https://doi.org/10.20378/irbo-51596

Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends – Eine Spurensuche

von Anna Susanne Steinweg

Nicht erst seit Veröffentlichung der Bildungsstandards werden Muster und Strukturen in ihrer besonderen Bedeutung in Forschung und Lehre der Mathematik Primarstufe konsensual anerkannt. In allen Lehrplänen hat dieses Themenfeld bundesweit einen festen Platz. Vielfältige Forschungsarbeiten und Dissertationen der jüngsten Zeit rekurrieren auf Muster und Strukturen. Dennoch wird wohl kaum ein Bereich gleichzeitig so divergent gedeutet. Muster und Strukturen stehen im Spannungsfeld konkretisierter Leitideen von Unterrichtsinhalten und allgemeiner, fundamentaler Ideen der Mathematik. Chancen und Gefahren dieser Polarisierung geben Anlass zur Bewusstwerdung und Diskussion.

Schlüsselwörter: Muster, Strukturen, Bewusstheit, Argumentieren, Begründen

1 Einleitung

Immer wieder treten auch im Alltag Phänomene auf, die als besondere Muster wahrgenommen werden. Als am 30.07.2014 die Lottozahlen 9,10,11,12,13,37 gezogen wurden, war mein Vater ganz aus dem Häuschen, wegen dieses Musters. Mathematisch betrachtet handelt es sich hier natürlich um ein absolut gleichwahrscheinliches Einzelereignis gegenüber allen anderen Ziehungen (Schnell, 2014). Die Faszination liegt hier allein in der Wiederentdeckung eines bekannten Musters, einem Abschnitt der Zählzahlfolge, im Zusammenspiel mit dem rudimentären Bewusstsein für Wahrscheinlichkeiten (Vorhersage von richtigen Lottozahlen). Muster scheinen also dann bedeutsam zu werden, wenn sie in etwas hineingesehen und als besonders wahrgenommen werden.

Mathematik wird allgemein vielfach als Wissenschaft von Mustern beschrieben (z. B. Devlin, 1997; Wittmann, 2003). Grundsätzlich ist es natürlich nicht neu, dass sich Mathematik mit Mustern beschäftigt oder besser gesagt, dass die Suche nach Mustern und die Beschreibung von Strukturen die Mathematik selbst ist. In den 1980er Jahren wurde in der Nomenklatur eher auf die Strukturen abgehoben. In der Strukturorientierung des Mathematikunterricht lagen Ziele darin, „das Regelhafte, Gesetzmäßige, Formelhafte sichtbar [zu] machen", im „Aufdecken und Beschreiben von Strukturen" (NW, 1985, S. 25).

Radatz et al. (1998) beschreiben konsequent: „Mathematik ist die Wissenschaft von den Strukturen.“ (ebd., S. 25). In den näheren Ausführungen nennen sie dann auch den Begriff Muster und verweisen auf „die Entwicklung einer auf Kreativität, Erfindungsreichtum und Entdeckerfreude ausgerichteten Einstellung zur Mathematik“ (Radatz et al. 1998, S. 25). Aufgaben zu Mustern sind somit schon seit geraumer Zeit etabliert, wenn auch wie hier eher aus motivationaler und affektiver Perspektive begründet.

Die Mathematik selbst ist jedoch –schon seit ersten zahlentheoretischen Überlegungen der Pythagoreer– Strukturwissenschaft. Spätestens seit Cantors Mengentheorie, sind (Ordnungs-, algebraische und topologische) Strukturen *der* Inhalt mathematischer Auseinandersetzung (vgl. z. B. Basieux, 2000). Es ist zu klären, ob die Begriffe Muster und Strukturen Synonyme sind oder ob, gerade in der Perspektive der Mathematikdidaktik für die Grundschule, eine genauere Definition sinnvoll und hilfreich wird.

2 Muster, Strukturen, Muster und Strukturen – Versuche von Begriffsklärungen

Muster und Strukturen werden zumeist in einem Atemzug als ein stehender Begriff genutzt. Dies liegt auch daran, dass „teilweise inhaltliche Überschneidungen von Struktur und Muster sowie die Vielzahl möglicher Bedeutungen des Wortes Muster jede Definition unscharf und eine exakte Trennung beider Bereiche schwierig [machen]“ (Lüken, 2012, S. 20). Gerade in den jüngsten Forschungsarbeiten zum Themenfeld Muster und Strukturen wird vielfach aber der Versuch unternommen, die beiden Begriffe voneinander abzugrenzen und getrennt zu klären.

Mathematischen Mustern werden z. B. die Merkmale „Ordnung und Regelmäßigkeit, Wiederholung sowie Vorhersagbarkeit“ (Rathgeb-Schnierer, 2007, S. 11; vgl. auch Deutscher, 2012, S. 87) zugewiesen. Offensichtlich ist hier der Bezug zu Mulligan & Mitchelmore (2009) erkennbar, die ein mathematisches Muster beschreiben als „any predictable regularity, usually involving numerical, spatial or logical relationships” (S. 34). In dieser Deskription findet sich ein Klärungsansatz der (vorherseh- und vorhersagbarer) Regelmäßigkeit und Relationen (Beziehungen) definierenden Charakter für Muster zuweist. Auf die Eigenschaft der Regelmäßigkeit verweist auch Akinwunmi (2012) und weiter auch auf die Bedeutung von Beziehungen: „die erkannten Strukturen der Figuren in Beziehung [zu] setzen und Gemeinsamkeiten und Unterschiede [zu] erfassen" (Akinwunmi 2012, S. 96).

Diese beiden Eigenschaften versteht Lüken (2012) hingegen als charakterisierend für die Abgrenzung von Mustern zu Strukturen. „Ein *Muster* (...) beschreibt eine Regelmäßigkeit. (...) Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Bestandteilen eines Musters stellen seine *Struktur* dar" (Lüken, 2012, S. 22, H. i. O.). Ungeklärt bleibt bisher aber, woher die Beziehungen und Gliederungsaspekte des Musters, in dem oben beschriebenen Sinne also die Strukturen, stammen.

Wittmann & Müller (2007) schlagen vor Muster als Oberbegriff zu verwenden und dann von Strukturen zu sprechen, „wenn es sich um grundlegende, vorgegebene Muster handelt" (S. 43; vgl. auch Deutscher, 2012, S. 86). Die hier gemeinte Vorgabe entspringt aber nicht der didaktischen Leistung einer Lehrperson oder eines Unterrichtsmaterials, sondern ergibt sich mathematisch aus Definitionen bzw. aus dem mathematischen Raum, d. h. einer Menge mit mathematischen Strukturen (Wittmann & Müller, 2007, S. 49). Einer Menge, z. B. $\mathbb{N}$, wird durch eine Beziehung, z. B. der Verknüpfung Multiplikation, eine Struktur aufgeprägt (vgl. Basieux, 2000; Rinkens, 1973; auch Ott, 2014, S. 169). So ist etwa der Halbring $(\mathbb{N},+,0,\cdot,1)$ die wesentliche algebraische Struktur, die der Arithmetik im Grundschulbereich zugrunde liegt. Wie sich mathematische Objekte zueinander verhalten, ist somit abhängig von strukturellen mathematischen Beziehungen (z. B. Ordnung, Verknüpfungen), die sich in Mustern zeigen können.

Es erklärt sich in diesem Verständnis auch, warum Mulligan & Mitchelmore zwei unterschiedliche Komponenten der Bewusstheit für Muster und Strukturen vermuten:

> We thus consider AMPS [awareness of mathematical pattern and structure] to have two interdependent components: one cognitive (knowledge of structure) and one meta-cognitive (a tendency to seek and analyse patterns). Both are likely to be general features of how students perceive and react to their environment." (Mulligan & Mitchelmore, 2009, S.38)

Strukturen erschließen sich dem Verstehen mit zunehmendem Wissen über mathematische Beziehungen auf einer Inhaltsebene. Auf Prozessebene kann hingegen die Suche und auch die Untersuchung von Mustern gefördert werden, die wiederum inhaltliches Wissen über Strukturen nähren kann. Der Umgang mit Mustern und Strukturen soll im Folgenden genauer betrachtet werden.

3 Mathematische Tätigkeiten mit Mustern und Strukturen

Mathematische Tätigkeit ist in allen Bereichen der Mathematik –also auch bei Mustern und Strukturen– dadurch gekennzeichnet, in notierte, gezeichnete oder mit Material abgebildete Objekte oder Handlungen, mathematische Begriffe und Relationen in einem konstruktiven Prozess hineinzudeuten (vgl. Voigt, 1993; Steinbring, 2005; Söbbeke, 2005). Der Auslöser nach Mustern Ausschau zu halten, scheint auf verschiedenen Ebenen bedingt zu sein. Aus ästhetischer Sicht erhalten Regelmäßigkeiten besondere Aufmerksamkeit; aber auch aus dem Bedürfnis heraus, Mathematik Bedeutung zu geben: „Children who expect mathematics to 'makes sense' *look* for patterns" (Brownell et al., 2014, S. 84). Dieses menschliche Verhalten ist klug im Sinne der „Denkökonomie" (Wittmann & Müller, 2007, S. 48 ff.), da es unmöglich ist, stets nur in Einzelobjekten oder -handlungen die Welt und das Denken selbst zu ordnen. Darüber hinaus ist es nach Donaldson (1982) unerlässlich, sich dem Denken in Mustern und Strukturen auch bewusst zu werden und insbesondere Unstimmigkeiten und Unregelmäßigkeiten zum Anlass zu nehmen, Erklärungsmodelle und letztlich eigene Denkstrukturen neu zu ordnen.

Aus konstruktivistischer Sicht steht die Deutung im Mittelpunkt. Es verwundert also nicht, dass „die zwei dazugehörigen Konstrukte ‚Strukturdeutung' und ‚Musterdeutung'" (Deutscher, 2012, S. 158) als Ausdifferenzierungen bzw. Spezifizierungen versucht werden. Vor dem Hintergrund des oben dargelegten Verständnisses entziehen sich mathematische Strukturen jedoch einer individuellen Deutung im eigentlichen Sinne, da diese Deutung letztlich doch die von Mustern ist, die aus der Struktur geboren wurden. Fruchtbar scheint hingegen das Konstrukt des „Struktursinn[s] (...) als eine Sammlung von Fähigkeiten (...): das Wiedererkennen einer Anordnung als bereits bekanntes Muster (...); das flexible Aufteilen eines Musters in Teile (Struktureinheiten); (...) das Erkennen wechselseitiger Verbindungen, Beziehungen und Zusammenhänge zwischen Struktureinheiten; (...) das Integrieren der Struktureinheiten und Betrachten des Musters als Ganzes“ (Lüken, 2012, S. 221).

Sofern ein Sinn für Strukturen oder –in Anlehnung an die Begrifflichkeit der angelsächsischen Literatur z. B. nach Mulligan & Mitchelmore (2009)– eine Bewusstheit für Muster und Strukturen als Kompetenz unterstellt wird, so werden qualitative Unterscheidungen der Performanz als Ausdruck der Ausprägung des bereits vorhandenen Sinns für Strukturen denkbar. Mulligan & Mitchelmore (2013, S. 35) unterscheiden hier prä-strukturelle, emergente, partiell-strukturelle sowie strukturelle Reaktionen auf Musteraufgaben. Diese Unterschiede gehen mit graduell zunehmender ‚Korrektheit‘ der Antworten und Lösungsvorschläge einher, d. h. die Kinder fokussieren zunächst auf irrelevante, dann einige, die meisten und schließlich auf alle korrekten Eigenschaften der gegebenen Struktur. Gleichzeitig können diese Phasen fachdidaktisch gedeutet darauf hinweisen, dass Förderung und unterrichtliche Stützung denkbar ist.

Auch in anderen Forschungsprojekten werden Tätigkeiten identifiziert, die spezifisch für den Umgang mit Mustern und Strukturen sind. So listet z. B. Deutscher (2012, S. 89) „das Erkennen, das Nachzeichnen, das Vergleichen, das Fortsetzen und das Beschreiben von Mustern“ auf. Lüken (2012) verweist weitergehend auf die Bedeutung von Relationen zwischen Objekten: „Beim Strukturerfassen und Strukturieren müssen immer Beziehungen erkannt, bzw. hergestellt werden.“ (Lüken, 2012, S. 206). Letztlich sind also die Tätigkeiten gleichsam als Untersuchungen nach operativem Prinzip zu kennzeichnen, wie Wittmann es bereits 1985 zusammenfasst: „Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen ...) ausgeübt werden“ (Wittmann, 1985, S. 9).

In der Auseinandersetzung geht es, wie in der Grundschulmathematik üblich, darum induktiv vorzugehen (z. B. Akinwunmi, 2012, S. 115). Die Beschäftigung mit Mustern und Strukturen in der Idee der Verallgemeinerung ist ein Zugang zum Wesen der Mathematik.

> Generalizations are the life-blood of mathematics. (...) Generalizing starts when you sense an underlying pattern, even if you cannot articu-

late it (Mason, Burton & Stacey, 2010, S. 8).

Zurecht weist Akinwunmi darauf hin, dass das „Erkennen und das Beschreiben mathematischer Muster (...) sich als zwei sich wechselseitig bedingende Prozesse bei der Verallgemeinerung mathematischer Muster dar[stellen], sodass das Beschreiben nicht als der Deutung nachrangiger Prozess verstanden werden darf“ (Akinwunmi, 2012, S. 280). Link (2012) nimmt sich des Feldes der Beschreibung von Mustern in Breite und Tiefe an und zeigt Möglichkeiten der Anregung zur Stärkung der Beschreibungskompetenz auf.

Eine qualitative Erweiterung erfährt diese Liste bei (Wittmann & Müller, 2007, S. 49), die darlegen, dass Muster „entdeckt, beschrieben, begründet, unter Forschern kommuniziert und zur Lösung realer Probleme genutzt“ werden können. Über die Beschreibung hinaus, rücken nun Begründungen in den Fokus. Wesentlich ist dabei, wann ein Beweis als Beweis im sozialen Kontext ausgemacht werden kann, wie Wittmann & Müller (1988) dargelegt haben (vgl. auch Link & Akinwunmi, 2009, S. 564). Begründen und Argumentieren sind dabei hoch komplexe Tätigkeiten, die sich z. B. in Interaktionsanalysen genauer interpretieren und analysieren lassen (z. B. Schwarzkopf, 2000; Meyer, 2007). Zusammenfassend können als wesentliche Tätigkeiten (vgl. auch Steinweg, 2001, S. 115 ff.) festgehalten werden:

- erkennen – sehen, hineindeuten
- nutzen – replizieren, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren
- beschreiben – mündlich oder schriftlich kommunizieren
- begründen – argumentieren, erklären, verallgemeinern

Diese Aufzählung von Tätigkeiten bietet mehr als ein Beobachtungsraster für Lernprozesse. Wird sie in all ihren Punkten ernst genommen, so wird sie gleichsam zum Leitfaden für die Setzung unterrichtlicher Anregungen und darüber hinaus zur ‚Checkliste‘ für Aufgabenstellungen. Für (Grund-)Schulkinder sind nicht alle musterhaften Phänomene auch erklärlich oder erlauben eine mathematische Begründung. Dies kann zum einen in der Auswahl des Musterangebots selbst begründet sein und zum anderen in der mutmaßlichen Inhaltskompetenz auf mathematischer Ebene. Somit können Kriterien für die Auswahl von Aufgaben abgeleitet werden.

Musterhafte Anordnungen (Ott, 2014) –mit Material oder ikonisch–

sind immer replizierbar (z. B. Würfelbilder). Gerade Würfelbilder entziehen sich als Konventionen jedoch ganz einer mathematischen Begründung. Es ist demnach darauf zu achten Aufgaben anzubieten, die Zugang zu relevanten mathematischen Strukturen (z. B. Struktur des Dekadischen Systems, Ordnungsrelation von Größen, der Eigenschaften von Operationen, Eigenschaften von geometrischen Objekten) erlauben. Nur unter diesen Bedingungen ist es nach Wittmann (2010, S. 186, H. i. O.) möglich *„echte mathematische* Tätigkeit" anzuregen, die sich durch folgende Merkmale auszeichnet:

> 1. Es sind «Elemente» vorgegeben, die *mathematische* Eigenschaften haben und in *mathematischen* Beziehungen stehen. 2. Mit diesen Elementen wird nach *mathematischen* Regeln operiert. 3. Die mathematische Tätigkeit ist *zielgerichtet*. Immer geht es um die Erforschung von Mustern und die Lösung von Aufgaben unter Nutzung von Mustern.

Als didaktische Implikationen der Auseinandersetzung mit Tätigkeiten mit Mustern und Strukturen bleibt festzuhalten, dass sich Bewusstheit für Strukturen unterschiedlich ausgeprägt zeigt –aber auch unterrichtlich gefördert werden kann– und dass die Auswahl der Anregungsaufgaben wesentlich dafür ist, ob alle Facetten der Tätigkeit (bis hin zu Begründungen) gezeigt werden können. Lehrpläne und Bildungsstandards bilden die Grundlage von unterrichtlichen Anregungen und Aufgabenstellungen, da z. B. Lehrwerke auf die hier vorgesehenen Aspekte fokussieren müssen. Im Folgenden wird deshalb ein kurzer Blick in diese normativen Vorgaben geworfen.

4 Muster und Strukturen in Bildungsstandards und Lehrplänen

Als 2004 die Bildungsstandards für die Primarstufe Mathematik von der KMK beschlossen wurden, sah sich die Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis mit der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz „Muster und Strukturen" (KMK, 2005) konfrontiert. Selbstverständlich war diese Idee nicht neu oder ohne vorherige Fundierung in fachdidaktischer Diskussion entstanden (vgl. 1). Neu war jedoch, die Grundidee den Inhalten zuzuschreiben und neben die ‚übliche' Trilogie aus Arithmetik, Geometrie und Sachrechnen[1] zu

[1] Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass ebenso die inhaltliche Kompetenz „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" ergänzt wurde, die hier aber nicht thematisiert wird.

stellen. In der näheren Ausdifferenzierung der Kompetenz werden zwei Schwerpunkt gesetzt: (1) Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen, (2) funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen (KMK, 2005, S. 10-11). Diese werden illustriert durch Teilkompetenzen mit Inhaltsbeispielen, die ein weites Feld aus arithmetischen, geometrischen und funktionalen Aspekten beinhalten. In der Reaktion auf die Bildungsstandards wurden einige Lehrpläne der Länder überarbeitet, die die Nomenklatur und auch die Beispiele gern aufgriffen. Exemplarisch sei auf den Bildungsplan Baden-Württemberg (2004) verwiesen, der sogar vor den Beschlüssen der KMK in Kraft trat und in Duktus und Struktur den Bildungsstandards stark gleicht. Fatal war hier die Beschränkung der Beispiele z. B. auf „Muster mit Bezügen zu Kunst und Geschichte (römische Ornamente)“ (BW, 2004, S. 61), die insbesondere die Praxis dazu verführte, diese als direkte –aber auch einzige– Umsetzungsmöglichkeiten dieses Inhaltsbereichs zu verstehen.

Die Auslagerung des Bereichs Muster und Strukturen als ‚eigenen‘ Inhaltskern, sollte diesen stärken und mehr in das Bewusstsein der Lehrkräfte bringen. Die Beschreibungen der Bildungsstandards enthalten jedoch nicht stringent die ‚üblichen‘ Begriffe. Es verwundert also nicht, dass insbesondere die Praxis bei „strukturierten Aufgabenfolgen“ (KMK, 2005, S. 10) nicht direkt an Entdeckerpäckchen oder produktive Übungsformate erinnert wird. Der explizite Hinweis auf die „Hunderter-Tafel“ als „strukturierte Zahldarstellung“ (ebd.) führt auch nicht zwingend dazu, Punktefelder und anderes strukturiertes Anschauungsmaterial mitzudenken. Auswirkungen hat auch die Exemplifizierung funktionaler Beziehungen auf „Menge-Preis“ Beziehungen (KMK, 2005, S. 11). Die Praxis suchte und sucht für den neuen Inhaltsbereich ‚neue‘ Inhalte. Bezüge zu bereits gängigen und wohl vertrauten Inhalten aus Sicht fachdidaktischer Arbeit herzustellen, bleibt eine wichtige Aufgabe:

> Curriculum and assessment generally consider parallel content strands (...) and do not encourage teachers to seek important connections between different concepts and processes.” (Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 46-47)

Derzeit kann ein neuer Zyklus an Überarbeitungen der Länderlehrpläne beobachtet werden. In der Gesamtschau zeigt sich dabei eine erstaunliche Einhelligkeit. Die Lehrpläne nehmen von konkreten, singulären Beispielen zunehmend Abstand und verabschieden sich in einigen Fällen auch von Mustern und Strukturen als eigenem Inhaltsbereich. Es ist zu vermuten, dass die 2007 von Wittmann und Müller dargelegten Hinweise zu den Bildungsstandards und insbesondere die Einschätzung, „dass der Bereich Muster und Strukturen den Inhaltsbereichen übergeordnet ist“ (ebd., S. 42) hier eine nicht unwesentliche Rolle spielt.

Ganz auf den eigenen Inhaltsbereich Muster und Strukturen verzichten z. B. Thüringen und Nordrhein-Westfalen. So beschreibt Thüringen „...die Leitidee „Muster und Strukturen“ ist in allen Lernbereichen erfasst“ (TH, 2010, S. 6). Auch wenn in den Konkretisierungen wieder die fast schon obligatorischen Folgen benannt werden, findet sich ebenso als Kompetenzerwartung, Muster und Strukturen „beim Rechnen zu nutzen“ (TH, 2010, S. 10). Nordrhein-Westfalen verweist auf die tragende Rolle von Mustern und Strukturen. Sie „bestimmen häufig die einzelnen Themenbereiche und können zur Verdeutlichung zentraler mathematischer Grundideen genutzt werden“ (NW, 2008, S. 56). Dies wird dann noch zur Begründung dafür ausformuliert, von einem eigenen Bereich abzusehen. Muster und Strukturen sind hier „integraler Bestandteil aller Bereiche“ (NW, 2008, S. 56). Auch die Arbeitsfassung des neuen Bildungsplans Baden-Württemberg (2016 i. V.) verabschiedet sich –in der aktuellen Version– vom eigenständigen Inhaltsbereich Muster und Strukturen und gibt Beispiele z. B. in arithmetischen Grundthemen an: „Substanzielle Aufgabenformate wie Zahlenmauern, Rechenketten, Rechendreiecke, strukturierte Päckchen, ... ermöglichen durch operative Veränderungen das Entdecken von Mustern“ (BW, 2016, 18).

Unter Beibehaltung der eigenen Leitidee Muster und Strukturen formuliert z. B. Hamburg (2011) explizit den Verweis auf produktive Übungsformate und zugleich den Hinweis auf alle anderen Inhaltsbereiche (ebd., S. 27). Ähnlich findet sich diese explizite Ausweitung der Beispiele (z. B. Rechenstrategien) in Bayern (2014) im Gegenstandsbereich Muster und Strukturen.

Insgesamt ist festzuhalten, dass die Bewusstheit für Muster gewachsen ist. Weniger deutlich ist derzeit aber in der Schulwirklichkeit eine

Bewusstheit für Strukturen im weiteren Sinne erkennbar, da oft eine zu enge Sicht auf exemplarische Beispiele die Arbeit –zumindest in der Praxis– bestimmt. Die neuen Bildungs- und Lehrpläne lassen hier auf Wirkung in Unterrichtswerke und Unterrichtsalltag hoffen.

5 Muster und Strukturen im Unterricht

Angenommen im Unterricht einer 4. Jahrgangsstufe taucht die Rechenaufgabe 37037 · 3 auf. Damit ist ein Unterricht zu Mustern und Strukturen schon in vollem Gange. Unbestritten ist das Verfahren der schriftlichen Multiplikation bereits voller mathematischer Strukturen, die auf mathematischen Eigenschaften der Operation (Kommutativität, Assoziativität und Distributivität) beruhen. Eine ausführliche Analyse hierzu findet sich in Müller & Wittmann (1984, S. 30 ff.). Im Unterricht zu Algorithmen könnte es wünschenswert sein, dass auch hier in Elementen eine erste Bewusstwerdung der Strukturen angebahnt wird.

Zurück zum Ausgangsbeispiel: Für die Kinder kann es überraschend sein, dass dieses Produkt eine Schnapszahl aus lauter Einsen ist. Für Kenner der eindeutigen Primfaktorzerlegung hingegen verrät sich der erste Faktor direkt als 37faches von 1001 und 111 wiederum als 37faches von 3. Das Produkt 111111 ergibt sich also zwangsläufig aus dem 111-fachen von 1001 und vice versa.

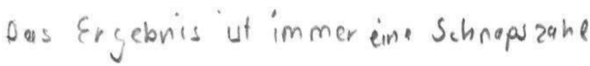

Abb. 1 Beschreibung des Ergebnismusters

Nun sind wir aber in einer vierten Jahrgangsstufe und derzeit gehört die Primfaktorzerlegung von Zahlen nicht zwingend zum Kanon der behandelten Inhalte. Das Muster des Produkts ist somit beschreibbar, entzieht sich aber der Begründung. Anders ist es, wenn die obige Aufgabe in einen operativen Zusammenhang gestellt wird und nun nicht das Auftreten der Schnapszahlen an sich, sondern der Zuwachs von Produkt zu Produkt in den Fokus gerückt wird.

37037 · 3   37037 · 6   37037 · 9   37037 · 12   37037 · 15   …

Die Aufgabe besteht nun nicht mehr allein darin, die Produkte zu bestimmen, sondern Beziehungen zu entdecken. Es sind damit „zum Strukturverständnis führende Bearbeitungsprozesse" (Schipper 2009,

S. 314). Das Beispiel gehört zur Gruppe der operativ-strukturierten, reflexiven Übungen (Wittmann, 1992, S. 180), bei dem sich die Beziehung als Muster erst nach ersten Lösungsprozessen zeigt und dann reflektiert werden kann (vgl. auch Steinweg 2013). Die Auffälligkeiten, auf die Lernende in der Reflexion des obigen Beispiels Bezug nehmen, sind sehr individuell und zeigen z. B. Beschreibungen von Besonderheiten der Aufgabenstellung.

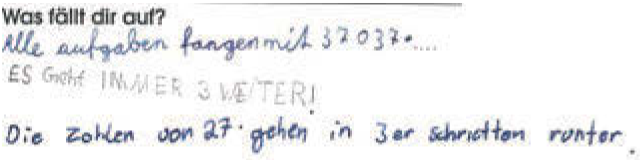

Abb. 2 Verschiedene Beschreibungen des ersten bzw. zweiten Faktors

Link (2012) verweist auf die eigene Bedeutung der Beschreibung und warnt, „dass eine (...) Förderung des Beschreibens von Zahlenmustern (...) nicht allein durch eine einmalige Durchführung einer isolierten Unterrichtsreihe (...) zu erreichen ist, sondern integraler Teil einer Unterrichtskultur im Mathematikunterricht werden muss" (ebd., S. 291).

Der Unterricht könnte an dieser Stelle abbrechen oder aber auch noch gemeinsam mit den Kindern Begründungen für die Zuwächse der Produkte suchen. Schon bei der Erarbeitung des 1x1 haben die Lernenden im besten Fall operative Reihen von Produkten kennengelernt, in denen ein Faktor gleich bleibt und der zweite sich um einen bestimmten Wert erhöht. Die Struktur ist völlig unabhängig vom gewählten Zahlenraum. $5 \cdot 6$ ist das Doppelte von $5 \cdot 3$, da sechs das Doppelte von 3 ist. $5 \cdot 9$ ist das Dreifache des ersten Produkts usw. Diese Erklärungen, die auf der Assoziativität der Multiplikation ($5 \cdot 6 = 5 \cdot (3 \cdot 2) = (5 \cdot 3) \cdot 2$) beruhen, sind somit für diese Jahrgangsstufe zugänglich. Die wichtige Warum-Frage kann tatsächlich geklärt werden. Diese Vorgehensweise, in die Tiefe der mathematischen Strukturen vorzudringen, ist „lohnender als die Lösung von weiteren Päckchen auf dem Zusatzblatt für schnelle Rechner" (Steinweg, 2003, S. 66-67). Die Bedeutung der Erfahrung des Verstehens von Zusammenhängen, ist nicht zu unterschätzen. Mathematik ist keine Geheimwissenschaft, sondern folgt logischen und erklärbaren Strukturen (vgl. Steinweg, 2004).

Das Plädoyer für das Entdecken, Beschreiben von Mustern und Begründen durch die Strukturen wird umso wichtiger, da es verstärkt empirische Hinweise gibt, dass sich die Förderung der Beschäftigung mit Mustern auszahlt. Die Studien definieren Muster eher eng (Musterfolgen). Es erstaunt aber nicht, dass Zusammenhänge zwischen Kompetenzen in diesem Musterverstehen und ‚anderen' mathematischen Kompetenzbereichen nachgewiesen werden können (vgl. Lüken, 2012; Lüken, Peter-Koop & Kollhoff, 2014).

6 Ein Plädoyer für Bewusstheit für Muster und Strukturen

Die Diskussion zu Mustern und Strukturen in Unterricht, Lehrerbildung und –fortbildung bewegt sich zwischen zwei Polen: (1) Mathematik als Wissenschaft von den Mustern (2) Muster und Strukturen als neuer Inhaltsbereich). Diese zwei Ansichten führen, wenn sie je verkürzt verstanden werden, zu einem Dilemma. Einerseits wird in Perspektive der Generalisierung (1) darauf verwiesen, dass ausnahmslos alle mathematischen Aktivitäten Muster beinhalten. Andererseits bewirkt die Perspektive der Exemplifizierung (2), eine Einschränkung auf spezifische Inhalte, z. B. Folgen und Funktionen (proportionale Relationen). Beide Perspektiven bergen Gefahren. In der ersten Sicht scheint es ganz egal zu sein, welche Anregungen man den Kindern anbietet. Die „überquellende Fülle von Zahlenmustern, Formenmustern, kombinatorischen und logischen Mustern" (Wittmann, 2003,S. 26) wirkt so unerschöpflich, aber auch unüberschaubar, dass Aktivitäten gar nicht mehr genauer analysiert werden müssen, da Muster überall sind. Unterrichtsinhalte werden willkürlich und das Label Muster in Unterrichtswerken, Seminarveranstaltungen etc. verschwimmt. Muster und Strukturen drohen nirgends wirklich verortet zu sein. In der zweiten verkommen Muster und Strukturen zu den Einzelbeispielen, die Bildungs- und Lehrpläne explizieren. Sobald diese Beispiele unterrichtlich mit Kindern oder in Bildungsangeboten für Lehrkräfte erarbeitet, besprochen, thematisiert wurden, ist man ‚fertig' und kann zu einem ‚anderen' Inhalt übergehen. Eine Lehrerin meinte hierzu: „Muster und Strukturen mache ich immer in Vertretungsstunden, weil es da nicht um Inhalte geht." Bezüge zwischen den Inhaltsbereichen und ständige Verweise auf Muster und Strukturen bleiben aus.

Ein Weg, der aus diesem Dilemma führt, liegt darin, Aufgabenangebote stets einer genaueren Betrachtung zu unterziehen. In allen Inhaltsbereichen sollten die Aufgaben, „die das *Potenzial* haben, die Mathematik als lebendige Wissenschaft von den Mustern“ (Steinweg, 2003, S. 71, H. i. O.) zu erfahren, bevorzugt werden. Das Potenzial ist nicht oberflächlich erkennbar. Muster sind zwar schon Kleinkindern zugänglich, aber die Begründungen für das Auftreten der Muster ist es nicht zwingend. Mathematische Objekte und Relationen sind immer nur gedanklicher Natur (vgl. Mason, 1987). Muster sind wie ‚anschauliche‘ Schattenwürfe der mathematischen Strukturen und können jedoch nur mit geschultem Bewusstsein „with the ‚eyes of the mind‘” (Devlin, 1997, S. 4) wirklich ‘gesehen’ werden. Lehrerbildung und –fortbildung kommt nicht darum herum, in die Lage zu versetzen, die mathematischen Strukturen zu erfassen, die im Verlauf an Komplexität gewinnen (vgl. Wittmann, 2014). Nur, wenn Muster „durchschaubar in der Logik ihrer Strukturen“ (Steinweg, 2001, S. 262) werden, beginnt tatsächlich die mathematische Tätigkeit.

Es ist dafür zu plädieren, nur die Muster anzubieten, die auch den Kindern in Strukturen zugänglich sind, d. h. die Begründungen im entsprechenden Niveau zulassen. Natürlich zeigen sich in echten mathematischen Phänomenen immer Muster. Das gilt allerdings nicht für jede Schulbuchseite oder Kopiervorlage. Die sinnvolle Frage muss lauten: Gibt es Muster, die Zugang zu mathematischer Struktur erlauben? Natürlich ist es im Alltagsunterricht nicht zwingend, immer alles zu begründen. Es sollte aber zwingend sein, dass die angebotenen Muster (auf je entsprechendem Niveau der Lernenden) begründbar sind.

> The beauty [...] is, in many cases, a highly abstract, inner beauty, a beauty of abstract form and logical structure, a beauty that can be observed, and appreciated, only by those sufficiently well trained in the discipline. (Devlin, 1997, S. 6)

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Basieux, P. (2000). *Die Architektur der Mathematik*. Reinbek: Rowohlt.

Brownell, J., Chen, J.-Q., & Ginet, L. (2014). *Big Ideas of Early Mathematics*. Boston u.a.: Pearson.

BW - Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden–Württemberg (2016, Stand: 8. September 2014) *Bildungsplan 2016 - Allgemein bildende Schulen - Grundschule - Arbeitsfassung - Mathematik*. Abgerufen von http://www.bildung-staerkt-menschen.de/bp2016/gs

BW- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2004). Bildungsplan Grundschule – Bildungsstandards für Mathematik. Abgerufen von http://www.bildung-staerkt-menschen.de/unterstuetzung/schularten/GS

BY - Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (2014). *LehrplanPLUS - Grundschule - Fachprofile - Mathematik*. Abgerufen von http://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/grundschule/mathematik

Deutscher, Th. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Devlin, K. (1997). *Mathematics: The Science of Patterns*. 2nd printing. New York: Scientific American Library.

Donaldson, M. (1982). *Wie Kinder denken*. Bern, u. a.: Huber.

HH - Freie und Hansestadt Hamburg Behörde für Schule und Berufsbildung (2011). *Bildungsplan Grundschule - Mathematik*. Abgerufen von http://www.hamburg.de/contentblob/2481796/data/mathematik-gs.pdf

KMK (2005). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz - Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich - Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Luchterhand.

Link, M. & Akinwunmi, K. (2009). Entdecken, Erforschen, Erklären. In Bartnitzky, H. et al. (Hrsg.). *Kursbuch Grundschule* (S. 558-565). Frankfurt a.M.: Grundschulverband.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster*. Wiesbaden: Springer Sepktrum.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Münster: Waxmann.

Lüken, M., Peter-Koop, A. & Kollhoff, S. (2014) Influence of Early Repeating Patterning Ability on School Mathematics Learning. Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.). (2014). *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, S. 137-144). Vancouver, Canada: PME.

Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewusstheit Einfluss nehmen. *mathematik lehren*, Heft 21, 4-5.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. 2nd Edition. Harlow, Pearson Education Ltd.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Braunschweig: Vieweg.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, 21 (2), 33-49.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. In English, L. & Mulligan, J. (Hrsg.). *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (S. 29-45). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

NW - Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen - Mathematik*. Frechen: Ritterbach.

NW - Ministerium für Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (1985). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule – Mathematik*. Frechen: Ritterbach.

Ott, B. (2014/im Druck). Qualitative Analyse grafischer Darstellungen zu Textaufgaben. In Kadunz, G. (Hrsg.) *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik*. Heidelberg: Springer.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht, 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Rathgeb-Schnierer, E. (2007). Kinder erforschen arithmetische Muster. In *Grundschulunterricht,* 54 (2), 11-19.

Rinkens, H. D. (1973). *Abstraktion und Struktur. Grundbegriffe der Mathematikdidaktik*. Ratingen: Henn.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schnell, S. (2014). *Muster und Variabilität erkunden*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern*. Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom lnteraction - an Epistemological Perspective*. Mathematics Education Library (MELI), No. 38. Berlin, New York: Springer.

Steinweg, A. S. (2013). Arithmetische Muster untersuchen. In *Mathematik differenziert,* 4 (1), 39-45.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern*. Münster: Lit-Verlag.

Steinweg, A. S. (2003). Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt. In Ruwisch, S. & Peter-Koop, A. (Hrsg.). *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. (S. 56-74). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Steinweg, A. S. (2004). Zahlen in Beziehungen. In Bönig, D. & Scherer, P. (Hrsg.). *Mathematik für Kinder - Mathematik von Kindern*. (S. 232-242) Frankfurt: Grundschulverband e.V.

TH - Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (2010). *Lehrplan für die Grundschule und für die Förderschule mit dem Bildungsgang Grundschule - Mathematik*. Abgerufen von https://www.schulportal-thueringen.de/web/guest/media/detail?tspi=1262

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In Lorenz, J. (Hg.). *Mathematik und Anschauung* (S. 147-166). Köln: Aulis.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In Bender, P. (Hrsg.). *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237-257). Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In Walther, G. et al. (Hrsg.). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42-65). Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen - Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In *mathematik lehren*, Heft 11, 7-11.

Wittmann, E. Ch. (1992). Üben im Lernprozeß. In Wittmann, E. & Müller, G. *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2.* (S. 175-182). Leipzig, Klett.

Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? In Baum, M. & Wielpütz, H. (Hrsg.). *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch* (S. 18-46). Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. (2010). Grundsätzliche Überlegungen zur frühkindlichen Bildung in der Mathematik. In Stamm, M. & Edelmann, D. (Hrsg.) *Frühkindliche Bildung, Betreuung und Erziehung. Was kann die Schweiz lernen?* (pp. 177-195). Zürich: Rüegger.

Wittmann, E. Ch. (2014). Von allen guten Geistern verlassen. *Profil. Das Magazin für Gymnasium und Gesellschaft*, (6), 20-30.

Prof. Dr. Anna Susanne Steinweg
Otto-Friedrich-Universität Bamberg
Didaktik der Mathematik und Informatik
Markusplatz 3
96047 Bamberg
anna.steinweg@uni-bamberg.de