10.20378/irb-59255

Leitbild „Intellektuelle Autonomie“: Eine persönliche Sicht auf vier Analysen zum autonomen Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule

von Bernd Wollring

Abstract. Die intellektuelle Autonomie von Grundschulkindern beim Lernen von Mathematik wird an vier Beispielen zu empirischen Analysen von Eigenproduktionen beschrieben. Berichtet wird wie Studierende des Grundschullehramtes sich mit diesen Befunden so auseinandersetzen können, dass sie zum einen die Elemente autonomen Lernens in den dokumentierten Eigenproduktionen erschließen und zum anderen selbst Erfahrungen zum autonomen Lernen von Mathematik erwerben.
Schlüsselwörter: Autonomes Lernen, Eigenproduktionen

1 Zum Start

Nichterst seit den 1990er Jahren, jedoch seitdem verstärkt, liegt das Forschungsinteresse in der Mathematikdidaktik auf genuinen Kompetenzen von Lernenden, auch und insbesondere vor formaler Unterweisung. Gegenüber der eher instruktionsorientierten Sicht auf das Mathematiklernen gewinnt die Idee des adaptiven Rückmeldens Raum. Basis dazu ist ein diagnostisches Aufschließen der Kompetenzen und damit das Identifizieren anerkennenswerter Teilleistungen. Eine adaptive Rückmeldung startet dann mit einer Anerkennung der ausbaufähigen Teilleistung, erst dann folgen Entfaltungsimpulse dazu. Leitidee dabei ist das Anerkennen der intellektuellen Autonomie des Lernenden, die es zu identifizieren und zu stärken gilt.
Das ist im Kern ein reformpädagogischer Ansatz. Zum Lernen von Mathematik findet man Grundlegendes dazu bereits bei Friedrich Fröbel, Johannes Kühnel und Wilhelm Oehl. Lehrkräfte sollten dazu selbst entsprechende Autonomieerfahrungen erwerben, um eben diese später weitegeben zu können. In diesem Sinne ist das Befassen mit Eigenproduktionen von Lernenden, ein Begriff der m.E. von Ch. Selter in den Diskurs eingebracht wurde, nicht nur ein analytisches, sondern auch ein positionsbildendes Programm.
In diesem Sinne wird folgend an vier Beispielen entfaltet, wie in der Bildung von Grundschullehrkräften ein Fokus auf das Identifizieren autonomen Lernens angestrebt wird. Die Auswahl ist subjektiv, ich sehe die Texte als Meilensteine in der Diskussion um autonomes Mathematiklernen und dessen Anerkennung.

2 Nunez et al. (1993): Ronaldo subtrahiert

Nunez, Carraher und Schliemann analysierten die Rechenstrategien brasilianischer Grundschulkinder: *Written and Oral Arithmetic* (Nunez et al., 1993, S. 28– 48). Das folgende Interview mit Ronaldo (Tab. 1) daraus entstammt einem umfassenden empirischen Projekt zu arithmetischen Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern des dritten Schuljahres im Nordosten Brasiliens. Verwendet wurden sowohl qualitative als auch quantitative Techniken, „mixed methods“ zu einer Zeit, als dieser slang noch gar nicht bestand. Der befragte Ronaldo erhält sich zum Teil durch den Straßenverkauf von Kokosnüssen („informal economy“) und besucht lückenhaft den Unterricht im dritten Schuljahr. Befragt wird er in der Schule von einer ihm vertrauten Interviewerin in einer simulierten Ladenszene, bei der er gebeten wird zu sprechen und zu schreiben.

Um eine sich in Abhängigkeit von der verfügbaren Information entfaltende autonome Einschätzung seiner Performanz seitens der Studierenden zu erzielen, wird das Interview in vier Durchgängen anhand eines sich entfaltenden Transkriptes vorgestellt. Die jeweils betrachteten Teile sind in der Tabelle links bezeichnet. Die rahmende Theorie von Nunez et al. wird zunächst zurückgestellt. Teilnehmende Studierende werde so in die Rolle unvoreingenommener Beobachter gestellt, die sich „entlang der zunehmenden Eröffnung“ ihre Deutung autonom bilden müssen. Als Deutungshilfe werden vorab knapp zwei Begriffe aus der Sprachwissenschaft vorgestellt: „Syntax“ bezeichnet die Lehre von der Grammatik, „Semantik“ bezeichnet die Lehre von der Bedeutung.

D1	D2	D3	D4			**200 – 35 = 200**
	D2	D3	D4	1	R	*schreibt 200 - 35 in senkrechter Anordnung,*
	D2	D3	D4			*notiert dann sein Ergebnis von den Einern über die Zehner zu den Hundertern,*
	D2	D3	D4			*rechnet dabei laut und erhält 200 wie folgt:*
	D2	D3	D4	2	R	Fünf, um auf Null zu kommen, nichts.
	D2	D3	D4			Drei, um auf Null zu kommen, nichts.
	D2	D3	D4			Zwei, nimm nichts weg, zwei.
		D3	D4	3	I	Ist das richtig?
		D3	D4	4	R	Nein. Nämlich, wenn Du was von mir kaufst, und das kostet fünfunddreißig,
		D3	D4			und Du zahlst mit einem 200-Cruzeiro-Schein,
		D3	D4			und ich geb’ Dir den zurück?
D1	D2	D3	D4			**200 – 35 = 235**
	D2	D3	D4	5	I	Dann mach's noch einmal.

D2	D3	D4	6	R	*schreibt 200 - 35 auf dieselbe Art auf,*
D2	D3	D4			*Schreibt sein Ergebnis von den Einern über die Zehner zu den Hundertern,*
D2	D3	D4			*rechnet laut und erhält 235 wie folgt:*
D2	D3	D4	7	R	Fünf, nimm nichts weg, fünf. Drei, nimm nichts weg, drei.
D2	D3	D4			Zwei, nimm nichts weg, zwei.

	D3	D4	8	R	Wieder falsch!
	D3	D4	9	I	Warum ist es wieder falsch?
	D3	D4	10	R	Nun, Du kaufst etwas, und es kostet fünfunddreißig.
	D3	D4			Du gibst mir zweihundert,
	D3	D4			Und ich gebe Dir zweihundert und noch fünfunddreißig drauf?

		D4	11	I	Weißt Du das Ergebnis?
		D4	12	R	Wenn es dreißig wäre, würde ich Dir eins siebzig geben.
		D4	13	I	Aber es ist fünfunddreißig. Gibst Du mir einen Rabatt?
		D4	14	R	Einhundert und fünfundsechzig.

Tab. 1 Das Interview: R: Ronaldo I: Interviewerin, Interview in der Schule, simulierte Ladenszene, Aufgabe 200-35.

Deutung D1, Was Ronaldo ausrechnet. 200 – 35 = 200 und 200 - 35 = 235 werden als „Rechenrichtungsfehler unter Missachtung der Stellenwertstruktur“ gekennzeichnet. Möglicherweise subtrahiert Ronaldo stellenweise stets die kleinere Zahl von der größeren. Ursachen und begleitende Vorstellungen Ronaldos bleiben offen.

Deutung D2, Was Ronaldo sagt und schreibt. Der Sprechtext wechselt in Phrase 2 vom Ergänzen zum Abziehen und bleibt in Phrase 7 beim Abziehen. Im Unterricht wurde vermutlich ergänzend gesprochen, Ronaldo denkt jedoch abziehend und ändert sein Sprechen dahin. Notiert wird die Form des Normalverfahrens. Das stellenweise Subtrahieren des Kleineren vom Größeren ist bei Aufgaben korrekt, die keinen Übergang erfordern, bei den vorgelegten Aufgaben passt es nicht. Ronaldo hat möglicherweise das Bearbeiten der Aufgaben ohne Überträge mitgemacht und Aufgaben mit Überträgen verpasst. Sein Vorgehen wirkt syntaktisch, er erinnert Verfahrensbestandteile. Ronaldo zeigt, so die Studierenden, ein mögliches Modell von Kompetenzen, das „syntaktische Ruinen“ eines Verfahrens aufweist.

Deutung D3, Wie Ronaldo seine Ergebnisse bewertet. Ronaldo erkennt die fehlerhaften Ergebnisse als solche. Sein Kontrollverfahren ist ein autonomes Modellbilden: Er überträgt die Ergebnisse in seine Erfahrungswelt des Straßenverkaufs, erkennt sie dort als nicht zutreffend und beurteilt sie als absurd. Konsequenzen zur Korrektur seines schriftlichen Verfahrens zieht er nicht.

Deutung D4, Was Ronaldo tatsächlich weiß. Auf die Frage, ob er das Ergebnis weiß, gibt er eine Antwort, die nicht auf das gelernte schriftliche Verfahren rekurriert, sondern auf seine Lebenswelt. Auf die Frage, die Phrase 12 vorherzusagen, äußern Studierende zumeist, dass er das Ergebnis wohl doch korrekt bestimmen kann: „Ja, 165“; „Ja, ich gebe einfach den einen 100er-Schein zurück und dann noch 65 drauf.“ Sehr nahe am tatsächlich Gesagten ist diese Vorhersage: Er rechnet es nicht nach einem schriftlichen Verfahren, sondern er rechnet wie er es von den Straßenverkäufen kennt, im Kopf 200 – 30 = 170, 170 – 5 = 165.

Ronaldos Strategie entspricht im Kontext des „halbschriftlichen Rechnens“ der „Hilfsaufgabe“. Das ist eine autonome verständnisvolle Konstruktion. Zum Bilden der Hilfsaufgabe nutzt er eine korrekte Zerlegung des Subtrahenden.

Ronaldo betrachtet die Aufgabe in zwei Welten, die zwar aufeinander in Beziehung setzen kann, deren Verfahren aber unverbunden bleiben. Die schriftlich dargestellte Aufgabe bearbeitet er syntaktisch, die mündlich dargestellte semantisch. Auf der Straße rechnet er im Kopf ohne Schreiben, in der Schule mit Schreiben. Ob er in der Schule halbschriftliches Rechnen gelernt hat, ist nicht dokumentiert.

Nunez et al. schließen in einer Staffel aufwändiger quantitativer Untersuchungen aus, dass der Ort, Straße oder Schule, das Ergebnis beeinflusst, ebenso dass vorhandenes oder nicht vorhandenes Material von Bedeutung ist und schließlich, dass die fragende Person, Lehrkraft oder externe Interviewerin Einfluss auf das Ergebnis hat. Diese Studie ist somit auch ein Leitbeispiel zur Kontrolle von beeinflussenden Variablen.

Der schließlich bleibende Befund von Nunez et al. besagt, dass die wesentliche Einflussgröße die Darstellung ist: Entscheidend ist, ob geschrieben oder gesprochen wurde. Gesprochenes unterstützt offensichtlich semantisches Rechnen, Geschriebenes kann genau dieses supprimieren und syntaktisches Rechnen evozieren. Hart gesagt: Schriftliches kann die Autonomie beim Rechnen reduzieren.

Rechnungen wie die von Ronaldo geben Studierenden Anlass zum Stellen eigener Fragen und führen auf die Erkenntnis, dass diese Episode, wenngleich sie ein Einzelfall aus einer anderen Welt ist, doch auch in unseren Schulen Typisches beschreibt. Nachdenklich werden die Studierenden bei der Frage, ob die Schülerinnen und Schüler unseres Kulturkreises Erfahrungen wie die von Ronaldo haben, die ihnen helfen, die Ergebnisse zu bewerten.

Zum Finden eigener Positionen. Dieser Fall verweist auf die grundsätzliche Forderung, dass Schülerinnen ihre Rechnungen verständnisvoll semantisch erlernen, organisieren und durchführen und nicht nur syntaktisch vollziehen sollen.

3 Hengartner (1999): Divisionen

Betrachtet werden Eigenproduktionen zu individuellen Divisionsstrategien (Gindrat, Güttinger, Wyss & Hengartner in Hengartner, 1999). Der Text zeigt zwei Intentionen:

Zum einen liegt eine gemeinsame Arbeit des Autors mit drei Studierenden vor mit der Intention, Studienelemente angehender Lehrkräfte als „forschenden Lernen“ zu konzipieren und Studierende am Forschungsprozess zu beteiligen. Diese Anerkennung legt eine gute Basis zur autonomen Urteilsbildung in späteren Arbeitssituationen.

Des Weiteren verweist der Titel explizit auf „Erkundungen“, damit wird die Studie in die qualitative empirische Unterrichtsforschung eingeordnet. Es erfolgt keinerlei Aussage oder Behauptung, welche der vorgefundenen Strategien wie häufig verbreitet ist, dargestellt wird vielmehr, um eine Formulierung von H. Maier aufzunehmen, „was wirklich möglich ist“. Eigenproduktionen ermöglichen die Auseinandersetzung mit der originalen Äußerung von Lernenden.

Referiert wird ein weites Spektrum von Divisionsstrategien im vierten Schuljahr exemplarisch anhand von 12 in der Originaldarstellung vorgelegten Eigenproduktionen zu der Aufgabe:

> *Unsere Klasse macht einen Ausflug. Die Lehrerin muss für den Zug, das Schiff, ein Museum, das Essen und eine Übernachtung 1296 Franken bezahlen. Die 1296 Franken wollen wir so aufteilen, dass jedes von uns gleich viel bezahlt. Wir sind 18 Kinder.*

Die Kinder konnten eine Alternative mit „1660 Franken“ und „25 Kindern“ wählen.

Das Analysieren zielt zunächst auf die Hauptkategorien Aufteil-Lösungen versus Verteil-Lösungen. Besser jedoch unterscheidet man „verteilnahe und aufteilnahe Lösungen“, denn obwohl ein Verteil-Kontext vorliegt (sinnigerweise mit der Vokabel „aufteilen“ im Text), finden sich auch aufteilnahe Strategien und solche, die sich diesen Kategorien nicht eindeutig zuweisen lassen, etwa Zerlegungsstrategien zum Dividenden und zum Divisor (!).

Die vorgelegten Kommentare und Deutungen der Autoren beschränken sich streng auf mögliche Interpretationen der Eigenproduktionen, also auf einen Aufschluss, der die Strategie über die jeweilige individuelle Darstellung hinaus transparent macht. Genau dies gibt den Eigenproduktionen m.E. ihre bleibende Aktualität. Insbesondere werden keine Vorschläge dazu gemacht, wie man in fördernder Absicht zu diesen Strategien Rückmeldungen konzipieren sollte. Genau dies macht den Text für Studierende nutzbar zum Trainieren der eigenen Deutungsfähigkeit und zum Finden eigener didaktischer Positionen.

In Veranstaltungen zu „Diagnostik und Fördern“ versuche ich ebenso wie die Autoren normative Konzepte zu Förderimpulsen zu vermeiden und das Entwickeln solcher Ideen im Team anzuregen. Drei Organisationelemente bestimmen die Arbeit mit diesen Eigenproduktionen:

Mind Maps. Teams von drei bis vier Studierenden arrangieren die vorgelegten Eigenproduktionen in einer Mind Map, bilden gegebenenfalls Cluster und adressieren diese. Das geht nur mit Originalen, nicht mit daraus abgeleiteten Bewertungen. Das Entwickeln eigener Deutungen begleitet dieses Tun einher, dabei haben Mind Maps, lose gelegt aus kopierten Zetteln, den kennzeichnenden Vorteil, dass sie Diskussionsverläufen folgend laufend angepasst werden können (Abb. 1). In einer „Besichtigungsrunde“ vergleichen die Teams ihre Mind Maps.

Abb. 1 Mind Map zum Ordnen, Adressieren und Erschließen von Eigenproduktionen

„Muster-Lösungen“. Gefragt ist, welche Lösungen von allen Schülerinnen einer Klasse erkundet und reflektiert werden sollten. Auf einem

internationalen Workshop wurden dazu mehrheitlich die Lösung von Tessa und Marisa (Abb. 2) und die beiden Lösungen von Ruth (Abb. 3) vorgeschlagen.

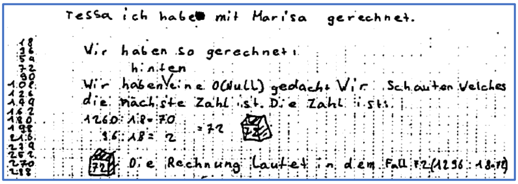


Abb. 2 Die Lösung von Tessa und Marisa, „hinten eine Null gedacht“

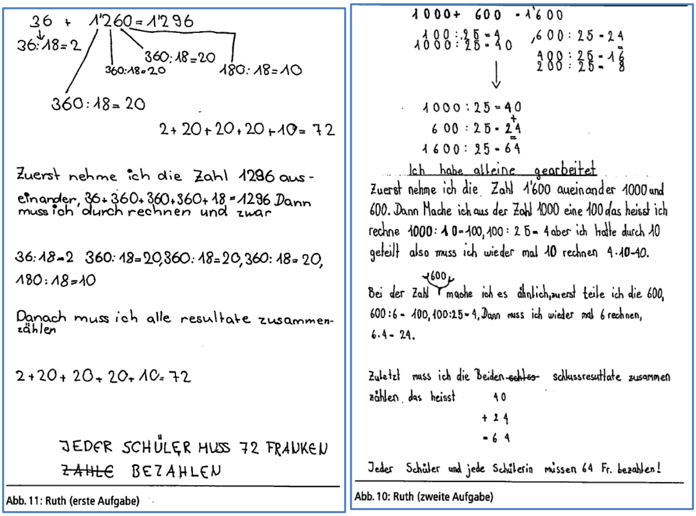


Abb. 3 Die zwei Lösungen von Ruth, Dividend „auseinandernehmen“

Ruths Lösungen sind nicht nur richtig und sehr transparent dargestellt, sie bearbeitet auch die zusätzliche Aufgabe, ihr Verfahren für andere Schülerinnen verständlich darzustellen. Dass diese Teilaufgabe von den meisten Kindern ganz ignoriert wird, gibt, so erwarte ich, in Lehrveranstaltungen den Studierenden einen Hinweis, wie bedeutsam das Reflektieren der Darstellung neben dem Reflektieren der Strategie ist. Es verweist auf die Notwendigkeit, das Verfassen adressierter mathematischer Texte zu erlernen.

„Dialog-Vorschläge“. Im Unterricht gelingt es meist nicht, alle Kinder zugleich individuell zu fördern, selbst dann nicht, wenn man ihre Strategien gut aufklären kann. Meist genügt die verfügbare Zuwendung

nicht, zumindest dann nicht, wenn man sie fair verteilen will. Eine Option kann darin bestehen, Austausch und Dialoge unter den Kindern gezielt zu initiieren. Bei Vorhandensein einer entsprechenden Dialogkultur in der Lerngruppe kann man solche Dialoge oder kleine Gruppenkonferenzen anhand der Eigenproduktionen anregen. Das kann etwa dadurch gestartet werden – so eine Aufgabe im Seminar – dass man die Mind Map von einer „Strategie-Karte“ zu einer „Dialog-Karte“ neu arrangiert und die Partner oder Kleingruppen als Cluster der Mind Map wählt: „Wer sollte sich mit wem austauschen? Und warum?“ Studierende neigen dabei zum Bilden strategiehomogener Cluster, bisweilen kommen aber auch mutige und originelle Paarbildungen vor, etwa die, Filipe und Tobias in einen gemeinsamen Austausch zu bringen (Abb. 4).

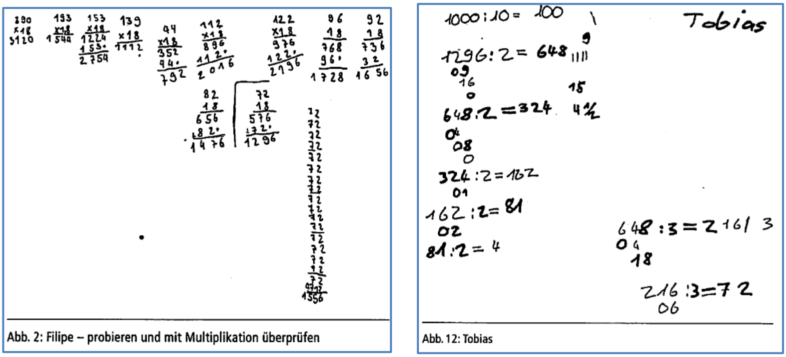


Abb. 2: Filipe – probieren und mit Multiplikation überprüfen

Abb. 12: Tobias

Abb. 4 Filipes Lösung: Probieren und mit Multiplikation überprüfen („Zielschießen“), Tobias´ Lösung: Divisor multiplikativ zerlegen („Backtracking“)

Filipe und Tobias zeigen substanzielle autonome Strategien, beide probieren, beide dokumentieren ihren Weg verstehbar, wenngleich beide keinen Text verwenden. Beide importieren das sichere Beherrschen von Techniken, mit denen Teile des Problems zu lösen sind:

- Filipe kann sicher multiplizieren und verwendet ein systematisches Variieren eines Faktors bei Festhalten des anderen. Das Variieren erfolgt in Abhängigkeit von den gefundenen Produkten. Er nutzt dem operativen Prinzip entsprechend eine Art „Zielschießen“. Bemerkenswert erscheint, dass das operative Prinzip hier nicht didaktisch initiiert auftritt, sondern als autonome Strategie.

- Tobias kann sicher durch kleine Zahlen schriftlich teilen. Er teilt zunächst fortlaufend durch 2, erkennt, dass dies nicht zielführend ist. „Backtracking“ ist seine Konsequenz: Ausgehend von der letzten in seiner Strategie noch nutzbaren (!) Rechnung (richtig sind sie alle) setzt er den Weg korrekt fort. Tobias nutzt als autonome Strategie die Primfaktor-Zerlegung des Divisors!

Einen Dialog zwischen diesen beiden erachten die Studierenden als sinnvoll, weil beide autonom und bewusst ihren Weg verfolgen und ihre Verfahren mit Verständnis durchführen. Was dazukommen sollte, ist die für andere verstehbare Versprachlichung.
Hier scheint ein Problem auf: Wie weit sind Rechenwege zu fördern, die offensichtlich weit von dem gewohnten Standard abweichen? Diese Frage ist bleibend aktuell und erfordert situative Entscheidungen. Deutlich wird jedoch auch das Erfordernis, Lösungen wie die von Filipe und Tobias anzuerkennen und nicht nur solche, wie die von Ruth, die „das Normale nachvollziehen“. Es ist stets unterrichtsbegleitende Dichotomie zwischen dem Erfordernis, Fertigkeiten zu entwickeln, und das Erfordernis, Strategien zu entwickeln.
Offene Fragen zur Diskussion und als Impuls zum Durchführen eigener Erkundungen
Zum Finden eigener Positionen. Welchen Bearbeitungen verdiene wieviel Anerkennung? In welcher Lage wechsle ich von adaptiver Förderung zu substitutiver Förderung?

4 Selter und Spiegel (1997): Marcels Multiplikationen

Betrachtet werden „Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation“ (Selter & Spiegel, 1997, S. 73 und 94–95). Das Bespiel in Abschnitt 3 diskutiert 12 verschiedene Rechnungen zu derselben Aufgabe, alle weitgehend richtig. Dieses Beispiel nun diskutiert 7 Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation, durchgeführt von einem einzigen Kind, alle falsch.
Dargestellt ist nicht nur ein Bericht wie bei Hengartner, sondern zudem eine an Studierende oder Lehrkräfte gerichtete Aufgabe zur Deutung der Bearbeitung. Selter und Spiegel selbst geben eine hoch auflösende Deutung, verzichten jedoch auf jedwedes Beschreiben des Kontextes und stellen keine Aufträge, die über das reine Deuten hinaus zu Bewertungen und Lehrkonzepten führen.

Dieses Beispiel ist für mich „outstanding" unter den Beispielen dieses Buches, es eröffnet die Möglichkeit zum Beurteilen und Fördern, Positionen zu prüfen und zu beziehen und dabei durchaus Konflikte zu durchleben.
Das Besondere des Beispiels besteht darin, dass zu den Bearbeitungen von Marcel drei Dokumente (Abb. 5, 6 und 7) vorliegen, deren aufeinanderfolgendes Eröffnen jeweils unterschiedliche Impulse zur Deutung und Bewertung bewirken. Dieses Herangehern soll verdeutlichen, dass und wie unterschiedliche Struktur und Reichhaltigkeit der Dokumente die Einschätzung einer Eigenproduktion jeweils in verschiedene Richtungen lenkt und die damit verbundenen Positionen beeinflussen kann.

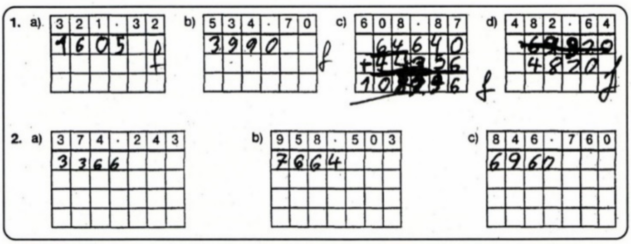


Abb. 5 Marcels Klassenarbeit, erstes Dokument

Die von Selter und Spiegel gestellten Deutungen und Deutungsaufgaben werden zunächst zurückgestellt. Stattdessen erhalten die Studierenden als erste Aufgabe: „Geben Sie Marcel eine Zensur, die Sie im Lehrerzimmer verteidigen können." Hier ein typisches Ergebnis aus einem Dortmunder Seminar zur Arithmetik (Tab. 2).

Mögliche erste „Zensur E"	Anzahl aus 26 Voten
6	5
5	16
4	5

Tab.2 Ergebnis aus einem Dortmunder Seminar zur Arithmetik

Zuvor wurde die juristische Kennzeichnung der Zensuren recherchiert. Die Studierenden basierten die Zensur primär auf dem Ergebnis, daher die Bezeichnung ***„Zensur E"***. Nach Diskussion des Unterschieds von „Fehler" und „Fehlermuster" entstanden erste Zweifel an der Einschätzung, da vier der sieben Aufgaben mit demselben Muster zu erklären sind. Wichtig ist hier das Charakterisieren der Deutung als

Hypothese, die zwar die Ergebnisse erklären kann, aber nicht den tatsächlichen Denkvorgang beschreiben muss.
Das zweite Dokument, eine Art „Schmierzettel“, zeigt die eigenadressierten Rechnungen von Marcel, die er für sich selbst erstellt hat (Abb. 6).

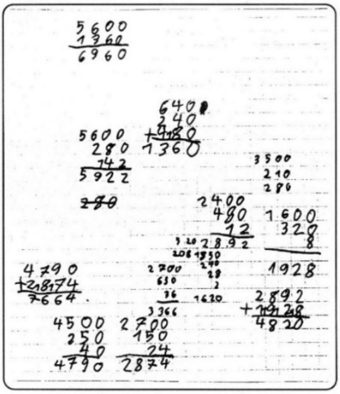


Abb. 6 Marcels die eigenadressierten Rechnungen, die er für sich selbst in der Klassenarbeit erstellt, zweites Dokument

Nun fällt auf, dass die offizielle Arbeit eine Antwort in „offizieller Struktur“ verlangt und keinen Raum für eigene Wege öffnet. Die von Selter und Spiegel gestellte Aufgabe zu diesem zweiten Dokument fordert von den Studierenden, die Teile den Aufgaben zuzuordnen und die Rechenwege zu erkunden.
Danach erhalten sie folgende Aufgabe: „Bitte bewerten Sie nun Marcels Arbeit erneut unter Berücksichtigung seiner Strategie-Kenntnisse. Geben Sie Marcel dazu zwei Zensuren, eine ***„Zensur E“*** zum Ergebnis und eine ***„Zensur S“*** zu seiner strategischen Kompetenz.“ Dasselbe Seminar kam nun zu folgendem Befund (Tab. 3).

Mögliche zweite Zensur	***„Zensur E“*** Anzahl aus 26 Voten	***„Zensur S“*** Anzahl aus 26 Voten
6	5	1
5	16	0
4	5	9
3	0	13
2	0	3

Tab.3 Zweites Ergebnis aus einem Dortmunder Seminar zur Arithmetik

Die Bewertung S zeigt die zunehmende Anerkennung der Teilleistungen, sie fällt höher aus als die Bewertung E. Es erscheint möglich, mit Marcel die korrekte Rechnung zu erarbeiten, seine „Nebenrechnung" gibt Hinweise dazu.
Dies eröffnet die Frage nach möglicher Unterstützung für Marcel. Die Fragestellung an die Studierenden wird erneut erweitert: „Nehmen Sie an, es besteht für Marcel die Option einer kompetenten Einzelförderung. Geben Sie nun über die Zensuren E und S hinaus die ***„Zensur F"***: Wie viele Förderstunden für Marcel halten Sie für erfolgversprechend, 2 oder 5 oder 10?" Die Antwort war allerdings erst nach Eröffnen des folgenden dritten Dokuments (Abb. 7) zu geben. Auch wurde vorerst nicht thematisiert, worin die Förderung bestehen könnte.

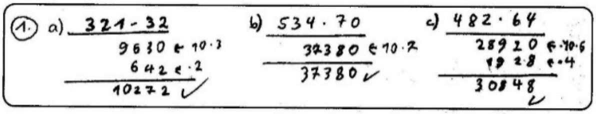


Abb. 7 Marcels Klassenarbeit drei Monate vorher, drittes Dokument

Nach der Diskussion zu Ronaldos Subtraktion 200 – 35 vermuten die Studierenden nun, dass diese korrekt erscheinenden Aufgaben möglicherweise eher syntaktisch als semantisch basiert gerechnet wurden, ohne tieferes Verstehen. Es sind keine autonomen Lösungen. Und dass man in der Förderung möglicherweise „weiter zurück" muss als ursprünglich angenommen. Nun steht der gesamte bisherige Befund in Frage (Tab. 4).

Mögliche Zensur F nach Eröffnen des dritten Dokuments	Anzahl aus 26 Voten
10 Förderstunden	3
5 Förderstunden	13
4 Förderstunden	2
3 Förderstunden	1
2 Förderstunden	7

Tab.4 Vorschläge zum Umfang der Förderung

Anschließend entwickelten die Studierenden Förderideen für Marcel, bei denen zum Teil „weit zurückgegriffen" wird: 1. Schätzen, Runden, überschlägiges Rechnen, 2. Schreibhilfen 3. Gestaffelte Aufgabenserie, 4. „Malkreuz" – symbolische Darstellung, Multiplikationstabelle mit Randsummen, falls notwendig in ikonischer Darstellung mit Punktefeld und Abdeckwinkel

Zum Finden eigener Positionen. Ist Marcel eine Ausnahmeerscheinung oder vielleicht typisch? Was hat er warum langfristig behalten? Wieso gelingt Marcel keine Ergebniskontrolle? Sollte man die grundsätzlich anfordern? Worauf kann eine adaptive Rückmeldung zurückgreifen? Inwieweit belegen die Dokumente Autonomie von Marcel?

5 Lithner et al. (2013): Aufgaben-Design

Die bisherigen Betrachtungen lassen vermuten, dass bestimmte Aufgabenstellungen bzw. deren Darstellung semantisches Denken supprimieren und syntaktisches Rechnen evozieren. Wie kann man semantische Strategien müssen durch die Aufgabenstellung kognitiv aktivieren? Möglich erscheint dies durch die Aufgabenform, durch das „Task Design“ (Lithner, Jonsson, Granberg, Liljekvist, Norqvist & Olsson, 2013).

Dieser Text referiert ein empirisches Ergebnis zum Design von Aufgaben, stellt jedoch keine Eigenproduktionen vor. Berichtet werden unterschiedliche Erfolgsanteile zu zwei Varianten einer Aufgabe, zusätzlich differenziert nach zwei Schülergruppen als Versuchspersonen. Der Text intendiert den Nachweis, die beobachteten Unterschiede auf Unterschiede im Aufgabendesign zurückzuführen. Das kann für angehende Lehrkräfte eine Unterstützung bei eigenen Designs sein.

Im Kern geht es darum, welches Design von Aufgaben kognitive Aktivierungen dahingehend bewirkt, dass es im Gegensatz zu einer syntaktischen eine semantisch bestimmte Bearbeitung auslöst.

Lithner et al. (2013) nehmen die von Niss gegebene Charakterisierung des Problemlösens auf:

> *Problem solving is defined as “engaging in a task for which the solution method is not known in advance” (NCTM, 2000, p. 51) and includes identifying, posing, and specifying different kinds of problems and solving them, if appropriate, in different ways (Niss 2003)*. (S. 221)

Statt syntaktisches und semantisches Lernen zu unterscheiden unterscheiden sie ähnlich dazu zwischen „Auswendiglernen“ (rote learning) und „kreativem mathematisch basiertem Argumentieren“ (creative mathematically founded reasoning):

Auswendiglernen (rote learning) bezeichnet den Prozess, etwas durch Wiederholen zu lernen, bis man es behält, [möglicherweise] ohne dessen Bedeutung zu verstehen (Oxford Advanced Learner´s Dictionary, Übersetzung: B.W.). Auswendiglernen induziert ein „imitierendes algorithmisches Denken“.

Kreatives mathematisch basiertes Argumentieren dagegen erfüllt drei Kriterien: i) Kreativität. Eine für den Argumentierenden neue Argumentationsfolge wird erstellt oder eine vergessene in einer Weise wieder vergegenwärtigt, die hinreichend flüssig und flexibel ist, um hinderliche Fixierungen zu vermeiden. ii) Plausibilität. Es gibt Argumente, welche die Wahl der Strategie unterstützen und strategische Implikationen, die erklären, weshalb die Schlussfolgerungen zutreffend oder plausibel sind. iii) Verankern. Die Argumente sind in den intrinsischen mathematischen Eigenschaften der Komponenten verankert, die in das Argumentieren eingebunden sind. (Lithner et al., Übersetzung: B.W.)

Lithner et al. führen ein Experiment durch, bei dem zwei verschieden trainierte Schülergruppen Aufgaben lösen, die je nach Designvariante Problemlösen erfordern oder nicht (Abb. 8). Gruppe 1 wird trainiert mit Schwerpunkt auf „imitierendem algorithmischen Denken“, Gruppe 2 mit Schwerpunkt auf „kreativem mathematisch basiertem Argumentieren“. Wie das Training konzipiert ist, wird nicht berichtet.

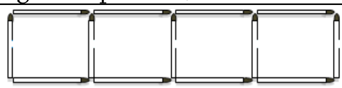
Legt man Quadrate aus Hölzchen in einer Reihe, so sieht das aus wie im Bild rechts. 13 Hölzchen braucht man für vier Quadrate	
Ist x die Zahl der Quadrate, so kann man die Zahl y der Hölzchen mit der Funktion y = 3x+1 berechnen. *Beispiel: Legt man 4 Quadrate in einer Reihe, so benötigt man y=3x+1=3.4+1=13 Hölzchen.*	
Wie viele Hölzer sind nötig, um eine Reihe mit 6 Quadraten zu erhalten?	

Abb. 8 Aufgabe in zwei Formen nach Lithner et al. (2013)

Die Aufgabe enthält zwei Darstellungen, eine mit einer Material-Illustration und eine mit einem formalen Text, hier kursiv gesetzt. Die Aufgabenstellungen werden für den Test differenziert: „Formula“ fragt erneut nach der Formel, „short numerical“ nach Wiederholen des Lösungswegs und Nennen der Lösung und „long numerical“ nach Rekonstruieren des Lösungswegs.

Die Besonderheit der Studie besteht nun darin, dass die 99 Versuchspersonen randomisiert in zwei Gruppen aufgeteilt werden: Eine bekommt die Aufgabe in der angegebenen ausführlichen Form, die andere in reduzierter Form, bei welcher der kursiv notierte mittlere Teil komplett entfällt.

Die Diagramme zeigen die Ergebnisse insgesamt und die Ergebnisse einer Teilgruppe mit „niedrigerem kognitiven Index“ (Abb. 9).
Man ist zunächst versucht, das Ergebnis im Sinne eines „weniger ist mehr“ zu deuten. Eine nähere Betrachtung führt jedoch sowohl zu Erklärungen der Ergebnisse als auch zu Kritik an ihnen als Ausgangspunkt für eigene Entwürfe und Versuche.
Eine Deutung besteht darin, mögliche kognitive Aktivierungen zu betrachten. Die materielle Darstellung aktiviert möglicherweise nicht nur Vorstellungen zu den Gegenständen, sondern insbesondere zu den Handlungen damit. Die anschließende Textdarstellung ruft ganz andere symbolische Vorstellungen auf und supprimiert die zuerst aktivierten. In diesem Fall wäre der Nutzen der vorbereitenden materiellen Darstellung dahin.
Kritik: Die im ersten Textteil aufgerufene Handlungsvorstellung führt auf ein induktiv fortschreitendes Generieren der Lösung, die im zweiten Textteil aufgerufene Vorstellung verlangt das Handhaben eines „geschlossenen Ausdrucks“. Möglicherweise sehen die Probanden nicht, dass diese beiden zueinander passen und betrachten im Sinne des „didaktischen Vertrags“ den zweiten Teil unabhängig vom ersten als die eigentliche Aufgabe.
Man ist versucht, die zweite Aufgabe an Grundschulkinder zu richten.

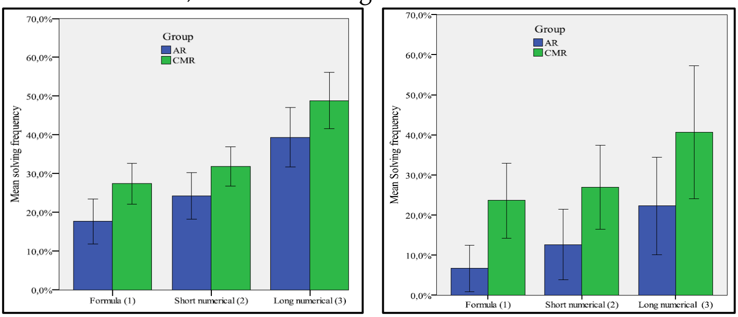


Abb. 9 Anteil richtiger Lösungen, niedrige Säulen: Aufgabe mit Rechenbeispiel, höhere Säulen: Aufgaben ohne Rechenbeispiel. Links: alle Versuchspersonen, rechts: Versuchspersonen „mit niedrigem kognitivem Index“.

Die empirischen Befunde (Abb. 9) erscheinen glaubwürdig, hängen aber wohl stark ab von der Lernbiografie und dem Treatment der Probanden, beides nicht dokumentiert. Insofern sollte man für ein eigenes autonomes Urteil ähnliche Versuche selbst durchführen.

Zum Finden eigener Positionen. Man kann die These aufstellen, dass die Erfolgsrate der Bearbeitungen stark (?) von der Zahl der Quadrate in der Aufgabe abhängt und vielleicht davon, ob die Formel $y = 3x + 1$ heißt oder $y = 1 + 3x$ Die zweite bildet die schrittweise Handlung besser ab. Ein Problem für Studierende bei der Auseinandersetzung mit dieser Studie besteht darin, dass keine Eigenproduktionen dokumentiert sind.
Für das Bilden autonomer Urteile angehender Lehrkräfte sind solche Studien vielleicht gerade auf Grund der darin wahrgenommenen Probleme geeignet. Sie werfen grundsätzlich die Frage nach der Validität auf. Man ist darauf verwiesen, den unbekannten zusammenfassenden Deutungen der Autoren zu folgen.

6 Schlussbemerkung

Logistische Bedingungen begrenzen oft das Raumgeben zu intellektuell autonomem Lernen im real existierenden Unterricht, Zielvorgaben und Ressourcengrenzen fordern bisweilen unfreiwilliges, aber entschiedenes Distanzieren davon. Langfristig aber ist es m.E. erfolgversprechender. Sich dann dennoch dazu zu entscheiden fordert von Lehrkräften intellektuelle und entscheidungsbewusste Autonomie.

Literatur

Gindrat, R., Güttinger, F., Wyss, C. & Hengartner, E. (1999). Dividieren: Individuelle Strategien erkunden (4. Klasse), In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen* (S. 116–123). Zug: Klett und Bahner Verlag.

Lithner, J. Jonsson, B., Granberg, C., Liljekvist, Y., Norqvist, M. & Olsson, J. (2013). Designing tasks that enhance mathematics learning through creative reasoning. In C. Margolinas, (Hrsg.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (S. 221–230). Oxford. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054/file/ICMI_STudy_22_proceedings_2013-10.pdf

Nunez, T., Carraher, D.W. & Schliemann, A., (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett Grundschulverlag.

Senior-Prof. Dr. Bernd Wollring
Wegmannstraße 57
34128 Kassel
wollring@mathematik.uni-kassel.de