DOI: 10.20378/irb-91713

Auslandsverschuldung im Modell mit überlappenden Generationen

von Michael Schmid und Harald Großmann*)

1. Einleitung

Dieser Aufsatz beschreibt ein Zwei-Länder-Wachstumsmodell für offene Volkswirtschaften mit Auslandsverschuldung. Die nachfolgende Modellanalyse basiert auf einer richtungsweisenden Arbeit von Buiter (1981). Er modelliert eine Weltwirtschaft mit zwei Nationen, deren Haushaltssektoren durch jeweils zwei überlappende Generationen gemäß dem Samuelson-Diamond-Ansatz repräsentiert werden. Aus Vereinfachungsgründen produzieren beide Länder das gleiche Gut mit der gleichen Technologie und identischen Faktorausstattungen. Deshalb bringt die übliche Investitionsentscheidung gemäß der neoklassischen Theorie identische optimale Kapitalstöcke in beiden Ländern. Jedoch führt die Existenz unterschiedlicher Zeitpräferenzraten der Konsumenten beider Länder zu internationaler Kreditgewährung an einem Weltmarkt. Länder mit hoher Zeitpräferenzrate können im Prinzip ihr Wohlfahrtsniveau aus einem mehrperiodigen Konsumprofil erhöhen, wenn ihre Zeitpräferenz bei Kapitalmarktautarkie über dem Weltmarktzins liegt. Sie werden ihre Absorption über ihr Volkseinkommen ausdehnen und diese Überabsorption mit Ausleihungen von Ländern finanzieren, deren Zeitpräferenzrate unter dem Weltmarktzins liegt. Auf dem Weltkapitalmarkt können bei einem bestimmten Gleichgewichtsniveau des Weltmarktzinssatzes Ersparnisse des Inlandes, soweit sie den Finanzierungsbedarf der inländischen Realkapitalbildung übersteigen, zur teilweisen Finanzierung der Realkapitalbildung des Auslandes dienen. Dadurch entstandene Auslandsforderungen werden dabei verstanden als Besitzansprüche von Inländern gegenüber einem im Ausland installierten

*) Dieser Aufsatz entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsprojekts des Schwerpunktprogramms "Inflation und Beschäftigung in offenen Volkswirtschaften". Den Herren M. Carlberg und U. Schittko sowie den Mitgliedern des Schwerpunktprogramms danken wir für ihre Kommentare.

Kapitalstock. Selbstverständlich erfolgt diese internationale Kreditgewährung mit der Verpflichtung des Auslandes zu einem Schuldendienst, der den am Weltmarkt gültigen Marktzinssatz honoriert. Der Modellansatz kann deshalb die Entwicklung der Auslandsposition und des Sachvermögens (Realkapitalstock) einer Volkswirtschaft im Zeitablauf beschreiben.

Der Samuelson-Diamond-Buiter-Ansatz[1] bringt einige wichtige Fortschritte für die makroökonomische Theorie offener Volkswirtschaften:

(1) Die intertemporale Fundierung von Spar- und Investitionsentscheidungen betont die wichtige Rolle des Zinssatzes für die Erklärung von Leistungsbilanzsalden. Dies geschieht in jüngster Zeit auch über Planungsansätze mit unendlichem Zeithorizont, aber mit größerem mathematischen Aufwand (siehe u.a. Frenkel-Razin, 1985 oder Obstfeld, 1982).

(2) Die überkommene neoklassische Theorie des Wachstums in offenen Volkswirtschaften unterstellt meistens eine ausgeglichene Leistungsbilanz. Soweit überhaupt eine von Null verschiedene Nettoposition zugelassen wird, geschieht dies über die Annahme internationaler Faktormobilität des Realkapitalstocks (siehe u.a. Neher, 1970; Hamada, 1966). Im Modell mit überlappenden Generationen bedeutet Kapitalmobilität international mobile Ersparnisse, wobei der Realkapitalbestand eines Landes international völlig unbeweglich bleiben kann. Anders ausgedrückt, Direktinvestitionen werden nicht über mobile Realkapitalstöcke, sondern über mobiles Finanzkapital modelliert.

(3) Der Ansatz mit überlappenden Generationen kann als rudimentärer (Zwei-Perioden) Life-Cycle-Ansatz interpretiert werden. Als solcher vermag er zwischen einer Arbeits- und Ruhestandsphase der Konsumenten zu unterscheiden und somit auch zwischen einer Erwerbs- und Konsumbevölkerung. Vermögensaufbau und -abbau während dieser beiden Lebensabschnitte sind qua Annahme gleich. Barro (1974) u.a. haben gezeigt, daß sich über Einführung eines Erbschaftsmotivs eine Brücke zum Ansatz mit unendlichem Zeithorizont schlagen läßt.

Die hier vorgestellte Arbeit versucht dreierlei: Erstens soll über die Einführung einer speziellen intertemporalen Nutzenfunktion die minimale Version des Modells einer offenen Wirtschaft mit überlappenden Generationen erzeugt werden. Dabei wird eine sehr einfache Darstellung mit Hilfe der bekannten Konzepte gesamtwirt-

---

1) Dornbusch (1985) und Persson (1985) studieren Staatsaktivität in der offenen Volkswirtschaft ebenfalls in Modellen mit überlappenden Generationen. Dornbusch unterdrückt allerdings Realkapitalbildung.

schaftlicher Ersparnis[2] und Investition entwickelt. Zweitens wird ein fundamentales Phasendiagramm dieses Modells entworfen, da solche Diagramme vor allem bei nichtlinearen Modellen einen guten Überblick sowohl über Steady-State-Zustände als auch über dynamische Anpassungsvorgänge gestatten. Drittens erweitern wir den Buiter-Ansatz zur Auslandsverschuldung. Buiter erklärt Auslandsverschuldung ausschließlich über unterschiedliche Zeitpräferenzen. Landesspezifische Investitionsneigungen infolge unterschiedlicher Grenzproduktivität nationaler Kapitalstöcke werden dagegen vernachlässigt. Im letzten Abschnitt präsentieren wir eine allgemeine Theorie der Auslandsverschuldung, wonach die Auslandsposition eines Landes sowohl von nationalen Unterschieden in der Zeitpräferenz als auch von Produktivitätsunterschieden bestimmt wird.

2. Die Diamond-Variante des "Overlapping-Generations"-Modells einer geschlossenen Volkswirtschaft

In jeder Periode t leben zwei Generationen, L_t junge und L_{t-1} alte Leute. Die Mitgliederanzahl zweier Generationen wachse mit der exogenen Rate n, so daß gilt:

(1) $$L_t = (1+n)L_{t-1} \qquad \text{für alle } t.$$

Das Leben jedes Mitglieds einer Generation dauert zwei Perioden. In der Jugend arbeiten die Mitglieder zum Lohnsatz w_t und konsumieren den Teil c_t^1 ihres Lohneinkommens. Der Rest $w_t - c_t^1$ bildet die Ersparnis s_t, die mit dem Zinssatz r_{t+1} verzinst wird. Im zweiten Abschnitt ihres Lebens arbeiten die Mitglieder nicht, sondern verbrauchen nur ihre Ersparnisse s_t und die darauf erhaltenen Zinsen $r_{t+1}s_t$. Die jungen Leute stehen in der Periode t vor dem Problem, ihr Lohneinkommen so in Jugend- und Alterskonsum aufzuteilen, daß ihr Lebensnutzen maximal wird.[3] Nimmt man an, daß der Entscheidung eine Nutzenfunktion vom Cobb-Douglas-Typ zugrunde

---

2) Buiter (1981) verwendet nur die Ersparnis der jungen Generation. Aus Gründen einer besseren Vergleichbarkeit mit der Literatur erscheint es jedoch nützlich, die gesamtwirtschaftliche Ersparnis als Aggregat der Spartätigkeit beider Generationen einzuführen.

3) Die Periodenlänge dieses Modells ist also dreißig bis vierzig Jahre.

liegt, läßt sich das Optimierungsproblem schreiben als

(2) $$u(c_t^1, c_t^2) = \gamma \ln c_t^1 + \delta \ln c_t^2 \rightarrow \max \qquad \gamma + \delta = 1,$$

unter der Nebenbedingung

(3) $$w_t - c_t^1 = c_t^2 (1+r_{t+1})^{-1} .$$

Als Ergebnis erhält man mittels der Lagrangeschen Multiplikatormethode[4)]

(4a) $$c_t^1 = \gamma w_t$$

(4b) $$s_t = \delta w_t$$

(4c) $$c_t^2 = (1+r_{t+1}) \delta w_t .$$

Die Ersparnis der jungen Generation in der t-Periode S_t entspricht dem Vermögen der Volkswirtschaft zu Beginn der t+1-Periode A_{t+1}. In Pro-Kopf-Einheiten (in dieser Arbeit bedeutet "pro Kopf" immer pro Mitglied der jungen Generation, also pro Beschäftigten) wird dies

(5) $$s_t = (1+n)a_{t+1} .$$

Die gesamtwirtschaftliche Ersparnis $\tilde{S}_t$ entspricht der gesamtwirtschaftlichen Vermögensbildung

$$\tilde{S}_t = A_{t+1} - A_t$$

bzw.

(6) $$\tilde{s}_t = (1+n)a_{t+1} - a_t .$$

Aus (5) und (6) wird ein wichtiger Zusammenhang zwischen der gesamtwirtschaftlichen Ersparnis pro Kopf und der Ersparnis der jungen Generation deutlich.

(7) $$\tilde{s}_t = s_t - a_t$$

Die gesamtwirtschaftliche Ersparnis entspricht der Ersparnis der jungen Generation abzüglich dem Entsparen der alten Generation. Dies ließe sich auch schreiben

$$\tilde{s}_t = s_t - s_{t-1}/(1+n) .$$

---

4) Unterstellt man eine allgemeinere Nutzenfunktion, fordert man z.B. nur, daß sie "well-behaved" sei, würde die Sparfunktion der Jungen auch den Zinssatz r_{t+1} als Argument enthalten.

Produziert wird nur ein Gut, das je nach Verwendungszweck als Konsum- oder Kapitalgut dienen kann. Die Transformation der beiden Produktionsfaktoren, Arbeit L_t und Kapital K_t, in den Output X_t wird durch eine linear-homogene Produktionsfunktion vom Cobb-Douglas-Typ beschrieben[5],

$$X_t = K_t^\alpha L_t^\beta \qquad 0 < \alpha,\ \beta < 1;\ \alpha + \beta = 1$$

die in Pro-Kopf-Form dargestellt werden kann.

$$(8) \qquad x_t = f(k_t) = k_t^\alpha$$

Das unelastische Arbeitsangebot L_t wird bei vollständiger Konkurrenz auf dem Arbeitsmarkt und völlig flexiblem Lohnsatz vollbeschäftigt eingesetzt. Bei Gewinnmaximierungsverhalten folgt weiterhin, daß die Produktionsfaktoren mit ihrem Grenzprodukt entlohnt werden. Bei einer linear-homogenen Produktionsfunktion und Grenzproduktivitätsentlohnung gelten

$$(9) \qquad w_t = f(k_t) - k_t\, f'(k_t) \qquad \text{bzw. } w_t = \beta f(k_t)$$

und

$$(10) \qquad r_t = f'(k_t) \qquad \text{bzw. } r_t = \alpha f(k_t)/k_t\ .$$

Die Investition ist definiert als $I_t = K_{t+1} - K_t$. Dies ergibt in Pro-Kopf-Einheiten

$$(11) \qquad i_t = I_t/L_t = (1+n)\, k_{t+1} - k_t$$

Die Unternehmungen fragen Kapital für Investitionen nach, bis der Zinssatz r_{t+1} der Grenzproduktivität des Kapitals entspricht.

$$(12) \qquad f'(k_{t+1}) = r_{t+1}$$

Die Investitionsfunktion (pro Erwerbstätigen) ist folglich gegeben durch

$$(13) \qquad i_t(r_{t+1}, k_t) \qquad \text{mit } \frac{di_t}{dr_{t+1}} = (1+n)/f'' < 0.$$

Gleichung (13) erhält man, indem man von $I_t = K_{t+1} - K_t$ ausgeht, dann zu Pro-Kopf-Größen übergeht und (12) invertiert und einsetzt.

---

5) Im allgemeineren Fall wird die Produktionsfunktion als "well-behaved" und linear-homogen angenommen.

2.1 Kapitalmarktgleichgewicht

Bezeichnet man den Konsum eines Mitglieds der jungen Generation mit c_t^1 und den Konsum eines Mitglieds der alten Generation mit c_{t-1}^2, so ist der Gesamtkonsum der Volkswirtschaft in der Periode t

$$c_t^1 L_t + c_{t-1}^2 L_{t-1} .$$

Dies ergibt in Pro-Kopf-Einheiten

$$\tilde{c}_t = c_t^1 + c_{t-1}^2/(1+n) .$$

Die Räumung des Gütermarktes verlangt dann

$$(14) \qquad f(k_t) - c_t^1 - c_{t-1}^2/(1+n) = (1+n)k_{t+1} - k_t .$$

Durch Rückdatierung von (4c) folgt mit (5)

$$(15) \qquad \frac{1}{1+n} c_{t-1}^2 = (1+r_t)a_t .$$

Die alte Generation konsumiert also in der Ruhestandsperiode ihr gesamtes Vermögen und die darauf erhaltenen Zinsen. Die Diamond-Variante des Modells mit überlappenden Generationen geht davon aus, daß in einer geschlossenen Volkswirtschaft das Realvermögen des Haushaltssektors genau dem Realkapitalstock entsprechen muß.

$$(16) \qquad a_t = k_t$$

Gleichgewicht liegt bei einem bestimmten Zinssatz r_{t+1} vor, bei dem entweder der Gütermarkt geräumt wird oder alternativ die Sparpläne des Haushaltssektors mit den Investitionsvorhaben der Unternehmungen in Übereinstimmung stehen. Aus (14) in Verbindung mit (15) und (16) folgt

$$w_t + r_t k_t - c_t^1 - (1+r_t)k_t = (1+n)k_{t+1} - k_t$$

$$(17) \qquad s_t - k_t = (1+n)k_{t+1} - k_t$$

oder wegen (7) und (11)

$$(18) \qquad \tilde{s}_t = i_t .$$

Berücksichtigt man die Verhaltensfunktionen (4) und (13), so ergibt sich aus (17)

$$(19) \qquad \tilde{s}(k_t) = i(r_{t+1}, k_t) .$$

Nach (19) liegt ein Kapitalmarktgleichgewicht vor, wenn die Vermögensbildung des konsolidierten Haushaltssektors gleich ist der Nettoinvestition des Unternehmungssektors. Saldiert man den Altkapitalbestand, k_t, der in jeder Periode von der alten an die junge Generation verkauft wird, auf beiden Seiten der Gleichung (17), so läßt sich das Kapitalmarktgleichgewicht auch über die Ersparnis der jungen Generation formulieren.

$$(20) \qquad \frac{w_t - c_t^1}{1+n} = k_{t+1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{s_t}{1+n} = k_{t+1}$$

Diese bestandsorientierte Betrachtung verlangt, daß die Ersparnis der jungen Generation während der Periode t (Kapitalangebot) dem optimalen Kapitalstock zu Beginn der Periode t+1 (Kapitalnachfrage) entsprechen muß.

Da s_t bei gegebener Zeitpräferenz wegen (4) vom Lohneinkommen der Volkswirtschaft abhängt und k_{t+1} den vom Zinssatz abhängigen optimalen Kapitalstock bezeichnet, folgt

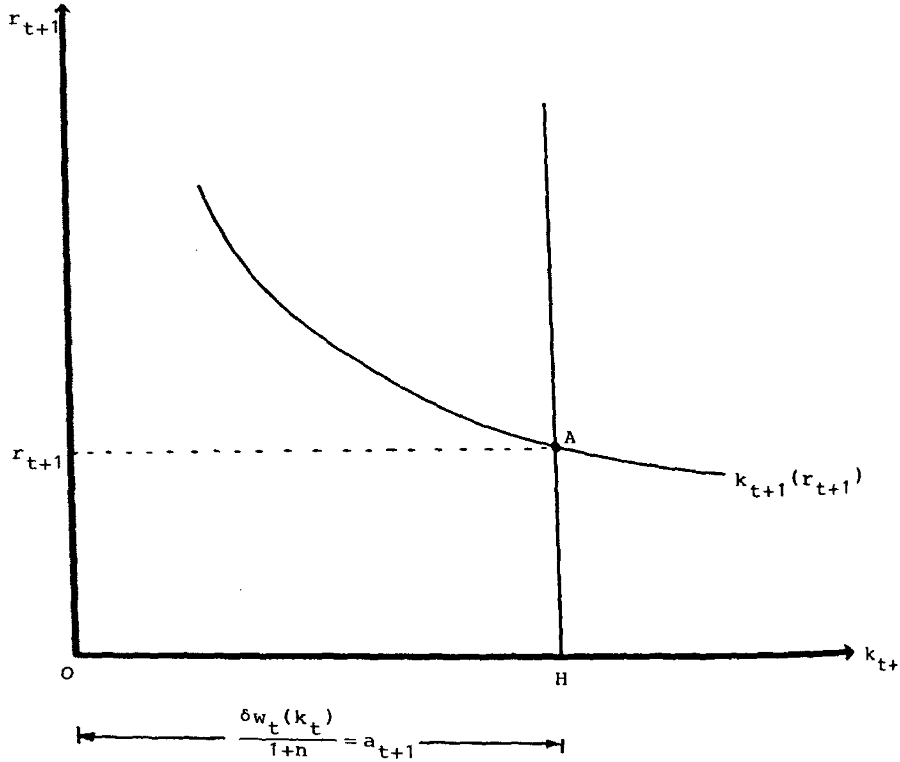
$$(21) \qquad \frac{\delta w_t(k_t)}{1+n} = k_{t+1}(r_{t+1}) \; .$$

In (21) wurde ferner die Abhängigkeit des Reallohnsatzes von der Kapitalintensität berücksichtigt. Für einen gegebenen Kapitalstock k_t läßt sich also der Zinssatz bestimmen, für den der optimale Kapitalstock gerade den zinsunelastisch angebotenen Ersparnissen der jungen Generation entspricht.

Diese Überlegung wird durch Abbildung 1 veranschaulicht, wo zunächst das zinsunelastische Sparangebot OH der jungen Generation zu sehen ist. Ferner erscheint der zinsabhängige optimale Kapitalstock als abnehmende Kapitalnachfragefunktion. Kapitalmarktgleichgewicht ist im Punkt A.

Die Gleichungen (19) und (21) erfassen das Kapitalmarktgleichgewicht - als Spiegelbild zum Gütermarktgleichgewicht - in einer strom- bzw. bestandsorientierten Betrachtungsweise. Nach (21) erfolgt in jeder Periode eine neue Finanzierung des gewünschten optimalen Kapitalstocks durch eine Wertpapierausgabe an die Mitglieder der jungen Generation. Mit den Erlösen dieser Emission

Abb.1: Kapitalmarktgleichgewicht einer geschlossenen Volkswirtschaft



werden zunächst die alten Kapitalstockbesitzer, d.h. die alte Generation, ausgezahlt.[6] Zusätzlich läßt sich auch noch die Nettoinvestition des Unternehmungssektors finanzieren. Die Unternehmungen müssen bei diesem Ablauf in jeder Periode zwischen der alten

---

6) Die alte Generation erhält außerdem aus den laufenden Verkaufserlösen eine Entlohnung (rental rate) für den Einsatz des Kapitalstocks in der laufenden Periode.

und neuen Generation umschulden. Diese Umschuldung entfällt bei der Strombetrachtung (19), wo ohne Beteiligung des Unternehmungssektors der Altkapitalbestand von der alten Generation an die Jungen verkauft wird. Als **gesamtwirtschaftliche** Ersparnis steht für die Investitionsfinanzierung nur der Saldo aus dem Sparen der Jungen und dem Entsparen der Alten zur Verfügung.[7)]

2.2 Stabilität und Steady-State

Aus (21) bzw. Abbildung 1 wird deutlich, daß für einen historisch gegebenen Pro-Kopf-Kapitalstock k_t am Kapitalmarkt der Gleichgewichtszinssatz r_{t+1} bestimmt wird und simultan der optimale Kapitalstock k_{t+1} für die nächste Periode gefunden werden kann. Im allgemeinen wird dabei gelten $k_t \neq k_{t+1}$, so daß eine zeitliche Folge von Kapitalstöcken erzeugt wird. Ein Wachstumsgleichgewicht (Steady-State) liegt vor, wenn $k_t = k_{t+1}$. Die Dynamik des Systems folgt aus der Gütermarktgleichung (14), wonach der nicht konsumierte Güterberg einer Volkswirtschaft für die Kapitalakkumulation zur Verfügung steht.

$$(1+n)k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t^1 - \frac{1}{1+n} c_{t-1}^2$$

Wegen (15) und (16) läßt sich das Gütermarktgleichgewicht auch als Gleichheit von Investition und gesamtwirtschaftlicher Ersparnis fomulieren.

$$(1+n)k_{t+1} - k_t = w_t - c_t^1 - k_t$$

Berücksichtigen wir die Verhaltensfunktionen (4), so folgt mit der Annahme einer Cobb-Douglas-Technologie die nachstehende nichtlineare Differenzengleichung erster Ordnung.

$$k_{t+1} = \frac{\delta\beta}{1+n} f(k_t) \tag{22}$$

Diese Differenzengleichung ist (lokal) stabil, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = - \frac{(1-c_w)kf''}{1+n} < 1 . \tag{23}$$

---

7) Siehe unten, Abbildung 3, für eine Darstellung der Kreislaufzusammenhänge in der offenen Volkswirtschaft.

Für unseren Spezialfall vereinfacht sich diese Bedingung.

$$(24) \qquad \frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{\delta\beta f'(k)}{1+n} < 1$$

Das Wachstumsgleichgewicht besteht aus der Folge momentaner Gleichgewichte, bei denen sich die Kapitalintensität nicht verändert, $k_{t+1} = k_t$. Damit bleiben aber auch w_t, r_t, c_t^1 und c_t^2 für alle t konstant. Man kann die Unabhängigkeit von t ausdrücken, indem man den Zeitindex t in den Gleichungen des Systems momentaner Gleichgewichte wegläßt, und erhält somit das folgende Gleichungssystem:

Konsumsektor

	allgemein:	**log. Nutzenfunktion:**
(25)	(Siehe Buiter, 1981)	$c^1 = (1-\delta)w$ $c^2 = (1+r)\delta w$ $w - c^1 = c^2/(1+r)$ $k(1+n) = \delta w$

Produktionssektor

	allgemein:	**Cobb-Douglas-Funktion:**
(26)	$w = f(k) - kf'(k)$ $r = f'(k)$	$w = \beta f(k) = \beta k^\alpha$ $r = \alpha f(k)/k = \alpha k^{\alpha-1}$

Aus (25) in Verbindung mit (26) folgt eine Gleichung, welcher das Steady-State k gehorchen muß. Aus den Eigenschaften dieser impliziten Darstellung für k ergibt sich die Eindeutigkeit des Wachstumsgleichgewichts.

$$(27) \qquad k(1+n) = \delta\beta f(k)$$

Aus (27) läßt sich der Steady-State-Zinssatz direkt bestimmen in Abhängigkeit von den Systemparametern.

$$(28) \qquad r = \frac{(1+n)\alpha}{\delta\beta}$$

Unter den speziellen Annahmen über Technologie und Nutzenfunktion, die wir in dieser Arbeit eingeführt haben, ist das Wachstumsgleichgewicht eines Modells mit überlappenden Generationen nicht unterscheidbar vom Wachstumsgleichgewicht eines Solow-Modells. Dies läßt sich zeigen, wenn wir (27) umschreiben

(29) $$nk = \frac{n\delta\beta}{1+n} f(k)$$

und die Definition einer gesamtwirtschaftlichen Sparquote einführen.

(30) $$\sigma \equiv \tilde{s}/f(k) = \frac{n\delta\beta}{1+n} < 1$$

Man erhält dann aus (29) und (28) die bekannten Darstellungen für k und r im Steady-State,

(31) $$nk = \sigma f(k) \quad ; \quad \sigma r = \alpha n$$

hat jedoch zu beachten, daß σ kein ad hoc fomulierter Makroparameter ist, sondern über einen rudimentären Life-Cycle-Ansatz verhaltensmäßig fundiert wurde.

3. Ein Modell der Weltwirtschaft

Zwei Länder stehen über einen Weltgüter- und einen Weltkapitalmarkt in Verbindung miteinander. Für das Inland gilt die Notation aus dem vorherigen Abschnitt, ausländische Variable werden durch einen Stern gekennzeichnet. Im In- und Ausland wird mittels der Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital ein identisches Gut hergestellt. Die Produktionsfunktionen beider Länder sind linear-homogen und vom Cobb-Douglas-Typ. Sie werden in beiden Ländern als identisch unterstellt.

(32) $$x_t = f(k_t) \quad \text{und} \quad x_t^* = f(k_t^*)$$

In der Ausgangslage sind das (weiterhin elastische) Arbeitsangebot und der Kapitalstock in beiden Ländern gleich.

(33) $$K_o = K_o^* \quad \text{und} \quad L_o = L_o^*$$

Daraus folgt zunächst $k_o = k_o^*$. Internationale Mobilität des Faktors Arbeit ist ausgeschlossen, jedoch wächst dieser Produktionsfaktor in beiden Ländern mit der Rate n. Die Gültigkeit eines einheitlichen Weltmarktzinssatzes[8] garantiert dann bei gleichen Produktionsfunktionen die Installation identischer optimaler Kapitalstöcke in beiden Ländern.

---

8) Die Bestimmung des eindeutigen Weltmarktzinses am Weltkapitalmarkt erfolgt anschließend.

(34) $\quad r_{t+1} = f'(k_{t+1}) = f'(k^*_{t+1}) \quad$ impliziert $\quad k_{t+1} = k^*_{t+1}$

Von der Produktionstechnik her gesehen, einschließlich ihrer Investitionsentscheidungen, sind die beiden Länder vollständige Duplikate. Landesspezifische Unterschiede werden anschließend im Verhalten der Konsumenten modelliert.

Dementsprechend maximieren die Konsumenten eines Landes eine landspezifische Nutzenfunktion (2) unter der Nebenbedingung (3). Die junge Generation des Inlandes (Auslandes) spart somit den konstanten Teil $\delta(\delta^*)$ ihres Lohneinkommens während der Arbeitsperiode.

(35) $\quad s_t = \delta w_t \quad ; \quad s^*_t = \delta^* w^*_t$

Die Ersparnisse beider Länder entsprechen dem Kapitalangebot am Weltkapitalmarkt. Die Kapitalnachfrage resultiert aus dem Investitionsverhalten der Unternehmungen, welche die Grenzproduktivität ihres optimalen Kapitalstocks dem einheitlichen Weltmarktzins angleichen.

3.1 Bestimmung des Zinssatzes am Weltkapitalmarkt

Dem Pro-Kopf-Reinvermögen einer Nation zu Beginn der Periode t+1 entspricht die Ersparnis ihrer Erwerbstätigen während der Periode t.

(36) $\quad a_{t+1} = s_t/(1+n) \quad ; \quad a^*_{t+1} = s^*_t/(1+n)$

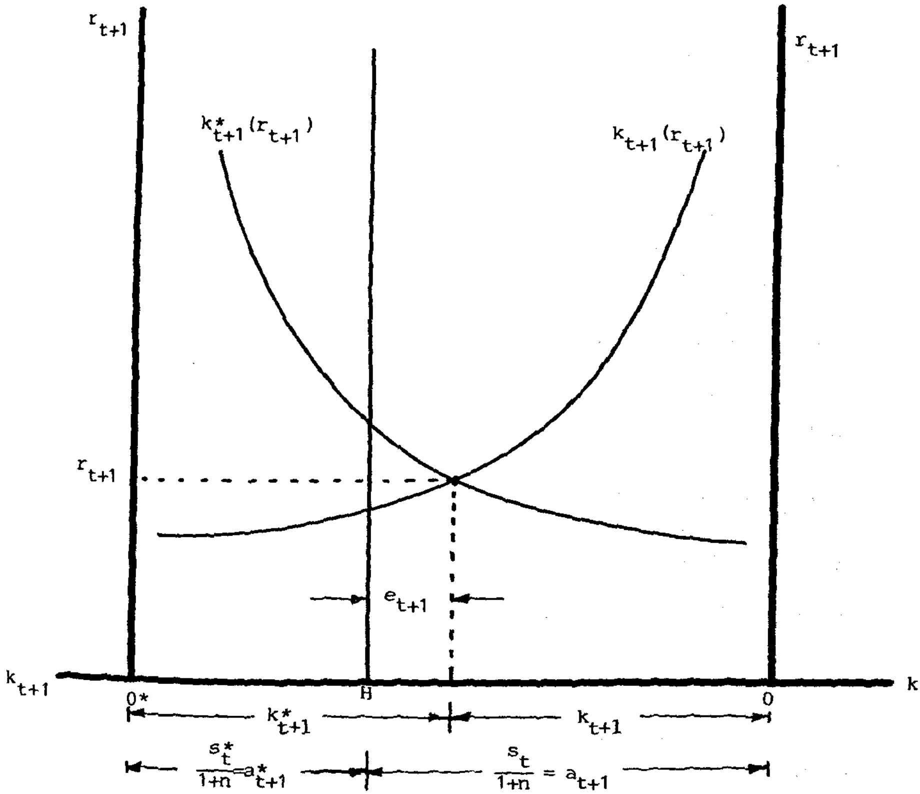
Bei einem Gleichgewicht am Weltkapitalmarkt muß der Weltmarktzins dieses Kapitalangebot der optimalen Kapitalnachfrage der Unternehmungen beider Länder anpassen. Dies läßt sich schreiben

(37) $$\frac{s_t}{1+n} + \frac{s^*_t}{1+n} = k_{t+1} + k^*_{t+1} ,$$

wobei die Kapitalintensitäten Funktionen des Zinssatzes sind.

Die Betrachtung der Abbildung 2 erläutert die Bestimmung des Zinssatzes am Weltkapitalmarkt. Abbildung 2 zeigt die Ersparnis der jungen Generation und den gewünschten Kapitalstock für jeweils beide Länder in Abhängigkeit vom Weltmarktzins. Mit Bezug zum Koordinatenursprung 0 bzw. 0* erscheint die zinsunelastische Ersparnis der jungen Generation des Inlandes multipliziert mit dem

Abb. 2: Zinsbestimmung am Weltkapitalmarkt



Faktor $1/(1+n)$. Damit mißt die Strecke OH (O*H) das inländische (ausländische) Reinvermögen zu Beginn der Periode t+1. Ebenfalls mit Bezug zum Ursprung O (O*) wurde der gewünschte Kapitalstock zu Beginn der Periode t+1 als abnehmende Funktion des Weltmarktzinses dargestellt.[9] Beim Gleichgewichtszins wird zunächst deutlich, daß die Weltersparnis der Weltkapitalnachfrage entspricht.

(38) $$a_{t+1} + a^*_{t+1} = k_{t+1} + k^*_{t+1}$$

9) Infolge der Annahme gleicher Produktionsfunktionen in beiden Ländern sind die Kapitalstockfunktionen vollständig symmetrisch und die optimalen Kapitalintensitäten gleich groß.

Gleichzeitig erkennt man, daß ein einheitlicher Weltmarktzins unter der Annahme eines relativ stark sparenden Inlandes[10] nur ermöglicht wird, wenn das Inland einen gewissen Bruchteil seiner Ersparnisse im Ausland anlegen kann und damit zum Eigentümer eines Teils des im Ausland installierten Kapitalstocks wird. Die Auslandsinvestition des Inlandes erscheint als Auslandsforderung $e_{t+1} = a_{t+1} - k_{t+1} > 0$. Aus der Sicht des Auslandes ist eine Verbindlichkeit in gleicher Höhe entstanden: $a^*_{t+1} - k^*_{t+1} = - e_{t+1} < 0$.

Während in der geschlossenen Volkswirtschaft Reinvermögen (= Ersparnis der Erwerbstätigen) und Sachvermögen (= Kapitalstock) eines Landes übereinstimmen, werden in der offenen Volkswirtschaft im Regelfall diese Größen voneinander abweichen. Die Differenz wird als Auslandsposition bezeichnet.

(39) $$e_{t+1} = a_{t+1} - k_{t+1} \quad ; \quad e^*_{t+1} = a^*_{t+1} - k^*_{t+1}$$

Im Fall einer positiven Auslandsposition spricht man von Auslandsforderungen bzw. von einem Gläubigerland, bei einer negativen Auslandsposition von Auslandsschulden bzw. einem Schuldnerland. Bekannte Grundsätze der Vermögensrechnung lassen sich auf unser Zwei-Länder-Modell anwenden.

Die Summe der Reinvermögen beider Länder muß dem Weltsachvermögen entsprechen.

(40) $$a_{t+1} + a^*_{t+1} = k_{t+1} + k^*_{t+1}$$

Offensichtlich garantiert das Kapitalmarktgleichgewicht (37) genau diesen Sachverhalt.

Die Auslandsposition des Inlandes entspricht der Auslandsposition des Auslandes mit umgekehrtem Vorzeichen.

(41) $$e_{t+1} = - e^*_{t+1}$$

Es ist einsichtig, daß man unter Berücksichtigung der zugrundeliegenden Verhaltensfunktionen das Kapitalmarktgleichgewicht auch über einen Ausgleich der Auslandspositionen erfassen könnte.

(42) $$e_{t+1}(r_{t+1}) + e^*_{t+1}(r_{t+1}) = 0$$

---

10) Das Inland wurde jedoch gegenüber dem Ausland mit einer größeren Sparneigung seiner Beschäftigten ausgestattet ($\delta > \delta^*$).

3.2 Formulierung des Kapitalmarktgleichgewichts über Ersparnis und Investition

Die Formulierung des Kapitalmarktgleichgewichts erfolgt in (37) nur über die Ersparnis der jungen Generation. In völliger Übereinstimmung mit der traditionellen Makroökonomie offener Volkswirtschaften wäre ein Kapitalmarktgleichgewicht auch dann gegeben, wenn die Weltersparnis (gesamtwirtschaftlich) gleich der Weltinvestition ist (solange das Weltangebot an produzierten Gütern der Weltnachfrage entspricht). Fomulieren wir das Kapitalmarktgleichgewicht in dieser alternativen Form als

(43) $\tilde{s}_t + \tilde{s}^*_t = i_t + i^*_t$,

so läßt sich zeigen, daß (43) und (37) äquivalent sind. Mit (6) folgt aus (43)

$$[(1+n)a_{t+1} - a_t] + [(1+n)a^*_{t+1} - a^*_t] = [(1+n)k_{t+1} - k_t] + [(1+n)k^*_{t+1} - k^*_t]$$

oder wegen (7)

(44) $(s_t - a_t) + (s^*_t - a^*_t) = (1+n)(k_{t+1} + k^*_{t+1}) - (k_t + k^*_t).$

Da (40) für jede Periode Gültigkeit hat, folgt aus (44) sofort (37).

3.3 Leistungsbilanz und Handelsbilanz

Die Bestimmung des Weltmarktzinssatzes und der Auslandsverschuldung ist ein zentraler Bestandteil für das Modell der Weltwirtschaft mit überlappenden Generationen. Andere wichtige Variable wie Volkseinkommen und Leistungsbilanz oder Handelsbilanz stehen damit in Zusammenhang. In der Leistungsbilanz einer offenen Volkswirtschaft werden Volkseinkommen und Absorption miteinander verglichen. Da auf Auslandsschulden Zinsen gezahlt werden müssen, besteht - anders als in der geschlossenen Volkswirtschaft - ein Unterschied zwischen dem Sozialprodukt y (y*) (= Volkseinkommen) und dem Inlandsprodukt x (x*) eines Landes.

$$y_t = x_t + r_t e_t = w_t + r_t a_t$$

(45) $y^*_t = x^*_t - r_t e_t = w^*_t + r_t a^*_t$

Andererseits kann in der offenen Volkswirtschaft ein Land in einer Periode mehr als sein Sozialprodukt absorbieren, sofern andere Länder zu einer Unterabsorption bereit sind. Die Differenz zwischen Sozialprodukt und inländischer Absorption entspricht dem Leistungsbilanzsaldo.

$$(46) \qquad q_t = y_t - c_t^1 - \frac{c_{t-1}^2}{1+n} - [(1+n)\, k_{t+1} - k_t]$$

Nachfolgend soll gezeigt werden, daß der Leistungsbilanzsaldo dem Saldo der Kapitalbilanz entspricht, was gleichbedeutend ist mit der Behauptung, daß der Leistungsbilanzsaldo übereinstimmt mit der Änderung der Nettoposition eines Landes. Die Alten konsumieren in Höhe ihrer Ersparnis zuzüglich erhaltener Zinszahlungen aus dem In- und Ausland, d.h.

$$(47) \qquad c_{t-1}^2 = s_{t-1}(1+r_t) = (1+n)(1+r_t)\, a_t.$$

Somit folgt aus (46) und (47)

$$q_t = w_t - c_t^1 + r_t a_t - (1+r_t)a_t - [(1+n)k_{t+1} - k_t],$$

und die Leistungsbilanz läßt sich schreiben

$$(48) \qquad q_t = s_t - a_t - [(1+n)k_{t+1} - k_t]$$

$$= [(1+n)a_{t+1} - a_t] - [(1+n)k_{t+1} - k_t].$$

Da (40) in jeder Periode gültig ist, kann man (48) entweder durch Verwendung der Auslandsposition ausdrücken

$$(49) \qquad q_t = (1+n)e_{t+1} - e_t$$

oder durch die Verwendung von (6) und (11)

$$(50) \qquad q_t = \tilde{s}_t - i_t .$$

Die letzte Formulierung bringt die Leistungsbilanz als Differenz von gesamtwirtschaftlicher Ersparnis und Investition. Die vorletzte Formulierung erkennt den Leistungsbilanzsaldo als Änderungsrate der Nettoposition eines Landes. Die letzte Formulierung ist geläufig aus der makroökonomischen Theorie offener Volkswirtschaften. Die vorletzte Formulierung ist aus dem volkswirtschaftlichen Rechnungswesen bekannt. Die Verknüpfung beider Formulierungen führt zu dem behaupteten wichtigen Zusammenhang der Theorie der Auslandsverschuldung.

(51) $$(1+n)e_{t+1} - e_t = \tilde{s}_t - i_t$$

Die Handelsbilanz entspricht der Differenz von Inlandsprodukt und Absorption

$$h_t = x_t - c_t^1 - \frac{1}{1+n} c_{t-1}^2 - \left[(1+n)\, k_{t+1} - k_t\right].$$

Nach einigen Umformungen läßt sich die Handelsbilanz als Differenz zwischen Leistungsbilanz und Dienstleistungsbilanz angeben.

$$h_t = s_t - a_t - \left[(1+n)\, k_{t+1} - k_t\right] - r_t e_t$$

(52) $$= \tilde{s}_t - i_t - r_t e_t$$

Bei Verwendung der Auslandsposition läßt sich die Handelsbilanz wegen (51) schreiben

(53) $$h_t = \left[(1+n)e_{t+1} - e_t\right] - r_t e_t \,.$$

Damit haben wir die wichtigsten Variablen für das Modell einer Weltwirtschaft mit überlappenden Generationen erklärt. In Abbildung 3 wird nochmals versucht, in Form einer Kreislaufdarstellung die Zusammenhänge zwischen diesen ökonomischen Größen aufzuzeigen. Dies soll hier nicht weiter kommentiert werden. Vielmehr wird im nächsten Abschnitt das Wachstumsgleichgewicht dieser Wirtschaft genauer untersucht.

4. Steady-State-Gleichgewicht der Weltwirtschaft

Im Steady-State müssen die Kapitalintensität, die Nettoposition pro Kopf der Erwerbstätigen und der Weltmarktzins konstante Werte (k, e, r) annehmen.[11] Investition und gesamtwirtschaftliche Ersparnis lassen sich im Steady-State sehr einfach darstellen.

(54)
$$i = nk \quad ; \qquad \tilde{s} = na = \frac{n\delta w}{1+n} = \frac{n\delta\beta}{1+n} f(k)$$
$$i^* = nk^*; \qquad \tilde{s}^* = na^* = \frac{n\delta^* w}{1+n} = \frac{n\delta^*\beta}{1+n} f(k)$$

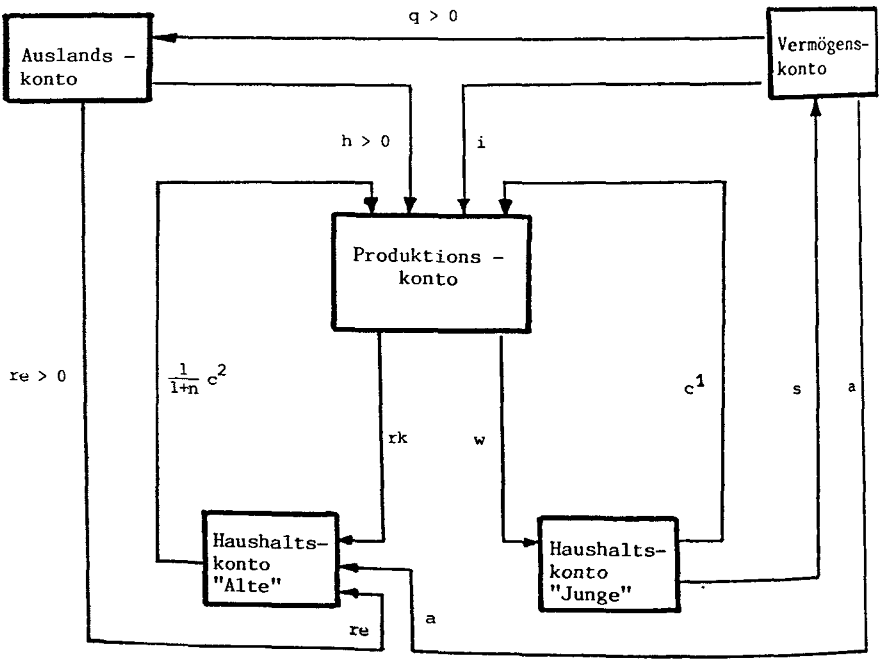
Die Leistungs- bzw. Handelsbilanz pro Kopf lassen sich mit (54) aus (50) und (53) herleiten.

---

11) Variable ohne Zeitindex beziehen sich auf Steady-State-Zustände.

Abb. 3: Kreislauf des Modells einer offenen Wirtschaft mit überlappenden Generationen

Fall: Gläubigerland (e>0) mit Handelsbilanzüberschuß (h>0)



(55) $\quad q = na - nk = ne \quad ; \quad h = (n - r)e$

Die Vorzeichen von Leistungsbilanz- und Handelsbilanzsaldo sind damit zunächst vom Vorzeichen der Nettoposition e abhängig. Der Handelsbilanzsaldo wird ferner durch das Vorzeichen der Differenz (n - r) festgelegt. Nachfolgend sollen k, e und r im Steady-State bestimmt werden, und wir zeigen, daß das Vorzeichen von (n - r) unabhängig vom Vorzeichen von e bestimmt wird durch die Parameter des Systems.

Infolge der Annahme gleicher Technologien und gleicher Faktorausstattungen läßt sich der Steady-State-Wert für die Kapitalintensität sofort aus der Bedingung für Gleichgewicht am Weltkapitalmarkt finden. Berücksichtigen wir (35) in (37), so erhält man[12)]

(56) $$k = \frac{\delta+\delta^*}{(1+n)2}\,\beta f(k)$$

Aus den bekannten Eigenschaften der Pro-Kopf-Funktion folgt die Eindeutigkeit von k. Es ist ferner offensichtlich, daß gilt $0<k<1$. Der Weltmarktzins folgt sofort aus (56).

(57) $$r = \frac{\alpha(1+n)2}{(\delta+\delta^*)\beta}$$

Aus (55) in Verbindung mit (56) und (54) folgt die Auslandsposition im Steady-State.

(58) $$e = \frac{(\delta-\delta^*)\beta}{(1+n)2}\;f(k)$$

Aus (56) und (58) läßt sich das Reinvermögen berechnen.

(59) $$a = k + e = \frac{\delta\beta}{1+n}\,f(k) \quad ; \quad a^* = k^* - e = \frac{\delta^*\beta}{1+n}\,f(k)$$

Schließlich interessieren noch die Anteile des Sachvermögens bzw. des Geldvermögens (Nettoposition) am Reinvermögen der inländischen Volkswirtschaft.

(60) $$k/a = \frac{\delta+\delta^*}{2\delta} \qquad ; \qquad e/a = \frac{\delta-\delta^*}{2\delta}$$

Das Verhältnis von Auslandsforderungen zu Sachkapital ist

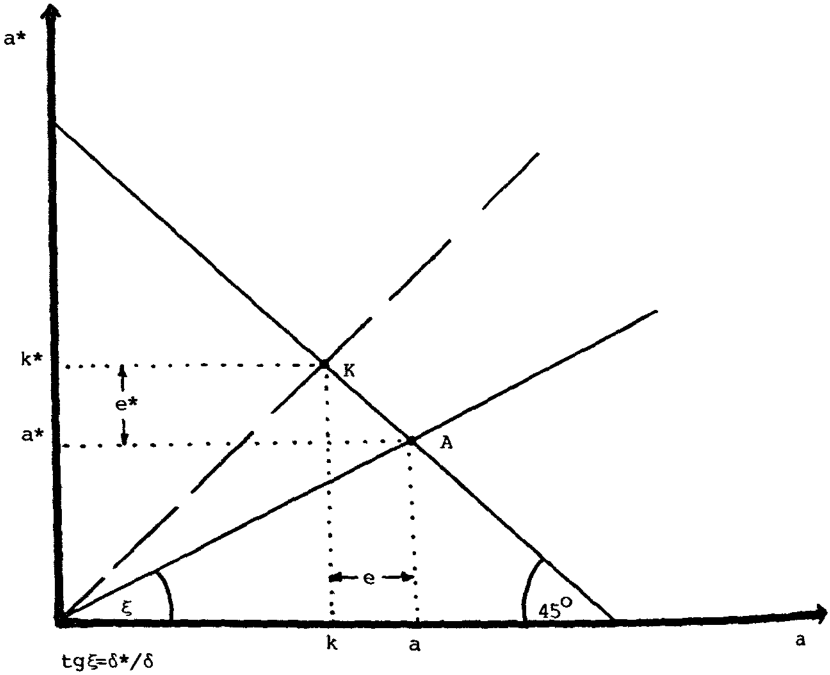
(61) $$e/k = \frac{\delta-\delta^*}{\delta+\delta^*}\;.$$

Das Wachstumsgleichgewicht läßt sich in Abbildung 4 in einem a^*,a-Diagramm beschreiben. Die Kapitalintensitäten beider Länder erscheinen in Punkt K. Die Koordinaten von K erfüllen die Gleichung (56). Durch Punkt K verläuft die Kurve des konstanten Weltvermögens. Sie wird in Punkt A geschnitten von einem Fahrstrahl aus dem Ursprung mit dem Anstieg ξ. Die Steigung dieses Strahls $\mathrm{tg}\,\xi = \delta^*/\delta$ folgt aus (59). Man erkennt die Nettoposition als Abweichung des Punktes A von Punkt K entlang der Weltvermögenslinie. Offensichtlich ist das Vorzeichen der Nettoposition nur von $(\delta - \delta^*)$ abhängig.

---

12) Der Leser beachte, daß $w = w^*$ und $k = k^*$.

Abb. 4: Reinvermögen und Auslandsposition im Steady-State: Der Fall unterschiedlicher Zeitpräferenzen und gleicher Technologie



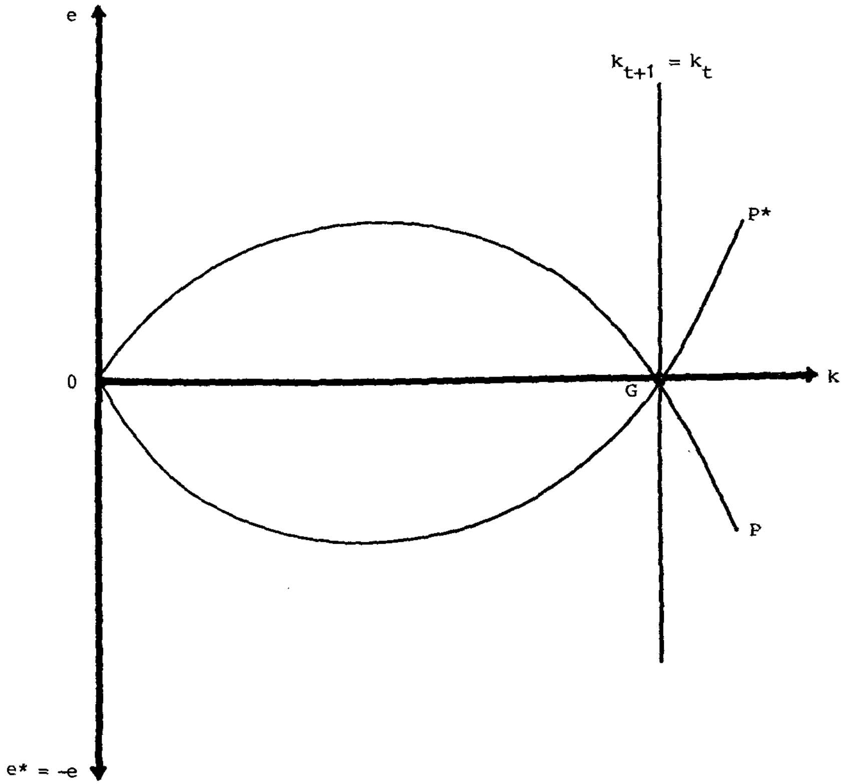
In Abbildung 5 wird eine alternative Darstellung des Wachstumsgleichgewichts im Raum der Zustandsvariablen e, k gegeben. Zunächst erscheint die Auslandsposition des Inlandes e als Funktion von k.

(62) $$e = a - k = \frac{\delta\beta}{1+n} f(k) - k$$

Entsprechend gilt für die Auslandsposition des Auslandes

(63) $$-e = e^* = a^* - k^* = \frac{\delta^*\beta}{1+n} f(k) - k \,.$$

Abb. 5: Auslandsposition und inländisches Sachvermögen im Steady-State



Aus den üblichen Eigenschaften der Pro-Kopf-Produktionsfunktion resultieren der Graph der e,k-Funktion (62) als Kurvenzug OP und der Graph der e*,k-Funktion (63) als Kurvenzug OP*. Im dargestellten Fall vollständig identischer Länder, $\delta=\delta^*$, verlaufen die beiden Kurvenzüge völlig symmetrisch zur k-Achse. Der Steady-State-Wert für k folgt aus (56) und ist offensichtlich unabhängig von e. Die Vertikale durch den Schnittpunkt G kennzeichnet den Steady-

State-Wert für k.[13] In Übereinstimmung mit der Formel (61) wird ersichtlich, daß bei gleichen Sparneigungen keine Auslandsverschuldung möglich ist. Dagegen findet sich im Fall $\delta-\delta^*>0$ eine Gläubigerposition des Inlandes und im Fall $\delta-\delta^*<0$ eine Schuldnerposition des Inlandes, weil die Nullstellen der OP- und OP*-Funktionen für $\delta-\delta^* \neq 0$ auseinanderfallen (siehe Abb. 6 und Abb. 7). In Abbildung 5 wäre e/k der tg des Winkels, den der Fahrstrahl aus dem Ursprung 0 durch den jeweiligen Gleichgewichtspunkt G mit der k-Achse bildet.

4.1 Komparative Statik von Steady-State-Zuständen

Parameter des Systems sind die landesspezifischen Sparneigungen der jungen Generation δ, δ^*, die beiden Ländern gemeinsame Wachstumsrate der Bevölkerung n und die Verteilung zwischen Arbeits- und Besitzeinkommen β. Im Symmetriefall, $\delta=\delta^*$, führt eine Vergrößerung der gemeinsamen Sparneigung bzw. eine Verbesserung der Einkommensverteilung zugunsten der arbeitenden jungen Generation zu einer Vergrößerung des Weltkapitalstocks bzw. der Länderkapitalstöcke.[14] Dieser Wachstumsprozeß findet statt ohne jede Auslandsverschuldung. Punkt G in Abb. 5 würde sich auf der Abszisse nach rechts verschieben. Im Symmetriefall akkumuliert die Weltwirtschaft exakt gemäß einem Wachstumsprozeß, der 1965 erstmals von Diamond für die geschlossene Volkswirtschaft beschrieben wurde. Der Weltmarktzins sinkt dabei infolge der steigenden Weltersparnis. Dieses Grundmuster der Anpassung von k und r bleibt erhalten, wenn sich die Sparneigung der jungen Generation jeweils nur in einem Land vergrößert.

$$\frac{dk}{d\delta} = \frac{dk}{d\delta^*} = \frac{k}{\beta(\delta+\delta^*)} > 0$$

(64)

$$\frac{dr}{d\delta} = \frac{dr}{d\delta^*} = -\frac{r}{\delta+\delta^*} < 0$$

---

13) Man kann zeigen, daß für $\delta-\delta^*=0$ die Nullstellen der OP- und OP*-Funktionen beim Steady-State-Wert für k erreicht werden. Die drei Kurven in Abb. 3 sind nicht voneinander unabhängig. Jeweils zwei Kurven genügen zur Bestimmung eines Steady-State-Zustandes.

14) Eine Vergrößerung von n hat die entgegengesetzte Wirkung.

Der entscheidende Einfluß der Veränderung einer landesspezifischen Sparneigung liegt also in der Reaktion des Leistungsbilanzsaldos bzw. der Auslandsposition. Eine Vergrößerung der Sparneigung eines Landes verbessert in der Regel dessen Auslandsposition, d.h. vergrößert eine im Ausgangszustand bestehende Gläubigerposition und verkleinert eine im Ausgangszustand vorliegende Schuldnerposition. Diese Aussage wird in Abbildung 6 und in Abbildung 7

Abb. 6: Komparative Statik des Steady State-Zustandes: Der Fall eines inländischen Konsumschocks

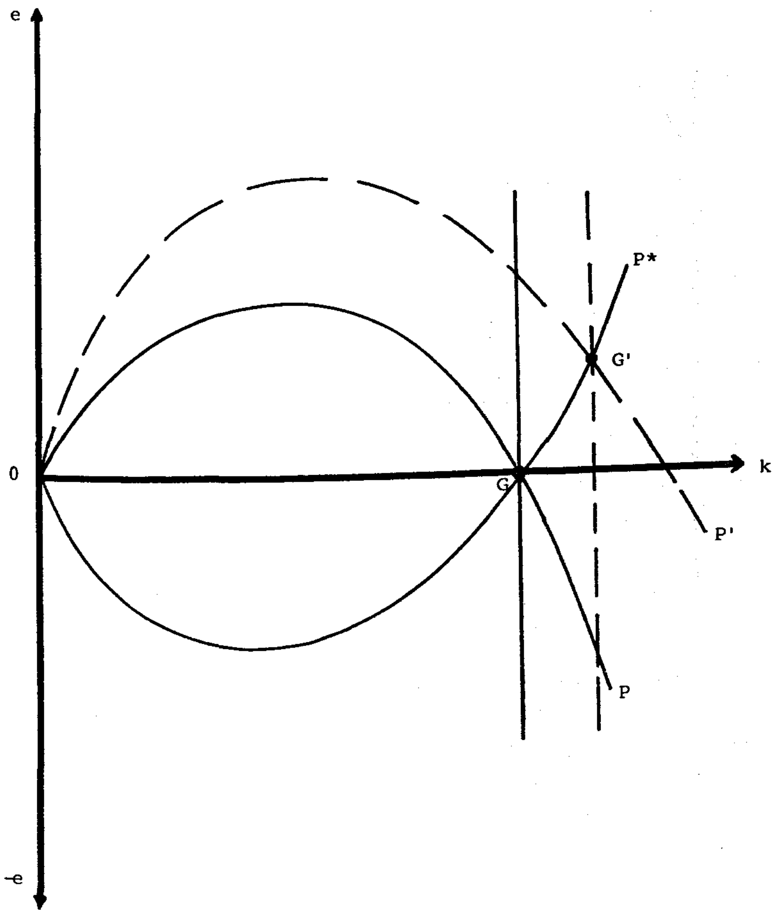
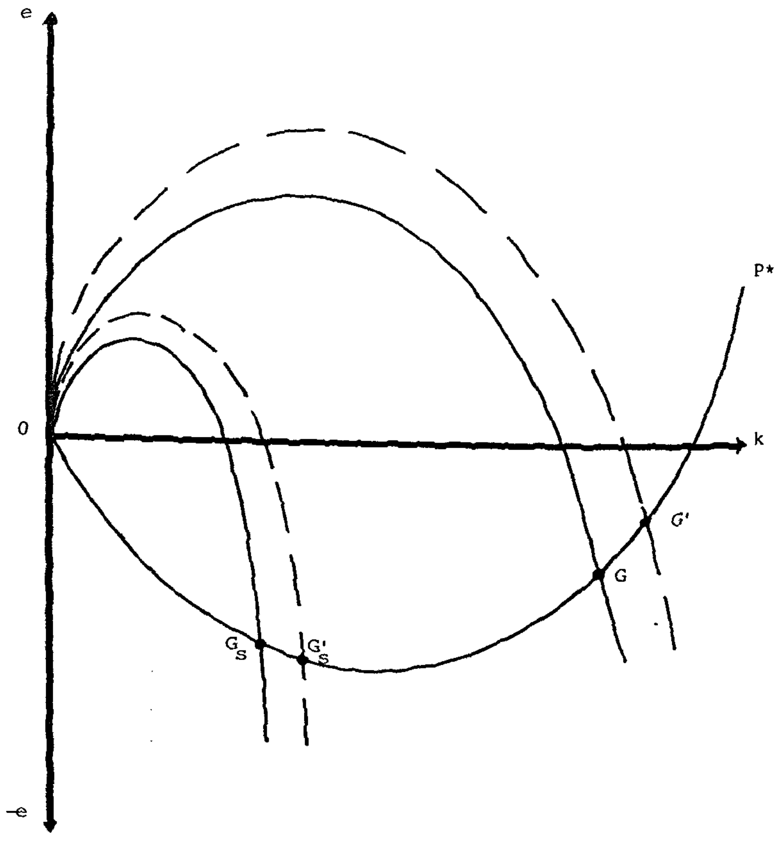


Abb. 7: Paradoxe Reaktion der Auslandsposition *nach einer Erhöhung der Sparneigung*



durch den Übergang von Gleichgewichtszustand G nach G' für den Fall einer Erhöhung der Sparneigung im Inland veranschaulicht. Differentiation von (58) zeigt jedoch, daß durch diese Aussage nur der Normalfall abgedeckt wird.

$$\frac{de}{d\delta} = \frac{2\alpha k}{(\delta+\delta^*)^2\beta}\left(\frac{1+n}{\beta r} - \delta^*\right) \gtreqless 0 \quad \text{wenn } r \lesseqgtr \frac{1+n}{\delta^*\beta} \text{ oder } \frac{\delta}{\delta^*} \gtreqless (\alpha-\beta)$$

$$\frac{de}{d\delta^*} = \frac{2\alpha k}{(\delta+\delta^*)^2\beta}\left(\delta - \frac{1+n}{\beta r}\right) \gtreqless 0 \quad \text{wenn } r \gtreqless \frac{1+n}{\delta\beta} \text{ oder } (\alpha-\beta) \gtreqless \frac{\delta^*}{\delta}$$

Ist das Inland ein Schuldnerland, so kann sich die Auslandsverschuldung pro Erwerbstätigem im Ausnahmefall sogar bei zunehmender Sparneigung der Inländer vergrößern. Dieser an sich paradoxe Fall tritt bei nur hinreichend großem Unterschied zwischen den Sparneigungen der beiden Länder auf, $\delta<<\delta^*$, und kann wie folgt erklärt werden: Die erhöhte Sparneigung ist mit einer Zinssatzsenkung verbunden. Die Kapitalintensität im In- und Ausland steigt. Sparen die Inländer nur einen geringen Teil ihres Lohneinkommens, das Ausland jedoch einen relativ großen Teil, so bewirkt die durch die Erhöhung der Kapitalintensität bedingte Zunahme des Lohneinkommens eine erhöhte Steigerung der Ersparnis der jungen Erwerbstätigen im Ausland, wodurch die Auslandsschulden des Inlandes steigen können.

Das beschriebene Sparparadoxon findet einen geometrischen Beweis in Abbildung 7, wenn durch einen Anstieg von δ ein Übergang vom Gleichgewichtszustand G_s nach G'_s stattfindet. Offensichtlich ist das Sparparadoxon ein lokales Phänomen für einen hinreichend kleinen Anstieg der Sparneigung des Inlandes. Die Unbestimmtheit des Einflusses der Sparneigung auf die Auslandsposition überträgt sich nicht auf das Verhältnis von Auslandsverschuldung zu Sachvermögen. Es gilt offenbar

$$e/k = \frac{\delta-\delta^*}{\delta+\delta^*} \gtreqless 0 \qquad \text{wenn} \qquad \delta \gtreqless \delta^* .$$

Das Reinvermögen der In- und Ausländer steigt ebenfalls, wenn sich die Sparneigung nur in einem der beiden Länder erhöht. Differentiation von (59) ergibt

$$\frac{da}{d\delta} = a\left(\frac{\delta+\beta\delta^*}{\beta(\delta+\delta^*)\delta}\right) > 0 \quad ; \quad \frac{da^*}{d\delta^*} = a^*\left(\frac{\delta^*+\beta\delta}{\beta(\delta+\delta^*)\delta^*}\right) > 0 \quad ,$$

(65)

$$\frac{da}{d\delta^*} = a\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\delta+\delta^*}\right) > 0 \quad ; \quad \frac{da^*}{d\delta} = a^*\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\delta+\delta^*}\right) > 0 \; .$$

Bemerkenswert an diesem Ergebnis erscheint eine Art von Trickle-Down-Effekt des internationalen Wachstums, soweit Vermogenswerte betroffen sind. Die Erhöhung der Sparleistung eines Landes wirkt sich nicht nur positiv aus auf die Kapitalintensität, d.h. das Sachvermögen pro Kopf in beiden Ländern, sondern verbessert auch das Reinvermögen in jedem Land. Dies zeigt, daß der Sachvermögenszuwachs im "passiven" Land größer ausgefallen sein muß als die Zunahme der Auslandsverschuldung.

Es bleibt zu prüfen, ob sich dieser positive Effekt auch für das ausländische Volkseinkommen nachweisen läßt.

$$\frac{dy^*}{d\delta} = \underset{(+)}{\frac{dw}{d\delta}} + \left[a^* \underset{(-)}{\frac{dr}{d\delta}} + r \underset{(+)}{\frac{da^*}{d\delta}}\right]$$

Mit (64) und (65) folgt sofort

$$\text{(66)} \qquad \frac{dy^*}{d\delta} = re^* \frac{[\alpha-\beta]}{\delta+\delta^*} \gtreqless 0$$

Bei hinreichend kleinem (großem) β besteht somit ein positiver Einfluß der inländischen Spartätigkeit auf das ausländische Volkseinkommen, vorausgesetzt in der Ausgangslage liegt eine Schuldner-(Gläubiger)position des Inlandes vor.

5. Solow-Modell und Modell mit überlappenden Generationen: Ein Vergleich der Wachstumsgleichgewichte

Eine Betonung der gesamtwirtschaftlichen Ersparnis, so wie sie im Solow-Modell üblich ist, kann über die Einführung gesamtwirtschaftlicher Sparquoten σ, σ^* auch im Modell mit überlappenden Generationen geschehen. Definiert man die gesamtwirtschaftliche Ersparnis als Anteil am Lohneinkommen,

$$\tilde{s}/w \equiv \sigma \quad ; \quad \tilde{s}^*/w \equiv \sigma^*$$

so läßt sich diese gesamtwirtschaftliche Sparquote in den "Mikroparametern" des Overlapping-Generations-Ansatzes ausdrücken.

$$\tilde{s} = \delta w - \delta w/(1+n) = \frac{n\delta w}{1+n} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{s}^* = \frac{n\delta^*}{1+n} w$$

d.h. $\sigma \equiv \frac{n\delta}{1+n}$; $\sigma^* \equiv \frac{n\delta^*}{1+n}$.

Eine Definition der Sparquote mit Bezug auf das Lohneinkommen erscheint im Ansatz mit überlappenden Generationen völlig gerechtfertigt, da die Ersparnis der jungen Generation aus dem Lohneinkommen erfolgt und das Entsparen der alten Generation genau dieser Ersparnis aus dem Arbeitsleben entspricht. Solange die Einkommensverteilung konstant bleibt, ließe sich außerdem sofort auch eine konstante Sparquote mit Bezug zum Inlandsprodukt bilden (wie oben in Abschnitt 2.2 geschehen). Es ist bemerkenswert, daß alle diese Sparquoten im Gegensatz zur ad hoc Sparquote des Solow-Modells eine intertemporale, verhaltensorientierte Mikrofundierung besitzen. Sie sind abhängig von der Grenzrate der Zeitpräferenz und der Wachstumsrate der Bevölkerung.

Bei Verwendung der definierten Sparquoten läßt sich das Gleichungssystem (54), (55) und (56) zur Bestimmung von e und k verkürzt schreiben:

(67) $$nk = \sigma_w \beta f(k) \qquad \sigma_w = \frac{\sigma + \sigma^*}{2}$$

(68) $$ne = \sigma\beta f(k) - nk$$

Die Weltsparquote σ_w ist ein gewogener Durchschnitt der Ländersparquoten und bezieht die Weltersparnis auf das Weltlohneinkommen.

Aus (67) läßt sich zunächst der Zinssatz bestimmen in Abhängigkeit von den "Makrosystemparametern".

(69) $$r = \frac{\alpha n}{\beta \sigma_w}$$

Es gilt für die wichtige Beziehung zwischen Weltzinssatz und n

(70) $$n \gtreqless r \quad \Longleftrightarrow \quad \beta\sigma_w \gtreqless \alpha .$$

Für Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen ist das Weltlohneinkommen ein konstanter Anteil des Welteinkommens, und $\sigma_w \beta$ entspricht daher der Weltsparquote mit Bezug auf das Welteinkommen. Damit wird deutlich, daß die aus dem Solow-Modell bekannte Steady-State-Bedingung für den Zinssatz auch im Zwei-Länder-Modell mit überlappenden Generationen Gültigkeit behalten kann.[15] In Makroparametern ist (67) völlig äquivalent der Solow-Bedingung für k im Steady-State.

Aus (68) läßt sich ein Kriterium entwickeln, welches das Vorzeichen von e/k bestimmt und den Zinssatz enthält.[16]

$$(71) \qquad e/k = \frac{\sigma\beta r-\alpha n}{\alpha n} \gtreqless 0$$

Ferner gilt

$$(72) \qquad k/a = \frac{n\alpha}{\sigma\beta r} \quad ; \quad e/a = \frac{\sigma\beta r-n\alpha}{\sigma\beta r} \quad .$$

Man erhält die Steady-State-Werte für diese Vermögensanteile als Ausdrücke in den σ-Parametern des Systems, wenn man in (72) den Weltmarktzins aus (69) substituiert.

$$(73) \qquad \begin{aligned} a/k &= \sigma_w/\sigma \quad ; \quad e/a = (\sigma-\sigma_w)/\sigma \\ e/k &= \frac{\sigma-\sigma_w}{\sigma_w} = \frac{\sigma-\sigma^*}{\sigma+\sigma^*} \end{aligned}$$

Die Ergebnisse (73) sind natürlich identisch mit den weiter oben angegebenen Ergebnissen bei Berücksichtigung der Fundamentalparameter.

6. Bestimmung des Steady-State bei unterschiedlichen Zeitpräferenzen und Technologien

Der Tenor der bisher vorgestellten Theorie der Auslandsverschuldung ist klar und einfach. Infolge der Annahme identischer Produktionstechnologien wird die Auslandsverschuldung eines Landes nur bestimmt durch Unterschiede in den Zeitpräfenrenzen, d.h. durch

---

15) Offensichtlich trifft diese Behauptung nur unter drei Voraussetzungen zu: (1) gleiche Technologie in beiden Ländern, (2) Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, d.h. konstante Einkommensverteilung, (3) intertemporale Nutzenfunktion ebenfalls vom Cobb-Douglas-Typ.

16) Dieses Kriterium bestimmt auch den Zinssatz an der Nullstelle der OP-Funktion in Abb. 5.

landesspezifische Konsumneigungen. Dies ist sicher eine tragfähige Erkenntnis, aber nur die halbe Wahrheit, da Leistungsbilanzsalden auch bei weltweit gleichem intertemporalen Konsumverhalten durch Unterschiede im Investitionsverhalten modelliert werden könnten.[17] Weil der optimale Kapitalstock über die Grenzproduktivität des Kapitals bestimmt wird, ist die modellmäßige Voraussetzung für landesspezifische Unterschiede im Investitionsverhalten in unterschiedlichen nationalen Produktionsfunktionen zu sehen.

Die Bestimmung eines Steady-State ist komplizierter, wenn Produktivitätsunterschiede in beiden Ländern bestehen, d.h. wenn unterschiedliche Technologien zugelassen werden. Wir haben dann zwei Produktionsfunktionen in Pro-Kopf-Form.[18]

$$x = f(k) \qquad ; \qquad x^* = g(k^*)$$

Im Unternehmenssektor der beiden Volkswirtschaften wird solange investiert, bis die Grenzproduktivitäten der optimalen Kapitalstöcke dem Weltmarktzins entsprechen.

$$f'(k) = g'(k^*) = r_{t+1} \tag{74}$$

Es gelten weiterhin die Vermögensrestriktion

$$[a - k] + [a^* - k^*] = 0 \tag{75}$$

und die Definition der Nettoposition

$$e = [a - k] \quad . \tag{76}$$

Bei Vernachlässigung des Zinssatzes haben wir jetzt fünf Variable und drei Gleichungen. In verkürzter Form läßt sich (74) - (76) schreiben

$$f'(a - e) = g'(a^* + e) \quad . \tag{77}$$

Offenbar sind jetzt e, k, k* bestimmbar, wenn a, a* vorgegeben werden. Wir haben die Funktionen

$$e = e(a, a^*) \quad ; \quad k = k(a, a^*) \quad ; \quad k^* = k^*(a, a^*) \quad .$$

---

17) Ein weiterer Einfluß auf Leistungsbilanzsaldo und Auslandsverschuldung ließe sich über die Modellierung des Staates erzielen. Die Rolle der Staatsverschuldung in der offenen Volkswirtschaft ist Gegenstand der Arbeit von Carlberg (1985).

18) Für das Folgende ist es hinreichend allgemein, Cobb-Douglas-Funktionen zu unterstellen. Seien α, α^* die Produktionselastizitäten des Faktors Kapital, so gelte $\alpha \leq \alpha^*$.

Es ist von einiger Bedeutung, die Abhängigkeit dieser endogenen Variablen von a, a* näher zu charakterisieren.[19] Aus (77) und (76), (75) folgt

$$(78) \qquad \frac{de}{da} \equiv e_a = \frac{f''}{f''+g''} > 0 \quad ; \quad \frac{de}{da^*} \equiv e_{a^*} = -\frac{g''}{f''+g''} < 0$$

$$(79) \qquad k_a = k_{a^*} = \frac{g''}{f''+g''} > 0 \quad ; \quad k^*_{a^*} = k^*_a = \frac{f''}{f''+g''} > 0 \,.$$

Der Anstieg des Reinvermögens eines Landes erhöht sowohl das Sachvermögen als auch die Nettoauslandsposition dieses Landes. Die Auslandsposition des anderen Landes muß sich also verschlechtern. Dieses Ergebnis folgt aus dem Rückgang des Weltmarktzinssatzes nach einer Erhöhung des Kapitalangebotes. Der Anstieg der Auslandsposition eines Landes ist naturgemäß identisch mit dem Zuwachs an Sachvermögen im anderen Land, d.h. $k^*_a = e_a$ und $k_{a^*} = -e_{a^*}$. Auf einem völlig integrierten Weltkapitalmarkt ist die Reaktion des Weltmarktzinssatzes und des Sachvermögens in beiden Ländern völlig unabhängig vom (nationalen) Ursprung der Reinvermögensänderung.

Diese Ergebnisse lassen sich über eine erneute Betrachtung der Abbildung 2 sofort geometrisch veranschaulichen. Man beachte, daß der Schnittpunkt der Kapitalstockfunktionen jetzt nicht mehr in der Mitte der Box liegt, weil diese Funktionen jetzt unterschiedlich verlaufen. In Abbildung 8 soll jedoch eine andere nützliche Form der Darstellung im Raum der Reinvermögensvariablen a*, a gewählt werden. Zunächst erscheint in Abbildung 8 die Kurve einer Nettoposition von Null (e=0). Der Verlauf dieser Kurve ist bei Ausschluß identischer Technologien gekrümmt. Man erkennt dies aus (76) für e=0.

$$(80) \qquad \left.\frac{da^*}{da}\right|_{e=0} = \frac{dk^*}{dk} = \frac{f''}{g''} > 0$$

Für Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen ist die konstante Elastizität der e=0-Kurve leicht zu bestimmen.

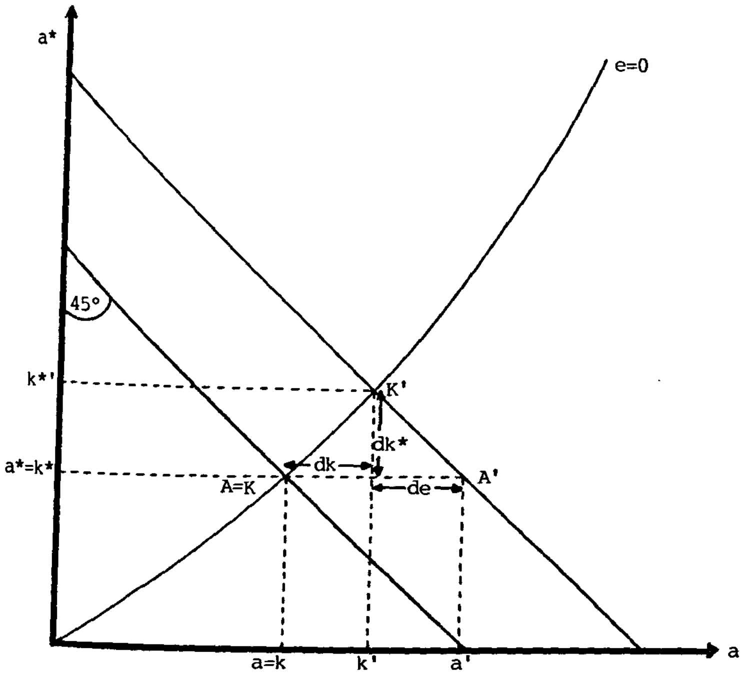
$$(81) \qquad \varepsilon_{a^*,a} \quad \frac{dk^*}{dk}\,\frac{k}{k^*} = \frac{f''k}{g''k^*} = \frac{\beta}{\beta^*}$$

$$0 < \varepsilon_{a^*,a} \lesseqgtr 1 \qquad \Longleftrightarrow \alpha \lesseqgtr \alpha^*$$

---

19) Siehe Niehans (1984), chapt. 6, p. 105-131, der unter anderen diese Funktionen studiert.

Abb. 8: Sachvermögen und Auslandsposition bei vorgegebenem Reinvermögen



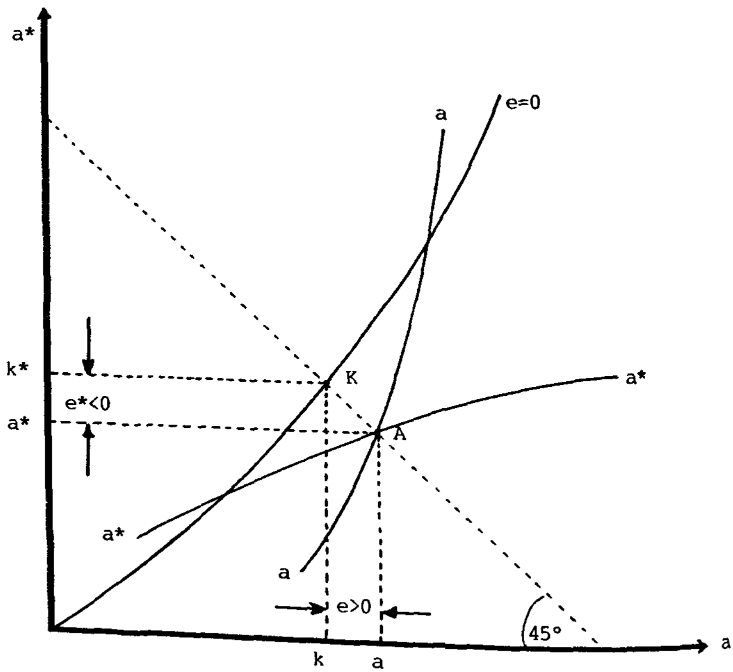
Übertrifft die Produktionselastizität des Kapitals im Ausland diejenige des Inlandes, muß das Reinvermögen des Auslandes stärker wachsen als das inländische Reinvermögen, wenn eine Nettoposition von Null erhalten werden soll. Ferner erscheint in Abbildung 8 als 45°-Linie mit negativer Steigung eine Kurve konstanten Welt(rein)vermögens. Diese Kurve repräsentiert Gleichung (75). Die Nettoposition des Inlandes kann durch Wahl einer beliebigen (a,a*)-Kombination im ersten Quadranten bestimmt werden, indem man durch diese (a,a*)-Kombination eine Isoweltvermögenskurve legt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der e=0-Kurve bestimmt k und k*. Wählt man z.B. eine Ausgangslage A=K und erhöht das inländische Reinvermögen um da>0 (Punkt A'), so lassen sich die Ergebnisse (78) und (79) in Abbildung 8 in der angegebenen Weise direkt ablesen.

Die bisher bestehenden zwei Freiheitsgrade verschwinden bei einer vollständigen Bestimmung des Steady-State, wenn wir für jedes Land die Relation zwischen Ersparnis der Jungen und Reinvermögen aufschreiben.

$$\frac{\delta w(k)}{1+n} = a \qquad ; \qquad \frac{\delta^* w^*(k^*)}{1+n} = a^* \tag{82}$$

Da k und k*, wie gezeigt, selbst Funktionen von a, a* sind, liefert (82) zwei Gleichungen in zwei Unbekannten zur Bestimmung von a* und a im Steady-State. Die Graphen dieser Bestimmungsgleichungen erscheinen in Abbildung 9 als aa-Kurve bzw. a*a*-Kurve, deren Schnittpunkt A eine positive (negative) Auslandsposition des Inlandes anzeigt, sofern er rechts (links) der e=0-Kurve liegt.[20]

Abb. 9: Reinvermögen und Auslandsposition im Steady-State: Der allgemeine Fall unterschiedlicher Zeitpräferenzen und Technologien



20) Die Auslandsposition wird durch die Schenkellänge des gleichseitigen "Verschuldungsdreiecks" angezeigt. Dieses entsteht, wenn man durch A die Kurve konstanten Weltvermögens einzeichnet und den Schnittpunkt K mit der e=0-Kurve bestimmt.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß beide Kurven im ersten Quadranten eine positive Steigung besitzen und die aa-Kurve steiler als die a*a*-Kurve verläuft.

Implizite Differentiation von (82) ergibt unter Berücksichtigung von (79)

$$(83) \qquad \left.\frac{da^*}{da}\right|_{aa} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} > 0 \quad ; \quad \left.\frac{da^*}{da}\right|_{a^*a^*} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} > 0$$

$$a_{11} = -\frac{\delta k f''}{1+n} k_a - 1 < 0 \quad ; \quad a_{12} = -\frac{\delta k f''}{1+n} k_{a^*} > 0$$

$$a_{21} = -\frac{\delta^* k^* g''}{1+n} k^*_a > 0 \quad ; \quad a_{22} = -\frac{\delta^* k^* g''}{1+n} k^*_{a^*} - 1 < 0$$

Die Vorzeichen von a_{12} und a_{21} sind eindeutig positiv. Damit hätten wir als Voraussetzung für eine positive Steigung der aa- und a*a*-Kurve ein negatives Vorzeichen von a_{11} und a_{22}, d.h. die folgenden Bedingungen müßten gelten:

$$(84) \qquad \begin{aligned} a_{11} < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 < -\frac{\delta k f'' g''}{(1+n)(f''+g'')} < 1 \\ a_{22} < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 < -\frac{\delta^* k^* f'' g''}{(1+n)(f''+g'')} < 1 \end{aligned}$$

Es läßt sich auf verschiedene Weise begründen, daß diese Bedingungen erfüllt sein müssen. Postuliert man Stabilität[21] des dynamischen Systems, so folgt als Teil der Stabilitätsbedingung, daß zumindest in der Nähe eines Steady-State-Gleichgewichts die Steigung der aa-Kurve größer sein muß als die Steigung der a*a*-Kurve. Für Stabilität folgt also

$$-\frac{a_{11}}{a_{12}} > -\frac{a_{21}}{a_{22}} \quad .$$

Aus (83) in Verbindung mit (79) folgt aber auch

$$a_{11} = a_{12} - 1 \qquad \text{und} \qquad a_{22} = a_{21} - 1 \quad ,$$

und wir finden als Stabilitätsbedingung

$$a_{12} + a_{21} < 1$$

---

21) Die Dynamik von Wachstum und Verschuldung ist nicht Gegenstand dieses Aufsatzes.

(85) $$-\frac{(\delta k+\delta^* k^*)f''g''}{(1+n)(f''+g'')} < 1.$$

Die Bedingungen (84) müssen also immer erfüllt sein, wenn Stabilität nach (85) vorausgesetzt wird.

Alternativ läßt sich durch Vergleich *von* (80) *und* (83) zeigen, daß die Steigung der *aa-Kurve größer* sein muß als die Steigung der *e=0-Kurve*, wenn gilt

$$\delta k f'' + (1+n) > 0.$$

Ensprechend ist die Steigung der a^*a^*-Kurve größer als die Steigung der e=0-Kurve, wenn gilt

$$\delta^* k^* g'' + (1+n) < 0.$$

Im Schnittpunkt der aa-Kurve mit der e=0-Kurve folgt jedoch $a=k$. Aus (82) haben wir somit für den Fall einer Cobb-Douglas-Funktion $\delta\beta f(k) = (1+n)k$. Dies läßt sich auch schreiben

(86) $$\delta\beta f' = (1+n)\alpha \; .$$

Im Schnittpunkt der a^*a^*-Kurve mit der e=0-Kurve besteht der analoge Zusammenhang

(87) $$\delta^*\beta^* g' = (1+n)\alpha^* \; .$$

Aus (86) und (87) folgt zwingend, daß im Schnittpunkt die Steigung der *aa-Kurve größer* ist *als* die *Steigung der e=0-Kurve*. Die Steigung der a^*a^*-Kurve *dagegen muß* kleiner sein als die Steigung der e=0-Kurve.

Der bisher begründete Kurvenverlauf ist in Abbildung 9 dargestellt. Es bleibt noch die wichtige Frage nach dem Vorzeichen der Nettoposition, d.h. geometrisch gesprochen, möchte man ein Kriterium, das *entscheidet, ob der Schnittpunkt* A der aa- *und* a^*a^*-Kurven rechts oder links der e=0-Kurve liegt. Für $e>0$ muß gleichzeitig gelten $a-k>0$ und $a^*-k^*<0$. bei Berücksichtigung *von* (82) muß somit der gemeinsame Zinssatz das nachfolgende Paar von Ungleichungen simultan erfüllen.

$$\delta\beta f' > (1+n)\alpha \quad ; \quad \delta^*\beta^* g' < (1+n)\alpha^*$$

Daraus folgen *im Cobb-Douglas-Fall* als *Schranken* für den Zinssatz:

$$\frac{\alpha}{\delta\beta} < f' = g' < \frac{\alpha^*}{\delta^*\beta^*} \quad .$$

Es ergibt sich hieraus für das Vorzeichen von e im Cobb-Douglas-Fall:

$$e \gtrless 0 \quad <=> \quad \frac{\delta\beta}{\alpha} \gtrless \frac{\delta^*\beta^*}{\alpha^*} \quad .$$

Diese Bedingung zeigt die simultane Abhängigkeit der Nettoposition vom Konsumverhalten und der Technologie. Bei gleicher Technologie $\alpha=\alpha^*$ erscheint der nur an der Zeitpräferenz orientierte Ansatz von Buiter als Spezialfall. Wäre dagegen $\delta=\delta^*$, so erkennt man, daß $\alpha^*>\alpha$ eine hinreichende Bedingung liefert für eine positive Nettoposition des Inlandes. Im allgemeinen Fall bestimmen Zeitpräferenz- und Technologieunterschiede simultan die Nettoposition. Eine relativ geringe Zeitpräferenz führt über eine schwache Konsumneigung zu einer positiven Nettoposition. Eine relativ hohe Kapitalproduktivität beeinflußt über eine relativ starke Investitionsneigung die Auslandsposition in umgekehrter Richtung.

Für das Thema Wachstum und Verschuldung ist es von zentraler Bedeutung, den Unterschied zwischen investiv und konsumtiv verursachten Leistungsbilanzdefiziten zu betrachten. Die Konsequenzen derart unterschiedlicher Schocks für das Zeitprofil der internationalen Verschuldung sollen in einer späteren Arbeit untersucht werden.

Symbolverzeichnis

Kleine Buchstaben bezeichnen "Pro-Kopf-Größen" von Variablen, die mit großen Buchstaben erscheinen.

c_t^1	Konsum eines Mitglieds der Generation t in der Jugend, d.h. Konsum der "Jungen" während der Erwerbstätigenphase
c_t^2	Konsum eines Mitglieds der Generation t im Alter, d.h. Konsum der "Alten" während der Ruhestandsphase
L_t	Anzahl der Mitglieder der Generation t (= Zahl der Erwerbstätigen in der Periode t)
K_t, k_t	Kapitalstock in der Periode t; Kapitalintensität
w_t	Reallohnsatz
r_t	Kapitalentlohnungssatz (rental rate)
r_{t+1}	Zinssatz, mit dem die Ersparnisse aus der Periode t verzinst werden
n	Wachstumsrate der "Bevölkerung", d.h. der Anzahl der Mitglieder von zwei aufeinander folgenden Generationen
δ, γ	Parameter der Nutzenfunktion, Sparneigung δ, Konsumneigung γ
A_t, a_t	(Rein)Vermögen
E_t, e_t	Nettoauslandsposition ($e_t > 0$ Auslandsforderungen, $e_t < 0$ Auslandsschulden)
Q_t, q_t	Leistungsbilanzsaldo
H_t, h_t	Handelsbilanzsaldo
α, β	Parameter der Produktionsfunktion, Produktionselastizität des Kapitals bzw. der Arbeit
I_t, i_t	Investition
S_t, s_t	Ersparnis der "Jungen", d.h. der Erwerbstätigen
$\tilde{S}_t$, $\tilde{s}_t$	gesamtwirtschaftliche Ersparnis
X_t, x_t	Inlandsproduktion
Y_t, y_t	Sozialprodukt
*	Variable bzw. Parameter, die mit einem Stern versehen sind, kennzeichnen entsprechende Größen des Auslandes

Verzeichnis der Quellen

Barro, R.J. (1974), Are Government Bonds Net Wealth, Journal of Political Economy, 82, 1095-1118

Buiter, W.H. (1981), Time Preference and International Lending and Borrowing in an Overlapping-Generations-Model, Journal of Political Economy, 89, 769-797

Carlberg, M. (1985), External versus Internal Public Debt - A Theoretical Analysis of the Long-Run Burden, Zeitschrift für Nationalökonomie, 45, 141-154

Dornbusch, R. (1985), Intergenerational and International Trade, Journal of International Economics, 18, 123-139

Frenkel, J.A./Razin, A. (1985), Government Spending, Debt and International Economic Interdependence, Economic Journal, 95, 619-636

Diamond, P.A. (1965), National Debt in a Neoclassical Growth Model, American Economic Review, 55, 1126-1150

Hamada, K. (1966), Economic Growth and Long-Run Capital Movements, Yale Economic Essays, 6, 49-96

Neher, P.A. (1970), International Capital Movements along Balanced Growth Path, Economic Record, 46, 393-401

Niehans, J. (1984), International Monetary Economics, Johns Hopkins University Press, Baltimore und London

Ruffin, R.J. (1979), Growth and the Long-Run Theory of International Capital Movements, American Economic Review, 69, 832-842

Obstfeld, M. (1982), Aggregate Spending and the Terms of Trade: Is There a Laursen-Metzler Effect?, Quarterly Journal of Economics, 97, 251-270

Persson, T. (1985), Deficits and Intergenerational Welfare in Open Economies, Journal of International Economics, 19, 67-84