

Eine einfache Methode und ein FORTRAN-Programm zur Ermittlung von Cliques

HANS RATTINGER

Universität Freiburg im Breisgau

Bei der Strukturanalyse von Organisationen und Gruppen ist ein wichtiges Detail die Identifikation von Cliques. Die Darstellung von Strukturen durch Graphen oder Relationen (in Matrizenschreibweise) erlaubt eine formale Definition des Terms «Clique». Die Literatur zur Identifikation derartiger Cliques wird kurz referiert, und anschließend wird eine eigene Methode zur Cliquenidentifikation präsentiert. Zunächst wird entsprechend den relationentheoretischen Eigenschaften der je untersuchten Relation über einer Clique die anfängliche Gruppenmatrix modifiziert. Danach werden zwei Sätze über Cliques aufgestellt und bewiesen, auf denen der Algorithmus zur Ermittlung von Cliques beruht. Dieser Algorithmus wird ebenso wie seine Übertragung in ein FORTRAN-Programm Schritt für Schritt erläutert. Ein numerisches Beispiel illustriert abschließend die Anwendung der Methode.

In the analysis of the structure of organizations or groups identification of cliques is an important feature. Representation of structures by graphs or relations (written as matrices) allows a formal definition of the term "clique". The literature on clique detection is reviewed and subsequently an own method is presented. First the initial group matrix is modified according to the properties of the relation in question over a clique. Then two theorems on cliques are stated and proved as the foundation of the algorithm for clique identification. This algorithm as well as the derived FORTRAN program are explained step by step. A numerical example finally illustrates the application of the method.

DAS PROBLEM

Betrachtet man eine 2-stellige Relation R über einer Menge V mit n Elementen, so sieht man, daß das kartesische Produkt $V \times V$ (und damit seine Teilmenge R) durch eine quadratische Boolesche Matrix $A = [a_{ij}]$ n -ter Ordnung dargestellt werden kann, vorausgesetzt, daß R die Eigenschaft hat, daß für jedes geordnete Paar aus $V \times V$ nur feststeht, ob es zu R gehört oder nicht (nominales Meßniveau). Die Einträge von A sind durch die folgenden zwei Äquivalenzen definiert:

$$a_{ij} = 1 \stackrel{\text{def}}{\iff} (v_i, v_j) \in R \quad a_{ij} = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} \neg (v_i, v_j) \in R$$

Wie allgemein üblich, sind alle Einträge auf der Hauptdiagonalen Null, weil man gewöhnlich in den Sozialwissenschaften nicht an der Reflexivität der untersuchten Relationen interessiert ist.

Faßt man die Elemente von V als Mitglieder einer Gruppe oder Organisation auf, so ist A die Inzidenzmatrix des Digraphen D , der die Relation R über der Menge der Gruppen- oder Organisationsmitglieder darstellt. R kann dann jede beliebige Sozialbeziehung mit den oben genannten Eigenschaften sein, zum Beispiel Freundschaft, alle Arten von mehr oder minder spezifischer Kommunikation, Verhaltenskontrolle, soziometrische Wahl usw.

Eine *Clique* ist nach FESTINGER¹ eine maxi-

¹ L. FESTINGER, "The Analysis of Sociograms Using Matrix Algebra" in: *Human Relations* 2 (1949), 153-158, p. 156.

male Menge C ($C \subseteq V$) mit $m \geq 3$ Elementen, so daß R_C^2 ($R_C \subset C \times C$) genau die $(m^2 - m)$ geordneten Paare aus $C \times C$ enthält, bei denen Vorder- und Hinterglied nicht identisch sind. Mit anderen Worten ist eine Clique eine maximale Untergruppe, in der je zwei beliebige Mitglieder zueinander in der Relation R stehen. Da R_C alle Elemente aus $C \times C$ außer denjenigen geordneten Paaren enthält, bei denen Vorder- und Hinterglied übereinstimmen, gilt für jede Clique C_i die folgende Implikation:

$$v_i \in C_i \wedge v_j \in C_i \wedge v_i \neq v_j \rightarrow (v_i, v_j) \in R_{C_i} \wedge (v_j, v_i) \in R_{C_i}$$

Aus dieser Implikation ist ersichtlich, daß R_{C_i} konnex in $C_i \times C_i$ ist, da Konnexität nur verlangt, daß eines der beiden geordneten Paare auf der rechten Seite der Implikation zu R_{C_i} gehört, und weil aus

$$(v_i, v_j) \in R_{C_i} \wedge (v_j, v_i) \in R_{C_i} \\ (v_i, v_i) \in R_{C_i} \vee (v_j, v_j) \in R_{C_i} \text{ folgt.}$$

Da andererseits

$$(v_i, v_j) \in R_{C_i} \wedge (v_j, v_i) \in R_{C_i} \\ (v_i, v_i) \in R_{C_i} \rightarrow (v_j, v_j) \in R_{C_i}$$

impliziert, kann nicht nur Konnexität, sondern auch Symmetrie von R_{C_i} in $C_i \times C_i$ direkt aus der obigen Implikation gefolgert werden. Da überdies R_{C_i} eine Teilmenge von R und R irreflexiv in $V \times V$ ist, ist R_{C_i} trivial irreflexiv in $C_i \times C_i$. Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse kann die Definition einer Clique so reformuliert werden, daß eine Clique eine Menge C mit $m \geq 3$ Elementen ist, in der R_C irreflexiv, symmetrisch und konnex ist und die in keiner weiteren Teil-

menge von V enthalten ist, in der R_C die gleichen Eigenschaften hat.

Bei der Analyse von Sozialstrukturen ist von der Inzidenzmatrix (oder Gruppenmatrix) schon in einer Anzahl von Aufsätzen Gebrauch gemacht worden. Einer der ersten war ein Aufsatz von E. FORSYTH & L. KATZ über die Analyse von soziometrischen Daten³. R. D. LUCE arbeitete über eine Art von Untergruppen, die weniger streng als durch vollständige Symmetrie definiert sind⁴. L. FESTINGER⁵ entwickelte aus der Inzidenzmatrix des Digraphen, der die untersuchte Relation über der Menge der Gruppenmitglieder darstellt, eine Methode zur Ermittlung von Cliquen wie oben definiert. Seine Methode verwendet die kubische Gruppenmatrix, und er bewies, daß für jedes v_i in einer Clique mit n Mitgliedern der Eintrag a_{ii}^3 in A^3 genau $(n-1) \cdot (n-2)$ ist.

Diese Methode erlaubt jedoch keinem Mitglied der Gruppe, in mehr als einer Clique zu sein, und ist deshalb von beschränktem praktischen Wert. Ein Aufsatz von R. S. WEISS⁶ stellte fest, daß der Begriff einer Clique und Methoden zur Cliquenidentifikation in der Organisations-theorie ebensogut wie in soziometrischen Untersuchungen angewandt werden können. Besonders bei der Analyse von komplexen Organisationen wird die Notwendigkeit verfeinerter Methoden zur Strukturanalyse deutlich, da dort viele Probleme nicht mehr ausschließlich durch optische Inspektion der Gruppenmatrix gelöst werden können.

Die vollständige Cliquenidentifikation blieb ein ungelöstes Problem, bis F. HARARY & I. C. ROSS 1957 in *Sociometry* einen Aufsatz ver-

² Die Teilmenge von R , die aus der Einschränkung von R von $V \times V$ auf $C \times C$ resultiert.

³ E. FORSYTH & L. KATZ, "A Matrix Approach to the Analysis of Sociometric Data: Preliminary Report" in: *Sociometry* 9 (1946), 340-347.

⁴ R. D. LUCE, "Connectivity and Generalized Cliques in Sociometric Group Structure" in: *Psychometrika* 15 (1950) 2, 169-190; R. D. LUCE et al., "A Method of Matrix Analysis of Group Structure" in: *Psychometrika* 14 (1949) 1, 95-116.

⁵ L. FESTINGER, "The Analysis of Sociograms Using Matrix Algebra" in: *Human Relations* 2 (1949), 153-158. L. FESTINGER et al., "Matrix Analysis of Group Structures" in: P. F. LAZARSFELD et al., eds., *The Language of Social Research*, New York, London, 1955, repr. 1966, 358-367.

⁶ R. S. WEISS et al., "A Method for the Analysis of the Structure of Complex Organizations" in: *American Sociological Review* 22 (1955), 661-668.

öffentlich, in dem es theoretisch ohne irgendwelche Einschränkungen gelöst wurde⁷.

Der vorliegende Aufsatz ging aus der Arbeit an Strukturanalysen bei großen Organisationen hervor, in der deutlich wurde, daß der Einsatz von Rechenanlagen für effektive Arbeit unbedingt notwendig ist⁸. Deshalb wurde versucht, ein Programm zu schreiben, das die Analyse einer Reihe von wichtigen strukturellen Eigenschaften, unter anderem der Cliquesstruktur, erleichtern sollte. Dabei wurde eine sehr einfache Methode zur vollständigen Identifikation von maximalen Cliques entwickelt, welche die bei der Harary/Ross-Methode notwendige Unterscheidung zwischen Gruppen und Untergruppen vermeidet, die ein Element, das nur einer Clique angehört, enthalten, und solchen, bei denen das nicht der Fall ist⁹. Überdies kann die wiederholt notwendige Partition der Gruppe in Untergruppen, die wenigstens ein Element enthalten, das nur einer Clique angehört, vermieden werden.

Im folgenden werden zuerst die Modifikationen umrissen, denen die Gruppenmatrix vor der Analyse unterzogen wird. Dann werden zwei Theoreme aufgestellt, welche die theoretische Grundlage der Methode bilden, die anschließend zusammen mit dem FORTRAN-IV-Programm¹⁰ erklärt wird. Am Schluß soll ein Beispiel die Anwendung der Methode verdeutlichen.

L Ö S U N G

MODIFIKATION DER ANFÄNGLICHEN GRUPPEN- MATRIX

Obwohl es möglich ist, daß R alle Eigenschaften hat, die für R_C im vorhergehenden Abschnitt angegeben wurden, ist R nach Definition nur irreflexiv. Da die Matrix A R darstellt, wäre die Identifikation der Cliques der Gruppe unmittelbar aus A schwierig, wenn nicht unmöglich. Die Eigenschaften von R_C geben einen Hinweis auf die Modifikationen, denen A unterworfen werden muß, bevor die Cliques der Gruppe identifiziert werden können.

Alle Mengen R_C haben die Eigenschaft der Symmetrie. Wenn R_{AS} das Ergebnis der Elimination aller geordneten Paare (v_i, v_j) aus R ist, für die $\neg (v_j, v_i) \in R$, dann ist offensichtlich die Vereinigung aller Mengen R_C der Gruppe eine Teilmenge von R_{AS} . Für alle Elemente aus R_{AS} gilt die folgende Äquivalenz:

$$(v_i, v_j) \in R_{AS} \iff (v_i, v_j) \in R \wedge (v_j, v_i) \in R$$

R_{AS} wird durch eine Matrix dargestellt, die in der Zelle (i, j) den Eintrag 1 hat genau dann, wenn $a_{ij} = 1$ und $a_{ji} = 1$. Diese Matrix AS erhält man leicht aus A . Wenn $A' = [a'_{ij}]$ die transponierte Matrix¹¹ von A ist, die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten in A erhält, dann kann $AS = [a_{sj}]$ als das logische Produkt $A \times A'$ ermittelt werden, da $a_{ji} = a'_{ij}$.

Die Menge R_C einer Clique ist nicht nur symmetrisch und irreflexiv, sondern auch konnex. R_{AS} wird jedoch normalerweise nicht konnex

⁷ F. HARARY & I. C. ROSS, "A Procedure for Clique Detection Using the Group Matrix" in: *Sociometry* 20 (1957), 205-215.

⁸ Die Methode von F. HARARY & I. C. ROSS, "A Procedure for Clique Detection Using the Group Matrix" in: *Sociometry* 20 (1957), 205-215, macht z. B. Gebrauch von der quadrierten Gruppenmatrix, deren Berechnung bei einer Organisation mit 100 Mitgliedern rund zwei Millionen Einzeloperationen erfordert.

⁹ Das ist in der Methode von Harary und Ross erforderlich, weil sie in den Zeilen der auf Cliquenzugehörigkeit zu analysierenden Elemente solche Elemente ermitteln, die nur einer Clique angehören. Wie sie jedoch in dem gleichen Aufsatz bewiesen haben, gibt es Gruppen mit mehr als drei Cliques, die kein Element enthalten, das nur einer einzigen Clique angehört: cf. F. HARARY & I. C. ROSS, "A Procedure for Clique Detection Using the Group Matrix" in: *Sociometry* 20 (1957), 205-215, pp. 208-210.

¹⁰ Das Programm wurde auf der IBM-7040-Anlage des Rechenzentrums der Universität Freiburg getestet; dort fand auch die Berechnung des Beispiels statt.

¹¹ F. HARARY et al., *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*, New York, London, Sidney, 1965, p. 113.

sein; ist das der Fall, dann besteht die Gruppe aus einer einzigen Clique. In den meisten Fällen jedoch wird R_{AS} noch einige geordnete Paare enthalten, die nicht zur Menge R_C irgendeiner Clique gehören. Um diese Elemente von R_{AS} zu eliminieren, führe ich eine Relation R_{v_i} und eine Menge V_{v_i} ein. Für alle Elemente $v_i \in V$ ist V_{v_i} als die Menge aller Elemente v_j aus V definiert, für die in R_{AS} ein geordnetes Paar mit v_i als Vorder- und v_j als Hinterglied existiert:

$$V_{v_i} = \{v_j \mid (v_i, v_j) \in R_{AS}\}$$

R_{v_i} ist für alle $v_i \in V$ als die Menge aller geordneten Paare definiert, die v_i als Vorder- oder Hinterglied haben oder die Elemente aus V_{v_i} sowohl als Vorder- und Hinterglied haben:

$$R_{v_i} = \{(v_j, v_k) \mid v_j = v_i \vee v_k = v_i \vee (v_j \in V_{v_i} \wedge v_k \in V_{v_i})\}$$

Wenn R_{v_i} konnex ist, dann bilden die Elemente von V_{v_i} zusammen mit v_i eine Clique C , und R_{v_i} ist gleich ihrer Menge R_C . Wenn dies nicht der Fall ist, kann R_{v_i} in eine Anzahl von (nicht notwendig disjunkten) maximalen Teilmengen zerlegt werden, die symmetrisch und konnex sind. Wenn man von diesen Teilmengen fordert, daß sie jeweils mindestens sechs Elemente enthalten, sind sie natürlich die Mengen R_C aller Cliquen, von denen v_i ein Mitglied ist. Aus der Definition von R_{v_i} erkennt man, daß für alle Elemente $(v_i, v_j) \in R_{v_i}$ alle Mengen R_C , denen (v_i, v_j) angehört, Teilmengen von R_{v_i} sind. Somit ist jedes Element aus R_{v_i} , das keiner der Teilmengen von R_{v_i} angehört, die durch die oben beschriebene Unterteilung von R_{v_i} entstehen, kein Element der Vereinigung aller Mengen R_C .

Wenn v_j ein Element aus V_{v_i} ist und es ein Element $v_k \in V_{v_i}$ gibt, so daß $(v_j, v_k) \in R_{v_i}$, dann existiert eine Menge $R_C \subseteq R_{v_i}$ mit (v_i, v_j) als einem ihrer Elemente. Aus den Eigenschaften von R_C , insbesondere, daß R_C mindestens sechs Elemente haben muß (was unmittelbar aus $m \geq 3$ für C folgt), ist ersichtlich, daß diese Implikation auch in der anderen Richtung gilt.

Also:

$$\bigwedge v_i \in V_{v_i} (\bigvee v_k (v_k \in V_{v_i} \wedge (v_k, v_j) \in R_{v_i}) \leftrightarrow \bigvee R_C ((v_i, v_j) \in R_C))$$

Negiert man beide Seiten der Äquivalenz, so erhält man die äquivalente Aussage:

$$\bigwedge v_j \in V_{v_i} (\neg \bigvee v_k (v_k \in V_{v_i} \wedge (v_k, v_j) \in R_{v_i}) \leftrightarrow \neg \bigvee R_C ((v_i, v_j) \in R_C))$$

Die linke Seite dieser zweiten Äquivalenz kann folgendermaßen interpretiert werden: Wenn (v_i, v_j) keiner Menge R_C angehört, dann gibt es in R_{AS} keine zwei geordneten Paare derart, daß v_i das Vorderglied des ersten und v_j das Hinterglied des zweiten geordneten Paares ist und daß das Hinterglied des ersten und das Vorderglied des zweiten geordneten Paares identisch sind. Dies trifft zu, weil unter der obigen Annahme kein Element aus V , das als Hinterglied in einem geordneten Paar mit v_i als Vorderglied vorkommt, als Vorderglied in einem geordneten Paar mit v_j als Hinterglied auftreten kann.

Diese Interpretation zeigt, in welcher Weise das Problem der Elimination aller Elemente aus R_{AS} , die keiner Menge R_C angehören, in Matrixschreibweise übersetzt werden kann. R_{AS} wird durch die Matrix AS dargestellt; alle geordneten Paare aus Elementen von R_{AS} werden durch AS^2 dargestellt. Wenn kein geordnetes Paar der Form $((v_i, v_k), (v_k, v_j))$ existiert, dann ist $as^2_{ij} = 0$; andernfalls $as^2_{ij} = 1$ (da Boolesche Algebra verwandt wird). Die Aussage, daß alle Elemente von R_{AS} , für die $as^2_{ij} = 0$, Elemente keiner Menge R_C sind, bedeutet jetzt nichts weiter als eine Umformulierung dessen, was vorher in Mengen- und Relationenschreibweise festgestellt wurde. Die Relation, in der alle solchen Elemente eliminiert sind und die mithin die Vereinigung aller R_C ist, wird mit R_{AM} bezeichnet. Sie wird durch die Matrix $AM = [am_{ij}]$ dargestellt, die man als das logische Produkt $AS \times AS^2$ erhält, und die nur für diejenigen geordneten Paare eine 1 enthält, die zu mindestens einer Menge R_C gehören¹². Alle Elemente, die keiner einzigen Clique angehören, haben in AM nur Null in ihren jeweiligen Zeilen und Spalten.

¹² Diese modifizierte Gruppenmatrix wird auch in der Methode von Harary und Ross verwandt.

ZWEI WEITERE THEOREME

Um im nächsten Abschnitt die ganze Methode zu entwickeln, sind noch zwei einfache Theoreme erforderlich, deren erstes nur eine Umformulierung der Cliquendefinition ist und deshalb keinen ausgearbeiteten Beweis erfordert.

Theorem 1: Eine (Unter-) Matrix, die außer auf der Hauptdiagonalen nur Einsen enthält und die in keiner anderen (Unter-) Matrix mit der gleichen Eigenschaft enthalten ist, stellt die Relation R_C über der Clique C dar.

Das zweite Theorem folgt aus einem Gedankengang, der demjenigen bei der Herleitung von AM ganz ähnlich ist. Bevor Theorem 2 aufgestellt werden kann, muß noch der Begriff einer *Sequenz der Länge 2* erklärt werden. Dieser Begriff bezeichnet ein geordnetes Paar von geordneten Paaren (d. h. Elementen von R), bei dem das Hinterglied des ersten geordneten Paares und das Vorderglied des zweiten geordneten Paares identisch sind. $((v_i, v_k), (v_k, v_j))$ ist also eine Sequenz der Länge 2 von v_i nach v_j . Ich nenne v_k das *Mittelement* der Sequenz.

Theorem 2: C_i sei eine Clique, R_{C_i} die zugehörige Menge von geordneten Paaren und (v_i, v_j) ein Element aus R_{C_i} . Dann ist (v_i, v_j) ein Element nur von R_{C_i} und keinem weiteren von R_{C_i} verschiedenen R_{C_j} genau dann, wenn in R_{AM} alle Sequenzen der Länge 2 von v_i nach v_j Elemente aus C_i als Mittelelemente haben.

Formal:

$$\begin{aligned} & (v_i, v_j) \in R_{C_i} \wedge (\bigwedge C_j ((v_i, v_j) \in R_{C_j} \rightarrow C_j = C_i)) \\ & \longleftrightarrow \neg \bigvee v_k ((v_i, v_k) \in R_{AM} \wedge \\ & (v_k, v_j) \in R_{AM} \wedge \neg (v_k \in C_i)) \end{aligned}$$

Beweis: Die linke Seite der Äquivalenz sei mit A und die rechte Seite mit B bezeichnet. Zuerst soll gezeigt werden, daß aus A B folgt. (v_i, v_j) sei ein Element genau einer Menge R_{C_i} , d. h. A sei wahr. Ferner sei B falsch, d. h. es existiert ein $v_k \in V$, das Mittelelement einer Sequenz der Länge zwei von v_i nach v_j ist und $\neg v_k \in C_i$. Dann gibt es offensichtlich eine andere Clique $C_j \neq C_i$, die mindestens v_i, v_j und v_k enthält und deren zugehörige Menge R_{C_j} (v_i, v_j) als Element hat,

das aber nach der Annahme in genau einer Menge R_{C_i} sein sollte. Folglich: $\neg B$ impliziert $\neg A$ ($\neg B \rightarrow \neg A$) und mit Hilfe der Kontraposition folgt: $A \rightarrow B$.

Nun wird angenommen, daß (v_i, v_j) Element von R_{C_i} und R_{C_j} sei und daß $C_i \neq C_j$, d. h. A sei falsch. Da C_i und C_j verschieden sind und v_i und v_j zu beiden Cliques gehören, muß es mindestens ein $\neg v_k \in C_i$ geben, das Mittelelement einer Sequenz der Länge 2 von v_i nach v_j ist — sonst wäre C_j Teilmenge von C_i . Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß B wahr ist und es folgt: $\neg A$ impliziert $\neg B$. Durch Kontraposition folgt $B \rightarrow A$, und die Implikation gilt in beiden Richtungen.

DIE METHODE
UND DAS PROGRAMM

Nun ist es möglich, das Verfahren zur Cliquenidentifikation zu beschreiben. Es besteht aus zwei Hauptschritten, die mehrmals wiederholt werden, wobei schrittweise Zeile für Zeile der Matrix AM analysiert wird. Bei der Analyse der i -ten Zeile bildet man zuerst die Untermatrix, die genau v_i zusammen mit all den Elementen aus V enthält, die eine 1 in der i -ten Zeile haben (diese Untermatrix stellt R_{v_i} dar). In dieser Untermatrix identifiziert man dasjenige Element, das die meisten Nullen in seiner Zeile hat und bildet wie oben seine Untermatrix. Diese Bildung von Untermatrizen wird solange fortgesetzt, bis eine Untermatrix gefunden wird, die nur auf der Hauptdiagonalen Nullen enthält. Aus der Menge R_C der eben erhaltenen Clique eliminiert man alle geordneten Paare, die nur zu dieser einen Clique gehören, indem man für die jeweiligen Einträge in AM 0 einsetzt. Wenn noch Einsen in der i -ten Zeile vorkommen, wird das Verfahren nochmals wiederholt, wenn nicht, geht man zur $(i+1)$ -ten Zeile über und beginnt von neuem. Das Verfahren endet, wenn die modifizierte Gruppenmatrix AM gleich der Nullmatrix ist.

Das Programm besteht aus zwei Hauptteilen. Im ersten Teil wird die anfängliche Gruppenmatrix von Lochkarten eingelesen, und AM wird berechnet. Die Analyse von AM bildet den zwei-

ten Teil des Programms. Im ersten Teil werden erst alle asymmetrischen Relationen und dann alle symmetrischen Relationen zwischen Elementen, die sich nicht in derselben Clique befinden, eliminiert. In Teil zwei werden alle Elemente identifiziert, die — was Cliques betrifft — isoliert sind, und dann wird schließlich die Cliquesstruktur analysiert. Bei der Analyse der i -ten Zeile wird zuerst ihre Zeilensumme berechnet und überprüft, ob sie von Null verschieden ist. Wenn nicht, wird i um 1 erhöht; wenn ja, wird die Untermatrix, die v_i und alle die Elemente enthält, die den Eintrag 1 in der i -ten Zeile haben, gespeichert, und ihre Ordnung wird bestimmt. Dann wird die minimale Zeilensumme der Untermatrix berechnet. Wenn sie um 1 kleiner als die Ordnung der Untermatrix ist, dann ist offensichtlich eine Clique identifiziert, wenn sie kleiner ist, wird die Untermatrix des Elements v_t gebildet, das in der ersten Untermatrix die minimale Zeilensumme hat, indem in der Untermatrix alle Einträge in den Zeilen und Spalten von Elementen, die nicht mit v_t in einer Clique sind, durch Null ersetzt werden. Dann wird wieder die Ordnung der Untermatrix bestimmt usw. ... Wenn eine Untermatrix erreicht ist, deren minimale Zeilensumme um 1 kleiner als ihre Ordnung ist, ist eine Clique identifiziert. Jetzt werden die Elemente von R , die nur zur Menge R_C der eben identifizierten Clique gehören, aus der Gruppenmatrix AM eliminiert.

In sehr komplexen und extrem «dichten» Strukturen ist es möglich, daß kein einziges geordnetes Paar in AM eliminiert werden kann, da in einer Clique C_i , die eben in der i -ten Zeile von AM identifiziert wurde, alle Elemente von R_{C_i} auch zu anderen von C_i verschiedenen Cliques gehören. In diesem Fall wird zur $(i+1)$ -ten Zeile von AM gesprungen, und die i -te Zeile bleibt bis nach der letzten Zeile unanalysiert. Im anderen Fall wird die eben ermittelte Clique mit den vorher identifizierten verglichen, um

nur maximale Cliques zu erhalten. Wenn sie maximal ist, wird sie ausgedruckt, und das Verfahren wird wiederholt. Ist die letzte Zeile erreicht, wird wieder von vorn begonnen, um zu überprüfen, ob in AM noch Einsen übriggeblieben sind. Nach der Identifikation der letzten Clique ist die Gruppenmatrix gleich der Nullmatrix.

BEISPIEL

Im folgenden Beispiel hat V 60 und deshalb $V \times V$ 3600 Elemente. Im Umgang mit Strukturen dieser Größe ist es nicht allzu sinnvoll, den die Struktur repräsentierenden Digraphen zu zeichnen; Verwirrung und Zeitvergeudung wären das Ergebnis. Im Beispiel hat die Relation R 1540 Elemente, und es ist unmöglich, den Graphen auf einer Druckseite zu präsentieren. Deshalb sind nur die drei Matrizen A , AS und AM und die Ergebnisse (hier: Isolierte Elemente und Cliques) abgedruckt. Die Daten stammen aus keiner realen Organisation. Die Rechenzeit betrug 6 Minuten, die Gesamtzeit 8,3 Minuten.

ZU DIESEM BEITRAG

Das Interesse des Autors an dem behandelten Problem wurde stimuliert durch die Teilnahme an einem Seminar über Organisationstheorie mit Schwerpunkt auf der Anwendung der Theorie gerichteter Graphen bei der Strukturanalyse, das von Prof. Dr. Dieter Oberndörfer und Prof. Dr. Klaus Faupel (Seminar für wissenschaftliche Politik an der Universität Freiburg) im Sommer 1970 abgehalten wurde. Besonders Klaus Faupel möchte ich für eine Reihe wertvoller Anregungen zur relationentheoretischen Grundlegung der Methode danken. Hanne Rattinger danke ich für die Übersetzung des englischen Originals.



CLIQUES	RESULTS
1 6 40 60	
1 6 10 47 58	
1 6 25 47 60	
1 25 47 52	
1 6 10 25 47	5
1 6 10 21 23 25 55	
1 21 23 25 45 52 55	17
1 12 14 21 23 45 52 55	
2 9 32 59	24
2 31 32	
2 9 13 40	
2 13 31 40	38
3 10 19 47	
6 10 50 55	41
6 10 19 29 34	
6 10 19 34 42 46 47 58	
6 10 19 34 42 46 47 50	
6 19 34 42 46 47 50 59	56
7 54 58	
7 15 18 60	
8 22 42 43	
8 33 49	
8 43 49	
10 11 58	
11 20 43	
11 20 54	
11 43 49	
11 44 54 58	
11 49 54 58	
11 49 54 59	
12 29 34	
12 34 42	
8 12 18 42	
8 12 29 33 39 45 48	
8 12 29 33 45 48 52	
4 7 8 12 14 15 18 21 23 26 28 31 33 35 39 45 48 55	
4 8 12 14 15 18 21 23 26 28 31 33 35 45 48 52 55 57	
3 4 8 12 14 15 18 21 23 26 28 31 33 35 39 45 48 55 57	
13 31 35	
3 14 19	
15 18 57 60	
16 36 43	
16 36 54	
19 32 59	
5 10 21 23 55	
7 10 21 23 55	
22 34 42 46 58	
27 30 37 51 53	
18 28 35 57 59	
4 7 8 28 43 55	
8 29 43	
29 51 52	
31 33 39 50 55	
4 18 35 44	
4 7 39 58	
42 43 47	
18 42 59	
4 44 58	
7 10 58	