicher Weise. Darüber hinaus zeigt die Folgerung aus Satz 9, daß die Volumenstruktur

und damit die Beschränkung auf speziell volumentreue Affinitäten unnötig sind. Die in den Teilen 1.0 und 1.1 dargelegte Theorie kann im gewöhnlichen affinen Raum als Invariantentheorie bei allgemeinen Affinitäten interpretiert werden.

2. Affine p-Flächen-Theorie auf n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

Im folgenden sei p eine natürliche Zahl mit

$$1 \leq p \leq n-1.$$

Auf der Menge aller C^λ -Abbildungen ($\lambda \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) $x: G_x \rightarrow M$ von Gebieten $G_x \subset \mathbb{R}^p$ betrachten wir die Äquivalenzrelation \equiv mit der definierenden Eigenschaft:

$$x \equiv y \iff \text{es existiert ein orientierungstreuer}^{18)} \text{ } C^\lambda\text{-Diffeomorphismus } T \text{ mit } x \circ T = y.$$

Unter einer (orientierten) C^λ -p-Fläche ($r \geq \lambda$) verstehen wir dann eine Äquivalenzklasse

$$F := \left[\begin{array}{l} x: G_x \rightarrow M \\ (u^\alpha) \mapsto x(u^\alpha) \end{array} \right]$$

bezüglich \equiv , für die gilt:¹⁹⁾

$$1) \quad \forall_{x \in F} \quad \forall_{(u^\alpha) \in G_x} \quad x_1 \wedge \dots \wedge x_p(u^\alpha) \neq 0,$$

wobei

$$x_\rho := \frac{\partial x}{\partial u^\rho}.$$

18) positive Funktionaldeterminante.

19) Wegen der Parameterunabhängigkeit genügt es, diese Eigenschaft für nur einen Repräsentanten x zu fordern.

2.0 Fragen der p-Flächen-Theorie bei variabler Ausstattung

Bekanntes Flächentheorien der verschiedensten Räume ist folgende Methode gemein: mittels der Parameterdarstellungen der Fläche und der Raumstrukturen wird eine Begleitbasis fixiert, deren Verhalten sich dann in den Ableitungsgleichungen widerspiegelt. Aus den Ableitungsgleichungen lassen sich einerseits geometrisch deutbare Invarianten gewinnen, andererseits sind die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen charakteristisch für die Fläche (Fundamentalsatz). Wir betrachten jetzt C^λ -p-Flächen unter Verzicht auf die Fixierung einer Begleitbasis.

Dabei sei λ geeignet groß.

Wir denken uns die p linear unabhängigen Vektorfelder

$$z_\rho := x_\rho := \frac{\partial x}{\partial u^\rho}$$

durch $\bar{p} := n-p$ weitere, linear unabhängige Vektorfelder z_ρ zu einem Basisfeld $\{z_A \mid A \in \{1, \dots, n\}\} =: \{z_A\}$ der Fläche ergänzt. Das Feld der \bar{p} -dimensionalen linearen Räume $\text{span}\{z_{p+1}, \dots, z_n\} =: \langle z_{\bar{p}} \rangle$ heißt eine Ausstattung²⁰⁾ der Fläche F.

Bezüglich $\{z_A\}$ gelten Ableitungsgleichungen der Form²¹⁾

$$(32) \quad \partial_\sigma x = z_\sigma$$

$$(33) \quad \bigvee_{A=1}^n D_\sigma z_A = T_{A \sigma}^B z_B.$$

20) Für Hyperflächen findet sich der Begriff "ausgestattet" bei Schirokow (1962), S. 102 und wird synonym mit "normalisiert" verwendet. Wir werden (vgl. 2.1) dagegen "Ausstattung" und "Normalisierung" unterschiedlich gebrauchen; denn unsere Abhandlungen über Ausstattungen haben keinen literarischen Bezug.

21) $\partial_\sigma := \frac{\partial}{\partial u^\sigma}$, $D_\sigma := \frac{D}{\partial u^\sigma}$.

Sei $u^\alpha \mapsto u^{\alpha'}$ (u^α) eine zulässige Parametertransformation. Eine umkehrbare Transformation

$$(34) \quad z_A \mapsto z_{A'} := v_{A'}^A z_A \quad \text{für } A, A' \in \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\bigvee_{\rho'=1}^p \quad \bigvee_{\bar{\rho}=p+1}^n \quad \bigvee_{\rho=1}^p \quad \left(v_{\rho'}^{\bar{\rho}} = 0 \quad \text{und} \quad v_{\rho'}^{\rho} = \frac{\partial u^{\rho}}{\partial u^{\rho'}} \right)$$

beschreibt dann den Übergang zu einer anderen Begleitbasis derart, daß die Tangentialebene $\langle z_\rho \rangle$ in sich übergeht. Falls speziell alle $v_{\bar{\rho}}^{\rho} = 0$, so bleibt auch die Ausstattung erhalten.

Unter (34) ergibt sich für die Koeffizienten in (33) das Transformationsgesetz²²⁾

$$(35) \quad T_{A'}^{B'} = v_{A'}^A v_B^{B'} v_{\sigma'}^{\sigma} T_{A \sigma}^B + v_B^{B'} \partial_{\sigma} v_{A'}^B v_{\sigma'}^{\sigma},$$

d. h. sie transformieren sich wie "Zusammenhangskoeffizienten".

Satz 11:

Bezeichnet $\{z^A\}$ das zu $\{z_A\}$ duale Basisfeld²³⁾ und

$$s_{\rho \sigma}^A := T_{\rho \sigma}^A - T_{\sigma \rho}^A = 2 T_{[\rho \sigma]}^A,$$

so lauten die Vertauschbarkeitsrelationen für (32)

$$(36) \quad s_{\rho \sigma}^A = S_{k h}^i(x) z_{\rho}^k z_i^A z_{\sigma}^h =: S_{\rho \sigma}^A(x).$$

²²⁾ $(v_{A'}^A)$ invers zu $(v_A^{A'})$.

²³⁾ $[]$ bezeichnet die Alternation.

Beweis:

Die Vertauschbarkeitsrelation

$$0 = \partial_{\sigma} z_{\rho}^i - \partial_{\rho} z_{\sigma}^i$$

ist wegen (33) äquivalent zu

$$0 = T_{\rho \sigma}^B z_B^i - T_{\sigma \rho}^B z_B^i - z_{\rho}^k \Gamma_{k h}^i z_{\sigma}^h + z_{\sigma}^k \Gamma_{k h}^i z_{\rho}^h,$$

woraus durch Überschieben mit z_i^A die Behauptung folgt.

Damit nun zu vorgegebenen Funktionen $u^{\alpha} \mapsto T_{A \sigma}^B(u^{\alpha})$ das zu (32), (33) analoge Differentialgleichungssystem lösbar ist, müssen seine Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein; diejenigen für (32) nehmen dabei gerade die Form der Vertauschbarkeitsrelationen (36) an. u^{α} und z_A^i sind jetzt aber unabhängige Variable. Daher können die (36) formal gleichen Integrabilitätsbedingungen höchstens dann gelten, wenn dort beide Seiten konstant sind. Eine Charakterisierung von p-Flächen durch Größen $u^{\alpha} \mapsto T_{A \sigma}^B(u^{\alpha})$ scheidet also i. allg. aus. Eine ähnliche Situation hat Eschmann bei der Hyperflächentheorie in Riemannschen Mannigfaltigkeiten festgestellt (vgl. Eschmann (1973), S.2 f.), wo eine Fundamentalsatztheorie analog der Euklidischen nicht existiert, da das den Ableitungsgleichungen entsprechende partielle Differentialgleichungssystem zu auf der Parametermannigfaltigkeit vorgegebenen Matrixfunktionen nicht vollständig integrierbar ist. Eschmann ändert daher die Fragestellung, um zu Fundamentalsätzen zu kommen. Vielleicht ist dort ein Ansatzpunkt zu finden, der auch in unserem Fall zu einer (von der Problemstellung her abgewandelten) Fundamentalsatztheorie führt. Bejahendenfalls wären dann Flächen bei variabler Ausstattung charakterisiert;

insbesondere wäre eine Trennung des Problems der Fixierung einer Ausstattung und der Frage nach Fundamentalsätzen erreicht. Diese Problematik ist sicher weiterer Untersuchung wert, auf die aber hier verzichtet werden muß.

2.1 Zur invarianten (affinen) Normalisierung
affiner p-Flächen

Der a-te Schmiegraum $S_a|_{x(u^\alpha)}$ einer p-Fläche im Punkt $x(u^\alpha)$ ist jener lineare Raum, der dort von den Ableitungen $x_\rho, D_\sigma x_\rho, \dots, D_{\sigma_1 \dots \sigma_{a-1}} x_\rho$ aufgespannt wird; der erste Schmiegraum ist also die Tangentialebene im betreffenden Flächenpunkt.

Die Definition der Schmiegräume ist parameterunabhängig.

In Verallgemeinerung des Begriffs der affinen C^λ -Kurve (vgl. S.11) wollen wir eine C^λ -p-Fläche ($r \geq \lambda \geq R+1$) affin nennen, wenn gilt:

1) Es gibt ein minimales $R \in \mathbb{N}$, so daß

$$\forall (u^\alpha) \in G_x \quad S_{R+1}|_{x(u^\alpha)} = T_{x(u^\alpha)}M,$$

wobei $T_{x(u^\alpha)}M$ den Tangentialraum an die Mannigfaltigkeit M bezeichnet,

2)

$$\bigvee_{a=1}^{R+1} \exists_{r_a \in \mathbb{N}} \forall (u^\alpha) \in G_x \quad \dim S_a|_{x(u^\alpha)} = r_a,$$

d.h. für alle p-Flächenpunkte haben Schmiegräume gleicher Ordnung auch gleiche Dimension,

3)

$$\bigvee_{a=1}^R r_{a+1} > r_a,$$

d.h. der a-te Schmiegraum ist echter Teilraum des (a+1)-ten.

In jedem Punkt x einer ausgestatteten p -Fläche kann man den Tangentialraum $T_x M$ eindeutig als direkte Summe aus der p -dimensionalen Tangentialebene $S_1|_x$ und ihrem durch die Ausstattung gegebenen p -dimensionalen Komplementärraum $N|_x$ angeben; für das Tangentialbündel gilt also längs der Fläche einerseits

$$TM = S_1 \oplus N$$

und für affine p -Flächen wegen Eigenschaft 1)

$$TM = S_{R+1} .$$

Ist nun ein Feld von Unterräumen N_1, \dots, N_R von N festgelegt, so daß

$$N = N_1 \oplus \dots \oplus N_R$$

und -

$$\bigvee_{a=1}^R S_a \oplus N_a = S_{a+1},$$

dann nennen wir N eine Normalisierung²⁰⁾ der p -Fläche und den Raum $N_a|_x$ a -ten Normalraum in x .

Jede Normalisierung bestimmt eine Geometrie in der Fläche, und zu jeder Flächengeometrie gehören gewisse Normalisierungen.

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, eine Normalisierung invariant festzulegen:²⁴⁾

Diese Fragestellung ist vor allem in der

²⁴⁾ In der Literatur: "Problem der invarianten Normalisierung" bei Liber oder "Einspannungsproblem" bei Weise, Klingenberg, "Einbettungsproblem" bei Hlavatý.

Affingetrie relevant; in anderen Zweigen der Differentialgeometrie kann ja die Flächeneinspannung mit Hilfe der metrischen Raumstrukturen im allgemeinen leichter vollzogen werden.

Für Hyperflächen ($p = n-1$, $R+1 = 2$) im gewöhnlichen affinen Raum kennen wir die Blaschkesche Affinnormale²⁵⁾. Eine Normale für Hyperflächen einer n -dimensionalen affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeit wird von Schouten (1923) unter speziellen Voraussetzungen, etwas allgemeiner von Izmajlov (1956) angegeben. Geometrisch deutbar und eine direkte Verallgemeinerung der Blaschkeschen Affinnormalen ist die von Barthel (1966) konstruierte, deren Definition durch Attallah (1971) für Mannigfaltigkeiten mit nichtlinearem Zusammenhang erweitert wird und in denselben Räumen, abgewandelt durch Volkmer (1974), eine natürliche Gestalt findet. Dabei wird in den drei letztgenannten Arbeiten noch wesentlich eine an den Zusammenhang gekoppelte Volumenstruktur benutzt. Wir werden zur Festlegung der Normalisierung ohne diese Zusatzstruktur auskommen.

Während also für $p = n-1$ die Frage der invarianten Normalisierung weitgehend geklärt ist, bedarf es für $1 < p < n-1$ einiger Anstrengung, um auch nur in Spezialfällen eine Lösung herbeizuführen. Einen Überblick über bisher veröffentlichte Arbeiten auf diesem Gebiet vermittelt nachstehende Tabelle²⁶⁾:

25) Vgl. Blaschke (1923), S. 153 und §40.

26) Vgl. auch Anhang.

Autor	R	Raum
Hlavatý (1949) ¹⁻³	beliebig	Mannigfaltigkeit mit symmetrischem linearem Zusammenhang
Weise (1938) (1939)	1 "	gewöhnlicher affiner Raum " " "
Atanasjan (1954)	1	gewöhnlicher affiner Raum
Klingenberg (1951) (1952)	1 beliebig	gewöhnlicher affiner und projektiver Raum gewöhnlicher affiner Raum
Liber (1952) (1953) (1974) (1966)	1 1 beliebig 27)	zentroaffiner Raum projektiver Raum gewöhnlicher affiner und zentroaffiner Raum

27) In Anlehnung an die Arbeiten von Hlavatý.

Dabei unterscheidet sich das Vorgehen von Hlavatý grundsätzlich von dem der anderen Autoren, die alle mehr oder weniger auf dem Gedankengut Weises aufbauen. Hlavatý bestimmt ein System von Zusammenhängen für Normalräume aus linearen Abhängigkeitsrelationen höherer Ableitungen der Tangentenvektoren. Dieses System ist aber nur bei maximaler Dimension aller Schmiegräume eindeutig. Für den "non maximal case" wird das Einbettungsproblem nur scheinbar gelöst, da die Wahl willkürlicher Koeffizientenfunktionen das Ergebnis beeinflusst. Hlavatýs Theorie erfaßt also wegen der Maximalitätsvoraussetzung zwar affine Kurven, aber schon niemals Hyperflächen. Im übrigen bedeutet der maximale Fall eine Einschränkung der möglichen Raumdimensionen.

Diese Schwierigkeiten stellen sich in den Arbeiten der anderen Autoren nicht. Hier sind es vielmehr Voraussetzungen über die Invertierbarkeit gewisser Tensoren, die die Allgemeingültigkeit der Theorien mindern. Diesem Mangel gegenüber steht die Transparenz und somit Vergleichbarkeit der Verfahren, so daß je nach Voraussetzung der mögliche Weg ausgesucht werden kann. Eine herausragende Stellung nehmen die Arbeiten von Liber (1952) und (1966) ein, da sie mit einer einzigen Voraussetzung auskommen, die ohnehin auch von den übrigen Autoren benutzt wird. In die Konstruktionen von Liber geht aber wesentlich die Symmetrie des affinen Raumes ein, so daß eine analoge Bildung für Mannigfaltigkeiten mit beliebigem linearem Zusammenhang nicht möglich ist.

Wir werden für p -Flächen in den letztgenannten Räumen eine invariante Normalisierung angeben, die nur eine minimale, affin vertretbare Voraussetzung benötigt.

2.1.0 Problemstellung

Wir betrachten eine affine p-Fläche mit Normalisierung N.
Es sei

$$\bigvee_{a=1}^{R+1} s_a := \dim S_a ,$$

$$\bigvee_{a=1}^R r_a := \dim N_a ,$$

und

$$(37) \quad \bigvee_{a=1}^R \rho_a, v_a, \dots \in \{s_a+1, \dots, s_{a+1}=s_a+r_a\} ,$$

gegebenenfalls

$$\rho_0, v_0, \dots \in \{1, \dots, p=s_1\} .$$

Ab jetzt benutzen wir Begleitbasen, die mit der Normalisierung verträglich sind, und nummerieren die Vektoren so, daß

$$\bigvee_{a=1}^R z_{\rho_a} \in N_a \quad \text{und} \quad z_{\rho_a} \notin S_a .$$

Dann nehmen die Ableitungsgleichungen (33) die Gestalt

$$(38) \quad \bigvee_{a=0}^{R-1} D_{\sigma} z_{\rho_a} = \sum_{b=0}^{a+1} T_{\rho_a \sigma}^{v_b} z_{v_b}$$

$$D_{\sigma} z_{\rho_R} = \sum_{b=0}^R T_{\rho_R \sigma}^{v_b} z_{v_b}$$

an; es ist also

$$\bigvee_{a=0}^{R-2} \bigvee_{\rho_a=s_a+1}^{s_{a+1}} \bigvee_{B=s_{a+2}+1}^n T_{\rho_a \sigma}^B = 0 ,$$

und die Transformationen (34) werden eingeschränkt zu

$$(39) \quad \bigvee_{a=0}^R z_{\rho_a} \longrightarrow z_{\rho'_a} = \sum_{b=0}^a v_{\rho'_a}^{\rho_b} z_{\rho_b},$$

also $v_{\rho'_a}^{\rho_b} = 0$ für $b > a$. Aus der Regularität von $(v_{\rho'_a}^{\rho_a})$ folgt dann auch die von $(v_{\rho'_a}^{\rho_a})$ für $a \in \{0, \dots, R\}$.

$(v_{\rho'_a}^{\rho_a})$ sei invers zu $(v_{\rho'_a}^{\rho_a})$.

Satz 13 :

a) Bei Transformationen (39) bleibt die Normalisierung genau dann erhalten, wenn

$$(40) \quad \bigvee_{a=0}^R \bigvee_{b=0}^R (b \neq a \implies v_{\rho'_a}^{\rho_b} = 0),$$

d.h. wenn (39) nur Basistransformationen innerhalb der Normalräume beschreibt.

b) Für den Übergang zu einer beliebigen anderen Normalisierung genügt es, Transformationen (39) zu nehmen, für die überall außer

$$(41) \quad \bigexists_{a=1}^R \bigexists_{\rho'_a = s_a + 1}^{s_{a+1}} \sum_{b=0}^{a-1} v_{\rho'_a}^{\rho_b} z_{\rho_b} \neq 0$$

speziell noch

$$(42) \quad \bigvee_{a=0}^N \bigvee_{\rho_a, \rho'_a = s_a + 1}^{s_{a+1}} v_{\rho'_a}^{\rho_a} = \delta_{\rho'_a}^{\rho_a} \text{ gilt.}$$

Beweis:

a) ist trivial.

b) (41) ist wegen (40) notwendig und hinreichend für eine nichttriviale Normalisierungsänderung. Durch

$$(43) \quad \tilde{z}_{\rho_a} := v_{\rho_a}^{\rho'_a} z_{\rho'_a} = \sum_{b=0}^a v_{\rho_a}^{\rho'_a} v_{\rho'_a}^{\sigma_b} z_{\sigma_b} \\ = z_{\rho_a} + \sum_{b=0}^{a-1} v_{\rho_a}^{\rho'_a} v_{\rho'_a}^{\sigma_b} z_{\sigma_b}$$

werden dieselben Normalräume beschrieben wie durch die z_{ρ_a} . (43) ist aber Ergebnis einer Transformation (39), die (42) erfüllt.

Wir unterscheiden also

a) Basistransformationen in den Normalräumen

$$(44) \quad z_{\rho_a} \mapsto z_{\rho'_a} := v_{\rho'_a}^{\rho_a} z_{\rho_a} \quad \text{für } a \in \{1, \dots, R\}$$

und

b) reine Normalisierungstransformationen, beschreibbar durch

$$(45) \quad z_{\rho_a} \mapsto \tilde{z}_{\rho_a} := z_{\rho_a} + \sum_{b=0}^{a-1} v_{\rho_a}^{\rho_b} z_{\rho_b} \quad \text{für } a \in \{1, \dots, R\}.$$

Satz 14 :

Jede Normalisierung induziert ein (R+1)-gliedriges Zusammenhangssystem, nämlich (vgl. (38)) die Größen mit den Komponenten

$$T_{\rho_a}^{\nu_a \sigma} \quad \text{für } a \in \{0, \dots, R\},$$

für die bei Basistransformationen (44) gilt:

$$(46) \quad \bigvee_{a=1}^R T_{\rho'_a}^{v'_a}{}_{\sigma} = v_{v'_a}^{v'_a} v_{\rho'_a}^{\rho_a} T_{\rho_a}^{v_a}{}_{\sigma} + \partial_{\sigma} v_{\rho'_a}^{\rho_a} \cdot v_{v'_a}^{v'_a}{}_{\rho_a},$$

und bei Parametertransformationen $u^{\sigma} \mapsto u^{\sigma'}(u^{\sigma})$ mit
mit $u_{\sigma}^{\sigma'} := \partial_{\sigma} u^{\sigma'}$:

$$(47) \quad T_{\rho'}^{v'}{}_{\sigma'} = u_{v'}^{v'} u_{\rho}^{\rho} u_{\sigma}^{\sigma} T_{\rho}^{v}{}_{\sigma} + \partial_{\sigma} u_{\rho}^{\rho} u_{v'}^{v'} u_{\sigma'}^{\sigma},$$

sowie

$$\bigvee_{a=1}^R T_{\rho_a}^{v_a}{}_{\sigma'} = u_{\sigma'}^{\sigma} T_{\rho_a}^{v_a}{}_{\sigma}.$$

Beweis mittels (35).

Transformieren sich die Komponenten einer Größe tensoriell bezüglich Transformationen (44), so wollen wir sie einen N-Tensor nennen, analog einen F-Tensor bei tensoriellem Verhalten unter Parametertransformationen. Analog der MK-Ableitung in der Kurventheorie läßt sich wegen (46) und (47) eine MFN-Ableitung \mathbb{D}_{σ} einführen; z.B. ist für einen bezüglich N kovarianten N-Vektor z_{ρ_a} die MFN-Ableitung

$$(1 \leq a \leq R) \quad \mathbb{D}_{\sigma} z_{\rho_a} := D_{\sigma} z_{\rho_a} - z_{v_a} T_{\rho_a}^{v_a}{}_{\sigma}$$

wieder ein N-Vektor und für einen F-Vektor z_{ρ} die MFN-Ableitung

$$\mathbb{D}_{\sigma} z_{\rho} := D_{\sigma} z_{\rho} - z_{v} T_{\rho}^{v}{}_{\sigma}$$

ein F-Tensor.

Die Ableitungsgleichungen (38) haben jetzt die Gestalt

$$(48) \quad \bigvee_{a=0}^{R-1} D_{\sigma} z_{\rho_a} = \sum_{\substack{b=0 \\ b \neq a}}^{a+1} T_{\rho_a \sigma}^{v_b} z_{v_b},$$

$$D_{\sigma} z_{\rho_R} = \sum_{b=0}^{R-1} T_{\rho_R \sigma}^{v_b} z_{v_b}$$

Satz 15 :

Bei einer Normalisierungstransformation (45) gilt für die Komponenten der induzierten Zusammenhänge

$$(49) \quad \bigvee_{a=1}^{R-1} \hat{T}_{\rho_a \sigma}^{v_a} = T_{\rho_a \sigma}^{v_a} + v_{\rho_a}^{\rho_{a-1}} T_{\rho_{a-1} \sigma}^{v_a} - v_{\rho_{a+1}}^{v_a} T_{\rho_a \sigma}^{\rho_{a+1}}$$

$$\hat{T}_{\rho_R \sigma}^{v_R} = T_{\rho_R \sigma}^{v_R} + v_{\rho_R}^{\rho_{R-1}} T_{\rho_{R-1} \sigma}^{v_R} - 0,$$

und für die Komponenten der "Fundamentaltensoren"²⁸⁾

$$(50) \quad \bigvee_{a=1}^R \hat{T}_{\rho_{a-1} \sigma}^{v_a} = T_{\rho_{a-1} \sigma}^{v_a}.$$

Beweis:

Schneller als aus (35) folgt der Beweis direkt aus den Ableitungsgleichungen:

Sei $\tilde{z}_{\rho_0} := z_{\rho_0}$. Dann gilt mit $v_{\rho_0}^{\rho_{-1}} := 0$

$$\bigvee_{a=0}^R D_{\sigma} \tilde{z}_{\rho_a} = D_{\sigma} z_{\rho_a} + \sum_{b=0}^{a-1} \partial_{\sigma} v_{\rho_a}^{\rho_b} \cdot z_{\rho_b} + \sum_{b=0}^{a-1} v_{\rho_a}^{\rho_b} \sum_{c=0}^{b+1} T_{\rho_b \sigma}^{v_c} z_{v_c}$$

²⁸⁾ Wir wollen diesen Begriff verwenden, weil die $T_{\rho_{a-1} \sigma}^{v_a}$ die Verallgemeinerung der quadratischen Grundform der Hyperflächentheorie darstellen. Außerdem gilt bei Transformationen (39) $T_{\rho'_{a-1} \sigma'}^{v'_a} = v_{\rho'_{a-1}}^{\rho_{a-1}} v_{v'_a}^{v_a} v_{\sigma'}^{\sigma} T_{\rho_{a-1} \sigma}^{v_a}$.

und

$$\bigvee_{a=0}^R D_{\sigma} z_{\rho_a} = \sum_{b=0}^{a+1} \tilde{T}_{\rho_a \sigma}^{v_b} \left(z_{v_b} + \sum_{c=0}^{b-1} v_{v_b}^{\rho_c} z_{\rho_c} \right),$$

wenn man $\tilde{z}_{v_{R+1}} := 0$ und $\tilde{T}_{\rho_R \sigma}^{v_{R+1}} := 0$ setzt.

Koeffizientenvergleich bei $z_{\sigma_{a+1}}$ liefert (50) und dann bei z_{σ_a} gerade (49).

Lemma 4:

Für $a \in \{1, \dots, R\}$ gibt es (nicht notwendig eindeutige) FN-Tensoren mit Komponenten

$$h_{\rho_a}^{\rho_{a-1} \sigma},$$

so daß

$$(51) \quad \bigvee_{a=1}^R h_{\rho_a}^{\rho_{a-1} \sigma} T_{\rho_{a-1} \sigma}^{v_a} = \delta_{\rho_a}^{v_a}.$$

Diese Tensoren nennen wir quasi-inverse Fundamental-tensoren.

Beweis:

Liefern für $a \in \{1, \dots, R\}$ die Vektorfelder $z_{\rho}, z_{\rho_1}, \dots, z_{\rho_{a-1}}$ jeweils Basen der S_a , so sind die Felder $z_{\rho}, D_{\sigma} z_{\rho}, D_{\sigma} z_{\rho_1}, \dots, D_{\sigma} z_{\rho_{a-1}}$ Erzeugende für S_{a+1} . Daher existiert für $a \in \{1, \dots, R\}$ eine Darstellung

$$(52) \quad z_{\rho_a} = \sum_{b=0}^{a-1} h_{\rho_a}^{\rho_b \sigma} D_{\sigma} z_{\rho_b} + h_{\rho_a}^{\rho} z_{\rho}$$

und mit (38)

$$= \sum_{b=0}^{a-1} h_{\rho_a}^{\rho_b \sigma} \sum_{c=0}^{b+1} T_{\rho_b \sigma}^{v_c} z_{v_c} + h_{\rho_a}^{\rho} z_{\rho}.$$

Koeffizientenvergleich bei z_{v_a} liefert die Behauptung.

Aus (52) folgt noch

$$\bigvee_{a=2}^R h_{\rho_a}^{\rho_{a-2} \sigma} T_{\rho_{a-2} \sigma}^{\rho_{a-1}} = 0$$

und

$$h_{\rho_1}^v = 0.$$

2.1.1. Festlegung einer invarianten Normalisierung für affine p-Flächen mit R=1

Wegen $R = 1$ verwenden wir statt $v_a, \rho_a \dots$ einfacher

$$\bar{v}, \bar{\rho} \dots \in \{p+1, \dots, n\} .$$

Dann reduzieren sich die Normalisierungstransformationen (45) auf

$$(53) \quad z_{\bar{\rho}} \mapsto \tilde{z}_{\bar{\rho}} := z_{\bar{\rho}} + v_{\bar{\rho}}^{\rho} z_{\rho} ,$$

und damit (49) sowie (50) auf

$$(54) \quad \begin{aligned} \tilde{T}_{\rho \sigma}^v &= T_{\rho \sigma}^v - v_{\bar{\rho}}^v T_{\rho \sigma}^{\bar{\rho}} , \\ \tilde{T}_{\bar{\rho} \sigma}^{\bar{v}} &= T_{\bar{\rho} \sigma}^{\bar{v}} + v_{\bar{\rho}}^{\rho} T_{\rho \sigma}^{\bar{v}} , \\ \tilde{T}_{\rho \sigma}^{\bar{v}} &= T_{\rho \sigma}^{\bar{v}} . \end{aligned}$$

Für jeden nach Lemma 4 existierenden quasi-inversen Fundamentaltensor gilt dann

$$v_{\bar{\rho}}^v = h^{\rho \sigma} (T_{\rho \sigma}^v - \tilde{T}_{\rho \sigma}^v) ,$$

d.h. $v_{\bar{\rho}}^v$ ist von der speziellen Wahl von $h^{\rho \sigma}$ unabhängig. Außerdem sieht man aus dieser Darstellung von $v_{\bar{\rho}}^v$, daß zur Bestimmung des Normalraums die $T_{\bar{\rho} \sigma}^{\bar{v}}$ nicht gebraucht werden.

Hat man nun längs der affinen p-Fläche ein FN-Tensorfeld mit den Komponenten $w_{\bar{\rho}}^v$ bezüglich einer Ausgangsbasis, die sich bei Normalraumtransformationen nach dem Gesetz

$$\tilde{w}_{\bar{\rho}}^v = w_{\bar{\rho}}^v - v_{\bar{\rho}}^v \quad \text{ändern,}$$

so legt die Bedingung

$$\tilde{w}_{\bar{\rho}}^{\nu} = 0$$

ihrerseits eindeutig eine Transformation (53) fest. Um $w_{\bar{\rho}}^{\nu}$ geeignet definieren zu können, brauchen wir eindeutig festgelegte inverse Fundamentaltensoren, in Komponenten $T^{\rho}_{\bar{\nu}}{}^{\sigma}$, mit den Eigenschaften^{29) 30)}

$$(55) \quad T^{\rho}_{\bar{\rho}}{}^{\sigma} T_{\rho}{}^{\bar{\nu}}{}_{\sigma} = p \delta_{\bar{\rho}}^{\bar{\nu}} \quad ,$$

$$(56) \quad T^{\rho}_{\bar{\rho}}{}^{\sigma} T_{\nu}{}^{\bar{\rho}}{}_{\sigma} = \bar{p} \delta_{\nu}^{\rho} \quad ,$$

$$(57) \quad T^{\rho}_{\bar{\rho}}{}^{\sigma} T_{\rho}{}^{\bar{\rho}}{}_{\nu} = \bar{p} \delta_{\nu}^{\sigma} \quad .$$

Satz 16 :

Für

$$S^{\bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_p} := \frac{1}{p!} \delta_{1 \dots p}^{\rho_1 \dots \rho_p} \delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{\rho_1 \sigma_1}{}^{\bar{\rho}_1} \dots T_{\rho_p \sigma_p}{}^{\bar{\rho}_p}$$

gilt

1) Symmetrie in $\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_p$,

$$\begin{aligned} 2) \text{31)} \quad S^{\bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_p} &= \delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{1 \sigma_1}{}^{(\bar{\rho}_1} \dots T_{p \sigma_p}{}^{\bar{\rho}_p)} \\ &= \delta_{1 \dots p}^{\rho_1 \dots \rho_p} T_{\rho_1 1}{}^{(\bar{\rho}_1} \dots T_{\rho_p p}{}^{\bar{\rho}_p)} \quad , \end{aligned}$$

3) $S^{\bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_p}$ stellt einen N-Tensor und eine F-Skalar-dichte vom Gewicht 2 dar.

²⁹⁾ $\frac{1}{p} T^{\rho}_{\bar{\nu}}{}^{\sigma}$ sind dann wegen (55) unter den quasi-inversen Fundamentaltensoren ausgezeichnet.

³⁰⁾ Das hier durchgeführte Inversionsverfahren hat Weise (1939) im Spezialfall des affinen Raumes angegeben, wo die Fundamentaltensoren in den unteren Indizes symmetrisch sind. Wir erreichen hier auch ohne Symmetrie die Eigenschaften (55) bis (57).

³¹⁾ () bezeichnet die Symmetrisierung.

Beweis:

1) trivial.

$$\begin{aligned}
 2) \quad \delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{1 \sigma_1}^{(\bar{\rho}_1)} \dots T_{p \sigma_p}^{(\bar{\rho}_p)} &= -\delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{1 \sigma_1}^{(\bar{\rho}_1)} \dots \\
 &\quad \text{Stelle } (\alpha) \bar{\rho}_\alpha \quad (\beta) \bar{\rho}_\beta \quad (\gamma) \bar{\rho}_\gamma \\
 &\quad \dots T_\alpha^{\bar{\rho}_\alpha} \sigma_\beta \dots T_\beta^{\bar{\rho}_\beta} \sigma_\alpha \dots T_\gamma^{\bar{\rho}_\gamma} \sigma_\gamma \\
 &= -\delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{1 \sigma_1}^{(\bar{\rho}_1)} \dots T_\alpha^{\bar{\rho}_\alpha} \sigma_\beta \dots T_\beta^{\bar{\rho}_\beta} \sigma_\alpha \dots T_p^{\bar{\rho}_p} \sigma_p \\
 &= -\delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{1 \sigma_1}^{(\bar{\rho}_1)} \dots T_\beta^{\bar{\rho}_\beta} \sigma_\alpha \dots T_\alpha^{\bar{\rho}_\alpha} \sigma_\beta \dots T_p^{\bar{\rho}_p} \sigma_p ;
 \end{aligned}$$

also folgt

$$\delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{1 \sigma_1}^{(\bar{\rho}_1)} \dots T_{p \sigma_p}^{(\bar{\rho}_p)} = \delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{[1 \dots p]}^{[\sigma_1 \dots \sigma_p]}$$

Rest analog.

3) Das N-Verhalten ist sofort aus der Definition von $S^{\bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_p}$ ersichtlich. Das F-Verhalten folgt aus

$$\delta_{1' \dots p'}^{\sigma_1' \dots \sigma_p'} = p! \delta_{[1' \dots p']}^{\sigma_1' \dots \sigma_p'} = \det(u_\rho^\sigma) u_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \dots u_{\sigma_p}^{\sigma_p'} \delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} .$$

Satz 17:

Sei

$$T^{\bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_{2p}} := S^{(\bar{\rho}_1 \dots \bar{\rho}_p} S^{\bar{\rho}_{p+1} \dots \bar{\rho}_{2p})}$$

und $r := \bar{p}$. Dann gilt:

$$1) \quad T := \frac{1}{r!} \delta_{\bar{\lambda}_{1,1} \dots \bar{\lambda}_{1,r}}^{p+1 \dots n} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{2p,1} \dots \bar{\lambda}_{2p,r}}^{p+1 \dots n} T^{\bar{\lambda}_{1,1} \dots \bar{\lambda}_{2p,1}} \dots \\ \dots T^{\bar{\lambda}_{1,r} \dots \bar{\lambda}_{2p,r}}$$

ist N-Skaldichte vom Gewicht $(-2p)$ und F-Skaldichte vom Gewicht $(+4r)$.

2)

$$(58) \quad T = \Delta \quad ,$$

wobei

$$\Delta := \delta_{\bar{\lambda}_{2,1} \dots \bar{\lambda}_{2,r}}^{p+1 \dots n} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{2p,1} \dots \bar{\lambda}_{2p,r}}^{p+1 \dots n} \cdot \\ \cdot T^{p+1 \bar{\lambda}_{2,1} \dots \bar{\lambda}_{2p,1}} \dots T^n \bar{\lambda}_{2,r} \dots \bar{\lambda}_{2p,r}$$

gesetzt wurde.

Beweis:

1) nach Satz 16.

2) Für $i, k \in \{1, \dots, r\}$ mit $i \neq k$ gilt

$$\delta_{\bar{\lambda}_{2,1} \dots \bar{\lambda}_{2,r}}^{p+1 \dots n} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{2p,1} \dots \bar{\lambda}_{2p,r}}^{p+1 \dots n} T^{p+1 \bar{\lambda}_{2,1} \dots \bar{\lambda}_{2p,1}} \dots \\ \dots T^{p+k \bar{\lambda}_{2,i} \dots \bar{\lambda}_{2p,i}} \dots T^{p+i \bar{\lambda}_{2,k} \dots \bar{\lambda}_{2p,k}} \dots T^n \bar{\lambda}_{2,r} \dots \bar{\lambda}_{2p,r} \\ = (-1)^{2p-1} \cdot \Delta = -\Delta$$

In T tritt also $r!$ -mal die Größe Δ als Summand auf.

Aus dem Beweis von Satz 17 erkennt man, daß (58) nur auf Grund der geraden Indexanzahl gilt. Eine zu T analoge Bildung für Größen ungerader Indexanzahl würde Null.

Unter der Voraussetzung³²⁾, daß

T längs der Fläche nullstellenfrei ist, definieren wir die symmetrischen Größen

$$T_{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_{2p}} := \frac{1}{T} \delta_{\bar{\lambda}_1}^{p+1} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{1,2}} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{1,r}} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{2p}}^{p+1} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{2p,2}} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{2p,r}}$$

$$T_{\bar{\lambda}_1,2} \dots T_{\bar{\lambda}_{2p,2}} \dots T_{\bar{\lambda}_{1,r}} \dots T_{\bar{\lambda}_{2p,r}}$$

(N-Tensor, F-Skalardichte vom Gewicht -4)

und

$$S_{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_p} := \frac{1}{(r-1)!} T_{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_{2p}} S_{\bar{\lambda}_{p+1} \dots \bar{\lambda}_{2p}}$$

(N-Tensor, F-Skalardichte vom Gewicht -2)

und erhalten die Relationen

$$h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} := T_{\bar{\lambda}} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_{2p} T^{\bar{\rho}} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_{2p} = (r-1)! \delta_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}}$$

$$k_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} := S_{\bar{\lambda}} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_p S^{\bar{\rho}} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_p = \delta_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} .$$

³²⁾ Diese Voraussetzung ist der Affingeometrie eigen. Sie findet sich schon bei Blaschke (1923) §46 und §49 (T entspricht dort dem Quadrat der Determinante der quadratischen Grundform) und wird in jeder der hier zitierten Arbeiten zur Normalisierung - etwas abgewandelt nur bei Liber - benutzt. Sie impliziert eine Einschränkung der Dimensionen von Raum und Fläche. Näheres hierzu vgl. Weise (1939), S.174/175. Die dort angegebene, für nullstellenfreies T notwendige Bedingung $n \leq p(p+3)/2$ reduziert sich im nichtsymmetrischen Fall auf $n \leq p(p+1)$, d.h. unsere Loslösung vom symmetrischen Zusammenhang gestattet es, gegebenenfalls mehr Flächen eines Raumes vorgegebener Dimension zu beschreiben.

Beweis:

$$h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} = \frac{1}{T} \delta_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} \bar{\lambda}_{1,2} \dots \bar{\lambda}_{1,r} \dots \delta_{\bar{\lambda}_{2p}}^{\bar{\rho}} \bar{\lambda}_{2p,2} \dots \bar{\lambda}_{2p,r} \cdot \\ \cdot T^{\bar{\rho}} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_{2p} T^{\bar{\lambda}_{1,2}} \dots \bar{\lambda}_{2p,2} \dots T^{\bar{\lambda}_{1,r}} \dots \bar{\lambda}_{2p,r} .$$

Für $\bar{\rho} \neq \bar{\lambda}$ gilt in nichtverschwindenden Summanden

$$\exists_{k \in \{2, \dots, r\}} \bar{\rho} = \bar{\lambda}_{1,k} ,$$

d.h. Vertauschen der oberen Indizes $\bar{\rho}$ und $\bar{\lambda}_{1,k}$ ändert $h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}}$ nicht.

Andererseits ist dieser Indextausch gleichwertig dem Vertauschen der oberen Indizes $\bar{\lambda}_i$ und $\bar{\lambda}_{i,k}$ für alle $i \in \{2, \dots, 2p\}$, und dies wiederum äquivalent zum Vertauschen derselben unteren Indizes, und liefert daher die Größe

$$(-1)^{2p-1} h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} = - h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} .$$

Insgesamt ergibt sich also für $\bar{\rho} \neq \bar{\lambda}$

$$h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} = - h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} = 0 .$$

Für $\bar{\rho} = \bar{\lambda}$ sind in nichtverschwindenden Summanden von $h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}}$ die Indizes $\bar{\rho}, \bar{\lambda}_{1,2} \dots \bar{\lambda}_{1,r}$ paarweise verschieden und deshalb gilt

$$h_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} = \frac{1}{T} \delta_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} \bar{\lambda}_{1,2} \dots \bar{\lambda}_{1,r} \delta_{\bar{\rho}}^{\bar{\lambda}_{1,2} \dots \bar{\lambda}_{1,r}} \cdot T = (r-1) ! .$$

Nun gilt

$$k_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} = \frac{1}{(r-1)!} T^{\bar{\lambda}} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_{2p} S^{\bar{\rho}} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_p S^{\bar{\lambda}_{p+1}} \dots \bar{\lambda}_{2p} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(r-1)!} T_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_{2p} S^{(\bar{\rho} \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_p \bar{\lambda}_{p+1} \dots \bar{\lambda}_{2p})} \\
 &= \delta_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}} ,
 \end{aligned}$$

da Vertauschen von $\bar{\rho}$ mit $\bar{\lambda}_k$ für ein $k \in \{p+1, \dots, 2p\}$ äquivalent dem elementweisen Vertauschen der Tupel $(\bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_p)$ und $(\bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_{k-1}, \bar{\lambda}_{k+1}, \dots, \bar{\lambda}_{2p})$ oberer Indizes ist, letzteres aber $k_{\bar{\lambda}}^{\bar{\rho}}$ nicht ändert.

Satz 18 :

Für nullstellenfreies³²⁾ T wird durch

$$\begin{aligned}
 (59) \quad T_{\bar{\rho}}^{\rho \sigma} &:= \frac{1}{(p-1)!} \delta_{1 \dots p}^{\rho \rho_2 \dots \rho_p} \delta_{1 \dots p}^{\sigma \sigma_2 \dots \sigma_p} T_{\rho_2 \sigma_2}^{\bar{\rho}_2} \dots \\
 &\quad \dots T_{\rho_p \sigma_p}^{\bar{\rho}_p} S_{\bar{\rho} \bar{\rho}_2 \dots \bar{\rho}_p}
 \end{aligned}$$

längs der Fläche das inverse FN-Fundamentaltensorfeld definiert, das folgende Eigenschaften besitzt:

$$(60) \quad T_{\bar{\rho}}^{\rho \sigma} T_{\rho \sigma}^{\bar{\nu}} = p \delta_{\bar{\rho}}^{\bar{\nu}}$$

$$(61) \quad T_{\bar{\rho}}^{\rho \sigma} T_{\rho \nu}^{\bar{\rho}} = \bar{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma}$$

$$(62) \quad T_{\bar{\rho}}^{\rho \sigma} T_{\nu \sigma}^{\bar{\rho}} = \bar{\rho} \delta_{\nu}^{\rho} .$$

Bei Normalisierungstransformationen (53) gilt

$$(63) \quad \hat{T}_{\bar{\rho}}^{\rho \sigma} = T_{\bar{\rho}}^{\rho \sigma} .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \text{Zu (60):} \quad T_{\bar{\rho}}^{\rho \sigma} T_{\rho \sigma}^{\bar{\nu}} &= \frac{1}{(p-1)!} \delta_{1 \dots p}^{\rho_1 \dots \rho_p} \delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} \\
 &\quad \cdot T_{\rho_1 \sigma_1}^{\bar{\nu}} T_{\rho_2 \sigma_2}^{\bar{\rho}_2} \dots T_{\rho_p \sigma_p}^{\bar{\rho}_p} S_{\bar{\rho} \bar{\rho}_2 \dots \bar{\rho}_p} =
 \end{aligned}$$

$$= p k_{\bar{p}}^{\bar{v}} = p \delta_{\bar{p}}^{\bar{v}} .$$

Zu (61):

$$\begin{aligned} h_v^\sigma &:= T_{\bar{p}}^{\rho \sigma} T_{\rho \bar{v}}^{\bar{p}} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \delta_{1 \dots p}^{\rho_1 \dots \rho_p} \delta_{1 \dots p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p} T_{\rho_1 \bar{v}}^{(\bar{p}_1} T_{\rho_2 \sigma_2}^{\bar{p}_2} \dots \\ &\quad \dots T_{\rho_p \sigma_p}^{\bar{p}_p)} S_{\bar{p}_1 \dots \bar{p}_p} . \end{aligned}$$

In nichtverschwindenden Summanden gilt:

$$a) \sigma \neq v \implies \exists_{k \in \{2, \dots, p\}} v = \sigma_k ,$$

also sind unten v und σ_k vertauschbar.

Andererseits ist Vertauschen (unten) von v mit σ_k äquivalent dem Vertauschen (unten) von ρ_1 mit ρ_k und \bar{p}_1 mit \bar{p}_k , äquivalent dem Vertauschen (unten) von ρ_1 mit ρ_k , und dies liefert $-h_v^\sigma$.

Also ist $h_v^\sigma = 0$ für $\sigma \neq v$.

b) $\sigma = v \implies v, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ sind paarweise verschieden,

also

$$\delta_{1 \dots p}^{\rho_1 \dots \rho_p} T_{\rho_1 \bar{v}}^{(\bar{p}_1} T_{\rho_2 \sigma_2}^{\bar{p}_2} \dots T_{\rho_p \sigma_p}^{\bar{p}_p)} = \delta_{\bar{v} \sigma_2 \dots \sigma_p}^{1 \dots p} S_{\bar{p}_1 \dots \bar{p}_p}$$

und daher

$$h_v^\sigma = \bar{p} \delta_v^\sigma .$$

Analoger Beweis für (62).

Zu (63):

Wegen $\tilde{T}_{\rho \sigma}^{\bar{p}} = T_{\rho \sigma}^{\bar{p}}$ sind alle zur Konstruktion von $T_{\bar{p}}^{\rho \sigma}$ verwendeten Größen invariant unter (53).

Nachdem wir eindeutige inverse Fundamentaltensoren definiert haben, sind wir nun in der Lage, eine invariante Normalisierung für die betrachteten Flächen anzugeben:

Satz 19:

Für eine affine p-Fläche mit $R=1$ sei $\{z_{p+1}, \dots, z_n\}$ Basisfeld einer beliebigen Ausgangsnormalisierung N und T nullstellenfrei.

1) Bei Normalisierungstransformationen (53) gilt dann für

$$(64) \quad w_{\bar{\mu}}^{\mu} := \frac{1}{n} \mathbb{D}_{\sigma} T^{\mu \sigma}_{\bar{\mu}} + \frac{1}{n(n-p)} \mathbb{D}_{\sigma} T^{\bar{\lambda}}_{\alpha \beta} T^{\mu \beta}_{\bar{\mu}} T^{\alpha \sigma}_{\bar{\lambda}}$$

$$- \frac{1}{(n-p)(2n-p)} \mathbb{D}_{\sigma} T^{\bar{\lambda}}_{\alpha \beta} T^{\mu \sigma}_{\bar{\mu}} T^{\alpha \beta}_{\bar{\lambda}}$$

das Transformationsgesetz

$$\tilde{w}_{\bar{\mu}}^{\mu} = w_{\bar{\mu}}^{\mu} - v_{\bar{\mu}}^{\mu} .$$

2) Die durch

$$(65) \quad \tilde{w}_{\bar{\mu}}^{\mu} = 0 ,$$

d.h.
$$\tilde{z}_{\bar{\mu}} = z_{\bar{\mu}} + w_{\bar{\mu}}^{\mu} z_{\mu}$$

festgelegte Normalisierung ist invariant, also

- a) unabhängig von der Wahl des Ausgangsbasisfelds in N und
- b) unabhängig von der Wahl des Raumes N ,
- c) unabhängig von der Parameterwahl.

Beweis:

1) (71) liefert

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{D}}_{\sigma} \tilde{T}_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} &= \tilde{\mathbb{D}}_{\sigma} T_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} \\ &= \mathbb{D}_{\sigma} T_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} - T_{\rho \beta}^{\bar{\lambda}} (-v_{\bar{\rho}}^{\rho} T_{\alpha}^{\bar{\rho} \sigma}) - T_{\alpha \rho}^{\bar{\lambda}} (-v_{\bar{\rho}}^{\rho} T_{\beta}^{\bar{\rho} \sigma}) + T_{\alpha \beta}^{\bar{\rho}} v_{\bar{\rho}}^{\rho} T_{\rho}^{\bar{\lambda} \sigma} \\ &= \mathbb{D}_{\sigma} T_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} + v_{\bar{\rho}}^{\rho} (T_{\rho \beta}^{\bar{\lambda}} T_{\alpha}^{\bar{\rho} \sigma} + T_{\alpha \rho}^{\bar{\lambda}} T_{\beta}^{\bar{\rho} \sigma} + T_{\rho \sigma}^{\bar{\lambda}} T_{\alpha}^{\bar{\rho} \beta}) , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{D}}_{\sigma} \tilde{T}_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} \tilde{T}_{\bar{\mu}}^{\mu \beta} \tilde{T}_{\bar{\lambda}}^{\alpha \sigma} &= \mathbb{D}_{\sigma} T_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} T_{\bar{\mu}}^{\mu \beta} T_{\bar{\lambda}}^{\alpha \sigma} + v_{\bar{\rho}}^{\rho} (n T_{\bar{\mu}}^{\mu \beta} T_{\rho}^{\bar{\rho} \beta} + \\ &\quad + \bar{p} T_{\bar{\mu}}^{\mu \beta} T_{\beta}^{\bar{\rho} \rho}) , \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbb{D}}_{\sigma} \tilde{T}_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} \tilde{T}_{\bar{\mu}}^{\mu \sigma} \tilde{T}_{\bar{\lambda}}^{\alpha \beta} = \mathbb{D}_{\sigma} T_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} T_{\bar{\mu}}^{\mu \sigma} T_{\bar{\lambda}}^{\alpha \beta} + v_{\bar{\rho}}^{\rho} (n + \bar{p}) T_{\bar{\mu}}^{\mu \beta} T_{\rho}^{\bar{\rho} \beta} ,$$

und weiter

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{D}}_{\sigma} \tilde{T}_{\bar{\mu}}^{\mu \sigma} &= \tilde{\mathbb{D}}_{\sigma} T_{\bar{\mu}}^{\mu \sigma} \\ &= \mathbb{D}_{\sigma} T_{\bar{\mu}}^{\mu \sigma} + T_{\bar{\rho}}^{\rho \sigma} (-v_{\bar{\rho}}^{\mu} T_{\rho}^{\bar{\rho} \sigma}) + T_{\bar{\mu}}^{\mu \rho} (-v_{\bar{\rho}}^{\sigma} T_{\rho}^{\bar{\rho} \sigma}) - T_{\bar{\rho}}^{\mu \sigma} v_{\bar{\mu}}^{\rho} T_{\rho}^{\bar{\rho} \sigma} \\ &= \mathbb{D}_{\sigma} T_{\bar{\mu}}^{\mu \sigma} - v_{\bar{\rho}}^{\rho} (n \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\bar{\mu}}^{\bar{\rho}} + T_{\bar{\mu}}^{\mu \beta} T_{\beta}^{\bar{\rho} \rho}) , \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

2) a) ist trivial, da $w_{\bar{\mu}}^{\mu}$ einen kovarianten N-Tensor darstellt.

b) Hat ein Ausgangsnormalraum N^* als Basisfeld

$$z_{\bar{\mu}}^* := z_{\bar{\mu}} + \tilde{v}_{\bar{\mu}}^{\mu} z_{\mu} ,$$

so gilt nach 1)

$$\tilde{w}_{\bar{\mu}}^{\mu} = w_{\bar{\mu}}^{\mu} - \tilde{v}_{\bar{\mu}}^{\mu} ,$$

$$\text{also } \tilde{z}_{\bar{\mu}}^* := z_{\bar{\mu}}^* - \tilde{w}_{\bar{\mu}}^{\mu} z_{\mu} = z_{\bar{\mu}} + \tilde{v}_{\bar{\mu}}^{\mu} z_{\mu} - w_{\bar{\mu}}^{\mu} z_{\mu} - \tilde{v}_{\bar{\mu}}^{\mu} z_{\mu} = z_{\bar{\mu}} .$$

3) trivial.

2.1.2 Hyperflächennormalisierung als Spezialfall
und Kurvennormalisierung als spezielle Verallgemeinerung auf $R > 1$

Der Fall $p = n - 1$, ($R = 1$):

Einen Spezialfall für $R = 1$ stellen die Hyperflächen dar. Für sie haben Indizes $\bar{\mu}, \bar{\rho} \dots$ konstant den Wert n und können daher wegfallen. (64) wird dann zu

$$w^\mu := \frac{1}{n} \mathbb{D}_\sigma T^{\mu\sigma} + \frac{1}{n} \mathbb{D}_\sigma T_{\alpha\beta} T^{\mu\beta} T^{\alpha\sigma} - \frac{1}{n+1} \mathbb{D}_\sigma T_{\alpha\beta} T^{\mu\sigma} T^{\alpha\beta}$$

und wegen

$$T_{\alpha\beta} T^{\alpha\sigma} = \delta_\beta^\sigma$$

weiter zu

$$\begin{aligned} w^\mu &= - \frac{1}{n+1} \mathbb{D}_\sigma T_{\alpha\beta} T^{\mu\sigma} T^{\alpha\beta} \\ &= - \frac{1}{n+1} \frac{1}{T} \mathbb{D}_\sigma \det T_{\alpha\beta} \cdot T^{\mu\sigma} \\ &= - \frac{1}{n+1} (\partial_\sigma \log |\det T_{\alpha\beta}| - 2 T_\rho^\rho{}_\sigma + (n-1) T_\sigma) T^{\mu\sigma} . \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß für die bei Barthel (1966) und Volkmer (1974) konstruierten Affinnormalvektoren³³⁾ $w^\mu = 0$ gilt, so daß bei jeweils entsprechenden Grundstrukturen der Mannigfaltigkeit die Affinnormale aus den genannten Arbeiten mit der hier bestimmten zusammenfällt³⁴⁾.

33) Dies ist dort die Eigenschaft der Arealtreue des in der Fläche induzierten Zusammenhangs. Vgl. Barthel (1966), S.22 und Volkmer (1974), Satz 16.

34) Dies gilt nicht für Attallah (1971). Vgl. z.B. dort Satz 18, der nur den symmetrischen Anteil des Fundamentaltensors betrifft.

Der Fall $p = 1$, $(R=n-1)$:

Formal läßt sich die Normalisierungsbedingung (65) für beliebiges R verallgemeinern, wenn μ, α durch μ_{a-1}, α_{a-1} und $\bar{\mu}, \bar{\lambda}$ durch μ_a, λ_a für $a \in \{1, \dots, R\}$ ersetzt werden und eine Auszeichnung unter den nach Lemma 4 existierenden quasi-inversen zu inversen Fundamentaltensoren vorgenommen wird.

Wir beschränken uns auf den Fall $p = 1$, d.h. die Kurventheorie. Gehen wir von der in (9) definierten Begleitbasis mit den Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z_1 \\ \bigvee_{A=1}^{n-1} Dz_A &= A \gamma z_A + z_{A+1} \\ Dz_n &= \kappa^B z_B + n \gamma z_n \text{ mit } \kappa^n = 0 \end{aligned}$$

aus, so gilt für die Fundamentaltensoren³⁵⁾

$$\bigvee_{A=1}^{n-1} T_A^{A+1} = 1$$

und für die induzierten Zusammenhänge

$$\bigvee_{A=1}^n T_A^A = A \gamma \quad (\text{keine Summation}).$$

Die inversen Fundamentaltensoren existieren also, und für ihre Komponenten H_{A+1}^A gilt

$$\bigvee_{A=1}^{n-1} H_{A+1}^A = 1.$$

Ohne Summation gilt weiter

$$\bigvee_{A=1}^{n-1} \mathbb{D}T_A^{A+1} H_{A+1}^A = -T_A^{A+1} H_{A+1}^A \mathbb{D}H_{A+1}^A = -\mathbb{D}H_{A+1}^A,$$

³⁵⁾ Wir verwenden hier die Schreibweise von (33) für den Fall $p = 1$, d.h.

$$Dz_A = T_A^B z_B.$$

und daher sind alle Summanden in den (64) verallgemeinernden Größen w_{A+1}^A bis auf konstante Faktoren gleich $\mathbb{D}H_{A+1}^A$. Für Kurven reduziert sich die Verallgemeinerung ($R > 1$) von (65) auf

$$(65') \quad \bigvee_{A=1}^{n-1} \tilde{\mathbb{D}H}_{A+1}^A = 0 .$$

In unserer speziellen Ausgangsbasis (9) ergibt sich

$$\mathbb{D}H_{A+1}^A = T_A^A + T_1^1 - T_{A+1}^{A+1} = A \gamma + \gamma - (A+1) \gamma = 0,$$

d.h. die Normalisierungsbedingung (65') ist schon erfüllt. Die in Kapitel 1 entwickelte Kurventheorie ist also 1-Flächentheorie mit der (65) verallgemeinernden Normalisierungsbedingung (65').

2.2 Erste Variation von Größen invariant normalisierter affiner p-Flächen

Die affine p-Fläche F werde einer infinitesimalen Transformation (vgl. 1.3) unterworfen. Analog Lemma 1 erhält man dann aus den Ricci-Identitäten das folgende

Lemma 5:

Ist z ein kontravariantes, Z ein kovariantes C^1 -Vektorfeld auf F, so gilt

$$\nabla_{\epsilon} \bar{D}_{\sigma} \bar{z}^i |_{\circ} = D_{\sigma} (\nabla_{\epsilon} \bar{z}^i |_{\circ}) + z^k z_{\sigma}^h R_{k \ h l}^i \xi^l$$

und

$$\nabla_{\epsilon} \bar{D}_{\sigma} \bar{z}_i |_{\circ} = D_{\sigma} (\nabla_{\epsilon} \bar{z}_i |_{\circ}) - z_k z_{\sigma}^h R_{i \ h l}^k \xi^l .$$

Ist F mit einer beliebigen Begleitbasis $\{z_A | A \in \{1, \dots, n\}\}$ ausgestattet, dann nehmen wir auf jeder Vergleichsfläche F_{ϵ} als Begleitbasis die Bilder der z_A unter dem induzierten Homomorphismus der infinitesimalen Transformation, d.h. die Vektorfelder

$$\bar{z}_A^i := \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h} z_A^h .$$

Für deren Variation³⁶⁾ gilt

$$(66) \quad \nabla_{\epsilon} \bar{z}_A^i |_{\circ} = \partial_k \xi^i z_A^k + z_A^k \Gamma_{k \ h}^i \xi^h = z_A^k D_k^* \xi^i .$$

Dann erhalten wir für die durch

$$z_A^i z_i^B := \delta_A^B \quad \text{und} \quad z_A^i z_j^A = \delta_j^i$$

³⁶⁾ Vgl. (27).

definierte duale Begleitbasis wegen

$$\nabla_{\epsilon} \bar{z}_A^i |_0 z_i^B + z_A^i \nabla_{\epsilon} \bar{z}_i^B |_0 = 0$$

nach Überschieben mit z_j^A die Variation

$$(67) \quad \nabla_{\epsilon} \bar{z}_j^B |_0 = -z_i^B D_j^* \xi^i .$$

Hiermit ergibt sich das nachstehende

Lemma 6:

a) Für die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen (32) und (33) gilt

$$\partial_{\epsilon} \bar{T}_{A \sigma}^B |_0 = z_{\sigma}^h z_A^k z_i^B \mathbb{L}_{\xi} \Gamma_{k h}^i .$$

b) Die $T_{A \sigma}^B$ sind bei infinitesimalen Affinitäten³⁷⁾ invariant in erster Ordnung.

Beweis:

Wegen $T_{A \sigma}^B = D_{\sigma} z_A^i \cdot z_i^B$ und dem letzten Lemma gilt

$$\begin{aligned} \partial_{\epsilon} \bar{T}_{A \sigma}^B |_0 &= \nabla_{\epsilon} \bar{D}_{\sigma} \bar{z}_A^i |_0 z_i^B + D_{\sigma} z_A^i \nabla_{\epsilon} \bar{z}_i^B |_0 \\ &= D_{\sigma} (\nabla_{\epsilon} \bar{z}_A^i |_0) z_i^B + z_A^k z_{\sigma}^h R_{k h l}^i \xi^l z_i^B + D_{\sigma} z_A^i \nabla_{\epsilon} \bar{z}_i^B |_0 \end{aligned}$$

und mit (66) und (67)

$$\begin{aligned} &= \left(D_{\sigma} z_A^k D_k^* \xi^i + z_{\sigma}^h D_h D_k^* \xi^i \cdot z_A^k + \right. \\ &\quad \left. + z_A^k z_{\sigma}^h R_{k h l}^i \xi^l - D_{\sigma} z_A^k D_k^* \xi^i \right) \cdot z_i^B \\ &= z_{\sigma}^h z_A^k z_i^B \mathbb{L}_{\xi} \Gamma_{k h}^i . \end{aligned}$$

³⁷⁾ Vgl. (25).

Ab jetzt beschränken wir uns auf Flächen mit $R=1$.

Folgerung:

Bei infinitesimalen Affinitäten gilt für die erste Variation der inversen Fundamentaltensoren

$$(68) \quad \partial_{\varepsilon} \bar{T}^{\rho \sigma} |_{\circ} = 0$$

und damit auch (vgl. (64))

$$(69) \quad \partial_{\varepsilon} \bar{W}^{\mu} |_{\circ} = 0 .$$

Beweis:

Die Behauptung folgt aus (59) mit dem letzten Lemma.

Satz 20:

Bei infinitesimalen Affinitäten sind die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen bezüglich einer nach (65) festgelegten begleitenden Normalbasis in erster Ordnung invariant³⁸⁾, d.h.

$$(70) \quad \partial_{\varepsilon} \tilde{T}_A^B |_{\circ} = 0 .$$

Weiter gilt dann

$$\nabla_{\varepsilon} \tilde{z}_{\mu}^i |_{\circ} = \tilde{z}_{\mu}^k D_k^* \xi^i ,$$

und somit

$$\nabla_{\varepsilon} \tilde{z}_{\mu}^i |_{\circ} = \nabla_{\varepsilon} \tilde{z}_{\mu}^i |_{\circ} ,$$

d.h. die Normalvektorfelder \tilde{z}_{μ}^i von F_{ε} sind in 1. Ordnung die Bilder der Normalvektorfelder \tilde{z}_{μ}^i von F unter dem durch die infinitesimale Affinität induzierten Homomorphismus.

(70) beinhaltet also gerade die Invarianz der nach

³⁸⁾ Vgl. das entsprechende Ergebnis (31) in der Kurventheorie.

(65) ausgezeichneten Normalisierung unter infinitesimalen Affinitäten (in erster Ordnung).

Beweis:

Mit

$$w_B^A := \begin{cases} w_{\bar{\mu}}^{\mu} & \text{für } A=\mu, B=\bar{\mu} \\ 0 & \text{für } A=\bar{\mu}, B=\mu \\ \delta_B^A & \text{sonst} \end{cases}$$

wird eine begleitende invariante Normalbasis durch

$$\tilde{z}_B := w_B^A z_A$$

dargestellt, und nach (35) gilt

$$\tilde{T}_{A\sigma}^B = \bar{w}_A^C (\bar{w}^{-1})_D^B \bar{T}_C^D + (\bar{w}^{-1})_D^B \partial_\sigma \bar{w}_A^D,$$

woraus wegen (68) und (69) die Behauptung (70) folgt.

Mittels (66) ergibt sich

$$\nabla_\varepsilon \tilde{z}_{\bar{\mu}}^i \Big|_0 = w_{\bar{\mu}}^A \nabla_\varepsilon z_A^i \Big|_0 = w_{\bar{\mu}}^A z_A^k D_k^* \xi^i = \tilde{z}_{\bar{\mu}}^k D_k^* \xi^i.$$

Anhang

Ist M speziell der n -dimensionale affine Raum A_n , so sind die Fundamentaltensoren in den unteren Indizes symmetrisch. In diesem Fall³⁹⁾ finden sich in der Literatur folgende Normalisierungsbedingungen (übertragen in unsere Bezeichnungsweise) :

$R = 1$:

Falls zu

$$E_{\bar{\sigma}\bar{\mu}}^{\bar{\mu}\bar{\sigma}} := T_{\bar{\sigma}}^{\beta\rho} T_{\bar{\rho}}^{\alpha\sigma} (T_{\bar{\mu}\beta}^{\bar{\rho}} T_{\bar{\alpha}\rho}^{\bar{\mu}} + T_{\bar{\alpha}\mu}^{\bar{\rho}} T_{\bar{\beta}\rho}^{\bar{\mu}} + T_{\bar{\mu}\rho}^{\bar{\rho}} T_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\mu}})$$

$$= 2 T_{\bar{\sigma}}^{\beta\rho} T_{\bar{\rho}}^{\alpha\sigma} T_{\bar{\mu}\beta}^{\bar{\rho}} T_{\bar{\alpha}\rho}^{\bar{\mu}} + p(p-1) \delta_{\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} \delta_{\bar{\mu}}^{\bar{\sigma}}$$

inverse Größen $(E^{-1})_{\bar{\lambda}\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}\bar{\lambda}}$ mit

$$(V) \quad E_{\bar{\sigma}\bar{\mu}}^{\bar{\mu}\bar{\sigma}} (E^{-1})_{\bar{\lambda}\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}\bar{\lambda}} = \delta_{\bar{\lambda}}^{\bar{\mu}} \delta_{\bar{\mu}}^{\bar{\lambda}}$$

existieren, so ist die Normalisierung nach Weise (1939) und Klingenberg (1951 und 1952) durch⁴⁰⁾

$$\hat{\mathbb{D}}_{\bar{\sigma}} T_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\lambda}} T_{\bar{\mu}}^{\beta\sigma} T_{\bar{\lambda}}^{\alpha\mu} = 0$$

festgelegt. (Explizit ist diese Bedingung nur von Klingenberg (1952) formuliert.)

Unter derselben Voraussetzung (V) gibt Atanasjan (1954) die Normalisierungsbedingung

$$\hat{\mathbb{D}}_{\bar{\sigma}} T_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\lambda}} T_{\bar{\mu}}^{\alpha\beta} T_{\bar{\lambda}}^{\sigma\mu} = 0$$

an.

³⁹⁾ Die zentroaffinen und projektiven Arbeiten von Klingenberg (1952) und Liber (1952, 1953, 1966, 1974) ergänzen die hier aufgeführten Bedingungen nur im Hinblick auf die speziellen Gegebenheiten der jeweiligen Räume.

⁴⁰⁾ Entsprechend (65). Man beachte (54).

Ohne Voraussetzung der Form (V) kommt Liber (1966) aus bei der Forderung

$$\tilde{D}_{\sigma} T^{\sigma \mu}_{\bar{\mu}} - \frac{1}{2n-p} \tilde{D}_{\sigma} T^{\sigma \alpha}_{\bar{\lambda}} T_{\alpha \beta}^{\bar{\lambda}} T^{\beta \mu}_{\bar{\mu}} = 0.$$

Aber auch diese Normalisierungsbedingung nützt wesentlich die Symmetrie der Fundamentaltensoren aus und ist daher für Mannigfaltigkeiten mit allgemeinem linearem Zusammenhang nicht brauchbar.

R > 1:

Hierzu gibt Klingenberg (1952) Bedingungen an, die aber nur unter nicht näher beschriebenen Voraussetzungen analog (V) zu einer invarianten Normalisierung führen können.

Literaturverzeichnis

ATANASJAN, V.A.

Invariantnoe osnaščenie poverchnostej mnogomernych affinych prostranstv [Invariante Ausstattung von Flächen mehrdimensionaler affiner Räume], Doklady Akademii Nauk SSSR, Bd. XCVIII, Nr. 5, 1954, S. 701 - 704 (Russisch)

ATTALLAH, S.

Über Affingeometrie auf Mannigfaltigkeiten mit nichtlinearem Zusammenhang, Annali di Matematica pura ed applicata (IV) Vol. XC, 1971, S. 191 - 240

BARTHEL, W.

Zur Affingeometrie auf Mannigfaltigkeiten, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 68, Heft I, 1966, S. 13 - 44

BARTHEL, W., ARNOLD, I.

Zur affinen Kurventheorie auf Mannigfaltigkeiten: I. Fundamentalsätze, Bollettino dell' Unione Matematica Italiana (4) Bd.12, Suppl. fasc. 3, 1975, S. 451 - 480

BLASCHKE, W.

Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Springer, Berlin, 1923

ESCHMANN, P.

Fundamentalsätze der Hyperflächentheorie in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Dissertation, Würzburg, 1973

HAACK, W.

Eine geometrische Deutung der Affin-Invarianten einer Raumkurve, Mathematische Zeitschrift, Bd. 38, 1934, S.155 - 162

HLAVATÝ, V.

Proprietà differenziali delle curve in uno spazio a connessione lineare generale, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. LIII, 1929, S.365 - 388

HLAVATÝ, V.

Ancora sulle proprietà differenziali delle curve in uno spazio a connessione lineare generale, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. LIII, 1929, S.389 - 410

HLAVATÝ, V.

Les courbes de la variété générale à n dimensions, Mémoires des Sciences Mathématiques, Bd. 63, Gauthiers-Villars, Paris, 1934

HLAVATÝ, V.

Affine embedding theory I: Affine normal spaces, Indagationes mathematicae Bd. 11, 1949, S.165-177

HLAVATÝ, V.

Affine embedding theory II: Frenet formulae, Indagationes mathematicae Bd. 11, 1949, S.244-254

HLAVATÝ, V.

Affine embedding theory III: Integrability conditions, Indagationes mathematicae Bd. 11, 1949, S. 356 - 365

IZMAJLOV, V.D.

Zadača o vnutrennej normalizacii giperpoverchnosti prostranstva affinoj svjaznosti [Ein Problem zur inneren Normalisierung einer Hyperfläche eines affin-zusammenhängenden Raumes], Doklady Akademii Nauk SSSR, Bd. 109, Nr. 5, 1956, S. 906 - 909 (Russisch)

KAMKE, E.

Differentialgleichungen I, 6.Aufl., Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1969

KLINGENBERG, W.

Zur affinen Differentialgeometrie, Teil I: Über p -dimensionale Minimalflächen und Sphären im n -dimensionalen Raum, Mathematische Zeitschrift, Bd. 54, 1951, S. 65 - 80

KLINGENBERG, W.

Über das Einspannungsproblem in der projektiven und affinen Differentialgeometrie, Mathematische Zeitschrift, Bd. 55, 1952, S. 321 - 345

LIBER, A.E.

K teorii poverchnostej v central'no-affinnom (vektornom) prostranstve [Zur Theorie der Flächen im zentro-affinen (Vektor-)Raum], Doklady Akademii Nauk SSSR, Bd. LXXXV, Nr. 1, 1952, S. 37 - 40 (Russisch)

LIBER, A.E.

K teorii poverchnostej v proektivnom prostranstve [Zur Theorie der Flächen im projektiven Raum], Doklady Akademii Nauk SSSR, Bd. XC, Nr. 2, 1953, S. 137 - 140 (Russisch)

LIBER, A.E.

K teorii poverchnostej v affinnych i central'no-affinnych n -mernykh prostranstvach [Zur Flächentheorie in affinen und zentro-affinen n -dimensionalen Räumen], Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu, Bd. XIII, S. 407 - 446, Izdatel'stvo moskovskogo universiteta, 1966 (Russisch)

LIBER, A.E.

On invariant normalization of a class of surfaces of projective space, Soviet Mathematics, Nr. 5, 1974, S. 119 - 122

MAEDA, J.

Einige Sätze in der Kurventheorie im n -dimensionalen affinen Raume, The Science Reports of the Tohoku University, Ser. 6, Math. Journal 45, 1939, S. 130 - 133

MERZA, J.

Sur la courbure affine des courbes, Publ. Math. Debrecen, Bd. 7, 1960, S. 65 - 71

SANTALÓ, L.A.

Geometrical characterization for the affine differential invariants of a space curve, Bulletin of the American Math. Society, Bd. 52, 1946

SCHIROKOW, P.A., SCHIROKOW, A.P.

Affine Differentialgeometrie, Teubner, Leipzig, 1962

SCHOUTEN, J.A.

Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen, Mathematische Zeitschrift, Bd. 17, 1923, S. 161 - 188

SCHOUTEN, J.A.

Ricci-Calculus, 2. Aufl., Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954

SEWERING, W.

Infinitesimale Transformationen in Finsler-Räumen, Dissertation, Würzburg, 1973

SPIVAK, M.

A Comprehensive Introduction to Differential Geometry II, Publish or Perish, Boston, 1970

VEBLEN, O., WHITEHEAD, J.H.C.

The foundations of differential geometry, Cambridge University Press (Cambridge Tracts in mathematics and math. physics, Nr.29), London, 1932

VOLKMER, R.

Über nichtlineare Affingeometrie auf Mannigfaltigkeiten, insbesondere Stabilitätsfragen bei Strukturtransformationen, Dissertation, Würzburg, 1974

WEISE, K.H.

Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n (Teil I), Mathematische Zeitschrift, Bd. 43, 1938, S. 469 - 480

WEISE, K.H.

Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n (Teil II), Mathematische Zeitschrift, Bd. 44, 1939, S. 161 - 184

YANO, K.


The theory of Lie-derivatives and its applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955

Lebenslauf

Irmingard Arnold

Am 30.12.1949 wurde ich in Nürnberg als Tochter des damaligen Oberregierungsrats Prof.Dr.Wilhelm Arnold und seiner Frau Elisabeth, geb. Hergenröder, geboren. Von September 1956 bis Juli 1960 besuchte ich die Volksschule (Goethe-Schule Würzburg), anschließend bis zum Abitur im Juni 1969 das Städtische Mozart-Gymnasium Würzburg (Neusprachlicher Zweig). Seit dem Wintersemester 1969 studierte ich Mathematik, seit dem Sommersemester 1970 auch Physik an der Universität Würzburg. In Mathematik hörte ich Vorlesungen bei den Herrn Professoren W.Barthel, F.Kappel, W.Knobloch, H.Schmidt, J.Stoer, W.Uhlmann und W.Velte, in Physik bei R.Ebert, H.Fetz, R.Geick, W.Hink, G.Landwehr und M.Scheer. Im Mai 1974 bestand ich die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an den Gymnasien. Während des Schuljahrs 1974/75 war ich als Fachlehrerin i.A. an der Städtischen Fachoberschule Würzburg tätig, danach als wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität Würzburg. Seit März 1977 bin ich als Bibliotheksreferendarin im Vorbereitungsdienst für den höheren Bibliotheksdienst.

München, den 6. Juli 1978



(Irmingard Arnold)