

**BEWERTUNG VON  
STERBLICHKEITSDERIVATEN**

Dissertation an der  
Otto-Friedrich-Universität Bamberg

Pia Brüggemann

Diese Arbeit wurde am Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Banking und Finanzcontrolling, der Fakultät Sozial- und Wirtschaftswissenschaften der Otto-Friedrich-Universität Bamberg zur Dissertation vorgelegt.

Erstbetreuer: Prof. Dr. Matthias Muck (Otto-Friedrich-Universität Bamberg)  
Zweitbetreuer: Prof. Dr. Markus Rudolf (Wissenschaftliche Hochschule für Unternehmensführung)  
Drittbetreuer: Prof. Dr. Andreas Oehler (Otto-Friedrich-Universität Bamberg)  
Datum der Disputation: 27. Juni 2012



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbes. Banking und Finanzcontrolling, der Universität Bamberg. Da sie ohne die Unterstützung zahlreicher Personen nicht möglich gewesen wäre, möchte ich ihnen an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Mein Dank gilt dabei an erster Stelle Prof. Dr. Matthias Muck, der mir die Möglichkeit einer externen Promotion an seinem Lehrstuhl gab und die Erstbetreuung meiner Dissertation übernahm. Seine fachlichen Orientierungshilfen bei der Themenfindung sowie sein äußerst zügiges und anwendungsorientiertes Feedback während der Erarbeitung haben maßgeblich zum erfolgreichen Abschluss dieser Arbeit beigetragen.

An zweiter Stelle danke ich Prof. Dr. Markus Rudolf sowie Prof. Dr. Andreas Oehler für die Übernahme der Zweitbetreuung meiner Arbeit und ihr konstruktives Feedback. Prof. Dr. Markus Rudolf danke ich außerdem für die Möglichkeit, im Juli 2010 an seinem Doktoranden-seminar teilnehmen zu können.

Ein herzlicher Dank gilt auch allen Kollegen des Lehrstuhls für Betriebswirtschaftslehre, insbes. Banking und Finanzcontrolling, in Bamberg. Sie haben durch fachliche Diskussionen und so manche außerdienstliche Aktivität zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Stellvertretend seien hier Michael Herold, Dr. Jan Marckhoff, Sebastian Paik, Dr. Thomas Volmer, Stefan Weisheit und Yvonne Zahr genannt.

Nicht zuletzt richtet sich mein besonderer Dank an meine Freunde und meine Familie, die mich durch ihr Interesse an meiner Arbeit sowie verschiedenste Ablenkungen vor allem moralisch unterstützt haben. Dieser Dank gilt besonders für meine Eltern, die mich auf meinem bisherigen Lebens- und Bildungsweg stets engagiert unterstützt haben.

Düsseldorf, im Februar 2012

Pia Brüggemann



# Inhaltsverzeichnis

<b>Danksagung</b>	<b>I</b>
<b>Verzeichnisse</b>	<b>III</b>
Inhaltsverzeichnis . . . . .	III
Tabellenverzeichnis . . . . .	V
Abbildungsverzeichnis . . . . .	IX
Abkürzungsverzeichnis . . . . .	XI
Symbolverzeichnis . . . . .	XIII
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Sterblichkeitsmodellierung</b>	<b>7</b>
2.1 Eigenschaften menschlicher Sterblichkeit . . . . .	7
2.2 Klassifizierung von Sterblichkeitsmodellen . . . . .	14
2.3 Das Modell von LEE & CARTER (1992) . . . . .	26
<b>3 Aktienkurs- und Zinstrukturmodellierung</b>	<b>37</b>
3.1 Klassifizierung von Aktienkursmodellen . . . . .	37
3.2 Klassifizierung von Zinstrukturmodellen . . . . .	39
3.3 Der Ansatz von CHAN ET AL. (1992) . . . . .	42
<b>4 Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt</b>	<b>53</b>
4.1 Hypothesen und empirische Anhaltspunkte . . . . .	54

4.2	Relevanz einer Abhängigkeit . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Empirische Messung des Zusammenhangs</b>	<b>73</b>
5.1	Methodik . . . . .	74
5.2	Ergebnisse der Modellschätzungen . . . . .	84
5.3	Ergebnisse der Abhängigkeitsanalysen . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Anwendung zur Bewertung</b>	<b>147</b>
6.1	Modell . . . . .	147
6.2	Implementierung . . . . .	162
6.3	Ergebnisse . . . . .	172
<b>7</b>	<b>Resümee</b>	<b>195</b>
<b>A</b>	<b>Ergebnisse der Abhängigkeitsanalysen</b>	<b>i</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>xxxii</b>

# Tabellenverzeichnis

2.1	Periodenbasierte Lebenserwartung in ausgewählten Industrieländern, 2006 . . . . .	13
3.1	Nebenbedingungen der Zinsmodelle . . . . .	44
3.2	Nebenbedingungen der Zinsmodelle mit Strukturbruch . . . . .	45
4.1	Hypothesen zu Abhängigkeiten bei Langlebighkeitsrisiken (Diffusionsprozesse)	56
4.2	Hypothesen zu Abhängigkeiten bei Langlebighkeitsrisiken (Marktpreise des Risikos) . . . . .	57
4.3	Hypothesen zu Abhängigkeiten bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken . . . . .	68
5.1	Verfügbarkeit der Sterblichkeitsdaten . . . . .	82
5.2	Verfügbarkeit der Aktiendaten . . . . .	83
5.3	Verfügbarkeit der Zinsdaten . . . . .	83
5.4	Zeitreihenlängen der Sterblichkeitsindizes . . . . .	91
5.5	ARIMA-Modellschätzungen für die Sterblichkeitsindizes . . . . .	98
5.6	Detaillierte ARIMA-Modellschätzungen für die Sterblichkeitsindizes . . . . .	99
5.7	Ljung-Box- und Jarque-Bera-Test für die Residuen der ARIMA-Modelle der Sterblichkeitsindizes . . . . .	100
5.8	Stationaritätstests für die Residuen der ARIMA-Modelle der Sterblichkeitsindizes . . . . .	100
5.9	Zeitreihenlängen der Aktienindizes . . . . .	101
5.10	ARIMA-Modellschätzungen für die logarithmierten Aktienindizes . . . . .	102
5.11	Detaillierte ARIMA-Modellschätzungen für die logarithmierten Aktienindizes	103
5.12	Stationaritätstests für die Residuen der ARIMA-Modelle der logarithmierten Aktienindizes . . . . .	104
5.13	Ljung-Box- und Jarque-Bera-Test für die Residuen der ARIMA-Modelle der logarithmierten Aktienindizes . . . . .	105
5.14	Zeitreihenlängen der Zinssätze . . . . .	107
5.15	CHAN ET AL. (1992)-Modellschätzungen für Deutschland . . . . .	114



5.16	CHAN ET AL. (1992)-Modellschätzungen für die USA . . . . .	115
5.17	CHAN ET AL. (1992)-Modellschätzungen . . . . .	117
5.18	Ergebnisse der Zinsmodellvergleiche für die USA . . . . .	119
5.19	Zinsmodellschätzungen für die Abhängigkeitsanalysen . . . . .	120
5.20	Detaillierte Zinsmodellschätzungen für Deutschland . . . . .	121
5.21	Detaillierte Zinsmodellschätzungen für die USA . . . . .	122
5.22	Stationaritätstests für die adjustierten Residuen der Zinsmodelle . . . . .	123
5.23	Ljung-Box-Test, Jarque-Bera-Test und Varianzberechnung für die adjustierten Residuen der Zinsmodelle . . . . .	124
6.1	Tatsächliche und geschätzte Zinsstruktur am 1. Juli 2009 . . . . .	169
6.2	Erwartungswert und Quantile des Survivor Index in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	175
6.3	Volatilität des Survivor Index und Abweichung der Quantile relativ zum Erwartungswert in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	175
6.4	Volatilität des Survivor Index und Abweichung der Quantile vom Erwartungswert in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	176
6.5	Erwartungswert des Survivor Index in Abhängigkeit des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos und der Laufzeit . . . . .	176
6.6	Verwendete Cap Rates . . . . .	177
6.7	Preis des Survivor Forwards in Abhängigkeit des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos und der Laufzeit . . . . .	178
6.8	Preis des Survivor Forwards in Abhängigkeit von Korrelation und Laufzeit . . . . .	179
6.9	Preis des Survivor Forwards in Abhängigkeit der Korrelation und des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos . . . . .	181
6.10	Preis des Survivor Caplets in Abhängigkeit von Cap Rate, Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos und Laufzeit . . . . .	185
6.11	Preis des Survivor Caplets in Abhängigkeit von Cap Rate, Korrelation und Laufzeit . . . . .	186
6.12	Preis des Survivor Caplets in Abhängigkeit von Cap Rate, Korrelation und Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos . . . . .	191
A.1	Mardias Test für die Aktien- und Sterblichkeitsresiduen bei einem Konfidenzniveau von 5% . . . . .	ii
A.2	Mardias Test für die Aktien- und Sterblichkeitsresiduen bei einem Konfidenzniveau von 10% . . . . .	iii
A.3	Hypothesenbasierte t-Tests für Aktien und Sterblichkeit bei einem Konfidenzniveau von 5% . . . . .	iv
A.4	Hypothesenbasierte t-Tests für Aktien und Sterblichkeit bei einem Konfidenzniveau von 10% . . . . .	v

---

A.5	Abhängigkeitsanalysen für Aktien und die Sterblichkeit von Männern bei einem Lag von 2 . . . . .	ix
A.6	Abhängigkeitsanalysen für Aktien und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von 2 . . . . .	x
A.7	Abhängigkeitsanalysen für Aktien und die Sterblichkeit von Männern und Frauen bei einem Lag von 2 . . . . .	xi
A.8	Mardias Test für die Zins- und Sterblichkeitsresiduen beim Stichtag 1. Januar und einem Konfidenzniveau von 5% . . . . .	xiii
A.9	Mardias Test für die Zins- und Sterblichkeitsresiduen beim Stichtag 1. Januar und einem Konfidenzniveau von 10% . . . . .	xiv
A.10	Mardias Test für die Zins- und Sterblichkeitsresiduen beim Stichtag 1. Juli und einem Konfidenzniveau von 5% . . . . .	xv
A.11	Mardias Test für die Zins- und Sterblichkeitsresiduen beim Stichtag 1. Juli und einem Konfidenzniveau von 10% . . . . .	xvi
A.12	Hypothesenbasierte t-Tests für Zinsen und Sterblichkeit beim Stichtag 1. Januar und einem Konfidenzniveau von 5% . . . . .	xvii
A.13	Hypothesenbasierte t-Tests für Zinsen und Sterblichkeit beim Stichtag 1. Januar und einem Konfidenzniveau von 10% . . . . .	xviii
A.14	Hypothesenbasierte t-Tests für Zinsen und Sterblichkeit beim Stichtag 1. Juli und einem Konfidenzniveau von 5% . . . . .	xix
A.15	Hypothesenbasierte t-Tests für Zinsen und Sterblichkeit beim Stichtag 1. Juli und einem Konfidenzniveau von 10% . . . . .	xx
A.16	Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von -2 und dem Stichtag 1. Juli . . . . .	xxv
A.17	Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von -1 und dem Stichtag 1. Januar . . . . .	xxvi
A.18	Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von -1 und dem Stichtag 1. Juli . . . . .	xxvii
A.19	Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von 1 und dem Stichtag 1. Juli . . . . .	xxviii
A.20	Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von 3 und dem Stichtag 1. Januar . . . . .	xxix



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Sterberaten in den USA, 2006 . . . . .	8
5.1	Verhältnis $R$ der durchschnittlichen Deviances für Deutschland . . . . .	85
5.2	Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für Deutschland, 1956–2008 . . . . .	87
5.3	Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für Deutschland, 1968–2008 . . . . .	88
5.4	Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für Deutschland, 1974–2008 . . . . .	89
5.5	Verhältnis $R$ der durchschnittlichen Deviances für die USA . . . . .	90
5.6	Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für die USA, 1933–2006 . . . . .	92
5.7	Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für die USA, 1948–2006 . . . . .	93
5.8	Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für die USA, 1963–2006 . . . . .	94
5.9	Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für die USA, 1966–2006 . . . . .	95
5.10	Zeitreihen der Kassazinsrenditen . . . . .	108
5.11	Korrelationshypthesen zwischen Sterblichkeit und Aktien bzw. Zinsen nach Zinsmodellstichtagen und Lags . . . . .	129
5.12	Korrelationsanalysen für den Kursindex des S&P 500 und die Sterblichkeit von Männern und Frauen bei einem Lag von 2 . . . . .	133
5.13	Korrelationsanalysen für den Kursindex des CDAX und die Sterblichkeit von Männern und Frauen bei einem Lag von 2 . . . . .	134
5.14	Korrelationsanalysen für die einjährige Zinsstrukturrendite und die Sterblichkeit von Männern bei einem Lag von -2 und dem Stichtag 1. Juli . . . . .	137
5.15	Korrelationsanalysen für die einjährige Zinsstrukturrendite und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von -1 und dem Stichtag 1. Januar . . . . .	138
5.16	Korrelationsanalysen für die sechsmonatige Zinsstrukturrendite und die Sterblichkeit von Männern und Frauen bei einem Lag von -1 und dem Stichtag 1. Juli . . . . .	139
5.17	Korrelationsanalysen für die einjährige T-Bill-Rendite und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von 1 und dem Stichtag 1. Juli . . . . .	141
5.18	Korrelationsanalysen für die einjährige Zinsstrukturrendite und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von 3 und dem Stichtag 1. Januar . . . . .	143

5.19	Korrelationsanalysen für die einjährige T-Bill-Rendite und die Sterblichkeit von Männern bei einem Lag von 3 und dem Stichtag 1. Januar . . . . .	144
5.20	Korrelationsanalysen für die einjährige T-Bill-Rendite und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von 3 und dem Stichtag 1. Januar . . . . .	145
6.1	Alterskoeffizienten des Sterblichkeitsmodells . . . . .	166
6.2	Tatsächliche und geschätzte Zinsstruktur am 1. Juli 2009 . . . . .	170
6.3	Simulation des Zinsmodells . . . . .	173
6.4	Simulation des Sterblichkeitsmodells . . . . .	174
6.5	Abweichungen im erwarteten Survivor Index für verschiedene Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	177
6.6	Survivor-Forward-Preis im Basismodell in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	178
6.7	Abweichungen im Survivor-Forward-Preis für verschiedene Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	180
6.8	Abweichungen im Survivor-Forward-Preis für verschiedene Korrelationen in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	181
6.9	Survivor-Forward-Preis für verschiedene Laufzeiten in Abhängigkeit der Korrelation . . . . .	182
6.10	Survivor-Forward-Preis für verschiedene Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos in Abhängigkeit der Korrelation . . . . .	182
6.11	Survivor-Caplet-Preis in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	184
6.12	Abweichung des erwarteten Survivor Index von der Cap Rate für verschiedene Cap-Rate-Aufschläge in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	187
6.13	Abweichung des Survivor-Caplet-Preises für verschiedene Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	188
6.14	Abweichung des Survivor-Caplet-Preises für verschiedene Korrelationen in Abhängigkeit der Laufzeit . . . . .	189
6.15	Sensitivität des Survivor-Caplet-Preises auf die Korrelation bei verschiedenen Laufzeiten . . . . .	190
6.16	Sensitivität des Survivor-Caplet-Preises auf die Korrelation bei verschiedenen Marktpreisen des Sterblichkeitsrisikos . . . . .	190

# Abkürzungsverzeichnis

ACF	Autokorrelationsfunktion
AR	autoregressiv
ARIMA	Autoregressive Integrated Moving Average
BIC	Bayesian Information Criterion
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CCAPM	Consumption Capital Asset Pricing Model
CDAX	Composite DAX
CMT	Constant Maturity Treasury Yield
DAX	Deutscher Aktienindex
DJ	Dow Jones
DJ Ind. Average	DJ Industrial Average
FTSE	Financial Times Stock Exchange
GMM	Generalized Method of Moments
LIBOR	London Interbank Offered Rate
LR	Likelihood Ratio
KPSS	Kwiatkowski Phillips Schmidt Shin
MA	Moving Average
OECD	Organisation for Economic Co-Operation and Development
PACF	partielle Autokorrelationsfunktion
Perf.	Performance
SCOR	Survivor Credit Offer Rate
S&P	Standard & Poor's
S&P 600 DS	S&P 600 Dividend Stocks



# Symbolverzeichnis

## Lateinisches Alphabet

$d$	Demographische Merkmale von Individuen
$d_i$	Demographische Merkmale von Individuum $i$
$\text{diag}(\cdot)$	Aus einem Vektor erzeugte Diagonalmatrix
$f_{\text{Mom}}(\cdot, \cdot)$	Funktion der Momentenbedingungen bei der GMM
$f(\cdot)$	Momentaner Terminzins
$g^*(\cdot)$	Funktion der Verteilungsmomente bei der GMM
$g_T(\cdot)$	Funktion der Stichprobenmomente bei der GMM
$g_{\lambda_{\text{Wang}}}$	Verzerrungsoperator der Wang-Transformation
$h(\cdot)$	Funktion bei der Berechnung von $P(\cdot, \cdot)$ im COX ET AL. (1985)-Modell
$i$	Individuum
$i_0$	Repräsentatives Individuum
$j$	Variable/Index
$k$	Parameter von $l_k$
$k_{\text{SC}}$	Faktor bei der Bestimmung von $K_{\text{SC}}$
$l$	Lag
$l^*$	Lag
$l_k$	Stützungsparameter im KPSS-Test
$m_x$	Sterberate der Altersgruppe $x$
$n$	Dimension eines Vektors
$n_f$	Dimension des Wertevorrats von $f_{\text{Mom}}(\cdot, \cdot)$
$n_v$	Dimension von $\mathbf{V}$
$n_T$	Anzahl der bei der Zinsmodellkalibrierung berücksichtigten Laufzeiten
$n_Z$	Dimension von $Z$
$n_\theta$	Dimension von $\Theta$
$n_\kappa$	Dimensions von $\kappa$
$p_i(\cdot)$	Überlebenswahrscheinlichkeit von $i$
$p_i(\cdot, \cdot)$	Bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit von $i$
$q_i(\cdot)$	Sterbewahrscheinlichkeit von $i$
$q_i(\cdot, \cdot)$	Bedingte Sterbewahrscheinlichkeit von $i$
$r$	Momentan- oder Kassazins
$\hat{r}_t$	Schätzwert für $r_t$
$s$	Zeitpunkt/-raum



$t$	Zeitpunkt/-raum
$t_0$	Zeitpunkt
$u$	Parameter/Variable/Vektor/Stochastischer Prozess
$u_1$	Variable
$u_2$	Variable
$\hat{u}^{(\nu)}$	Schätzwert für $u$ in Iterationsschritt $\nu$
$v$	Datenvektor bei der GMM
$w_{x,t}$	Gewicht für Datenpunkte der Altersgruppe $x$ im Zeitraum $t$
$x$	Alter
$x_i$	Alter von Individuum $i$
$\tilde{z}_t$	Vektor von standardnormalverteilten Zufallsvariablen unter $\mathbb{Q}$
$A(\cdot, \cdot)$	Funktion bei der Berechnung von $P(\cdot, \cdot)$ im COX ET AL. (1985)-Modell
$B$	Wert des Geldmarktkontos
$\mathcal{B}$	Numéraire
$C(\cdot, \cdot)$	Funktion bei der Berechnung von $P(\cdot, \cdot)$ im COX ET AL. (1985)-Modell
$\text{CORR}[\cdot, \cdot]$	Kreuzkorrelationsoperator unter $\mathbb{P}$
$\text{CORR}^{\mathbb{Q}}[\cdot, \cdot]$	Kreuzkorrelationsoperator unter $\mathbb{Q}$
$\text{COV}[\cdot, \cdot]$	Kreuzkovarianzoperator unter $\mathbb{P}$
$\text{COV}^{\mathbb{Q}}[\cdot, \cdot]$	Kreuzkovarianzoperator unter $\mathbb{Q}$
$D_{x,t}$	Anzahl der Todesfälle in Altersgruppe $x$ im Zeitraum $t$
$\tilde{D}_{x,t}$	Erwartete Anzahl der Todesfälle in Altersgruppe $x$ im Zeitraum $t$ im LEE & CARTER (1992)-Modell
$\hat{D}_{x,t}$	Schätzwert für $D_{x,t}$ im nicht linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$\hat{D}_{x,t}^{(\nu)}$	Schätzwert für $D_{x,t}$ im nicht linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell in Iterationsschritt $\nu$
$\hat{\tilde{D}}_{x,t}$	Schätzwert für $D_{x,t}$ im linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$D_{x,d,t}$	Erwartete Anzahl der Todesfälle von Altersgruppe $x$ und Geschlecht $d$ im Zeitpunkt $t$
$\widehat{\text{Dev}}$	Deviance im nicht linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$\widetilde{\widehat{\text{Dev}}}$	Deviance im linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$\widehat{\text{DoF}}$	Freiheitsgrade im nicht linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$\widetilde{\widehat{\text{DoF}}}$	Freiheitsgrade im linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$E_i$	Standardexponentialverteilte Zufallsvariable
$\mathbb{E}[\cdot]$	Erwartungswertoperator unter $\mathbb{P}$
$\mathbb{E}_t[\cdot]$	Bedingter Erwartungswertoperator unter $\mathbb{P}$ , gegeben Information bis zum Zeitpunkt $t$
$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$	Erwartungswertoperator unter $\mathbb{Q}$
$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}}[\cdot]$	Erwartungswertoperator unter $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$
$E_{x,t}$	Exposure von Altersgruppe $x$ im Zeitraum $t$
$E_{x,d,t}$	Exposure von Altersgruppe $x$ und Geschlecht $d$ im Zeitpunkt $t$
$F(\cdot)$	Verteilungsfunktion des Todeszeitpunktes unter $\mathbb{P}$
$F^{\mathbb{Q}}(\cdot)$	Verteilungsfunktion des Todeszeitpunktes unter $\mathbb{Q}$

$F_{\text{SF}}$	Forward-Preis eines Survivor Forwards
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -Algebra $\mathcal{F}_{T^*}$
$\mathcal{F}_t$	$t$ -Vergangenheit von $Z$
$\mathbb{F}$	Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}$
$G^*(\cdot)$	Ableitung von $g^*$ nach $\theta'$
$\mathcal{G}$	$\sigma$ -Algebra $\mathcal{G}_{T^*}$
$\mathcal{G}_t$	$\sigma$ -Algebra $\bigvee_{i \in I} \mathcal{G}_{i,t}$
$\mathcal{G}_{i,t}$	$t$ -Vergangenheit von $N_i$
$\mathbb{G}$	Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T^*]}$
$\mathcal{H}$	$\sigma$ -Algebra $\mathcal{H}_{T^*}$
$\mathcal{H}_t$	$\sigma$ -Algebra $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$
$\mathbb{H}$	Filtration $(\mathcal{H}_t)_{t \in [0, T^*]}$
$I$	Menge zum Zeitpunkt $t = 0$ lebender Individuen
$\mathbf{I}_n$	$n$ -dimensionale Einheitsmatrix
$J$	Menge von Individuen mit identischer Sterblichkeitsintensität
$K_{\text{SC}}$	Cap Rate eines Survivor Caplets
$L$	Radon-Nikodym-Dichte von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$
$L_{\mathcal{B}}$	Radon-Nikodym-Dichte von $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathbb{P}$
$\tilde{L}$	Likelihood-Funktion für die Anzahl der Todesfälle
$\tilde{L}_{\text{gew}}$	Gewichtete Likelihood-Funktion für die Anzahl der Todesfälle
$\tilde{\tilde{L}}$	Nicht konstanter Teil von $\tilde{L}_{\text{gew}}$
$\tilde{\tilde{L}}^{(\nu)}$	Wert von $\tilde{\tilde{L}}$ in Iterationsschritt $\nu$
$L_{x,t}$	Likelihood-Funktion für $D_{x,t}$ im vollständigen Modell
$\tilde{L}_{x,t}$	Likelihood-Funktion für $D_{x,t}$
$\hat{L}_{x,t}$	Likelihood-Funktion für $D_{x,t}$ im nicht linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$\hat{\hat{L}}_{x,t}$	Likelihood-Funktion für $D_{x,t}$ im linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$M$	Faktor in der asymptotischen Varianz-Kovarianz-Matrix von $\hat{\theta}_T$
$N_i$	Zählprozess mit $N_{i,t} := \mathbf{1}_{\tau_i \leq t}$
$N_{\text{SC}}$	Nennwert eines Survivor Caplets
$N_{\text{SF}}$	Nennwert eines Survivor Forwards
$P(\cdot)$	Preis einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 1
$P(\cdot, \cdot)$	COX ET AL. (1985)-Modellpreis einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 1
$\mathbb{P}$	Reales Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathbb{Q}$	Äquivalentes Martingalmaß mit dem Numéraire $B$
$\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$	Äquivalentes Martingalmaß mit dem Numéraire $\mathcal{B}$
$Q_T(\cdot)$	Funktion der gewichteten Stichprobenmomente $g_T$
$R$	Verhältnis der durchschnittlichen Deviances des linearisierten und des nicht linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modells
$R(\cdot)$	Zinsstrukturrendite bei halbjährlicher Verzinsung
$S$	Wert einer Aktie oder eines Aktienindex
$S^*$	Asymptotische Varianz-Kovarianzmatrix von $\sqrt{T}g_T(\theta^*)$

$\hat{S}_{\text{HAC}}$	Konsistenter Schätzer für $S^*$ bei Heteroskedastizität und Autokorrelation von $f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)$
$\hat{S}_{\text{SU}}$	Konsistenter Schätzer für $S^*$ bei seriell unkorrelierten $f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)$
$\hat{S}_T$	Konsistenter Schätzer für $S^*$
$\hat{S}_T^{(\nu)}$	Schätzwert für $S^*$ in Iterationsschritt $\nu$
$\widehat{\text{SD}}[\cdot]$	Operator der Stichprobenstandardabweichung
$\widehat{\text{SD}}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$	Operator der Stichprobenstandardabweichung unter $\mathbb{Q}$
$T$	Länge einer Zeitreihe oder Fälligkeit eines Instruments
$T_j$	Fälligkeit eines Instruments $j$
$T^*$	Endpunkt des betrachteten Zeithorizonts
$U$	Menge
$V$	Preis einer darstellbaren Eventualforderung oder Wert einer Auszahlung
$\mathbf{V}$	Stichprobenraum von $v_t$
$\text{VAR}[\cdot]$	Varianzoperator
$\text{VAR}_t[\cdot]$	Bedingter Varianzoperator, gegeben Informationen bis zum Zeitpunkt $t$
$\tilde{W}_f$	Brown'sche Bewegung in der Dynamik von $f(\cdot)$ unter $\mathbb{Q}$
$\tilde{W}_r$	Standardisierte Brown'sche Bewegung in der Dynamik von $r$ unter $\mathbb{P}$
$\tilde{W}_r$	Standardisierte Brown'sche Bewegung in der Dynamik von $r$ unter $\mathbb{Q}$
$\tilde{W}_S$	Standardisierte Brown'sche Bewegung in der Dynamik von $S$ unter $\mathbb{P}$
$\tilde{W}_S$	Standardisierte Brown'sche Bewegung in der Dynamik von $S$ unter $\mathbb{Q}$
$W_T$	Gewichtungsmatrix bei der GMM
$W^*$	Gewichtungsmatrix bei der GMM
$W_\kappa$	Standardisierte Brown'sche Bewegung in der Dynamik von $\kappa$ unter $\mathbb{P}$
$\tilde{W}_\kappa$	Standardisierte Brown'sche Bewegung in der Dynamik von $\kappa$ unter $\mathbb{Q}$
$Z$	Standardisierte Brown'sche Bewegung unter $\mathbb{P}$
$\tilde{Z}$	Standardisierte Brown'sche Bewegung unter $\mathbb{Q}$
$Z_j$	Komponente von $Z$
$\tilde{Z}_j$	Komponente von $\tilde{Z}$
$Z_B$	Standardisierte Brown'sche Bewegung unter $\mathbb{Q}_B$

### Griechisches Alphabet

$\alpha(\cdot, \cdot)$	Funktion der ersten Alterskoeffizienten
$\tilde{\alpha}_f(\cdot)$	Drift in der Dynamik von $f(\cdot)$ unter $\mathbb{Q}$
$\alpha_i$	Erster Alterskoeffizient von Individuum $i$
$\alpha_r$	Zinsunabhängiger Teil des Drifts in der Dynamik von $r$ unter $\mathbb{P}$
$\hat{\alpha}_r$	Schätzwert für $\alpha_r$
$\hat{\alpha}_r^{(\nu)}$	Schätzwert für $\alpha_r$ in Iterationsschritt $\nu$
$\alpha_x$	Erster Alterskoeffizient der Altersgruppe $x$ im LEE & CARTER (1992)-Modell
$\hat{\alpha}_x$	Schätzwert für $\alpha_x$
$\hat{\alpha}_x^{(\nu)}$	Schätzwert für $\alpha_x$ in Iterationsschritt $\nu$

$\hat{\alpha}_{x,d}$	Schätzwert für $\alpha_x$ für Geschlecht $d$
$\alpha_S$	Drift in der Dynamik von $\ln S$ unter $\mathbb{P}$
$\tilde{\alpha}_S$	Drift in der Dynamik von $\ln S$ unter $\mathbb{Q}$
$\hat{\alpha}_S$	Schätzwert für $\alpha_S$
$\alpha_\kappa$	Drift in der Dynamik von $\hat{\kappa}$ unter $\mathbb{P}$
$\tilde{\alpha}_\kappa$	Drift in der Dynamik von $\hat{\kappa}$ unter $\mathbb{Q}$
$\hat{\alpha}_\kappa$	Schätzwert für $\alpha_\kappa$
$\beta(\cdot, \cdot)$	Funktion weiterer Alterskoeffizienten
$\beta_i$	Vektor weiterer Alterskoeffizienten von Individuum $i$
$\beta_r$	Sensitivität des Drifts auf das aktuelle Zinsniveau in der Dynamik von $r$ unter $\mathbb{P}$
$\tilde{\beta}_r$	Sensitivität des Drifts auf das aktuelle Zinsniveau in der Dynamik von $r$ unter $\mathbb{Q}$
$\hat{\beta}_r$	Schätzwert für $\beta_r$ oder $\tilde{\beta}_r$
$\hat{\beta}_r^{(\nu)}$	Schätzwert für $\beta_r$ in Iterationsschritt $\nu$
$\beta_x$	Zweiter Alterskoeffizient der Altersgruppe $x$ im LEE & CARTER (1992)-Modell
$\hat{\beta}_x$	Schätzwert für $\beta_x$
$\hat{\beta}_x^{(\nu)}$	Schätzwert für $\beta_x$ in Iterationsschritt $\nu$
$\beta_{x,d}$	Schätzwert für $\beta_x$ für Geschlecht $d$
$\gamma_r$	Bedingte Volatilitätselastizität der Zinsveränderung in der Dynamik von $r$
$\hat{\gamma}_r$	Schätzwert für $\gamma_r$
$\hat{\gamma}_r^{(\nu)}$	Schätzwert für $\gamma_r$ in Iterationsschritt $\nu$
$\delta_t$	Dummy-Variable im Modellrahmen von CHAN ET AL. (1992) mit Strukturbruch
$\delta_\alpha$	Verschiebungsparameter für $\alpha_r$
$\delta_\beta$	Verschiebungsparameter für $\beta_r$
$\delta_\gamma$	Verschiebungsparameter für $\gamma_r$
$\delta_\sigma$	Verschiebungsparameter für $\sigma_r$
$\epsilon_r$	Störgröße im diskretisierten Modell von $r$
$\epsilon_r^{\text{adj}}$	Adjustierte Störgröße im diskretisierten Modell von $r$
$\epsilon_x$	Störgröße für $\ln m_x$ im LEE & CARTER (1992)-Modell
$\epsilon_S$	Störgröße im ARIMA-Modell von $\ln S$
$\hat{\epsilon}_{S,t}$	Schätzwert für $\epsilon_{S,t}$
$\epsilon_\kappa$	Störgröße im ARIMA-Modell von $\hat{\kappa}$
$\hat{\epsilon}_{\kappa,t}$	Schätzwert für $\epsilon_{\kappa,t}$
$\eta_r$	Konstante in $\lambda_r$
$\eta_\kappa$	Konstante in $\lambda_\kappa$
$\theta$	Parametervektor bei der GMM
$\theta_r$	Parametervektor $(\alpha_r, \tilde{\beta}_r, \sigma_r, r_{t_0})'$
$\theta^*$	Wahrer Parametervektor bei der GMM
$\hat{\theta}_r$	Schätzwert für $\theta_r$
$\hat{\theta}_T$	Schätzwert für $\theta^*$

$\hat{\theta}_T^{(\nu)}$	Schätzwert für $\theta^*$ in Schritt $\nu$
$\kappa$	Zeitindex im LEE & CARTER (1992)-Modell
$\hat{\kappa}$	Vektor der $\hat{\kappa}_t$ aller Zeiträume $t$
$\hat{\kappa}_t$	Schätzwert für $\kappa_t$
$\hat{\kappa}_t^{(\nu)}$	Schätzwert für $\kappa_t$ in Iterationsschritt $\nu$
$\hat{\tilde{\kappa}}_t$	Schätzwert für $\kappa_t$ im linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$\lambda$	Marktpreis des Risikos für $Z$ beim Maßwechsel von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{Q}$
$\lambda_r$	Marktpreis des Risikos für $W_r$ beim Maßwechsel von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{Q}$
$\lambda_\kappa$	Marktpreis des Risikos für $W_\kappa$ beim Maßwechsel von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{Q}$
$\lambda_{\mathcal{B}}$	Marktpreis des Risikos für $Z$ beim Maßwechsel von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$
$\lambda_{\text{Wang}}$	Parameter der Wang-Transformation
$\mu_i$	Sterblichkeitsintensität von Individuum $i$
$\mu_x$	Sterblichkeitsintensität von Altersgruppe $x$
$\mu_{x,d}$	Sterblichkeitsintensität von Altersgruppe $x$ und Geschlecht $d$
$\hat{\mu}_{x,t}$	Schätzwert für $\mu_{x,t}$ bzw. $m_{x,t}$
$\hat{\mu}_{x,t}^{(\nu)}$	Schätzwert für $\mu_{x,t}$ bzw. $m_{x,t}$ in Iterationsschritt $\nu$
$\hat{\tilde{\mu}}_{x,t}$	Schätzwert für $\mu_{x,t}$ bzw. $m_{x,t}$ im linearisierten LEE & CARTER (1992)-Modell
$\hat{\mu}_{x,d,t}$	Schätzwert für $\mu_{x,t}$ für Geschlecht $d$
$\nu$	Iterationsschritt
$\rho_r$	Vektor von Konstanten
$\rho_\kappa$	Matrix von Konstanten
$\varrho_r$	Konstante
$\varrho_\kappa$	Konstante
$\sigma_f(\cdot)$	Volatilität in der Dynamik von $f(\cdot)$
$\sigma_r$	Zinsunabhängiger Faktor der bedingten Volatilität der Zinsveränderung in der Dynamik von $r$
$\hat{\sigma}_r$	Schätzwert für $\sigma_r$
$\hat{\sigma}_r^{(\nu)}$	Schätzwert für $\sigma_r$ in Iterationsschritt $\nu$
$\sigma_S$	Volatilität in der Dynamik von $\ln S$ oder Standardabweichung der $\epsilon_{S,t}$
$\hat{\sigma}_S$	Schätzwert für $\sigma_S$
$\sigma_\epsilon$	Standardabweichung der $\epsilon_{x,t}$
$\sigma_\kappa$	Volatilität in der Dynamik von $\kappa$ oder Standardabweichung der $\epsilon_{\kappa,t}$
$\hat{\sigma}_\kappa$	Schätzwert für $\sigma_\kappa$
$\tau$	Todeszeitpunkt
$\tau_i$	Todeszeitpunkt von Individuum $i$
$\tau_1$	Testgröße des erweiterten Dickey-Fuller-t-Tests ohne Trend und ohne Drift
$\tau_2$	Testgröße des erweiterten Dickey-Fuller-t-Tests mit Drift, ohne Trend
$\tau_3$	Testgröße des erweiterten Dickey-Fuller-t-Tests mit Drift und Trend
$\psi_{\kappa,1}$	Erstes MA-Element im ARIMA-Modell von $\hat{\kappa}$
$\hat{\psi}_{\kappa,1}$	Schätzwert für $\psi_{\kappa,1}$
$\Theta$	Parameterraum von $\theta$
$\Pi$	Wert eines Derivats

---

$\Pi_{SC}$	Wert eines Survivor Caplets
$\Pi_{SF}$	Wert eines Survivor Forwards
$\Phi$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung
$\Phi_1$	Testgröße des erweiterten Dickey-Fuller-F-Tests mit Drift, ohne Trend
$\Phi_2$	Testgröße des erweiterten Dickey-Fuller-F-Tests mit Drift und Trend
$\Phi_3$	Testgröße des erweiterten Dickey-Fuller-F-Tests mit Drift und Trend
$\Psi$	Verteilungsfunktion der Student-t-Verteilung
$\Omega$	Stichprobenraum



# Kapitel 1

## Einleitung

Seit den 1990er Jahren gewinnen Versicherungsderivate, sogenannte Insurance-linked Securities, immer mehr an Bedeutung. Allein der Markt für entsprechende Anleihen wuchs zwischen 1998 und 2007 um ca. 40% p. a. auf ein ausstehendes Volumen von 32 Mrd. USD (EUROMONEY, 2008; HELFENSTEIN & HOLZHEU, 2006, S. 24 ff.).

Dieses starke Wachstum lässt sich leicht erklären: Erstens erlaubt der Transfer von Versicherungsrisiken an den Kapitalmarkt dem abtretenden Unternehmen, zusätzliches Kapital aufzunehmen und seine Risikokapazität zu ggf. günstigeren und stabileren Konditionen als durch traditionelle (Rück-)Versicherung zu erhöhen. Zweitens bieten Versicherungsderivate Investoren aufgrund der aktuellen Unvollständigkeit des Markts Zugang zu weiteren Risikofaktoren und die Möglichkeit, zusätzliche Risikoprämien zu verdienen.<sup>1</sup>

Trotz dieser Vorteile scheint insbesondere der Markt für Sterblichkeitsderivate nur wenig entwickelt.<sup>2</sup> So wurden bisher weniger als ein Dutzend Katastrophenanleihen für kurzfristige Sterblichkeit und nicht eine einzige Langlebigkeitsanleihe erfolgreich begeben.<sup>3</sup> Dabei ist gerade für Sterblichkeitsrisiken die Möglichkeit, Risiken über den Kapitalmarkt abzuschern und so zusätzliche Risikokapazität zu schaffen, angesichts des vor allem für Langlebigkeitsrisiken begrenzten Rückversicherungsmarkts (SCOTTI & EFFENBERGER, 2007, S. 46)

---

<sup>1</sup>Ausgehend von unvollständigen Märkten, untersuchen z. B. LIU & PAN (2003) und MUCK (2010) die Auswirkung neuer Derivate auf die Portfolioallokation und den Investorennutzen.

<sup>2</sup>Mit dem Begriff Sterblichkeitsderivate sind hier lediglich solche Finanzprodukte gemeint, die primär auf die Übertragung und Absicherung von Sterblichkeitsrisiken abzielen. Insbesondere die hauptsächlich der Kapitalaufnahme bzw. regulatorischen Arbitrage dienenden Embedded-Value- und XXX-/A-XXX-Verbriefungen (für Erläuterungen vgl. HELFENSTEIN & HOLZHEU, 2006) werden nicht betrachtet.

<sup>3</sup>Andere Sterblichkeitsderivate wie Swaps und Optionen existieren und werden beispielsweise von Goldman Sachs und JP Morgan außerbörslich gehandelt; allerdings sind dazu nur wenig Informationen öffentlich zugänglich.



besonders wichtig.

Nicht nur Solvency II hat diesen Absicherungsbedarf in den vergangenen Jahren weiter verstärkt: Für kurzfristige Sterblichkeitsrisiken spielen vor allem die angesichts von z. B. SARS und AIDS gestiegene Angst vor Pandemien und die wachsende Zahl von Natur- oder anderen Katastrophen eine Rolle.<sup>4</sup> Bei Langlebighkeitsrisiken besteht die Problematik hauptsächlich darin, dass der Anstieg in der Lebenserwartung in der Vergangenheit regelmäßig unterschätzt wurde (DOWD ET AL., 2008). Dies kann insbesondere bei niedrigen Zinsen und Policen mit Optionen zu schweren Verlusten für Rentenversicherer und Pensionsfonds führen.

Darüber hinaus sollten die steigende Lebenserwartung und die Reformen der gesetzlichen Rentensysteme die Nachfrage nach privaten Leibrenten und damit auch das Langlebighkeitsrisiko von privaten Rentenversicherern weiter steigern. Die Möglichkeit der Rückversicherung wird dabei durch die Langfristigkeit des Risikos, seine schwere Abschätzbarkeit und die im Vergleich zu kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken begrenztere regionale Diversifikation zusätzlich eingeschränkt.

Sowohl kurzfristige Sterblichkeits- als auch Langlebighkeitsrisiken könnten mit Hilfe von Sterblichkeitsderivaten über den Kapitalmarkt abgesichert werden. Die Entwicklung des Markts erfordert jedoch neben passenden Derivatstrukturen vor allem adäquate Bewertungsmodelle. Eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle wurde zu diesem Zweck vorgeschlagen. Bei den meisten handelt es sich um Arbitragemodelle, bei welchen die Bewertung bekanntermaßen durch Summieren der Erwartungswerte der diskontierten Zahlungsströme unter dem äquivalenten Martingalmaß erfolgt. Da in den Erwartungswert neben der Dynamik der relevanten biometrischen und finanzmarktbezogenen Größen auch ihre Abhängigkeit einfließt, ist eine Annahme zur Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt, insbesondere zwischen Sterblichkeit und dem risikolosen Zins, erforderlich. Bei den meisten Autoren lautet sie: Unabhängigkeit.

Während diese Annahme in der traditionellen Lebensversicherungsmathematik mit ihren deterministischen Sterblichkeiten einleuchten mag, kann sie bei stochastischer Sterblichkeit nicht unbedingt beibehalten werden. Zum einen sind Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt grundsätzlich vorstellbar und durch verschiedene direkte und indirekte Effekte theoretisch erklärbar.<sup>5</sup> Zum anderen gibt es erste empirische Anhaltspunkte für sie: So wurden u.a. Zusammenhänge zwischen Sterblichkeit und der allgemeinen Wirtschaftslage nachgewiesen (vgl. NEUMAYER, 2004). Auch lassen hohe Zinsspannen von Sterblichkeitsan-

<sup>4</sup>Für die Entwicklung der Anzahl von Katastrophen und ihrer Opfer vgl. ZANETTI ET AL. (2007, S. 4 ff.)

<sup>5</sup>Die Sterblichkeit könnte den Finanzmarkt z.B. über das Investitionsverhalten, der Finanzmarkt die Sterblichkeit über das Konsumverhalten beeinflussen. Beide könnten außerdem durch dritte Größen wie die Wirtschaftslage beeinflusst werden.

leihen eine Abhängigkeit vermuten.<sup>6</sup>

Zugegebenermaßen ist eine Berücksichtigung von Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt in Bewertungsmodellen auf Basis existierender epidemiologischer oder demographischer Untersuchungen nicht ohne Weiteres möglich. So verfolgen bestehende Untersuchungen aus der epidemiologischen Forschung ein anderes Ziel: die Bestimmung und Messung der Einflussfaktoren menschlicher Sterblichkeit und Gesundheit. Als zu erklärende Variable wählen sie dabei teilweise todesartsspezifische Sterblichkeiten oder die Lebensdauer, als Erklärungsvariablen meist keine Finanzmarkt-, sondern allenfalls verwandte Größen wie das Bruttoinlandsprodukt oder Arbeitslosigkeit.

Beiträge aus der demographischen Forschung untersuchen zwar zum Teil tatsächlich den Zusammenhang zu Finanzmarktgrößen wie Renditen oder Prämien. Als demographische Größe wählen sie dann jedoch häufig Größen, die die Altersstruktur einer Bevölkerung anstatt ihrer Sterblichkeit beschreiben. Außerdem liegt der Schwerpunkt oft auf Aktien statt auf den für die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten besonders relevanten Zinsen. Darüber hinaus fokussieren sich sowohl epidemiologische als auch demographische Forschungsbeiträge i. d. R. auf den Nachweis einzelner Aspekte des Wirkungszusammenhangs. Sie verwenden dazu vielfältige, zusätzliche Erklärungsvariablen.

Für die Berücksichtigung einer eventuellen Abhängigkeit bei der praktischen Bewertung von Sterblichkeitsderivaten sind die Ergebnisse existierender Untersuchungen deshalb nur bedingt hilfreich: Erstens ist für die Bewertung der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und bestimmten Finanzmarktgrößen relevant und nicht derjenige zwischen beispielsweise Sterblichkeit und Arbeitslosigkeit oder der Altersstruktur und Risikoprämien am Kapitalmarkt. Zweitens spielen – sofern der Zusammenhang als beständig angesehen werden kann – der kausale Zusammenhang und Mechanismus nur eine untergeordnete Rolle.

Drittens müssten bei Anwendung des bei der Empirie verwendeten Modells zur Bewertung auch die weiteren Erklärungsvariablen modelliert werden, d. h. insbesondere ein Modell für ihre Entwicklung spezifiziert und die Abhängigkeitsstruktur festgelegt werden. Dies würde nicht nur zu einem komplexeren Bewertungsmodell führen, für das eine komplizierte Abhängigkeitsstruktur zu kalibrieren und das aufwändiger zu simulieren ist, sondern würde besonders problematisch, wenn keine einfachen und gleichzeitig zuverlässigen Modelle für die zusätzlichen Erklärungsvariablen existieren.

Dementsprechend beschränken sich die wenigen Autoren (z. B. BARBARIN, 2008; BAUER, 2006, 2008; MILTERSEN & PERSSON, 2006), die bei der Bewertung von Sterblichkeitsde-

---

<sup>6</sup>Im Fall einer Unabhängigkeit zwischen biometrischen und Finanzmarktrisiken müssten diese allein durch Neuheits- und Liquiditätsprämien oder durch vom Bewertungsmodell abweichende Markterwartungen erklärt werden.

rivaten in ihren Modellen grundsätzlich eine Abhängigkeit erlauben, auf eine allgemeine modelltheoretische Formulierung. Sie spezifizieren die Art und den Grad der Abhängigkeit nicht weiter und geben noch nicht einmal an, ob Sterblichkeit und Zinsen positiv oder negativ korreliert sein sollen. Auch vernachlässigen sie sie bei eventuellen Modellimplementierungen. Um Bewertungsmodelle für Sterblichkeitsderivate auch bei ihrer Anwendung um eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt zu erweitern oder sie auf Basis empirischer Untersuchungen in dieser Hinsicht vereinfachen zu können, soll im vorliegenden Forschungsvorhaben der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt empirisch bestimmt und sein Einfluss auf die Preise von Sterblichkeitsderivaten untersucht werden. Die Arbeit soll so einen Beitrag zur Entwicklung adäquater Bewertungsmodelle und zur weiteren Entwicklung des Markts für Sterblichkeitsderivate leisten. Der Fokus liegt dabei auf Langleblichkeitsrisiken. Die Analyse beschränkt sich auf die Existenz, die Richtung und den Grad einer eventuellen Abhängigkeit sowie deren Auswirkung auf die Bewertung; die Kausalität und Wirkungsweise des Zusammenhangs werden nicht untersucht. Besondere Beachtung wird der leichten Anwendbarkeit der empirischen Ergebnisse auf die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten geschenkt.

Das Vorgehen erfolgt in zwei Schritten: Zunächst wird der historische Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt für Deutschland und die USA analysiert. Dazu werden Modelle für die Sterblichkeit sowie – stellvertretend für den Finanzmarkt – für breite Aktienindizes und möglichst risikolose Kassazinsen geschätzt und die Residuen dieser Modelle auf eine Abhängigkeit untersucht. Dann werden gefundene Abhängigkeiten in einem Arbitragemodell berücksichtigt, ihre Auswirkung auf die Preise verschiedener Sterblichkeitsderivate bestimmt und eventuelle Implikationen für Derivatstrukturen und die Entwicklung des Sterblichkeitsderivatemarkts abgeleitet. Die Angemessenheit von Arbitragemodellen angesichts des zurzeit noch sehr unvollständigen Markts für Sterblichkeitsderivate ebenso wie ein Vergleich zu alternativen Modellansätzen sind nicht Teil des Forschungsvorhabens. Auch die Frage, wie das Martingalmaß auszuwählen ist und welche Preisspannen mit Arbitragefreiheit vereinbar sind, soll nicht untersucht werden.

Die Arbeit gliedert sich in sieben Kapitel. Kapitel 1, die Einleitung, beschreibt Motivation, Zielsetzung und Gliederung der Arbeit. Kapitel 2 stellt die grundlegenden Eigenschaften menschlicher Sterblichkeit vor, klassifiziert existierende Modelle zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten und diskutiert das Modell von LEE & CARTER (1992) als bekanntesten Vertreter des Short-Rate-Ansatzes. Kapitel 3 gibt einen knappen Überblick über die wesentlichen Aktien- und Zinsstrukturmodelle und stellt die wichtigsten Short-Rate-Modelle sowie den Ansatz von CHAN ET AL. (1992) im Detail vor.

Kapitel 4 schafft den theoretischen Rahmen für die in Kapitel 5 und 6 folgenden empirischen Analysen und Modellanwendungen. Es leitet Hypothesen zum Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt ab, strukturiert sie und stellt erste empirische Anhaltspunkte aus der epidemiologischen und demographischen Forschung vor. Darüber hinaus wird die Relevanz einer Abhängigkeit für die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten begründet. Kapitel 5 detailliert den Gegenstand und das Vorgehen der folgenden empirischen Untersuchungen und fasst ihre Ergebnisse zusammen. Dies beinhaltet sowohl die Ergebnisse der einzelnen Modellschätzungen als auch die Ergebnisse der Abhängigkeitsanalysen ihrer Residuen. Hier zeigt sich deutlich, dass Sterblichkeit und der Finanzmarkt nicht unabhängig sind.

Kapitel 6 schlägt deshalb ein Short-Rate-Modell zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten vor, das eine Abhängigkeit zwischen der Sterblichkeit und dem Momentanzins erlaubt. Mit einem an historischen Sterblichkeitsdaten und der Zinsstrukturkurve kalibrierten Spezialfall dieses Modells werden die Preise eines Survivor Forwards und eines Survivor Caplets bestimmt und ihre Abhängigkeit von der Laufzeit, dem Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos und der Korrelation untersucht. Kapitel 7 fasst die Arbeit zusammen und zeigt Raum für weitere Forschung auf.



## Kapitel 2

# Sterblichkeitsmodellierung

Trotz des noch sehr jungen und kleinen Markts für Sterblichkeitsderivate hat sich in den vergangenen Jahren eine Vielzahl von Arbeiten mit der Modellierung von Sterblichkeitsrisiken und der Bewertung entsprechender Derivate befasst. Zu ihrer Beurteilung ist ein grundlegendes Verständnis der statistischen Eigenschaften menschlicher Sterblichkeit notwendig. Die wichtigsten Eigenschaften werden daher im Folgenden diskutiert. Im Anschluss werden die wichtigsten Sterblichkeitsmodelle klassifiziert und das Modell von LEE & CARTER (1992) als eines der bekanntesten im Detail vorgestellt.

### 2.1 Eigenschaften menschlicher Sterblichkeit

Für die Modellierung von Sterblichkeitsrisiken und die Beurteilung entsprechender Modelle sind neben der offensichtlichen Nichtnegativität und Stochastizität der Sterblichkeitsintensität vor allem die Kenntnis von Faktoren, mit denen Sterblichkeit zusammenhängt, und eine Einschätzung möglicher zukünftiger Entwicklungen von Bedeutung.

#### 2.1.1 Bestimmungsfaktoren menschlicher Sterblichkeit

Verschiedene Faktoren hängen mit der Sterblichkeit eines Individuums zusammen. Sie lassen sich grob in demographische und nicht demographische Faktoren unterscheiden. Darüber hinaus scheinen zwischen bestimmten Individuen Abhängigkeiten zu bestehen. Die zugrunde liegenden Mechanismen und die Kausalität des Zusammenhangs sind aufgrund seiner Komplexität, aufgrund von Korrelationen zwischen verschiedenen Faktoren und aufgrund

von Zeitverzögerungen dabei i. d. R. nicht vollständig geklärt.

### 2.1.1.1 Demographische Faktoren

Zu den wichtigsten demographischen Faktoren gehören Alter, Geschlecht und Hautfarbe bzw. ethnische Herkunft. Sie werden im Folgenden am Beispiel der USA und auf Basis von Daten von ARIAS (2010) diskutiert.

#### Alter

Der Graph der altersspezifischen Sterberaten wird meist als eine Art „J“ beschrieben: Im Säuglingsalter sind die Sterberaten relativ hoch, sie fallen während der Kindheit und nehmen ab einem Alter von ungefähr zehn Jahren wieder zu (vgl. Abbildung 2.1). In Bezug auf das Alter gelten Sterblichkeitsintensitäten daher im Allgemeinen als streng monoton steigend. Die beiden Ausnahmen sind die frühe Kindheit und der vor allem bei Männern starke, unfallbedingte Anstieg der Sterblichkeit bei einem Alter von ca. 20 Jahren (HARTMANN, 1987; HELIGMAN & POLLARD, 1980).

Interessanterweise verläuft der Anstieg der logarithmierten Sterberaten ab einem Alter von 30 Jahren annähernd linear. Diese Eigenschaft der Sterblichkeitsintensität wurde bereits im 19. Jahrhundert von GOMPERTZ (1825) erkannt und beschrieben. In hohem Alter neigt das GOMPERTZ (1825)-Gesetz jedoch dazu, die Sterberaten zu überschätzen. Obwohl sie noch bis mindestens zu einem Alter von 100 Jahren weiter ansteigen, nimmt die Stärke des Anstiegs ab einem Alter von 80 Jahren ab (VAUPEL, 1997).

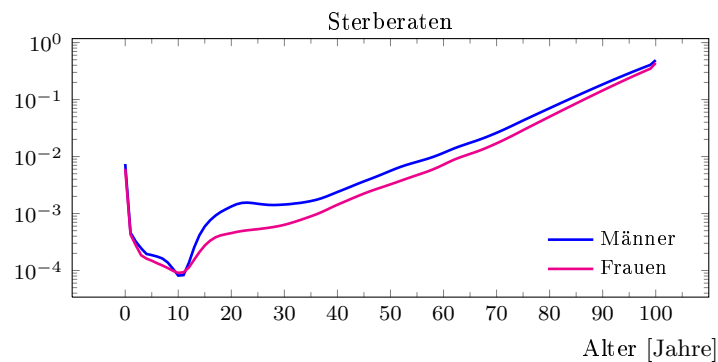


Abbildung 2.1: Sterberaten in den USA, 2006

Quelle: ARIAS (2010)

### **Geschlecht**

Dass Frauen in Industrieländern eine höhere Lebenserwartung als Männer haben, ist weit bekannt (vgl. z. B. Daten der HUMAN MORTALITY DATABASE, 2010). Der Unterschied in der periodenbasierten Lebenserwartung betrug 2006 in den USA bei Geburt 5,1 Jahre und im Alter von 65 Jahren immerhin noch 2,7 Jahre (ARIAS, 2010). Dies resultiert aus der Tatsache, dass Männer in fast jedem Alter eine höhere Sterblichkeitsintensität haben als Frauen (vgl. Abbildung 2.1). Der relative Unterschied in den Sterberaten hängt allerdings vom Alter ab.

### **Hautfarbe und ethnische Herkunft**

Auch mit Hautfarbe bzw. ethnischer Herkunft hängen Sterblichkeitsintensitäten zusammen. In den USA sind die altersspezifischen Sterberaten für Schwarze im Allgemeinen deutlich höher und für Menschen aller anderen Hautfarben oder ethnischer Gruppen deutlich niedriger als für Weiße (WILLIAMS & COLLINS, 1995). Ähnlich wie die relativen Unterschiede zwischen Männern und Frauen hängen die relativen Unterschieden in den Sterberaten jedoch vom Alter ab.

Eine wesentliche Ursache für die beobachteten Unterschiede in der Sterblichkeit von Menschen verschiedener Hautfarben und ethnischer Gruppen sind laut WILLIAMS & COLLINS (1995) Unterschiede im sozioökonomischen Status. Bei Berücksichtigung des sozioökonomischen Status verringern sich die Unterschiede in der Sterblichkeit und im Gesundheitszustand deutlich (COOPER, 1993; KRIEGER & FEE, 1994; OTTEN ET AL., 1990), in manchen Studien sogar vollständig (BAQUET ET AL., 1991; ROGERS, 1992). Auch PRESTON & TAUBMAN (1994) kommen zu dem Schluss, dass der größte Teil des Unterschieds in der Sterblichkeit zwischen Schwarzen und Weißen durch Unterschiede in sozioökonomischen Größen wie Einkommen und Bildung erklärt werden kann.

#### **2.1.1.2 Nicht demographische Faktoren**

Sterblichkeit hängt auch mit einer Reihe von nicht demographischen Faktoren zusammen. Dazu zählen sozioökonomische, genetische, verhaltensbedingte und andere Faktoren.

#### **Sozioökonomische Faktoren**

Sozioökonomischer Status ist im Allgemeinen deutlich negativ mit Sterblichkeit korreliert. Der Zusammenhang wird normalerweise mit einer Reihe von sozioökonomischen Indikatoren wie Einkommen, Bildungsstand, Beruf, Familienstand und Haushaltsgröße gemessen. SORLIE ET AL. (1995) weisen für die USA anhand dieser Größen höhere alters- und ge-



schlechtsspezifische Sterblichkeit für Menschen ohne Arbeit, mit geringerem Einkommen, geringerer Bildung und für Alleinstehende nach.

Als Ursachen für diesen Zusammenhang nennen WILLIAMS & COLLINS (1995) u. a. den schlechteren Zugang zu und die unzureichende Nutzung von medizinischer Versorgung, ein schlechteres Gesundheitsverhalten, schlechtere Arbeitsbedingungen sowie höhere Umweltrisiken der sozioökonomisch benachteiligten Bevölkerungsgruppen. Obwohl der Kausalzusammenhang – führt geringerer sozioökonomischer Status zu höherem Sterblichkeitsrisiko oder andersherum? – nicht ganz geklärt ist, legen viele Studien nur einen geringen Einfluss der Gesundheit auf den sozioökonomischen Status nahe (vgl. WILLIAMS & COLLINS, 1995).

### **Genetische Faktoren**

Selbstverständlich spielen auch genetische Faktoren eine wichtige Rolle für das Sterblichkeitsrisiko eines Individuums. Wissenschaftler vermuten aufgrund von Zwillings- und Verwandtschaftsstudien, dass genetische Faktoren ca. 25% der Unterschiede in der Lebensdauer erklären können (HERSKIND ET AL., 1996; IACHINE ET AL., 1998; MCGUE ET AL., 1993).

### **Verhaltensbedingte Faktoren**

Dass verhaltensbedingte Faktoren die Sterblichkeit eines Individuums beeinflussen, ist angesichts der vielseitigen Gesundheitsempfehlungen keine Überraschung. Laut MCGINNIS & FOEGE (1993) zählen der Konsum von Tabak, Alkohol und Drogen, ungesundes Ernährungs-, Sport- und Sexualverhalten, Schusswaffen und Autounfälle neben Keimen und Giftstoffen zu den wichtigsten Risikofaktoren für Sterblichkeit. 1990 konnten über 40% aller Todesfälle in den USA diesen Faktoren zugerechnet werden (MCGINNIS & FOEGE, 1993).

Den Einfluss von Rauchen auf die Sterblichkeit verdeutlicht auch WILLETS (2004). Er zeigt, dass der sogenannte „UK cohort effect“ – die Tatsache, dass in Großbritannien die Sterblichkeit der Geburtsjahrgänge von 1925 bis 1945 deutlich stärker zurückgegangen ist als die der vorhergegangenen und nachfolgenden Geburtsjahrgänge – u. a. durch das Rauchverhalten dieser Jahrgänge zu erklären ist.

### **Andere Faktoren**

Es gibt eine Vielzahl weiterer Faktoren, mit denen die Sterblichkeit zusammenhängt. Dazu gehören etwa der Zugang zu und die Qualität medizinischer Behandlung (CUTLER ET AL., 2006). Oft bestehen dabei ein Zusammenhang zu anderen Faktoren oder Selektionseffekte.

Ein wichtiges Beispiel für letztere sind die Sterblichkeitsunterschiede zwischen der Allgemeinbevölkerung und Versicherungsnehmern bzw. zwischen Versicherungsnehmern mit un-

terschiedlichen Vertragsausgestaltungen. So haben Rentenversicherungsnehmer i. d. R. ein geringeres Sterblichkeitsrisiko als die Allgemeinbevölkerung (vgl. für die USA z. B. BROWN ET AL., 2000, Abbildung 1). Auch weisen Rentenversicherungsnehmer mit bestimmten Verträgen – z. B. mit solchen, bei denen ein relativ großer Teil des Barwertes durch späte Zahlungen erzielt wird oder die keine bzw. nur kurze Garantiezeiten haben – eine geringere Sterblichkeit auf als Versicherungsnehmer ohne diese Vertragscharakteristika (FINKELSTEIN & POTERBA, 2004). FINKELSTEIN & POTERBA (2004) führen dies auf Selektionseffekte aufgrund von Informationsasymmetrien zurück.

### 2.1.1.3 Abhängigkeiten zwischen Individuen

Obwohl Todeszeitpunkte verschiedener Individuen in der klassischen Lebensversicherungsmathematik normalerweise als von einander unabhängige Zufallsvariablen modelliert werden, gibt es Hinweise auf Abhängigkeiten zwischen Individuen.

So weisen z. B. PARKES ET AL. (1969) nach, dass die Sterbewahrscheinlichkeit für Witwer innerhalb der ersten sechs Monate nach dem Tod ihrer Frau um 40% höher ist als die für verheiratete Männer gleichen Alters erwartete Sterbewahrscheinlichkeit. Interessanterweise war der relativ größte Unterschied dabei bei der durch Herzprobleme bedingten Sterblichkeit zu beobachten – ein weiterer Grund, warum diese Abhängigkeit auch Broken-Heart-Phänomen genannt wird.

### 2.1.1.4 Zeitliche Wirkung der Einflussfaktoren

Nach dem Zeitpunkt des Einflusses auf die Sterblichkeit können die Einflussfaktoren der Sterblichkeit auch in Perioden- und Kohorteffekte unterschieden werden.

*Periodeneffekte* sind sozioökonomische, verhaltensbedingte oder sonstige Effekte mit zeitnahe Einfluss auf die Sterblichkeit eines Individuums (LINDSTRÖM & DAVEY SMITH, 2007).<sup>7</sup> Sie umfassen z. B. das Ausbrechen von Infektionen (ibd.), den medizinischen Fortschritt (DOBLHAMMER, 2007) und das Rauch-, Ess- und Sportverhalten (ibd.), sofern diese Faktoren einen direkten Einfluss auf die Sterblichkeit haben.

*Kohorteffekte* oder Geburtsjahreffekte hingegen bezeichnen langfristige Effekte auf die Sterblichkeit, d. h. den Einfluss vergangener sozioökonomischer, verhaltensbedingter oder sonstiger Faktoren auf das aktuelle und zukünftige Sterblichkeitsrisiko eines Geburtsjahrgangs

<sup>7</sup>LINDSTRÖM & DAVEY SMITH (2007, S. 10) beschreiben Periodeneffekte als „effects on health and survival caused by health determinants ... with a short time period between exposure and health/disease outcome“.

(LINDSTRÖM & DAVEY SMITH, 2007).<sup>8</sup> Zu ihnen gehören z. B. die Risikofaktoren für nicht ansteckende Krankheiten wie Krebs (WILLETS, 2004).

Aufgrund der linearen Abhängigkeit zwischen Geburtsjahr, Alter und Kalenderjahr sind Kohorteffekte nicht leicht abzuschätzen. Dass die Art und Stärke der Effekte per Definition geburtsjahrabhängig sind und außerdem altersabhängig zu sein scheinen (CAIRNS ET AL., 2009), erschwert ihre Modellierung weiter. Im Allgemeinen wird durch Berücksichtigung von Kohorteffekten die Übereinstimmung von Sterblichkeitsmodellen mit historischen Daten aber erhöht (ebd.; CAIRNS ET AL., 2008b).

### 2.1.2 Entwicklung der Sterblichkeit

Die menschliche Sterblichkeit ist in den vergangenen Jahrhunderten extrem zurückgegangen. Die periodenbasierte Lebenserwartung bei Geburt wird z. B. für das Mittelalter auf ca. 20 Jahre geschätzt (WILMOTH, 2000) und hat sich seitdem in vielen entwickelten Ländern ungefähr vervierfacht (vgl. Tabelle 2.1).

Dieser Anstieg in der Lebenserwartung ist das Ergebnis eines Rückgangs in der Sterblichkeitsintensität aller Altersklassen (vgl. Daten der HUMAN MORTALITY DATABASE, 2010). Eine genauere Analyse der historischen Sterblichkeitsentwicklung zeigt, dass der Grad des Sterblichkeitsrückgangs im Zeitablauf stark schwankt und – ähnlich wie Sterblichkeitsunterschiede zwischen Individuen – mit einer Reihe von Faktoren zusammenhängt (ebd.). Für die Sterblichkeitsmodellierung und die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten stellt sich die Frage, ob auch in Zukunft mit einem Rückgang in der Sterblichkeit zu rechnen ist und wie stark dieser ausfallen wird. BLAKE ET AL. (2008) unterscheiden drei verschiedene Auffassungen dazu: die der Pessimisten, die der Optimisten und die der anderen Forscher.

*Pessimisten* wie OLSHANSKY ET AL. (1990, 2001, 2005), CARNES & OLSHANSKY (2007), MIZUNO ET AL. (2004) und LOLADZE (2002) meinen, dass die Lebenserwartung aufgrund von verhaltens- oder umweltbedingten Faktoren wie Übergewicht bzw. dem Anstieg an CO<sub>2</sub> irgendwann nicht weiter steigen oder sogar sinken wird. In engem Zusammenhang zu dieser Theorie steht der Glaube an eine natürliche Begrenzung der Lebensdauer bzw. Lebenserwartung. Dazu gibt es laut WILMOTH (1997, 2000) zwei Hypothesen: die Limited-Lifespan-Hypothese und die Limit-Distribution-Hypothese.

Die Limited-Lifespan-Hypothese besagt, dass es eine maximale individuelle Lebensdauer

---

<sup>8</sup>Der Begriff Kohorteffekt stammt daher, dass verschiedene Geburtsjahrgänge (englisch: „birth cohorts“) während ihres Lebens unterschiedlichen Risiko- und Schutzfaktoren ausgesetzt sind (LINDSTRÖM & DAVEY SMITH, 2007). Wenn die Faktoren alle Jahrgänge in einer ähnlichen Weise betreffen, könnten sie auch als verzögerte Periodeneffekte modelliert werden (HOBSCRAFT ET AL., 1982).

Land	Lebenserwartung [Jahre]		
	Männer	Frauen	Gesamt
Deutschland	77,2	82,3	80,0
Frankreich	77,4	84,4	81,1
Großbritannien	77,2	81,5	79,5
Niederlande	77,6	81,9	80,0
Norwegen	78,1	82,7	80,6
Schweden	78,7	82,9	81,0
USA	75,5	80,7	78,2
Japan	79,0	85,8	82,7

Tabelle 2.1: Periodenbasierte Lebenserwartung in ausgewählten Industrieländern, 2006  
Quelle: HUMAN MORTALITY DATABASE (2010)

gibt, d. h. ein Alter, über das hinaus kein Individuum überleben kann. Da aber in der Vergangenheit das beobachtete, maximale Alter gestiegen ist und Sterberaten im hohen Alter zudem immer langsamer steigen, scheint diese These laut WILMOTH (1997, 2000) zu diesem Zeitpunkt widerlegt. Im Gegensatz dazu besagt die Limit-Distribution-Hypothese, dass es eine Grenzfunktion für die Dichtefunktion, Überlebensfunktion und Sterblichkeitsintensität gibt, der diese sich jeweils asymptotisch annähern (ebd.). Sofern die Sterblichkeitsintensitäten für fast alle Lebensalter größer Null sind, impliziert dies eine maximale durchschnittliche Lebensdauer, also eine maximale Lebenserwartung.

Die Interpretation dieser Hypothese ist nicht ganz einfach: Die Grenzfunktion könnte aufgrund bestimmter fundamentaler biologischer oder umweltbedingter Faktoren gegeben sein (WILMOTH, 1997). Diese Interpretation ist jedoch schwierig, wenn die Grenzfunktion abhängig von der jeweiligen Referenzbevölkerung ist oder sich aufgrund genetischer oder umweltbedingter Faktoren verändert (ebd.). Außerdem lässt sich diese Limit-Distribution-Hypothese nur schwer nachweisen, da sich weder eine Verlangsamung des Rückgangs in den Sterblichkeitsraten noch eine signifikante, negative Korrelation zwischen der absoluten Höhe der Sterblichkeitsrate und ihrer Verbesserungsrate in verschiedenen Ländern beobachten lässt (VAUPEL, 1998; WILMOTH, 1997). WILMOTH (1997, 2000) schließt daraus, dass eine Obergrenze für die menschliche Lebenserwartung zwar existieren kann, aber derzeit nicht in Sicht ist.

Dies entspricht auch der Auffassung der *Optimisten* um Vaupel und Tuljapurkar (VAUPEL ET AL., 1998, OEPPEN & VAUPEL, 2002, TULJAPURKAR ET AL., 2000 und TULJAPURKAR, 2005). Sie extrapolieren die Sterblichkeit auf Basis historischer Daten. Im Gegensatz dazu

stehen *andere Forscher* wie DE GREY (2006) dem Extrapolationsansatz zwar kritisch gegenüber, halten es aber für möglich, dass die Lebenserwartung z. B. aufgrund von Fortschritten in der medizinischen Forschung weiter stark steigt.

## 2.2 Klassifizierung von Sterblichkeitsmodellen

Die bisher zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten vorgeschlagenen Modelle lassen sich hinsichtlich ihres Bewertungsansatzes und ihrer Modellstruktur klassifizieren.

Die Darstellung beschränkt sich auf Sterblichkeitsmodelle, die zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten vorgeschlagen wurden oder bei denen dies aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu anderen Bewertungsmodellen grundsätzlich möglich scheint. Insbesondere werden keine Sterblichkeitsgesetze und keine deterministischen Sterblichkeitsmodelle betrachtet. Auch stochastische Modelle, die zwar in anderen Disziplinen wie der epidemiologischen Forschung erfolgreich eingesetzt werden, aber für die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten weniger geeignet erscheinen, werden bewusst ausgeklammert. Für einen weiter gefassten Überblick sei statt dessen auf TABEAU ET AL. (2001) verwiesen.

### 2.2.1 Bewertungsansatz

Nach COCHRANE (2005, S. xiii f.) können Bewertungsmodelle grundsätzlich nach ihrem Ziel in normative und positive Modelle sowie nach ihrem grundlegenden Ansatz in absolute und relative Modelle unterteilt werden. Während *positive* Modelle dazu dienen, tatsächliche Preise zu beschreiben und zu erklären, treffen *normative* Modelle eine Aussage darüber, wie hoch Preise sein sollten (ebd.). Schon aufgrund des sehr begrenzten Markts und der daher nur wenigen beobachtbaren Marktpreise verfolgen alle aktuellen Bewertungsmodelle für Sterblichkeitsderivate einen normativen Ansatz.

*Absolute* Modelle bewerten Finanzinstrumente auf Basis ihres Bezugs zu fundamentalen makroökonomischen Risiken, während *relative* Modelle dazu die Preise anderer Instrumente heranziehen (ebd.). Die Grenze zwischen beiden Modellkategorien ist fließend und so lassen sich auch die meisten Bewertungsmodelle für Sterblichkeitsderivate nicht einem der beiden Extrema zuordnen.<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>Gute Beispiele für rein absolute Modelle sind solche, die nur auf Gleichgewichts- oder Nutzenüberlegungen beruhen. Oft werden jedoch weitere Annahmen zu Marktprämien und Betas benötigt (z. B. FRIEDBERG & WEBB, 2006). Ähnlich können nur auf Arbitrageargumenten basierende Modelle als Reinform der relativen Modelle aufgefasst werden (z. B. BAUER, 2008, Kapitel 2). Die meisten Arbitragemodelle erfordern jedoch zusätzlich Annahmen zum Marktpreis des Risikos und liegen damit ebenfalls zwischen beiden Extrema.

Zu den eher absoluten Modellen gehören Gleichgewichtsmodelle und nutzenbasierte Modelle. Beispiele sind der Capital-Asset-Pricing-Model- und Consumption-Capital-Asset-Pricing-Model-Ansatz (CAPM- bzw. CCAPM-Ansatz) von FRIEDBERG & WEBB (2006) und die Indifferenzmodelle von LUDKOVSKI & YOUNG (2008) und EGAMI & YOUNG (2007).

Die eher relativen Modelle umfassen ausschließlich Arbitragemodelle. Sie stellen den mit Abstand größten Teil der Bewertungsmodelle für Sterblichkeitsrisiken und sollten, sobald der Markt für Sterblichkeitsderivate weiter entwickelt ist, leichter an Marktdaten kalibrierbar sein als absolute Modelle. Auf sie werden sich die weiteren Ausführungen beschränken.

Analog zu Zinsstrukturmodellen lassen sich Arbitragemodelle grob in Short-Rate-Modelle, Forward-Rate-Modelle und Marktmodelle einteilen (CAIRNS ET AL., 2006a; vgl. auch Kapitel 3.2).<sup>10</sup> Die Bewertung erfolgt dabei stets durch Bildung von Erwartungswerten unter einem sogenannten äquivalenten Martingalmaß. Arbitragemodelle können daher hinsichtlich ihres Bewertungsansatzes anhand dreier weiterer Kriterien eingeteilt werden: die Annahme zur Vollständigkeit des Markts bzw. der Eindeutigkeit des Martingalmaßes, die Methode zur Bestimmung von Erwartungswerten unter dem Martingalmaß und die Quelle der zur Kalibrierung des Martingalmaßes verwendeten Marktpreise.

### 2.2.1.1 Vollständigkeit des Markts

Ein *vollständiger*, arbitragefreier Markt impliziert nach dem fundamentalem Asset-Pricing-Theorem für einen gegebenen Numéraire die Existenz eines einzigen zum realen Maß äquivalenten Martingalmaßes, anhand dessen sich Finanzinstrumente dann eindeutig bewerten lassen (DELBAEN & SCHACHERMAYER, 1994; HARRISON & PLISKA, 1981). Da der Markt für Sterblichkeitsrisiken in seiner heutigen Form eindeutig als unvollständig anzusehen ist, geht nur ein sehr kleiner Teil der Arbitragemodelle von seiner Vollständigkeit aus (explizit z. B. BAUER, 2008, Kapitel 2.1).<sup>11</sup> Aufgrund der nur begrenzt vorhandenen Marktdaten dient diese Annahme zudem eher grundsätzlichen, theoretischen Überlegungen als praktischen Bewertungen (ebd., Kapitel 2.4).

In einem arbitragefreien, aber *unvollständigen* Markt hingegen existieren bei gegebenem Numéraire verschiedene äquivalente Martingalmaße (DELBAEN & SCHACHERMAYER, 1994; HARRISON & PLISKA, 1981), die mit bestehenden Marktpreisen vereinbar sind. Sofern sich ein bestimmtes Derivat nicht mit Hilfe von anderen Instrumenten replizieren lässt, stellt die

<sup>10</sup>CAIRNS ET AL. (2006a) nennen positive Sterblichkeitsmodelle als vierte Modellkategorie. Bisher ist hierfür jedoch noch kein konkretes Modell vorgeschlagen worden.

<sup>11</sup>Die meisten Forward-Rate- und Marktmodelle gehen allerdings von der Existenz bestimmter Derivate aus (i. d. R. Nullkuponanleihe, Nullkuponanleihe oder investment- und sterblichkeitsabhängige Anleihen), die am Markt so noch nicht gehandelt werden.

Auswahl eines spezifischen dieser Maße daher eine weitere zur Bewertung von Sterblichkeitsrisiken notwendige Modellannahme dar.

### 2.2.1.2 Methode zur Bestimmung von Erwartungswerten

Zur Bestimmung der Erwartungswerte unter dem betrachteten äquivalenten Martingalmaß gibt es in der Literatur zwei Verfahren: Entweder erfolgt die Modellierung der erforderlichen Variablen *unter dem realen Maß* mit anschließender Transformation zum Martingalmaß; oder die Modellierung erfolgt direkt *unter dem Martingalmaß*, nachdem die zur Kalibrierung erforderlichen Datenpunkte im Markt beobachtet oder ggf. durch Transformation vom realen Maß bestimmt wurden.

Da die Kalibrierung des Modells unter dem äquivalenten Martingalmaß durch die nur begrenzt vorhandenen Marktdaten erschwert wird, verfolgen die meisten Modelle den ersten Ansatz (z. B. BLAKE ET AL., 2006b; CHEN & COX, 2007; COX & LIN, 2007; COX ET AL., 2006; DAWSON ET AL., 2007; DOWD ET AL., 2006; KORN ET AL., 2006; LIN & COX, 2005, 2008). Der zweite Ansatz ist aber in Forward-Rate- und Marktmodellen üblich (z. B. BAUER ET AL., 2008; BAUER & RUSS, 2006; CAIRNS ET AL., 2006a; MILTERSEN & PERSSON, 2006; OLIVIER & JEFFERY, 2004; SMITH, 2005).

Für einen Maßwechsel vom realen zum Martingalmaß (oder andersherum) werden zurzeit zwei Methoden genutzt (BAUER ET AL., 2010; BLAKE ET AL., 2006b): die sogenannte Wang-Transformation und die Modellierung eines Marktpreises des Risikos.

Die *Wang-Transformation* (WANG, 1996, 2000, 2002) verzerrt die reale Verteilungsfunktion des stochastischen Todeszeitpunktes mit Hilfe eines parametrischen Verzerrungsoperators zu einer äquivalenten Verteilungsfunktion unter dem Martingalmaß. Diese wird dann zur Bewertung herangezogen.<sup>12</sup> Die Transformation besteht durch ihre Einfachheit – es könnten sogar in deterministischen Modellen projizierte Sterbewahrscheinlichkeiten direkt in Wahrscheinlichkeiten unter dem äquivalenten Martingalmaß übersetzt werden – und wird von einer Reihe von Autoren zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten verwendet (erstmalig von LIN & COX, 2005; danach z. B. von CHEN & COX, 2007; COX & LIN, 2007; COX ET AL., 2006; DAWSON ET AL., 2007; DOWD ET AL., 2006; LIN & COX, 2008).

<sup>12</sup>Der Verzerrungsoperator der Ein-Faktor-Wang-Transformation hat die Form  $g_{\lambda_{\text{Wang}}}(u) = \Phi(\Phi^{-1}(u) - \lambda_{\text{Wang}})$ , wobei der Parameter  $\lambda_{\text{Wang}}$  oft ebenfalls als Marktpreis des Risikos interpretiert und bezeichnet wird. Die Zwei-Faktoren-Wang-Transformation wählt als Verzerrungsoperator  $g_{\lambda_{\text{Wang}}}(u) = \Psi(\Phi^{-1}(u) - \lambda_{\text{Wang}})$ , basierend auf der Student-t-Verteilung  $\Psi$ , und berücksichtigt dadurch die Parameterunsicherheit in der geschätzten Verteilungsfunktion (LIN & COX, 2008). In beiden Fällen wird die Verteilung  $F^{\mathbb{Q}}(t)$  des Todeszeitpunktes  $\tau$  unter dem äquivalenten Maß aus der realen Verteilung  $F(t) := \mathbb{P}(\tau \leq t)$  bestimmt durch  $F^{\mathbb{Q}}(t) := g_{\lambda_{\text{Wang}}}(F)(t) = g_{\lambda_{\text{Wang}}}(F(t))$ .

Der Ansatz wird aber aus mehreren Gründen kritisiert: Zum einen ist nicht klar, wie sich ein in sich schlüssiges Modell aus unterschiedlichen Transformationen für unterschiedliche Altersgruppen ergibt (CAIRNS ET AL., 2006a). Zum anderen zeigt PELSSER (2008), dass die Wang-Transformation bei allgemeinen stochastischen Prozessen nicht mit arbitragefreien Preisen vereinbar ist und somit entgegen der Behauptung von WANG (2002) kein allgemein gültiges „Framework“ zur Bewertung von Finanz- und Versicherungsrisiken darstellt.

Als Alternative zur Wang-Transformation ermöglicht die *Modellierung eines Marktpreises des Risikos* den Maßwechsel vom realen zum äquivalenten Martingalmaß. Bei auf Wiener Prozessen basierenden Prozessen ist die Radon-Nikodym-Ableitung (NIKODYM, 1930) durch die Girsanov-Dichte gegeben (GIRSANOV, 1960), wobei der zugrunde liegende adaptierte Prozess den zu modellierenden Marktpreis des Risikos darstellt. In den bisherigen Bewertungsmodellen für Sterblichkeitsderivate (z. B. BLAKE ET AL., 2006b; KORN ET AL., 2006) wird er als konstant angenommen, da die Kalibrierung angesichts der begrenzten Marktdaten sich ohnehin schwierig darstellt (BLAKE ET AL., 2006b).<sup>13</sup>

### 2.2.1.3 Quelle der verwendeten Marktpreise

Unabhängig vom Ansatz, der zur Bestimmung der Erwartungswerte unter dem äquivalenten Martingalmaß gewählt wird, benötigen Arbitragemodelle Marktpreise – sei es zur direkten Bestimmung von erforderlichen Größen unter dem Martingalmaß oder zur Kalibrierung des Marktpreises des Risikos bzw. des Wang-Parameters.

Da es bisher nur eine Handvoll Sterblichkeitsderivate mit öffentlich zugänglichen Daten gibt und diese Daten nicht zwingend zur Bewertung anderer Sterblichkeitsderivate verwendbar sind,<sup>14</sup> nutzen viele Modelle Marktdaten aus dem *Primärversicherungsmarkt*. Dabei handelt es sich um Preise für Lebensversicherungen und Annuitäten, ggf. adjustiert um Zuschläge für Verwaltungskosten (z. B. LIN & COX, 2005). Preise aus dem *Rückversicherungsmarkt* wurden bisher noch nicht genutzt – eventuell aufgrund fehlenden Datenzugangs, unzureichenden Detaillevels oder der z. B. durch Schwankungen der Kapitalbasis bedingten, starken

<sup>13</sup>BAYRAKTAR, MILEVSKY, PROMISLOW & YOUNG schlagen einen Sharpe-Ratio-Ansatz für den Wechsel zum Martingalmaß vor (BAYRAKTAR ET AL., 2009; MILEVSKY ET AL., 2006; YOUNG, 2008). BAUER (2008, Kapitel 3.2.1, S. 104) zeigt jedoch, dass dieser scheinbar alternative Ansatz im Falle einer deterministischen augenblicklichen Sharpe Ratio mit der Annahme eines konstanten Marktpreises des Risikos übereinstimmt.

<sup>14</sup>Insbesondere fehlen Marktdaten für Langlebigkeitsderivate, da es sich bei den einzigen erfolgreich ausgehenden und öffentlich gemachten Derivaten um Katastrophenanleihen für kurzfristige Sterblichkeitsrisiken handelt und daraus gewonnene Informationen zum Martingalmaß nicht unbedingt für Langlebigkeitsrisiken genutzt werden können (vgl. MILTERSEN & PERSSON, 2006). Doch auch für die Bewertung kurzfristiger Sterblichkeitsrisiken besteht die Problematik, dass sich vorhandene Marktdaten und die impliziten Marktpreise des Risikos streng genommen nur auf den jeweiligen Zeitpunkt und die jeweils zugrunde gelegte Referenzbevölkerung beziehen, d. h. insbesondere die jeweilige Kombination von Geschlechtern, Altersgruppen und Ländern.



Preiszyklizität im Rückversicherungsmarkt.

Statt dessen ziehen manche Autoren *andere Märkte* wie die für Aktien und Unternehmensanleihen als Vergleichsgröße oder Grundlage für Marktpreise des Risikos heran, obwohl die Vergleichbarkeit und Eignung durch die Andersartigkeit des Risikos nur bedingt gegeben ist (BAUER ET AL., 2010). Mit der weiteren Entwicklung des *Markts für Sterblichkeitsderivate*, z. B. auf Basis von Sterblichkeitsindizes, sollten jedoch zunehmend mehr Marktdaten zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten zur Verfügung stehen.

## 2.2.2 Modellstruktur

Wie bereits festgestellt, erfolgt die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten bei Arbitragemodellen durch die Bildung von Erwartungswerten unter dem sogenannten äquivalenten Martingalmaß. Dazu sind sowohl die Prozesse der jeweils modellierten Variablen als auch eventuelle Abhängigkeiten zu spezifizieren.

### 2.2.2.1 Modellierung einzelner Variablen

Bei der Bewertung von Sterblichkeitsderivaten sind alle für den Wert wesentlichen Faktoren zu berücksichtigen, zu denen – abhängig von der Struktur des Derivats – biometrische Risiken, Finanzmarktrisiken und ggf. weitere Risiken wie Änderungen in der Referenzbevölkerung gehören. Dies kann durch Modellierung der theoretisch zugrunde liegenden Faktoren – bei den betrachteten Sterblichkeitsderivaten vor allem Sterblichkeit und Zinsen – oder durch Modellierung von am Markt beobachteten und durch dieselben Faktoren beeinflussten Größen geschehen. Analog zu Zinsstrukturmodellen werden Modelle des ersten Ansatzes grob in Short-Rate- und Forward-Rate-Modelle unterteilt und Modelle des zweiten Ansatzes als Marktmodelle bezeichnet. Bei Sterblichkeitsmodellen geht diese Unterscheidung auf CAIRNS ET AL. (2006a) zurück.

#### Short-Rate-Modelle

Short-Rate-Modelle modellieren die Entwicklung der aktuell wirkenden Sterblichkeit und – sofern erforderlich – die des Momentanzinses. Als Sterblichkeitsgröße wählen sie meist die Sterblichkeitsintensität bzw. Sterberate (BROUHNS ET AL., 2002; CHEN & COX, 2007; LEE & CARTER, 1992; RENSHAW & HABERMAN, 2003a, 2006) und in manchen Fällen die einjährige momentane Sterbe- oder Überlebenswahrscheinlichkeit (z. B. CAIRNS ET AL., 2006b, 2008b, 2009).

Mögliche Ausgangspunkte für die Sterblichkeitsmodellierung bilden stochastische Sterblich-

keitsmodelle aus anderen Fachbereichen und Modellansätze aus der Finanzmathematik. Im ersten Fall bieten sich grundsätzlich Modelle aus der epidemiologischen und der demographischen Forschung, im zweiten Fall z. B. Zins- oder Kreditmodelle an. Eine klare Trennung zwischen demographischen und finanzmathematischen Modellen ist nicht immer möglich.

### ***Epidemiologische Modelle***

Epidemiologische Modelle modellieren Sterblichkeit in sogenannten Makro- bzw. Mikromodellen entweder mit Hilfe von Risikofaktoren oder auf Basis von Krankheits- und Alterungsprozessen (VAN DEN BERG JETHS ET AL., 2001; KEILMAN, 2003). Insbesondere Makromodelle berücksichtigen neben demographischen Faktoren auch nicht demographische Faktoren (KEILMAN, 2003, S. 24f.). Die Entwicklung der zukünftigen Sterblichkeit hängt wesentlich von der Entwicklung der gewählten Erklärungsvariablen ab.

Aufgrund ihrer anderen Fragestellung – der Fokus liegt auf Gesundheitsrisiken und deren Implikationen –, der schwierigen Datenlage und des komplexen Zusammenspiels unterschiedlicher Faktoren bzw. Prozesse, sind epidemiologische Modelle nur bedingt zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten geeignet. Ihr grundlegender Ansatz wurde nur von SHYU & CHANG in einem recht einfach gehaltenen Faktormodell zur Bewertung eines Sterblichkeitsderivats, einer hypothetischen Collateralized Insurance Obligation, genutzt.

### ***Demographische Modelle***

Im Gegensatz zu epidemiologischen Modellen versuchen demographische Modelle nicht, die der Sterblichkeit zugrunde liegenden Prozesse und Risiken zu modellieren, sondern die Sterblichkeitsentwicklung der Vergangenheit zu beschreiben und sie für die Zukunft durch Extrapolation oder Interpolation zu einem Zielwert zu modellieren (KEILMAN, 2003; TABEAU, 2001). Dies kann auf Basis der aggregierten oder nach Todesart differenzierten Sterblichkeit geschehen (CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION, 2004).

Zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten werden demographische Modelle herangezogen, die auf dem (vermeintlich) objektiveren Extrapolationsansatz beruhen und nicht nach Todesursache differenzieren. Der Extrapolationsansatz steht im Einklang mit dem Glauben an einen weiteren Rückgang in der Sterblichkeit und an eine fehlende positive Untergrenze für die Sterblichkeitsintensitäten (vgl. Kapitel 2.1.2).

Die Modelle verwenden meist Zeitreihenmethoden,<sup>15</sup> um die altersspezifische Sterblichkeitsintensität bzw. Sterberate und in manchen Fällen auch die altersspezifische, einjährige

---

<sup>15</sup>Ein alternativer Ansatz ist der P-Splines-Ansatz (Penalized-Splines-Ansatz) von CURRIE (2006) und CURRIE ET AL. (2004), in dem die Sterblichkeitsintensität mit Hilfe von B-Spline-Basisfunktionen modelliert und fehlende Glätte in den geschätzten Parametern „bestraft“ (englisch: „penalized“) werden.

Sterbe- oder Überlebenswahrscheinlichkeit zu modellieren. Die Altersstruktur ist dabei entweder durch ein Sterblichkeitsgesetz (z. B. MILEVSKY & PROMISLOW, 2001) oder durch alters- und ggf. geschlechtsspezifische Koeffizienten gegeben (z. B. BROUHNS ET AL., 2002; CAIRNS ET AL., 2008b, 2009; LEE & CARTER, 1992; RENSHAW & HABERMAN, 2003a, 2006). Durch Koeffizienten lassen sich neben demographischen Faktoren auch Kohorteffekte leicht berücksichtigen; nicht demographische Faktoren werden dagegen üblicherweise vernachlässigt.

Die wichtigsten Zeitreihenmodelle gehen auf LEE & CARTER (1992) zurück (vgl. auch Kapitel 2.3). Sie modellieren die logarithmierte, altersspezifische Sterberate mit Hilfe von konstanten, altersspezifischen Koeffizienten und einem allgemeinen, stochastischen Zeitindex. Das Modell wurde vielfach erweitert (vgl. auch LEE, 2000), z. B. um eine Differenzierung nach Geschlechtern (CARTER & LEE, 1992), eine Poisson- statt Gauß'sche Fehlerstruktur (BROUHNS ET AL., 2002), einen zweiten Zeitindex (RENSHAW & HABERMAN, 2003b), um Kohorteffekte (RENSHAW & HABERMAN, 2006) und um permanente oder vorübergehende Sprünge (CHEN & COX, 2007). Darüber hinaus formulieren BIFFIS ET AL. (2005a, 2010) und BIFFIS & DENUIT (2006) es in stetiger statt diskreter Zeit.

Eine andere Klasse von ebenfalls diskreten Zeitreihenmodellen basiert auf CAIRNS ET AL. (2006b). Im Gegensatz zu LEE & CARTER (1992) modellieren sie die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit und parametrisieren die Altersstruktur in Anlehnung an das Sterblichkeitsgesetz von PERKS (1932). Der Logit der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeit ergibt sich als Summe zweier Zeitindizes, von denen einer mit dem Altersunterschied zum Durchschnittsalter gewichtet wird. Erweiterungen des Modells berücksichtigen verschiedene Kohort- und Krümmungseffekte (CAIRNS ET AL., 2008b, 2009). Eine Vielzahl weiterer zeitreihenbasierter Sterblichkeitsmodelle existiert (z. B. BABEL ET AL., 2007, speziell für deutsche Daten).

Angesichts der ursprünglich rein demographischen Fragestellung erfolgt die Modellierung bei den beschriebenen Zeitreihenmodellen zunächst und oft ausschließlich unter dem realen Maß. Ein Maßwechsel ist jedoch mit Hilfe des Marktpreises des Risikos und – unter Beachtung der durch PELSSER (2008) nachgewiesenen Einschränkung – mit Hilfe der Wang-Transformation möglich. Zwar haben bisher nur wenige Autoren (z. B. CAIRNS ET AL., 2006b; CHEN & COX, 2007) den Maßwechsel vorgenommen und das jeweilige Modell zur Bewertung genutzt; unter dem realen Maß wurden Zeitreihenmodelle jedoch sehr erfolgreich für verschiedenste Zeiträume und Länder an historischen Sterblichkeitsdaten kalibriert (vgl. z. B. CAIRNS ET AL., 2009, und CAIRNS ET AL., 2008b, für einen qualitativen und quantitativen Vergleich der wichtigsten Modelle für Großbritannien und die USA).

### *Finanzmathematische Modelle*

Ausgangspunkt für die Anwendung von finanzmathematischen Modellen zur Sterblichkeitsmodellierung ist neben der Handhabbarkeit und Erfahrung mit entsprechenden Bewertungsmodellen vor allem die modelltechnische Ähnlichkeit zwischen der momentanen Sterblichkeitsintensität und finanziellen Größen wie der momentanen Default Rate, dem Momentanzins oder Aktienkursen. Die wesentlichen Ähnlichkeiten zu den genannten Größen bestehen in der Stochastizität und der Nichtnegativität; aber auch die grundlegenden Unterschiede wie z. B. die im Vergleich zur Default-Rate- und Zins-Entwicklung fehlende Mean Reversion oder Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Altersgruppen müssen beachtet werden (ebd.).

Aus diesem Grund werden manchmal nur der Modellansatz (z. B. die Verwendung affiner Prozesse in BIFFIS, 2005; BIFFIS & MILLOSOVICH, 2006; DAHL, 2004) aus anderen Bereichen der Finanzmathematik übernommen und zur konkreten Modellspezifikation Änderungen vorgenommen oder sogar auf demographische Modelle (vor allem Sterblichkeitsgesetze wie in MILEVSKY & PROMISLOW, 2001) zurückgegriffen. Deshalb kann auch die Trennung zwischen eher finanzmathematischen und eher demographischen Modellen schwerfallen. Wie demographische Modelle berücksichtigen finanzmathematische Modelle i. d. R. demographische Faktoren und folgen einem extrapolativen Ansatz; nicht demographische Faktoren hingegen werden normalerweise vernachlässigt.

Die wichtigsten finanzmathematischen Sterblichkeitsmodelle werden im Folgenden vorgestellt und ihre Verbindungen zu Kredit-, Zins-, Aktien- und affinen Modellen diskutiert.

Eine Verbindung zwischen Sterblichkeit und *Kreditmodellen* stellen u. a. MILEVSKY & PROMISLOW (2001) explizit her. Sie interpretieren Kapitallebensversicherungen als ausfallgefährdete Anleihen und die Sterblichkeitsintensität als Harzard Rate. Letztere modellieren sie in stetiger Zeit auf Basis einer stochastischen Version des Sterblichkeitsgesetzes von GOMPERTZ (1825). Der stochastische Teil der altersabhängigen Komponente des Gompertz-Gesetzes folgt dabei einer zum Mittelwert zurückkehrenden Brown'schen Bewegung. Die Modellierung erfolgt unter dem risikoneutralen Maß; das Modell wird nicht an Marktdaten kalibriert.

DAHL (2004) verallgemeinert den Ansatz von MILEVSKY & PROMISLOW (2001) und modelliert die altersspezifische Sterblichkeitsintensität zunächst als allgemeinen, mehrdimensionalen Diffusionsprozess. Dann beschränkt er sich auf *affine Modelle* und modelliert die altersspezifische Sterblichkeitsintensität analog zum auf COX ET AL. (1985) aufbauenden *Zinsmodell* von HULL & WHITE (1990). Die Spezifizierung erfolgt zunächst unter dem realen Maß, der Wechsel zum Martingalmaß über den Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos.

BIFFIS (2005) erweitert den affinen Modellansatz von DAHL (2004) und erlaubt Sprünge. Er formuliert den Ansatz direkt unter dem risikoneutralen Maß und leitet, aufbauend auf den

Ergebnissen von Kreditmodellen, geschlossene Lösungen für verschiedene standardmäßige Versicherungsprodukte ab. Er schlägt zwei konkrete, zum Mittelwert zurückkehrende Prozesse für die Sterblichkeitsintensität vor. Aufbauend auf BIFFIS (2005), leiten BIFFIS & MILLOSOVICH (2006) geschlossene Lösungen für den Wert einer Option auf eine Leibrente mit festgelegtem Annuitätenfaktor her. Weder DAHL (2004) noch BIFFIS (2005) und BIFFIS & MILLOSOVICH (2006) kalibrieren ihre Modelle. Weitere affine Sterblichkeitsmodelle stammen z. B. von SCHRAGER (2006), der sein Modell auf niederländische Sterblichkeitsdaten anwendet, und von LUCIANO & VIGNA (2005), die die gängige Mean-Reversion-Annahme umgehen.

Einen etwas anderen, aber ebenfalls finanzmathematischen Ansatz, der an einfache *Aktienkursmodelle* erinnert, wählt die Forschergruppe um Cox. Sie modelliert die einjährige, altersübergreifende Sterbewahrscheinlichkeit (COX ET AL., 2006; LIN & COX, 2008) bzw. einen mehrjährigen altersspezifischen Überlebensindex (LIN & COX, 2007) als eine geometrische Brown'sche Bewegung mit Sprüngen. COX ET AL. (2006) berücksichtigen dabei eine Korrelation in der Sprungkomponente verschiedener Länder; LIN & COX (2008) beschränken den Effekt eines Sprungs auf eine Zeitperiode. Im Gegensatz zu Aktienkursmodellen erfolgt die Modellierung unter dem realen Maß. Für den Maßwechsel verwenden die Autoren die Ein-Faktor-, die Zwei-Faktoren- bzw. die bivariate Wang-Transformation und berechnen den Wang-Parameter mit Hilfe der Preise der Katastrophen- und Langlebigkeitsanleihen von Swiss Re bzw. der European Investment Bank.

### **Forward-Rate-Modelle**

Forward-Rate-Modelle modellieren die Entwicklung der momentanen Forward-Sterblichkeitsintensität und des Terminzinses. Ähnlich wie bei den meisten Short-Rate-Modellen wird dabei nur die aggregierte Sterblichkeitsintensität modelliert; Todesursachen und epidemiologische Risikofaktoren oder Prozesse werden nicht betrachtet.

Die Modelle berücksichtigen i. d. R. demographische Faktoren; sie vernachlässigen nicht demographische Faktoren oder modellieren sie nicht explizit. Eine grundsätzliche Aussage zur Entwicklung der Sterblichkeit in Forward-Rate-Modellen fällt schwer, da sie zum einen nur selten an tatsächlichen Daten kalibriert wurden und zum anderen die Entwicklung unter dem Martingalmaß durch die Drift-Bedingung impliziert wird.

Der Forward-Rate-Ansatz geht auf das Modell von HEATH ET AL. (1992) zur Zinsstrukturmodellierung zurück (vgl. Kapitel 3.2.2). Für die Sterblichkeitsmodellierung wurde er zuerst von CAIRNS ET AL. (2006a) vorgeschlagen und dann sukzessive von MILTERSEN & PERSSON (2006), BARBARIN (2008) und der Forschergruppe um BAUER erweitert und spezifiziert.

In allen Fällen wird die Forward-Sterblichkeitsintensität ähnlich definiert und modelliert wie der Terminzins im ursprünglichen Modell von HEATH ET AL. (1992): Sie stellt i. d. R. die augenblickliche Veränderung des logarithmierten Preises einer (hypothetischen) Nullkuponanleihe mit der Laufzeit dar, adjustiert um den entsprechenden Terminzins (vgl. BAUER, 2008, Kapitel 2.1; BAUER ET AL., 2010, 2008; BAUER & RUSS, 2006).<sup>16</sup> Die Forward-Sterblichkeitsintensitäten aller Laufzeiten werden in stetiger Zeit auf Basis einer ggf. mehrdimensionalen Brown'schen Bewegung modelliert.<sup>17</sup>

MILTERSEN & PERSSON (2006) erlauben hier als erste eine Abhängigkeit zwischen der Forward-Sterblichkeitsintensität und dem Terminzins. BARBARIN (2008) ergänzt dies um eine Abhängigkeit von den tatsächlich realisierten Sterblichkeitsraten der zugrunde liegenden Referenz- und der gesamten Bevölkerung und modelliert zeitgleich die Term Structures für verschiedene, möglicherweise heterogene Referenzbevölkerungen.

Mit Hilfe der Martingaleigenschaft lässt sich dann für den jeweils definierten Intensitätsprozess die Drift-Bedingung ableiten. Wie im klassischen Modell von HEATH ET AL. (1992) ist der Drift unter dem Martingalmaß durch die Volatilitätsstruktur definiert.

Die Kalibrierung erweist sich bei Forward-Rate-Modellen als schwierig. In den meisten Fällen erfolgt die Modellierung direkt unter dem risikoneutralen Maß, so dass zur Kalibrierung zwar nur die ursprünglichen risikoneutralen Forward-Intensitäten und die Volatilitätsstruktur benötigt werden. Doch auch wenn es verschiedene Ideen zur Kalibrierung gibt (vgl. insbesondere BAUER ET AL., 2008; BAUER & RUSS, 2006; MILTERSEN & PERSSON, 2006), liegt aufgrund der wenigen Marktdaten in der Praxis genau hier die Schwierigkeit. Zu den wenigen Autoren, die zunächst unter dem realen Maß modellieren und dann zum risikoneutralen Maß wechseln, gehören BAUER ET AL. (2010).

### Marktmodelle

Im Gegensatz zu Short- und Forward-Rate-Modellen modellieren Marktmodelle nicht die zugrunde liegenden Risiken, sondern nur die (theoretisch) am Markt beobachtbaren Größen. Der Ansatz geht insofern auf den Ansatz von BRACE ET AL. (1997), MILTERSEN ET AL. (1997) und JAMSHIDIAN (1997) zur Zinsstrukturmodellierung zurück. Zur Modellierung von

<sup>16</sup>CAIRNS ET AL. (2006a) definieren die Forward-Sterblichkeitsintensität ursprünglich als Ableitung des logarithmierten risikoneutralen Erwartungswertes des Überlebensindex nach der Laufzeit. Bei der von ihnen getroffenen Annahme der Unabhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen entspricht dies der angegebenen, allgemeineren Definition. BARBARIN (2008) verzichtet in seiner Definition auf die Subtraktion des Terminzinses und modelliert damit die Summe aus der oben genannten Forward-Sterblichkeitsintensität und dem Terminzins. Lediglich MILTERSEN & PERSSON (2006) wählen einen deutlich anderen Ansatz und greifen bei ihren beiden Definitionen auf Einmalprämien für Erlebensfall- bzw. Risikolebensversicherungen zurück.

<sup>17</sup>Forward-Rate-Modelle umfassen daher ähnlich wie in der Zinsstrukturmodellierung alle die Sterblichkeitsintensität modellierenden, zeitstetigen Short-Rate-Modelle.

Sterblichkeitsrisiken wurde er zuerst von CAIRNS ET AL. (2006a) in stetiger bzw. von Olivier und Smith (OLIVIER & JEFFERY, 2004; SMITH, 2005) in diskreter Zeit vorgeschlagen.<sup>18</sup>

Auch bei Marktmodellen werden demographische Faktoren i. d. R. berücksichtigt und nicht demographische Faktoren vernachlässigt. Eine Aussage zur Entwicklung der Sterblichkeit in Marktmodellen fällt schwer, da die Modellierung unter dem Martingalmaß und unter Verwendung verschiedener Numéraires erfolgt und die Modelle bisher nicht an Marktdaten kalibriert wurden.

CAIRNS ET AL. (2006a) formulieren insgesamt drei zeitstetige Marktmodelle: ein Annuitätenmodell und zwei sogenannte Survivor-Credit-Offset-Rate-Modelle (SCOR-Modelle). Das Annuitätenmodell modelliert den Terminannuitätenfaktor einer Leibrente unter dem Martingalmaß als geometrische Brown'sche Bewegung ohne Drift. Die SCOR-Modelle definieren zunächst in Analogie zur London Interbank Offered Rate (LIBOR) eine sogenannte Forward SCOR,<sup>19</sup> die unter dem entsprechenden Martingalmaß ebenfalls einer geometrischen Brown'schen Bewegung ohne Drift folgt. Im Gegensatz zu den anderen beiden Marktmodellen spezifizieren sie für das zweite Modell die Volatilitätsstruktur, und zwar basierend auf dem PERKS (1932)-Modell von CAIRNS ET AL. (2006b).

Das erste Marktmodell in diskreter Zeit stammt von Olivier und Smith (OLIVIER & JEFFERY, 2004; SMITH, 2005). Es modelliert die einjährige Forward-Überlebenswahrscheinlichkeit unter dem Martingalmaß mit Hilfe eines auf einer Gamma-Verteilung basierten, stochastischen Exponenten. Unrealistischerweise sind dabei die Forward-Überlebenswahrscheinlichkeiten aller Lebensalter und Laufzeiten perfekt korreliert. Deshalb erweitert CAIRNS (2006) das Modell um mehrere alters- und laufzeitspezifische Zufallsvariablen, betrachtet dabei allerdings die Spot-Überlebenswahrscheinlichkeit.

In den genannten Marktmodellen erfolgt die Modellierung unter dem äquivalenten Martingalmaß. Die zugrunde liegenden Numéraires sind jedoch nicht das Geldmarktkonto, sondern basieren auf Nullkuponnanglebigkeits- oder auf investment- und sterblichkeitsabhängigen Anleihen. Keines der Modelle wurde bisher an Marktdaten kalibriert oder zur Bewertung genutzt.

---

<sup>18</sup>In der Präsentation von OLIVIER & JEFFERY (2004) wird das Olivier-Smith-Modell ursprünglich zur Bestimmung von Reserven und nicht zur Bewertung benutzt. CAIRNS ET AL. (2008a) stellen es in einem Bewertungskontext dar und bezeichnen es als Marktmodell.

<sup>19</sup>Im ersten SCOR-Modell stellt die Forward SCOR die einem Rentenversicherungsnehmer für den Überlebensfall und ein gegebenes Jahr versprochene Rendite dar und lässt sich analog zum LIBOR bzw. Forward LIBOR aus den Preisen von (hypothetischen) Langlebigkeitsanleihen berechnen. Im zweiten Modell ist sie definiert als für den Überlebensfall versprochene Zusatzrendite über die Wertveränderung eines festgelegten, nicht sterblichkeitsabhängigen Investments. Sie lässt sich aus den (ebenfalls hypothetischen) Preisen einer investment- und sterblichkeitsabhängigen Anleihe berechnen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten: *Short-Rate-Modelle* stellen den mit Abstand größten Teil der Modelle zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten dar. Sie wurden – dies gilt zumindest für die demographischen Zeitreihenmodellen unter ihnen – häufig und erfolgreich an historischen Daten kalibriert (vgl. CAIRNS ET AL., 2008b, 2009) und in einigen Fällen (z. B. CAIRNS ET AL., 2006a) zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten bzw. der Berechnung des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos herangezogen.

*Forward-Rate-Modelle* umfassen ähnlich wie in der Zinsstrukturmodellierung alle die Sterblichkeitsintensität modellierenden, zeitstetigen Short-Rate-Modelle. Bisher wurden nur wenige Forward-Rate-Modelle im Detail spezifiziert oder sogar kalibriert.

*Marktmodelle* stellen die kleinste Modellkategorie dar. Sie haben theoretisch den Vorteil, leicht an Marktdaten kalibrierbar zu sein, doch basieren sie zurzeit aufgrund des nur wenig entwickelten Markts für Sterblichkeitsderivate meist auf rein hypothetischen Marktgrößen. Die bisher vorgeschlagenen Modelle wurden daher noch nicht an Marktdaten kalibriert und sind nur in Einzelfällen genau spezifiziert.

#### 2.2.2.2 Modellierung von Abhängigkeiten

Insbesondere bei Short- und Forward-Rate-Modellen, aber auch bei manchen Marktmodellen sind mögliche Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Zufallsvariablen zu berücksichtigen. Sie können grob in Abhängigkeiten in den Todeszeitpunkten verschiedener Individuen und Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und Zinsen bzw. allgemeiner zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt unterschieden werden.

In der traditionellen Lebensversicherungsmathematik wird eine mögliche *Abhängigkeit in den Todeszeitpunkten verschiedener Individuen* vernachlässigt. Bei einer stochastischen Sterbewahrscheinlichkeit, die allen Modellen zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten zugrunde liegt, muss diese Annahme jedoch weiter differenziert werden: Hier entsteht Unsicherheit bezüglich des Todeszeitpunktes einerseits durch die Stochastizität der Sterbewahrscheinlichkeit und andererseits – analog zum deterministischen Fall – durch Unsicherheit des Todeseintritts bei gegebener Sterbewahrscheinlichkeit.

Eine Abhängigkeit zwischen den Todeszeitpunkten verschiedener Individuen kann daher einerseits durch abhängige, individuelle Sterblichkeitsintensitäten und andererseits durch eine Abhängigkeit der Todesfälle bei gegebener individueller Sterblichkeit gegeben sein. Letztere Abhängigkeit ist insbesondere bei Paaren und Haushaltsmitgliedern denkbar und wurde zum Teil nachgewiesen (z. B. das sogenannte Broken-Heart-Syndrom nach PARKES ET AL., 1969, vgl. Kapitel 2.1.1.3). Sie wird jedoch in fast keinem Modell zur Bewertung von Sterb-



lichkeitsderivaten berücksichtigt.<sup>20</sup>

Im Gegensatz dazu wird die erst genannte Abhängigkeit i. d. R. nicht vernachlässigt. Bei Individuen derselben homogenen Gruppe sind die Sterblichkeitsintensitäten identisch und dadurch perfekt korreliert. Bei Individuen verschiedener Gruppen handelt es sich um eine weitere Modellentscheidung, die sehr unterschiedlich gehandhabt wird.

Während ein Teil der Modelle irrealistischerweise von einer perfekten Abhängigkeit der Sterblichkeitsintensitäten bzw. Sterberaten verschiedener Gruppen ausgeht (bez. Altersgruppen z. B. BROUHNS ET AL., 2002; RENSHAW & HABERMAN, 2003a,c) oder eine ebenso unrealistische Unabhängigkeit annimmt,<sup>21</sup> versuchen andere Modelle (z. B. RENSHAW & HABERMAN, 2003b, 2006; CAIRNS ET AL., 2006b, und Erweiterungen) z. B. durch Modellierung von gruppenspezifischen und -unspezifischen Effekten eine nicht perfekte Abhängigkeit zu erzeugen.

Eine mögliche *Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt* wird von der klassischen Lebensversicherungsmathematik ebenfalls vernachlässigt (FISCHER, 2004, 2007). Diese Annahme wird von den meisten Modellen zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten übernommen. Nur im Forward-Rate-Ansatz betrachten einzelne Autoren (zuerst MILTERSEN & PERSSON, 2006 und, darauf aufbauend, BARBARIN, 2008; BAUER, 2006; BAUER, 2008, Kapitel 2.1) den allgemeinen Fall abhängiger Sterblichkeits- und Zinsprozesse, ohne jedoch die Art der Abhängigkeit genauer zu spezifizieren oder in einer eventuellen Implementierung zu berücksichtigen.

### 2.3 Das Modell von LEE & CARTER (1992)

Das Modell von LEE & CARTER (1992) stellt eines der ersten stochastischen Sterblichkeitsmodelle dar und gehört zur Gruppe der extrapolierenden, aggregierenden, demographischen Zeitreihenmodelle (vgl. Kapitel 2.2.2). Es wurde vielfach angewandt und erweitert (für einen Überblick über die Erweiterungen vgl. ebd. und LEE, 2000). Es ist das bekannteste und wichtigste Short-Rate-Modell.

---

<sup>20</sup>Eine Ausnahme bildet das Modell von SHYU & CHANG, die Abhängigkeiten zwischen Individuen mit Hilfe einer Clayton Copula modellieren und, basierend auf fiktiven Daten, eine aus zwölf Policen bestehende Collateralized Insurance Obligation bewerten. Auf die Frage, warum zwischen den Policen eine Abhängigkeit bestehen soll und wie der Grad der Abhängigkeit zu kalibrieren ist, gehen sie nicht ein.

<sup>21</sup>Beispielsweise wird die Abhängigkeit in den Sterblichkeitsintensitäten bzw. Sterberaten von Männern und Frauen in fast keinem Modell spezifiziert. I. d. R. wird ein Modell einfach für ein Geschlecht kalibriert und angewandt. Dies entspricht der impliziten (und unrealistischen) Annahme von Unabhängigkeit zwischen Männern und Frauen. Eine Ausnahme bilden CARTER & LEE (1992), die das Modell von LEE & CARTER (1992) für beide Geschlechter gleichzeitig anwenden.

Die Hauptgründe für seine Beliebtheit sind die sehr genaue Abbildung der realisierten Sterberaten, seine Sparsamkeit, seine Prognose- und Simulationsfähigkeit sowie das für extrapolative Modelle typische Fehlen subjektiver Einschätzungen und positiver Untergrenzen für die Sterblichkeitsintensitäten (LEE & CARTER, 1992). Als wesentliche Einschränkungen des Modells sind die unrealistischerweise perfekte Korrelation der Sterberaten verschiedener Bevölkerungsgruppen (CAIRNS ET AL., 2008a,b) sowie die üblichen Nachteile extrapolativer Methoden zu nennen (LEE & CARTER, 1992).

### 2.3.1 Modellstruktur

Die Idee von LEE & CARTER (1992) ist, die logarithmierte, altersspezifische Sterberate mit Hilfe von konstanten, altersspezifischen Koeffizienten und einem allgemeinen, stochastischen Zeitindex zu modellieren. In seiner ursprünglichen Formulierung hat das Modell die Form:

$$\ln m_{x,t} := \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}. \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnen  $m_{x,t}$  die aus Sterblichkeitsdaten geschätzte Sterberate von  $x$ -Jährigen im Zeitpunkt  $t$ ,<sup>22</sup>  $\alpha_x$  sowie  $\beta_x$  zwei konstante, ggf. geschlechtsspezifische Alterskoeffizienten von  $x$ -Jährigen,<sup>23</sup>  $\kappa_t$  den allgemeinen, stochastischen Zeitindex und  $\epsilon_{x,t}$  einen mit  $(0, \sigma_\epsilon^2)$  verteilten Fehlerterm für  $x$ -Jährige im Zeitpunkt  $t$ .

$\alpha_x$  beschreibt die allgemeine, d. h. die unabhängig von Periodeneffekten grundsätzlich bestehende, Altersstruktur der logarithmierten Sterberaten.  $\kappa_t$  beeinflusst die Sterberaten einer bestimmten Periode  $t$  für alle Altersklassen und bestimmt damit die Entwicklung der allgemeinen Sterblichkeit im Zeitablauf.  $\beta_x$  gibt die Sensitivität der logarithmierten Sterberate der Altersklasse  $x$  auf Veränderungen im Zeitindex an und übersetzt so die allgemeine Sterblichkeitsentwicklung in altersspezifische Veränderungsraten. Das LEE & CARTER (1992)-Modell erklärt altersspezifische Sterblichkeiten also mit Hilfe von Alterseffekten,  $\alpha_x$  und  $\beta_x$ , und einem Periodeneffekt,  $\kappa_t$ . Der Fehlerterm  $\epsilon_{x,t}$  erfasst Abweichungen der vom Modell vorhergesagten zu den aus historischen Sterbetafeln geschätzten Sterberaten. Da er i. d. R.

<sup>22</sup>Das Modell geht sowohl hinsichtlich des Alters und des Zeitpunktes von stückweise konstanten Sterblichkeitsintensitäten aus. Üblicherweise werden zumindest bis zu einem gewissen Alter einjährige Altersgruppen betrachtet (vgl. z. B. BROUHNS ET AL., 2002; RENSHAW & HABERMAN, 2003c); im Ursprungsmodell modellieren LEE & CARTER (1992) fünfjährige Altersgruppen.

<sup>23</sup>Während LEE & CARTER (1992) ihr Modell zunächst für die  $x$ -jährigen Altersgruppen der Gesamtbevölkerung anwenden, differenzieren CARTER & LEE (1992) nach Geschlechtern. Dazu schätzen sie zum einen zwei getrennte Modelle für Männer und Frauen und zum anderen ein gemeinsames Modell für beide Geschlechter. Im ersten Fall haben Männer und Frauen je einen Zeitindex; im zweiten Fall gibt es einen gemeinsamen Zeitindex, aber im Gegensatz zum Modell von LEE & CARTER (1992) geschlechtsspezifische Altersparameter.

als normalverteilt angenommen wird, spricht man auch von einer Gauß'schen Fehlerstruktur (BROUHNS ET AL., 2002).

Um die für die Modellschätzung notwendige, aber unrealistische Annahme homoskedastischer und normalverteilter Fehler zu umgehen, schlagen BROUHNS ET AL. (2002) in ihrer Weiterentwicklung des LEE & CARTER (1992)-Modells eine Poisson'sche Fehlerstruktur vor. Dazu modellieren sie die Anzahl der Todesfälle  $D_{x,t}$  als eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Intensität  $\tilde{D}_{x,t} := E_{x,t}\mu_{x,t}$ :

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(\tilde{D}_{x,t}). \quad (2.2)$$

$E_{x,t}$  entspricht dabei der Exposure der Altersklasse  $x$  in der Zeitperiode  $t$ , d. h. der Summe der von  $x$ -Jährigen in  $t$  gelebten Jahre.

Die hinsichtlich des Alters  $x$  und des Zeitpunktes  $t$  stückweise konstante Sterblichkeitsintensität  $\mu_{x,t}$  wird in Anlehnung an LEE & CARTER (1992) als

$$\ln \mu_{x,t} := \alpha_x + \beta_x \kappa_t \quad (2.3)$$

definiert. Die Interpretation der Parameter entspricht im Wesentlichen der des ursprünglichen LEE & CARTER (1992)-Modells. Im Gegensatz zur Gauß'schen Fehlerstruktur werden Abweichungen zwischen den vom Modell vorhergesagten und den aus Todesfällen und Bevölkerungsdaten geschätzten Sterberaten jedoch nicht mehr durch eine additive, normalverteilte Störgröße in der logarithmierten Sterberate erklärt; sie kommen vielmehr dadurch zustande, dass die Anzahl der Todesfälle Poisson-verteilt und daher – ebenso wie die aus den Todesfällen geschätzten, historischen Sterberaten – selbst bei gegebener Sterblichkeitsintensität stochastisch ist.

Unabhängig von der gewählten Fehlerstruktur ist das Modell in seiner bisherigen Form unterbestimmt. Um das resultierende Identifikationsproblem bei der Parameterschätzung zu umgehen, werden i. d. R. folgende Nebenbedingungen gestellt (CAIRNS ET AL., 2009; LEE & CARTER, 1992):<sup>24</sup>

$$\sum_x \beta_x \stackrel{!}{=} 1 \quad (2.4)$$

$$\sum_t \kappa_t \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.5)$$

<sup>24</sup>Die Wahl dieser Nebenbedingungen bestätigt die oben beschriebene Interpretation der Parameter, insbesondere da  $\alpha_x$  zumindest näherungsweise dem Durchschnitt von  $\ln \mu_{x,t}$  über  $t$  und damit der allgemeinen Form der logarithmierten, altersspezifischen Sterblichkeitsintensität entspricht.

Wie CAIRNS ET AL. (2009) anmerken, hat die Wahl der Nebenbedingung für  $\kappa_t$  keine Auswirkung auf die Güte der Schätzung oder Prognosen.

### 2.3.2 Modellschätzung

Das Vorgehen zur Modellschätzung hängt wesentlich von der Wahl der Fehlerstruktur ab.

#### 2.3.2.1 Modellschätzung bei Gauß'scher Fehlerstruktur

Für das Ursprungsmodell mit der Gauß'schen Fehlerstruktur schlagen LEE & CARTER (1992) eine Modellschätzung in zwei Schritten vor.

Im *ersten Schritt* wird die Summe der quadratischen Abweichungen  $\epsilon_{x,t}$  minimiert. Da  $\beta_x$  und  $\kappa_t$  beide unbekannt sind, kann dies nicht über eine lineare Regression erfolgen. LEE & CARTER (1992) empfehlen daher die Singulärwertzerlegung als Schätzverfahren. Dazu setzt man den Schätzwert  $\hat{\alpha}_x$  des Koeffizienten  $\alpha_x$  gleich dem Durchschnitt  $\overline{\ln m_{x,t}}$  der logarithmierten, altersspezifischen Sterberaten über Zeit. Dann wendet man die Singulärwertzerlegung auf die Matrix  $\ln m_{x,t} - \hat{\alpha}_x$  an, um den Schätzwert  $\hat{\beta}_x$  für  $\beta_x$  sowie einen ersten Schätzwert  $\hat{\kappa}_t^{(1)}$  für  $\kappa_t$  zu erhalten.

Im *zweiten Schritt* wird der vorläufige Schätzwert  $\hat{\kappa}_t^{(1)}$  des Zeitindex neu geschätzt. Dies ist ratsam, da die aus den geschätzten Sterberaten berechnete Anzahl an Todesfällen weder mit den tatsächlichen Anzahlen (LEE & CARTER, 1992) noch mit den erwarteten Anzahlen übereinstimmen werden. Letzteres liegt an der Tatsache, dass  $\mathbb{E}[\exp(m_{x,t})] \neq \exp(\mathbb{E}[m_{x,t}])$  gilt. Darüber hinaus werden im ersten Schritt zwar die quadratischen Abweichungen der logarithmierten Sterberaten minimiert, nicht aber die der Sterberaten selbst (ebd.).

Bei der Neuschätzung wird der neue Schätzwert  $\hat{\kappa}_t^{(2)}$  für  $\kappa_t$  so bestimmt, dass die Summe der tatsächlichen Anzahl der Todesfälle  $D_{x,t}$  aller Altersklassen  $x$  in einer Periode  $t$  der Summe der aufgrund der Exposures  $E_{x,t}$  dieser Altersklassen  $x$  im Zeitraum  $t$  erwarteten Todesfällen entspricht. Gesucht wird also das  $\hat{\kappa}_t^{(2)}$ , für das

$$\sum_x D_{x,t} \stackrel{!}{=} \sum_x E_{x,t} \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\kappa}_t^{(2)} \hat{\beta}_x\right) \quad (2.6)$$

gilt (ebd.). Das Ergebnis ist der finale Schätzwert für  $\kappa_t$ , d. h.  $\hat{\kappa}_t = \hat{\kappa}_t^{(2)}$ .

WILMOTH (1993) erweitert den Ansatz von LEE & CARTER (1992) um eine Gewichtung. Dies erlaubt zum einen die Verwendung von unvollständigen Datensätzen. Zum anderen kann, wenn man die Anzahl der alters- und zeitspezifischen Todesfälle  $D_{x,t}$  als Gewichte

verwendet, die Neuschätzung von  $\hat{\kappa}_t^{(1)}$  entfallen (LEE, 2000).

### 2.3.2.2 Modellschätzung bei Poisson'scher Fehlerstruktur

Im Fall einer Poisson'schen Fehlerstruktur erfolgt die Parameterschätzung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode. Dazu muss zunächst die zu maximierende Likelihood-Funktion bestimmt werden. Dann kann ein Algorithmus zur Schätzung der Parameter entwickelt und angewandt werden. Eine anschließende Neuschätzung von  $\kappa_t$  ist im Gegensatz zur Gauß'schen Fehlerstruktur nicht erforderlich (BROUHNS ET AL., 2002).

#### Likelihood-Funktion

Die zu maximierende Likelihood-Funktion  $\tilde{L}_{x,t}$  für die Anzahl der Todesfälle  $D_{x,t}$  in einer einzelnen Altersgruppe  $x$  und einem einzelnen Zeitpunkt  $t$  ist bei Annahme einer Poisson-Verteilung mit Intensität  $\tilde{D}_{x,t} = E_{x,t}\mu_{x,t}$  gegeben durch (WILMOTH, 1993):

$$\tilde{L}_{x,t}(D_{x,t}) = \exp(-\tilde{D}_{x,t}) \cdot \frac{\tilde{D}_{x,t}^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!}. \quad (2.7)$$

Unter der Annahme, dass die Todesfälle verschiedener Altersgruppen und Jahre bei gegebener Intensität unabhängig sind (zu Abhängigkeitsannahmen in der Sterblichkeitsmodellierung vgl. auch Kapitel 2.2.2.2), folgt für die gemeinsame Likelihood-Funktion  $\tilde{L}$  über alle Altersklassen und Zeitpunkte (WILMOTH, 1993):

$$\tilde{L} = \prod_{x,t} \tilde{L}_{x,t}(D_{x,t}). \quad (2.8)$$

Wie in Verbindung mit Gleichungen (2.3) und (2.7) erkennbar, müssen zur Berechnung der gemeinsamen Likelihood-Funktion  $\tilde{L}$  für alle  $x$  und  $t$  die Werte für  $\mu_{x,t}$ ,  $D_{x,t}$  und  $E_{x,t}$  gegeben und ungleich null sein. Möchte man das Modell auch im Fall fehlender Datenpunkte bzw. von Datenpunkten von null schätzen, kann man in Analogie zur Weighted-Least-Squares-Methode von WILMOTH (1993) auf Gewichte  $w_{x,t}$  zurückgreifen.

Für alle  $x$  und  $t$  mit fehlenden Werten bzw. Werten von null für  $\mu_{x,t}$ ,  $D_{x,t}$  oder  $E_{x,t}$  setze man  $w_{x,t} = 0$  sowie  $\mu_{x,t} \neq 0$ ,  $D_{x,t} \neq 0$  und  $E_{x,t} \neq 0$ . Für alle anderen  $x$  und  $t$  wähle man  $w_{x,t} = 1$  und maximiere die gewichtete Likelihood-Funktion  $\tilde{L}_{\text{gew}}$ :

$$\tilde{L}_{\text{gew}} := \prod_{x,t} \tilde{L}_{x,t}(D_{x,t})^{w_{x,t}}. \quad (2.9)$$

Wegen der strengen Monotonie des Logarithmus und wegen

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{L}_{\text{gew}} &= \sum_{x,t} w_{x,t} \cdot \ln \tilde{L}_{x,t}(D_{x,t}) \\
&= \sum_{x,t} w_{x,t} \left( D_{x,t} \ln \tilde{D}_{x,t} - \tilde{D}_{x,t} - \ln(D_{x,t}!) \right) \\
&= \sum_{x,t} w_{x,t} \left( D_{x,t} \ln \mu_{x,t} - \tilde{D}_{x,t} \right) + \text{Konstante}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

kann statt der gewichteten Likelihood-Funktion  $\tilde{L}_{\text{gew}}$  auch die Funktion  $\tilde{L}$  mit

$$\tilde{L} = \sum_{x,t} w_{x,t} \left( D_{x,t} \ln \mu_{x,t} - \tilde{D}_{x,t} \right) \tag{2.11}$$

maximiert werden, wobei zur Erinnerung weiterhin  $\tilde{D}_{x,t} = E_{x,t} \mu_{x,t}$  und nach (2.3)  $\mu_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$  gelten.

### Algorithmus

Ein geeigneter Algorithmus zur Schätzung der Parameter muss die Funktion  $\tilde{L}$  unter Beachtung der Nebenbedingungen (2.4) und (2.5) maximieren. Die Maximierung von  $\tilde{L}$  kann mit Hilfe eines elementaren Newton-Verfahren nach GOODMAN (1979) geschehen, bei dem nacheinander verschiedene Klassen von Parametern – im Fall des LEE & CARTER (1992)-Modells  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  und  $\kappa_t$  – jeweils unter Festsetzung der übrigen Parameter nach dem Newton-Verfahren aktualisiert werden (BROUHNS ET AL., 2002).<sup>25</sup> Einem Parameter  $u$  wird dabei in Iterationsschritt  $\nu + 1$  der Schätzwert

$$\hat{u}^{(\nu+1)} := \hat{u}^{(\nu)} - \frac{\partial \tilde{L}^{(\nu)} / \partial u}{\partial^2 \tilde{L}^{(\nu)} / \partial u^2} \tag{2.12}$$

zugewiesen, wobei  $\tilde{L}^{(\nu)}$  dem mit Hilfe der Schätzwerte aller Parameter in Iterationsschritt  $\nu$  berechneten Werts der Funktion  $\tilde{L}$  entspricht.

Im Fall des LEE & CARTER (1992)-Modells werden die Schätzwerte  $\hat{\alpha}_x^{(\nu)}$ ,  $\hat{\beta}_x^{(\nu)}$ ,  $\hat{\kappa}_t^{(\nu)}$ ,  $\hat{\mu}_{x,t}^{(\nu)} := \exp\left(\hat{\alpha}_x^{(\nu)} + \hat{\beta}_x^{(\nu)} \hat{\kappa}_t^{(\nu)}\right)$  und  $\hat{D}_{x,t}^{(\nu)} := E_{x,t} \hat{\mu}_{x,t}^{(\nu)}$  der Größen  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ ,  $\mu_{x,t}$  bzw.  $\tilde{D}_{x,t}$  verwendet.

<sup>25</sup> Aufgrund des bilinearen Ausdrucks  $\beta_x \kappa_t$  in der Funktion  $\tilde{L}$  können die Parameter nicht mit einer Poisson-Regression bestimmt werden (BROUHNS ET AL., 2002).

Weiter gilt:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \alpha_x} = \sum_{x,t} w_{x,t} (D_{x,t} - \tilde{D}_{x,t}) \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \alpha_x^2} = - \sum_{x,t} w_{x,t} \tilde{D}_{x,t} \quad (2.13b)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \beta_x} = \sum_{x,t} w_{x,t} (D_{x,t} - \tilde{D}_{x,t}) \kappa_t \quad (2.13c)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \beta_x^2} = - \sum_{x,t} w_{x,t} \tilde{D}_{x,t} \kappa_t^2 \quad (2.13d)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \kappa_t} = \sum_{x,t} w_{x,t} (D_{x,t} - \tilde{D}_{x,t}) \beta_x \quad (2.13e)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \kappa_t^2} = - \sum_{x,t} w_{x,t} \tilde{D}_{x,t} \beta_x^2. \quad (2.13f)$$

Die Einhaltung der Nebenbedingungen (2.4) und (2.5) kann durch wiederholte Skalierung der Parameter sichergestellt werden:

$$\hat{\alpha}_x^{(\nu+1)} := \hat{\alpha}_x^{(\nu)} + \hat{\beta}_x^{(\nu)} \overline{\hat{\kappa}_t^{(\nu)}} \quad (2.14a)$$

$$\hat{\beta}_x^{(\nu+1)} := \hat{\beta}_x^{(\nu)} / \sum_x \hat{\beta}_x^{(\nu)} \quad (2.14b)$$

$$\hat{\kappa}_t^{(\nu+1)} := \left( \hat{\kappa}_t^{(\nu)} - \overline{\hat{\kappa}_t^{(\nu)}} \right) \cdot \sum_x \hat{\beta}_x^{(\nu)}, \quad (2.14c)$$

wobei  $\overline{\hat{\kappa}_t^{(\nu)}}$  für den Durchschnitt von  $\hat{\kappa}_t^{(\nu)}$  über  $t$  steht. Es wird deutlich, dass jede Aktualisierung von  $\hat{\kappa}_t^{(\nu-1)}$  und  $\hat{\beta}_x^{(\nu-1)}$  eine Reskalierung von  $\hat{\alpha}_x^{(\nu)}$  und  $\hat{\kappa}_t^{(\nu)}$  bzw. von  $\hat{\alpha}_x^{(\nu)}$ ,  $\hat{\beta}_x^{(\nu)}$  und  $\hat{\kappa}_t^{(\nu)}$  nach sich zieht.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich folgender Algorithmus:

1. Skalierung der Startwerte  $\hat{\alpha}_x^{(0)}$ ,  $\hat{\beta}_x^{(0)}$  und  $\hat{\kappa}_t^{(0)}$  gemäß Gleichungen (2.14a), (2.14b) und (2.14c)
2. Aktualisierung von  $\hat{\alpha}_x^{(\nu)}$  gemäß Gleichungen (2.12), (2.13a) und (2.13b) auf

$$\hat{\alpha}_x^{(\nu+1)} := \hat{\alpha}_x^{(\nu)} - \frac{\sum_t w_{x,t} (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(\nu)})}{-\sum_t w_{x,t} \hat{D}_{x,t}^{(\nu)}} \quad (2.15a)$$

und Festsetzen von  $\hat{\beta}_x^{(\nu+1)} := \hat{\beta}_x^{(\nu)}$  und  $\hat{\kappa}_t^{(\nu+1)} := \hat{\kappa}_t^{(\nu)}$

3. Aktualisierung von  $\hat{\kappa}_t^{(\nu+1)}$  gemäß Gleichungen (2.12), (2.13e) und (2.13f) auf

$$\hat{\kappa}_t^{(\nu+2)} := \hat{\kappa}_t^{(\nu+1)} - \frac{\sum_t w_{x,t} (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(\nu+1)}) \hat{\beta}_x^{(\nu+1)}}{-\sum_t w_{x,t} \hat{D}_{x,t}^{(\nu+1)} (\hat{\beta}_x^{(\nu+1)})^2} \quad (2.15b)$$

und Festsetzen von  $\hat{\alpha}_x^{(\nu+2)} := \hat{\alpha}_x^{(\nu+1)}$  und  $\hat{\beta}_x^{(\nu+2)} := \hat{\beta}_x^{(\nu+1)}$

4. Reskalierung von  $\hat{\alpha}_x^{(\nu+2)}$  und  $\hat{\kappa}_t^{(\nu+2)}$  gemäß Gleichungen (2.14a) und (2.14c) und Festsetzen von  $\hat{\beta}_x^{(\nu+3)} := \hat{\beta}_x^{(\nu+2)}$

5. Aktualisierung von  $\hat{\beta}_x^{(\nu+3)}$  gemäß Gleichungen (2.12), (2.13c) und (2.13d) auf

$$\hat{\beta}_x^{(\nu+4)} := \hat{\beta}_x^{(\nu+3)} - \frac{\sum_t w_{x,t} (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(\nu+3)}) \hat{\kappa}_t^{(\nu+3)}}{-\sum_t w_{x,t} \hat{D}_{x,t}^{(\nu+3)} (\hat{\kappa}_t^{(\nu+3)})^2} \quad (2.15c)$$

und Festsetzen von  $\hat{\alpha}_x^{(\nu+4)} := \hat{\alpha}_x^{(\nu+3)}$  und  $\hat{\kappa}_t^{(\nu+4)} := \hat{\kappa}_t^{(\nu+3)}$

6. Reskalierung von  $\hat{\alpha}_x^{(\nu+4)}$ ,  $\hat{\beta}_x^{(\nu+4)}$  und  $\hat{\kappa}_t^{(\nu+4)}$  gemäß Gleichungen (2.14a), (2.14b) und (2.14c).

Schritte 2 bis 6 des Algorithmus werden solange wiederholt, bis die Zunahme von  $\tilde{L}^{(\nu)}$  hinreichend klein ist. BROUHNS ET AL. (2002) schlagen dazu eine Toleranzgrenze von  $10^{-10}$  vor. Als Startwerte können z. B.  $\hat{\alpha}_x^{(0)} := 0$ ,  $\hat{\beta}_x^{(0)} := 1$  sowie  $\hat{\kappa}_t^{(0)} := 0$  (ebd.),  $\hat{\alpha}_x^{(0)} := \overline{\ln \mu_{x,t}}$ ,  $\hat{\beta}_x^{(0)} := 1$  sowie  $\hat{\kappa}_t^{(0)} := 0$  oder die Ergebnisse der Singulärwertzerlegung des Gauß'schen Modells gewählt werden.

### 2.3.3 Prognose und Simulation

Prognose und Simulation des LEE & CARTER (1992)-Modells erfolgen mit Hilfe eines Autoregressive-Integrated-Moving-Average-Modells (ARIMA-Modells) für den Zeitindex. Dieses wird zunächst geschätzt und dann zur Prognose bzw. Simulation des Zeitindex genutzt. Die Sterblichkeitsintensitäten bzw. Sterberaten können dann unter Benutzung der geschätzten Altersparameter und Gleichung (2.1) bzw. (2.3) berechnet werden. Dieses Vorgehen erlaubt auch die Bestimmung von Konfidenzintervallen für die prognostizierten Werte (LEE & CARTER, 1992).

In den meisten Beiträgen wird der Zeitindex als ARIMA-Modell mit einmaliger Differenzierung, Drift und maximal zwei autoregressiven oder Moving-Average-Elementen (AR- oder



MA-Elementen) modelliert (vgl. z. B. BROUHNS ET AL., 2002). Nicht selten wird sogar ein ARIMA(0,1,0)-Modell (vgl. z. B. CARTER & LEE, 1992; LEE, 2000; LEE & CARTER, 1992) zugrunde gelegt.

Diese Linearität des Zeitindex stellt einen wesentlichen Grund für die Einfachheit und die Beliebtheit des LEE & CARTER (1992)-Modells dar, kann aber leider nicht bei jedem Land und Zeitraum beibehalten werden (BOOTH ET AL., 2002). BOOTH ET AL. (2002) schlagen daher vor, den bei der Modellschätzung zugrunde gelegten Zeitpunkt so zu wählen, dass der Zeitindex einen möglichst linearen Verlauf hat. Dazu vergleichen sie für verschiedene Zeiträume, wie sehr eine Linearisierung des Zeitindex die Modellschätzung verschlechtert. Die Zeiträume werden dabei allein durch das Startjahr bestimmt; als Endjahr wird stets das neueste Jahr mit verfügbaren Sterblichkeitsdaten gewählt.

Als Maß für die Güte der linearisierten und der nicht linearisierten Modellschätzung wählen BOOTH ET AL. (2002) die Deviance. Dazu modellieren sie die Anzahl der Todesfälle  $D_{x,t}$  der Altersklasse  $x$  im Jahr  $t$  als Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Intensität  $\hat{D}_{x,t}$  im ursprünglich geschätzten<sup>26</sup> bzw.  $\hat{\hat{D}}_{x,t}$  im linearisierten Modell:

$$\text{Ursprüngliches Modell:} \quad D_{x,t} \sim \text{Poisson} \left( \hat{D}_{x,t} \right) \quad (2.16a)$$

$$\text{Linearisiertes Modell:} \quad D_{x,t} \sim \text{Poisson} \left( \hat{\hat{D}}_{x,t} \right). \quad (2.16b)$$

$\hat{D}_{x,t} := E_{x,t} \hat{\mu}_{x,t}$  und  $\hat{\hat{D}}_{x,t} := E_{x,t} \hat{\hat{\mu}}_{x,t}$  stellen die im jeweiligen Modell erwarteten Todesfälle von  $x$ -Jährigen in Jahr  $t$  dar, wobei

$$\hat{\mu}_{x,t} := \exp \left( \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t \right) \quad (2.17a)$$

$$\hat{\hat{\mu}}_{x,t} := \exp \left( \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\hat{\kappa}}_t \right) \quad (2.17b)$$

gilt. Bei  $\hat{\alpha}_x$ ,  $\hat{\beta}_x$  und  $\hat{\kappa}_t$  handelt es sich um die ursprünglich geschätzten Parameter des Sterblichkeitsmodells.  $\hat{\hat{\kappa}}_t$  ergibt sich durch folgende Linearisierung von  $\hat{\kappa}_t$ :

$$\hat{\hat{\kappa}}_t := \overline{\hat{\kappa}_t} + (t - \bar{t}) \overline{\Delta \hat{\kappa}_t}. \quad (2.18)$$

Die Deviances beider Modelle werden im Vergleich zum vollständigen Poisson-Modell be-

<sup>26</sup>BOOTH ET AL. (2002) wählen für ihren Beitrag ein LEE & CARTER (1992)-Modell mit Gauß'scher Fehlerstruktur und schätzen den Zeitindex – als leichte Abwandlung zum ursprünglichen Vorgehen von LEE & CARTER (1992) – über eine Poisson-Regression neu. Ihr Ansatz zur Bestimmung des optimalen Modellzeitraums ist jedoch leicht auf andere demographische Zeitreihenmodelle und Modellformulierungen übertragbar.

stimmt, bei dem die Intensität den realisierten Todesfällen entspricht. Die Likelihood-Funktionen der drei Modelle für die Anzahl Todesfälle  $D_{x,t}$  von Altersgruppe  $x$  im Jahr  $t$  sind:

$$\text{Ursprüngliches Modell:} \quad \hat{L}_{x,t}(D_{x,t}) = \exp\left(-\hat{D}_{x,t}\right) \frac{\hat{D}_{x,t}^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!} \quad (2.19a)$$

$$\text{Linearisiertes Modell:} \quad \hat{\hat{L}}_{x,t}(D_{x,t}) = \exp\left(-\hat{\hat{D}}_{x,t}\right) \frac{\hat{\hat{D}}_{x,t}^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!} \quad (2.19b)$$

$$\text{Vollständiges Modell:} \quad L_{x,t}(D_{x,t}) = \exp(-D_{x,t}) \frac{D_{x,t}^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!} \quad (2.19c)$$

und die Log-Likelihood-Funktionen entsprechend:

$$\ln \hat{L}_{x,t}(D_{x,t}) = D_{x,t} \ln \hat{D}_{x,t} - \hat{D}_{x,t} - \ln(D_{x,t}!) \quad (2.20a)$$

$$\ln \hat{\hat{L}}_{x,t}(D_{x,t}) = D_{x,t} \ln \hat{\hat{D}}_{x,t} - \hat{\hat{D}}_{x,t} - \ln(D_{x,t}!) \quad (2.20b)$$

$$\ln L_{x,t}(D_{x,t}) = D_{x,t} \ln D_{x,t} - D_{x,t} - \ln(D_{x,t}!). \quad (2.20c)$$

Für die Deviances  $\widehat{\text{Dev}}$  und  $\widehat{\widehat{\text{Dev}}}$  über alle Altersgruppe und Zeitpunkte im ursprünglichen bzw. linearisierten Modell folgt:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Dev}} &= -2 \sum_{x,t} w_{x,t} \left( \ln \hat{L}_{x,t}(D_{x,t}) - \ln L_{x,t}(D_{x,t}) \right) \\ &= -2 \sum_{x,t} w_{x,t} \left( D_{x,t} \ln \frac{\hat{D}_{x,t}}{D_{x,t}} - (\hat{D}_{x,t} - D_{x,t}) \right) \end{aligned} \quad (2.21a)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\text{Dev}}} &= -2 \sum_{x,t} w_{x,t} \left( \ln \hat{\hat{L}}_{x,t}(D_{x,t}) - \ln L_{x,t}(D_{x,t}) \right) \\ &= -2 \sum_{x,t} w_{x,t} \left( D_{x,t} \ln \frac{\hat{\hat{D}}_{x,t}}{D_{x,t}} - (\hat{\hat{D}}_{x,t} - D_{x,t}) \right). \end{aligned} \quad (2.21b)$$

Im Gegensatz zu BOOTH ET AL. (2002) und im Einklang mit den beschriebenen gewichteten Modellschätzungen wird hier eine Gewichtung der einzelnen Deviances erlaubt. Fehlende Datenpunkte oder Datenpunkte von null können so mit null, alle anderen mit eins gewichtet werden.

Die Entscheidung über den optimalen Modellzeitraum treffen BOOTH ET AL. (2002) mit Hilfe des Verhältnisses  $R$  der durchschnittlichen Deviance des linearisierten zum ursprünglichen

Modell:

$$R := \frac{\widehat{\text{Dev}}/\widehat{\text{DoF}}}{\widehat{\text{Dev}}/\widehat{\text{DoF}}}. \quad (2.22)$$

Die durchschnittliche Deviance wird mit Hilfe der Freiheitsgerade der beiden Modelle  $\widehat{\text{DoF}} = \sum_x 1 (\sum_t 1 - 2)$  bzw.  $\widehat{\text{DoF}} = (\sum_x 1 - 1) (\sum_t 1 - 2)$  als  $\widehat{\text{Dev}}/\widehat{\text{DoF}}$  bzw.  $\widehat{\text{Dev}}/\widehat{\text{DoF}}$  berechnet. Als optimaler Zeitraum für die Modellschätzung wird derjenige angesehen, für den das Deviance-Verhältnis  $R$  wesentlich niedriger ist als für die vorhergegangenen, längeren Zeiträume (BOOTH ET AL., 2002).

## Kapitel 3

# Aktienkurs- und Zinsstrukturmodellierung

Eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Finanzmarktgrößen wie Aktienkursen oder Zinsen kann Auswirkungen auf den Wert von Sterblichkeitsderivaten haben. Da die Berücksichtigung einer solchen Abhängigkeit eine explizite Modellierung des Aktienkurs- bzw. Zinsprozesses erfordert, werden im Folgenden die bekanntesten Aktien- und Zinsmodelle knapp dargestellt.

Angesichts der Fülle an Literatur zur Aktienkurs- und Zinsstrukturmodellierung sowie der Tatsache, dass das Thema dieser Arbeit die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten ist, kann der Überblick nur unvollständig sein und ist bewusst knapp gehalten. Der Schwerpunkt wird auf den Ansatz von CHAN ET AL. (1992) und die von ihnen untersuchten Short-Rate-Modelle gelegt. Ihr Beitrag wird ebenso wie das Modell von BLACK & SCHOLES (1973) für die später folgenden, empirischen Untersuchungen relevant sein.

Für einen detaillierteren Überblick zu Zinsstrukturmodellen sei auf BRIGO & MERCURIO (2006) verwiesen.

### 3.1 Klassifizierung von Aktienkursmodellen

Aktienkursmodelle können in solche unterteilt werden, bei denen der Aktienkurs als eine endogene Variable modelliert wird, und solche, bei denen er eine exogene Variable ist. Im ersten Fall ergeben sich der Aktienkurs und sein Prozess aus einem zugrunde liegenden

Modell. Dies ist beispielsweise bei Modellen der Fall, die Aktien als Call-Optionen auf den Firmenwert eines Unternehmens interpretieren (vgl. BLACK & SHOLES, 1973, S. 649 ff.).

Im zweiten Fall wird der Aktienkurs direkt und unabhängig von weiteren erklärenden Variablen modelliert. Der Kurs  $S$  einer nicht ausschüttenden Aktie folgt hier i. d. R. einem Diffusionsprozess. Im einfachsten und bekanntesten Fall handelt es sich dabei um die von BLACK & SHOLES (1973) vorgeschlagene geometrische Brown'sche Bewegung mit Drift:

$$d \ln S_t = \alpha_S dt + \sigma_S dW_{S,t} \quad (3.1)$$

bzw.

$$d \ln S_t = \tilde{\alpha}_S dt + \sigma_S d\tilde{W}_{S,t}. \quad (3.2)$$

Dabei stellen  $\alpha_S$  bzw.  $\tilde{\alpha}_S$  einen konstanten Drift,  $\sigma_S$  eine konstante Volatilität und  $W_S$  bzw.  $\tilde{W}_S$  eine eindimensionale, standardisierte Brown'sche Bewegung unter dem realen Maß  $\mathbb{P}$  bzw. unter dem äquivalenten Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  dar. Der Numéraire von letzterem ist das Geldmarktkonto. In diskreter Zeit entspricht dieser Prozess einem ARIMA(0,1,0)-Modell für den logarithmierten Aktienkurs,  $\ln S$ .

Unter der Annahme eines friktionslosen Markts mit konstantem und bekanntem Momentanzins  $r$  leiten BLACK & SHOLES (1973) mit Hilfe von Arbitrageargumenten aus dem beschriebenen Aktienprozess geschlossene Lösungen für europäische Call- und Put-Optionen auf Aktien ohne Dividendenzahlung her. Dazu nutzen sie die Tatsache, dass bei geeigneter Wahl des Numéraire der Drift unter dem äquivalenten Martingalmaß dem Momentanzins entspricht, also  $\tilde{\alpha}_S = r$  gilt.

Der Beitrag von BLACK & SHOLES (1973) hatte großen Einfluss auf die Bewertung von Derivaten und die Entwicklung ihrer Märkte. Erstmals konnte ein fairer und präferenzfreier Preis für Optionen bestimmt werden, wenngleich nur mit Hilfe sehr restriktiver Annahmen (OEHLER & UNSER, 2002, S. 85). Diese Annahmen haben sich als Marktstandard für die Berechnung der impliziten Volatilität entwickelt. Dabei handelt es sich um die Volatilität, bei der der beobachtete Marktpreis einer Option mit dem Modellpreis übereinstimmt. Dass die impliziten Volatilitäten i. d. R. weder im Zeitablauf noch für verschiedene Ausübungspreise konstant sind, spricht jedoch dafür, dass die Modellannahmen von BLACK & SHOLES (1973) in der Realität nicht zutreffen.

Besonders fragwürdig sind die Annahmen eines kontinuierlichen Handels ohne Sprünge und einer Normalverteilung der Aktienrenditen (OEHLER & UNSER, 2002, S. 87). Tatsächlich verfügt die empirische Verteilung von Aktienkursen über mehr Masse in den Enden, als

von einer Lognormalverteilung vorausgesagt wird (ebd.). Dies veranlasst viele Forscher, den Aktienprozess von BLACK & SHOLES (1973) zu erweitern, beispielsweise um Sprungprozesse (z. B. MERTON, 1976), um eine stochastische Volatilität (z. B. HESTON, 1993) oder um stochastische Sprünge, Volatilität und Zinsen (z. B. BAKSHI ET AL., 1997). MUCK (2007) wendet diese Erweiterungen auf die Bewertung von Turbozertifikaten an.

Auf Basis der Modelle einzelner Aktienkurse können auch Modelle für Aktienindizes entwickelt werden. Dabei kann man den Index entweder als gewichtete Summe seiner Aktien und deren Prozesse oder als Ganzes mit einem einzigen, sonst für Einzelaktien gebräuchlichen Prozess modellieren. Letzteren Ansatz verfolgt beispielsweise HULL (2003, S. 275 f.). Bei Performance-Indizes können dazu Modelle für nicht ausschüttende Aktien verwendet werden, bei Kursindizes deren Drift im einfachsten Fall um eine konstante Dividendenrate verringert werden.

Der erste der beiden Ansätze hat den Vorteil, im Einklang mit den Modellen der Einzelaktien zu stehen und eine explizite Modellierung von Abhängigkeiten zwischen allen oder Teilen der Einzelaktien zu erlauben. Der zweite vereinfacht die Modellstruktur und ermöglicht es, Ergebnisse bei der Bewertung von Aktienoptionen auf die Bewertung von Aktienindexoptionen zu übertragen. Er wird daher bei der späteren Schätzung der Aktienindexmodelle verfolgt.

## 3.2 Klassifizierung von Zinsstrukturmodellen

Wie die Modelle zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten lassen sich Zinsmodelle in drei Gruppen einteilen: Short-Rate-Modelle, Forward-Rate-Modelle und Marktmodelle.

### 3.2.1 Short-Rate-Modelle

Short-Rate-Modelle modellieren die Zinsstruktur über den Momentanzins. Dies ist der Zins  $r$ , der für einen infinitesimal kurzen Zeitraum gültig ist (HULL, 2003, S. 537). Aus seiner Dynamik ergibt sich bei Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes aufgrund von Arbitrageargumenten für alle Fälligkeitstermine  $T > t$  der Wert  $P(T)$  einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 1 im Zeitpunkt  $t > 0$  als

$$P_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r_s \, ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3.3)$$

(BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 51).<sup>27</sup>

Insbesondere ist dadurch die gesamte Zinsstruktur festgelegt.  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$  stehen dabei für den Erwartungswertoperator unter dem äquivalenten Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  und  $\mathcal{F}_t$  für die zum Zeitpunkt  $t$  verfügbare Information. Der zu  $\mathbb{Q}$  gehörende Numéraire ist das Geldmarktkonto  $B$  mit

$$B_t := \exp\left(\int_0^t r_s ds\right). \quad (3.4)$$

Eine Vielzahl unterschiedlicher Short-Rate-Modelle existiert. BRIGO & MERCURIO (2006, Kapitel 3, S. 51 ff.) unterscheiden Einfaktor- und Mehrfaktorenmodelle. *Einfaktormodellen* liegt ein eindimensionaler Diffusionsprozess zugrunde (ebd., S. XIX). Sind die Modellparameter konstant, sprechen die Autoren von zeithomogenen Modellen (ebd., S. 57), ansonsten von zeitinhomogenen Modellen.

Bei zeithomogenen Einfaktormodellen ergibt sich die Zinsstruktur endogen aus der Modell-dynamik des Momentanzinses (ebd., S. 57f.). Die Parameter können an der aktuellen Zinsstrukturkurve kalibriert werden, reichen aber i. d. R. nicht aus, um sie hinreichend genau abzubilden (ebd.). Bei manchen Modellen lassen sich zudem nicht alle Zinsstrukturformen erzeugen (ebd.). Einige der bekanntesten zeithomogenen Short-Rate-Modelle werden in Kapitel 3.3.1 vorgestellt, da sie bei den in Kapitel 5 beschriebenen Modellschätzungen und Abhängigkeitsanalysen Verwendung finden werden.

Im Gegensatz zu zeithomogenen Modellen modellieren zeitinhomogene Modelle einen Teil der Parameter in Abhängigkeit der Zeit. Dadurch wird die Zinsstruktur exogen, d. h. sie ist nicht mehr Ergebnis, sondern eine von außen vorgegebene Größe des Modells. Die zeitabhängigen Parameter können so gewählt werden, dass das Modell die aktuelle Zinsstruktur genau wiedergibt (ebd., S. 55). Beispiele für diese exogenen Zinsmodelle sind das von HULL & WHITE (1990) erweiterte VASIČEK (1977)-Modell sowie das Modell von BLACK & KARASINKSI (1991).

*Mehrfaktorenmodelle* basieren im Gegensatz zu Einfaktormodellen auf einem mehrdimensionalen Diffusionsprozess (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. XXI). Dadurch können sie eine nicht perfekte Korrelation zwischen Zinssätzen bzw. Zinsprodukten unterschiedlicher Laufzeiten modellieren (ebd., S. 137 ff.). Dies kommt der Realität näher und ist bei der Bewertung

<sup>27</sup> Auch wenn für die Bewertung von Zinsprodukten das risikoneutrale Maß relevant ist, erfolgt die Formulierung des Zinsprozesses in manchen Fällen zunächst unter dem realen Maß (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 51 ff.). Ein Maßwechsel ist jedoch mit Hilfe des Girsanov-Theorems möglich. Bei geeigneter Wahl des Prozesses für den Marktpreis des Risikos bleibt die Modellstruktur auch unter dem äquivalenten Martingalmaß erhalten (ebd.).

von Zinsderivaten, deren Wert von der Korrelation unterschiedlicher Zinssätze abhängt, von großer Bedeutung. Diesem Vorteil steht eine größere Modellkomplexität gegenüber. Beispiele für Mehrfaktorenmodelle befinden sich in BRIGO & MERCURIO (2006, Kapitel 4, S. 137 ff.).

### 3.2.2 Forward-Rate-Modelle

Forward-Rate-Modelle modellieren die Entwicklung der momentanen Terminzinsen aller Laufzeiten. Dies erlaubt die Modellierung einer exogen gegebenen Zinsstruktur sowie komplexer Korrelationsstrukturen zwischen den Zinssätzen verschiedener Laufzeiten.

Der Ansatz geht auf HEATH ET AL. (1992) zurück. Der momentane Terminzins  $f(T)$  eines Fälligkeitstermins  $T > t$  im Zeitpunkt  $t > 0$  ist als

$$f_t(T) := \frac{\partial \ln P_t(T)}{\partial T} = \frac{\partial \ln \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]}{\partial T} \quad (3.5)$$

definiert (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 184f.). In dem Modellrahmen von HEATH ET AL. (1992) folgt er unter dem äquivalenten Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  des Geldmarktkonto-Numéraire dem folgenden Diffusionsprozess:

$$df_t(T) = \tilde{\alpha}_{f,t}(T) dt + \sigma_{f,t}(T) d\tilde{W}_{f,t}. \quad (3.6)$$

Dabei sind  $\tilde{W}_f$  eine mehrdimensionale Brown'sche Bewegung,  $\sigma_f(T)$  ein entsprechend dimensionierter Vektor adaptierter Prozesse und  $\tilde{\alpha}_f(T)$  ein adaptierter, eindimensionaler Prozess. Letzterer ist bei Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes durch die Prozesse der Volatilitätsvektoren  $\sigma_f(s)$ ,  $s \leq T$ , bestimmt:

$$\tilde{\alpha}_{f,t}(T) = \sigma_{f,t}(T) \int_t^T \sigma_{f,t}(s) ds. \quad (3.7)$$

Konkrete Volatilitätsstrukturen wurden z. B. von RITCHKEN & SANAKARASUBRAMANIAN (1995) und MERCURIO & MORALEDA (2000) vorgeschlagen.

### 3.2.3 Marktmodelle

Im Gegensatz zu Short-Rate- und Forward-Rate-Modellen modellieren Marktmodelle nicht momentane, sondern am Markt beobachtbare Größen. Dies erleichtert nicht nur die Kalibrierung der Modelle, sondern führt bei geeigneter Wahl von Numéraire und Martingalmaß auch zu einfacheren Modellen und teilweise zu geschlossenen Lösungen für am Markt gehandelte



Derivate.

Das LIBOR-Marktmodell von BRACE ET AL. (1997), MILTERSEN ET AL. (1997) und JAMSHIDIAN (1997) modelliert den Terminzins zwischen zwei Fälligkeitsterminen  $T_1$  und  $T_2$  mit  $T_1 < T_2$  unter dem äquivalenten Martingalmaß als geometrische Brown'sche Bewegung mit ggf. zeitabhängiger Volatilität und ohne Drift (vgl. auch MUCK & RUDOLF, 2006). Als Numéraire wählen die Autoren den Preis  $P(T_2)$  der Nullkuponanleihe mit Fälligkeit  $T_2$ . Das entsprechende Maß wird daher als Forward-Maß für die Fälligkeit  $T_2$  bezeichnet.

Das Swap-Marktmodell von JAMSHIDIAN (1997) modelliert den Termin-Swap-Satz unter dem sogenannten Forward-Swap- oder Swap-Maß als geometrische Brown'sche Bewegung mit deterministischer Volatilität und ohne Drift. Der Numéraire ergibt sich dabei als gewichtete Summe der Preise von an den Swap-Terminen auslaufenden Nullkuponanleihen.

Beide Modelle erlauben durch die Annahme von unter dem Forward- bzw. dem Swap-Maß lognormal verteilter Terminzinsen bzw. Termin-Swap-Raten die Anwendung der Formel von BLACK (1976) für Caps bzw. Swaptions (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 195). Diese stellt den Marktstandard bei der Bewertung der genannten Instrumente dar (ebd.). Allerdings können die Modelle nicht gleichzeitig erfüllt sein, da sich unter den jeweiligen Martingalmaßen lognormal verteilte Terminzinsen und Termin-Swap-Raten gegenseitig ausschließen (ebd., S. 195 f.).

### 3.3 Der Ansatz von CHAN ET AL. (1992)

In ihrem viel zitierten Artikel im Journal of Finance formulieren CHAN ET AL. (1992) einen Modellrahmen für den Momentanzins, der zahlreiche bekannte zeitstetige und zeithomogene Short-Rate-Modelle umfasst. Sie schätzen und vergleichen eine Reihe dieser Modelle in diskreter Zeit mit Hilfe der verallgemeinerten Momentenmethode (englisch: „generalized method of moments“, GMM) von HANSEN (1982) und leiten Implikationen für die Bewertung von Zinsderivaten sowie die Absicherung von Zinsrisiken ab.

Die von ihnen untersuchten Modelle, das Vorgehen zu Modellschätzung und -vergleich sowie die Ergebnisse von CHAN ET AL. (1992) werden im Folgenden vorgestellt.

#### 3.3.1 Die untersuchten Zinsmodelle

Bei den von CHAN ET AL. (1992) untersuchten Modellen handelt es sich um neun zeitstetige Short-Rate-Modelle, bei denen der Momentanzins  $r$  einem stochastischen Prozess mit

stochastischer Differentialgleichung

$$dr_t = (\alpha_r + \beta_r r_t) dt + \sigma_r r_t^{\gamma_r} dW_{r,t} \quad (3.8)$$

folgt. Dabei sind  $\alpha_r$  ein zinsunabhängiger Drift,  $\beta_r$  die Sensitivität des bedingten Drifts auf das aktuelle Zinsniveau,  $\sigma_r$  der zinsunabhängige Faktor der bedingten Volatilität der Zinsveränderung,  $\gamma_r$  ein Parameter, der über die Abhängigkeit der bedingten Volatilität vom aktuellen Zinsniveau entscheidet, und  $W_r$  eine eindimensionale, standardisierte Brown'sche Bewegung.

Für  $\alpha_r > 0$  und  $\beta_r < 0$  lassen sich  $-\alpha_r/\beta_r$  als langfristiger Mittelwert des Momentanzinses sowie  $-\beta_r$  als die Geschwindigkeit interpretieren, mit der er zu eben diesem zurückkehrt. Unabhängig von den ursprünglichen Modellformulierungen gehen CHAN ET AL. (1992) bei ihrer Modellierung vom realen Maß  $\mathbb{P}$  aus.

Die von CHAN ET AL. (1992) analysierten Modelle können durch geeignete Wahl von  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\sigma_r$  und/oder  $\gamma_r$  als Spezialfälle dieses Modellrahmens formuliert werden. Konkret werden folgende Einfaktormodelle betrachtet:

$$\text{CHAN ET AL. (1992): } dr_t = (\alpha_r + \beta_r r_t) dt + \sigma_r r_t^{\gamma_r} dW_{r,t} \quad (3.9a)$$

$$\text{MERTON (1973): } dr_t = \alpha_r dt + \sigma_r dW_{r,t} \quad (3.9b)$$

$$\text{VASIČEK (1977): } dr_t = (\alpha_r + \beta_r r_t) dt + \sigma_r dW_{r,t} \quad (3.9c)$$

$$\text{COX ET AL. (1985): } dr_t = (\alpha_r + \beta_r r_t) dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} \quad (3.9d)$$

$$\text{DOTHAN (1978): } dr_t = \sigma_r r_t dW_{r,t} \quad (3.9e)$$

$$\text{RENDLEMAN \& BARTTER (1980): } dr_t = \beta_r r_t dt + \sigma_r r_t dW_{r,t} \quad (3.9f)$$

$$\text{BRENNAN \& SCHWARTZ (1980): } dr_t = (\alpha_r + \beta_r r_t) dt + \sigma_r r_t dW_{r,t} \quad (3.9g)$$

$$\text{COX ET AL. (1980): } dr_t = \sigma_r r_t^{1,5} dW_{r,t} \quad (3.9h)$$

$$\text{COX (1975): } dr_t = \beta_r r_t dt + \sigma_r r_t^{\gamma_r} dW_{r,t} \quad (3.9i)$$

Wie aus Tabelle 3.1 ersichtlich, sind die Modelle (3.9b) bis (3.9i) nicht nur Spezialfälle von (3.8) bzw. (3.9a), sondern zum Teil auch voneinander. So handelt es sich bei MERTON (1973) um ein Untermodell von VASIČEK (1977), bei DOTHAN (1978) um ein Untermodell von RENDLEMAN & BARTTER (1980), bei DOTHAN (1978) und RENDLEMAN & BARTTER (1980) um Untermodelle von BRENNAN & SCHWARTZ (1980) und bei DOTHAN (1978), RENDLEMAN & BARTTER (1980) und COX ET AL. (1980) um Untermodelle von COX (1975).

Zusätzlich zu den genannten Modellen untersuchen CHAN ET AL. (1992) die Möglichkeit

Zinsmodell	$\alpha_r$	$\beta_r$	$\sigma_r$	$\gamma_r$
CHAN ET AL. (1992)	-	-	-	-
MERTON (1973)	-	0,0	-	0,0
VASIČEK (1977)	-	-	-	0,0
COX ET AL. (1985)	-	-	-	0,5
DOZHAN (1978)	0,0	0,0	-	1,0
RENDELMAN & BARTTER (1980)	0,0	-	-	1,0
BRENNAN & SCHWARTZ (1980)	-	-	-	1,0
COX ET AL. (1980)	0,0	0,0	-	1,5
COX (1975)	0,0	-	-	-

Tabelle 3.1: Nebenbedingungen der Zinsmodelle

Quelle: CHAN ET AL. (1992)

eines Strukturbruchs in der Zinsentwicklung. Dazu erweitern sie ihren Modellrahmen um eine Dummy-Variable  $\delta_t$  sowie vier Verschiebungsparameter  $\delta_\alpha$ ,  $\delta_\beta$ ,  $\delta_\sigma$  und  $\delta_\gamma$ :<sup>28</sup>

$$dr_t = ((\alpha_r + \delta_t \delta_\alpha) + (\beta_r r_t + \delta_t \delta_\beta)) dt + (\sigma_r + \delta_t \delta_\sigma) r_t^{(\gamma_r + \delta_t \delta_\gamma)} dW_{r,t}. \quad (3.10)$$

In ihren Analysen beträgt die Dummy-Variable null für alle Beobachtungen vor und eins für alle Beobachtungen nach Oktober 1979. Damit möchten sie der Änderung der Geldpolitik der Federal Reserve in diesem Monat Rechnung tragen. Für die Verschiebungsparameter setzen sie den ursprünglichen Modellen entsprechende Nebenbedingungen (vgl. Tabelle 3.2).

### 3.3.2 Modellschätzung und -vergleich

CHAN ET AL. (1992) schätzen die neun beschriebenen Modelle unter dem realen Maß in diskreter Zeit auf Basis von monatlichen Daten der einmonatigen T-Bill-Renditen im Zeitraum von Juni 1964 bis Dezember 1989. Die Diskretisierung erlaubt das Schätzen von Zinsmodellen, bei denen der bedingte Drift und die bedingte Varianz auf die in den stetigen Modellen spezifizierte Weise vom Zinsniveau abhängen. Sie führt allerdings zu dem u. a. durch LONGSTAFF (1989) beschriebenen temporalen Aggregationsproblem. Die auf Basis der diskreten Modelle geschätzten Parameter müssen daher auf ihre stetigen Pendanten nicht zwingend zutreffen. CHAN ET AL. (1992) weisen jedoch darauf hin, dass der Schätzfehler bei kleinen

<sup>28</sup>CHAN ET AL. (1992, Gleichungen 11 und 12) formulieren diesen Modellrahmen in diskreter Zeit und modellieren mit  $\delta_\sigma$  den Verschiebungsparameter der Varianz statt der Standardabweichung.

Zinsmodell	Systemparameter				Verschiebungsparameter			
	$\alpha_r$	$\beta_r$	$\sigma_r$	$\gamma_r$	$\delta_\alpha$	$\delta_\beta$	$\delta\sigma$	$\delta\gamma$
CHAN ET AL. (1992)	-	-	-	-	-	-	-	-
MERTON (1973)	-	0,0	-	0,0	-	0,0	-	0,0
VASICEK (1977)	-	-	-	0,0	-	-	-	0,0
COX ET AL. (1985)	-	-	-	0,5	-	-	-	0,0
DOTHAN (1978)	0,0	0,0	-	1,0	0,0	0,0	-	0,0
RENDLEMAN & BARTTER (1980)	0,0	-	-	1,0	0,0	-	-	0,0
BRENNAN & SCHWARTZ (1980)	-	-	-	1,0	-	-	-	0,0
COX ET AL. (1980)	0,0	0,0	-	1,5	0,0	0,0	-	0,0
COX (1975)	0,0	-	-	-	0,0	-	-	-

Tabelle 3.2: Nebenbedingungen der Zinsmodelle mit Strukturbruch

Quelle: CHAN ET AL. (1992)

Schrittgrößen von nachrangiger Bedeutung sein sollte.

Die von CHAN ET AL. (1992) geschätzte, diskrete Version des Modellrahmens ohne bzw. mit Strukturbruch lautet

$$r_t - r_{t-1} = \alpha_r + \beta_r r_{t-1} + \epsilon_{r,t} \quad (3.11a)$$

$$\mathbb{E}_{t-1}[\epsilon_{r,t}] \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.11b)$$

$$\mathbb{E}_{t-1}[\epsilon_{r,t}^2] \stackrel{!}{=} \sigma_r^2 r_{t-1}^{2\gamma_r} \quad (3.11c)$$

bzw.

$$r_t - r_{t-1} = (\alpha_r + \delta_{t-1}\delta_\alpha) + (\beta_r + \delta_{t-1}\delta_\beta) r_{t-1} + \epsilon_{r,t} \quad (3.12a)$$

$$\mathbb{E}_{t-1}[\epsilon_{r,t}] \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.12b)$$

$$\mathbb{E}_{t-1}[\epsilon_{r,t}^2] \stackrel{!}{=} (\sigma_r + \delta_{t-1}\delta_\sigma)^2 r_{t-1}^{2(\gamma_r + \delta_{t-1}\delta_\gamma)}. \quad (3.12c)$$

Dabei steht  $\mathbb{E}_t[\cdot]$  für den bedingten Erwartungswert unter dem realen Maß, gegeben Informationen zur Zinsentwicklung bis zum Zeitpunkt  $t$  (vgl. BECKER, 1998, S. 20).<sup>29</sup> Für die einzelnen Modelle bleiben die Nebenbedingungen aus Tabellen 3.1 und 3.2 bestehen.

Die Modellschätzung erfolgt bei allen Modellen mit Hilfe der GMM; der Modellvergleich erfolgt auf Basis einzelner für die GMM entwickelter oder erweiterter Hypothesentests sowie weiterer, allgemeiner Kenngrößen.

<sup>29</sup>CHAN ET AL. (1992) verwenden die Schreibweise  $\mathbb{E}[\cdot]$  und weisen nicht explizit darauf hin, dass es sich um den bedingten Erwartungswert handeln müsste.

Die Vorteile der GMM gegenüber anderen üblichen Schätzverfahren liegen vor allem in den vergleichsweise geringen Datenanforderungen. So setzt die GMM im Wesentlichen die starke Stationarität und Ergodizität der Daten voraus (HALL, 2005, S. 50ff.),<sup>30</sup> nicht aber, dass die Verteilungsklasse der Daten bzw. Störgrößen bekannt sei oder dass sie sogar einer Verteilung einer bestimmten Klasse folgten. Insbesondere ist der GMM-Schätzer auch bei bedingt heteroskedastischen oder seriell autokorrelierten Störgrößen asymptotisch konsistent (HANSEN, 1982).

Diese Vorteile sind auch für die Schätzung der Zinsmodelle bei CHAN ET AL. (1992) relevant. Hier besteht insbesondere das Problem, dass die Verteilungsfunktion des Momentanzinseszinses bzw. der Zinsveränderung vom jeweiligen Modell abhängen. Im Fall von MERTON (1973) und VASIČEK (1977) z. B. sind die momentanen Veränderungen des Momentanzinseszinses normalverteilt, im Fall von COX ET AL. (1980) entwickeln sie sich proportional zu einer nicht zentrierten Chi-Quadrat-verteiltern Zufallsvariable (CHAN ET AL., 1992). Beides trifft allerdings nur dann zwingend zu, wenn es sich bei  $W_r$  tatsächlich um eine standardisierte Brown'sche Bewegung handelt. Dies kann in Wirklichkeit und vor allem in den diskreten Pendanten der stetigen Modelle anders aussehen.

### 3.3.2.1 Modellschätzung

Die Grundidee der GMM ist folgende: Für einen Vektor beobachtbarer, stark stationärer Zufallsvariablen  $\{v_t, -\infty < t < \infty\}$  mit  $v_t \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}$  (HALL, 2005, S. 50, Annahme 3.1) soll ein durch den nicht beobachtbaren Parametervektor  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n_\theta}$  parametrisiertes Modell auf Basis sogenannter Momentenbedingungen geschätzt werden.

Dazu werden mit Hilfe einer bestimmten Bedingungen genügenden Funktion  $f_{\text{Mom}} : \mathbf{V} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$ ,  $n_f < \infty$ , (ebd. S. 50f., Annahme 3.2) verschiedene Verteilungsmomente des Zufallsvektors in Abhängigkeit des Parametervektors  $\theta$  als

$$g^*(\theta) := \mathbb{E}[f_{\text{Mom}}(v_t, \theta)] \quad (3.13)$$

definiert. Dabei steht  $\mathbb{E}[\cdot]$  für den Erwartungswertoperator.

Die resultierenden Momentenbedingungen seien für den wahren und nur für den wahren

<sup>30</sup>Selbst die Annahme starker Stationarität kann unter bestimmten Umständen abgeschwächt werden (vgl. Kapitel 3.3.3).

Parametervektor  $\theta^* \in \Theta$  erfüllt, d. h.,

$$g^*(\theta^*) = \mathbb{E}[f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)] \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.14a)$$

$$g^*(\theta) = \mathbb{E}[f_{\text{Mom}}(v_t, \theta)] \stackrel{!}{\neq} 0 \text{ für alle } \theta \in \Theta \text{ mit } \theta \neq \theta^* \quad (3.14b)$$

(ebd., S. 51, Annahmen 3.3 und 3.4).<sup>31</sup>

Zur Ermittlung eines Schätzwertes  $\hat{\theta}_T$  für  $\theta^*$  werden die Verteilungsmomente aus Gleichung (3.13) durch die aus einer historischen Realisation  $\{v_t, t = 1, \dots, T\}$  des stochastischen Prozesses  $v$  berechneten Stichprobenmomente

$$g_T(\theta) := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_{\text{Mom}}(v_t, \theta) \quad (3.15)$$

ersetzt und die Funktion  $Q_T : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$Q_T(\theta) := g_T(\theta)' W_T g_T(\theta) \quad (3.16)$$

minimiert (ebd., S. 14, Definition 1.2). Die Gewichtungsmatrix  $W_T$  sei dabei positiv semi-definit und konvergiere in Wahrscheinlichkeit zu einer positiv definiten Matrix  $W^*$  von Konstanten (ebd., S. 57, Annahme 3.7).

Der resultierende GMM-Schätzer  $\hat{\theta}_T$  ist durch

$$\hat{\theta}_T := \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} Q_T(\theta) \quad (3.17)$$

definiert (ebd., S. 57) und unter bestimmten Voraussetzungen konsistent und asymptotisch normalverteilt (ebd., S. 66 ff.). Es gilt:

$$\hat{\theta}_T \xrightarrow{d} \Phi\left(\theta^*, \frac{1}{T} M S^* M'\right) \quad (3.18a)$$

$$\text{mit: } M := (G^*(\theta^*)' W^* G^*(\theta^*))^{-1} G^*(\theta^*)' W^* \quad (3.18b)$$

(ebd., S. 71, Satz 3.2). Dabei ist  $S^* := \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{V}\mathbb{A}\mathbb{R}\left[\sqrt{T} g_T(\theta^*)\right]$  (ebd., S. 70, Annahme 3.11) und  $G^*(\theta) := \partial g^*(\theta) / \partial \theta'$  stellt die Ableitung der Verteilungsmomente  $g^*(\theta)$  nach  $\theta'$  dar.

Offensichtlich hängt die asymptotische Varianz-Kovarianz-Matrix  $\frac{1}{T} M S^* M'$  im Allgemeinen, d. h. für  $n_f > n_\theta$ , von der Wahl der Matrizen  $W^*$  und  $W_T$  ab (ebd., S. 88f.). Es lässt

<sup>31</sup>Damit das System nicht unterbestimmt ist, muss  $n_f \geq n_\theta$  gelten.

sich zeigen, dass  $W^* = (S^*)^{-1}$  die asymptotische Varianz-Kovarianz-Matrix minimiert und  $W_T = \hat{S}_T^{-1}$  in diesem Sinne die optimale Gewichtungsmatrix darstellt (ebd.).  $\hat{S}_T$  sei dabei ein konsistenter Schätzer von  $S^*$ .

Die genaue Definition dieses konsistenten Schätzers hängt von der Autokorrelationsstruktur von  $f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)$  ab (ebd., S. 74 ff.). Bei seriell unkorrelierten  $f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)$  gilt  $\hat{S}_T = \hat{S}_{\text{SU}} := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_{\text{Mom}}(v_t, \hat{\theta}_T) f_{\text{Mom}}(v_t, \hat{\theta}_T)'$  (ebd., S. 76). Bei seriell korrelierten  $f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)$  können unter bestimmten Voraussetzungen in Bezug auf Heteroskedastizität und Autokorrelation konsistente (englisch: „heteroscedasticity and autocorrelation consistent“, HAC) Schätzer  $\hat{S}_{\text{HAC}}$  verwendet werden (ebd. S. 80 ff.). Diese werden als gewichtete Summe der geschätzten Autokovarianzmatrizen von  $f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)$  definiert, wobei die Gewichtung meist durch den Bartlett-Kernel von NEWBY & WEST (1987), den Parzen-Kernel von GALLANT (1987, S. 533, S. 551, S. 573) oder den quadratischen, spektralen Kernel von ANDREWS (1991) bestimmt wird (HALL, 2005, S. 80 f.).

Die eigentliche Modellschätzung kann dann u. a. in einem iterativen Verfahren erfolgen (ebd., S. 89 f.): In Schritt  $\nu = 1$  wird dazu der GMM-Schätzer auf Basis einer suboptimalen Gewichtungsmatrix wie der Einheitsmatrix geschätzt. Mit dem Ergebnis  $\hat{\theta}_T^{(1)}$  wird dann ein konsistenter Schätzer  $\hat{S}_T^{(1)}$  für  $S^*$  bestimmt. In allen folgenden Schritten  $\nu > 1$  wird der GMM-Schätzer auf Basis der Gewichtungsmatrix  $1/\hat{S}_T^{(\nu-1)}$  des vorhergegangenen Schrittes geschätzt und mit dem Ergebnis  $\hat{\theta}_T^{(\nu)}$  wiederum ein konsistenter Schätzer  $\hat{S}_T^{(\nu)}$  für  $S^*$  bestimmt.

Wenn die Veränderung des Parameterschätzwerts zum Vorwert hinreichend klein ist, wird das Verfahren abgebrochen und  $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T^{(\nu)}$  gesetzt (ebd., S. 90). Wenn dies nach der vorher festgelegten Höchstzahl an Iterationen nicht geschieht, wird das Verfahren ohne Ergebnis abgebrochen (ebd.). Der GMM-Schätzer konvergiert in diesem Fall nicht oder nicht in der gewünschten Geschwindigkeit.

Da im Fall  $n_f = n_\theta$  die genaue Wahl der Gewichtungsmatrix für die asymptotische Varianz-Kovarianz-Matrix des GMM-Schätzers keine Rolle spielt, kann die GMM-Schätzung hier unter Annahme einer beliebigen positiv semidefiniten Gewichtungsmatrix in nur einem Schritt erfolgen (ebd., S. 88).

CHAN ET AL. (1992) schätzen mit der GMM die durch Gleichungen (3.11) bzw. (3.12) und Nebenbedingungen in Tabellen 3.1 bzw. 3.2 definierten, diskretisierten Zinsmodelle auf Basis von historischen T-Bill-Renditen. Zwar spezifizieren sie den Prozess des Datenvektors

$v$  nicht explizit, doch folgt aus den Datenanforderungen der Zinsmodelle, dass für diesen

$$v_t = r_t \quad (3.19)$$

oder

$$v_t = \left( r_t - r_{t-1}, r_{t-1} \right)' \quad (3.20)$$

gelten muss.  $r_t$  steht dabei für die untersuchte Zinsrendite im Zeitpunkt bzw. Zeitraum  $t$ .

Bei den *Modellen ohne Strukturbruch* ist der Parametervektor durch

$$\theta := \left( \alpha_r, \beta_r, \sigma_r, \gamma_r \right)' \quad (3.21)$$

gegeben.<sup>32</sup> Die Verteilungsmomente  $g^*(\theta)$  werden analog zu Gleichung (3.13) durch<sup>33</sup>

$$g^*(\theta) := \mathbb{E}_{t-1}[f_{\text{Mom}}(v_t, \theta)] \quad (3.22)$$

und die Funktion  $f_{\text{Mom}}$  als

$$f_{\text{Mom}}(v_t, \theta) := \left( \epsilon_{r,t}, \epsilon_{r,t} r_{t-1}, \epsilon_{r,t}^2 - \sigma_r^2 r_{t-1}^{2\gamma_r}, \left( \epsilon_{r,t}^2 - \sigma_r^2 r_{t-1}^{2\gamma_r} \right) r_{t-1} \right)' \quad (3.23)$$

definiert. Nach Gleichung (3.11a) gilt dabei für die Störgrößen  $\epsilon_{r,t} = r_t - r_{t-1} - \alpha_r - \beta_r r_{t-1}$ .

Die Stichprobenmomente  $g_T(\theta)$  sowie die zu minimierende Funktion  $Q_T(\theta)$  sind durch Gleichungen (3.15) bzw. (3.16) definiert. Als optimale Gewichtungsmatrix für den Fall  $n_f > n_\theta$  wählen CHAN ET AL. (1992)  $W_T = \hat{S}_{\text{SU}}^{-1}$ . Implizit unterstellen sie damit, dass die  $f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)$  seriell unkorreliert seien, ohne diese Annahme jedoch deutlich zu machen. Auch erwähnen sie nicht, welches Verfahren zur Bestimmung des GMM-Schätzers und welchen Algorithmus zur Minimierung von  $Q_T$  sie verwenden.

Die Schätzung der *Modelle mit Strukturbruch* erfolgt weitestgehend analog zu der ohne Strukturbruch. Sie unterscheidet sich lediglich in der Definition des Parametervektors sowie der Verteilungsmomente. Der Parametervektor ist durch

$$\theta = \left( \alpha_r, \beta_r, \sigma_r, \gamma_r, \delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\sigma, \delta_\gamma \right)' \quad (3.24)$$

<sup>32</sup> CHAN ET AL. (1992) definieren den Parametervektor als  $\theta := (\alpha_r, \beta_r, \sigma_r^2, \gamma_r)'$ .

<sup>33</sup> CHAN ET AL. (1992) verwenden Gleichung (3.13) und weisen nicht explizit darauf hin, dass der bedingte Erwartungswert  $\mathbb{E}_{t-1}[\cdot]$  gebildet wird.



gegeben; die Verteilungsmomente sind durch Gleichung (3.22) und die Funktion

$$\begin{aligned}
f_{\text{Mom}}(v_t, \theta) = & \left( \epsilon_{r,t}, \epsilon_{r,t}^2 - (\sigma_r + \delta_{t-1}\delta_\sigma)^2 r_{t-1}^{2(\gamma_r + \delta_{t-1}\delta_\gamma)}, \right. \\
& \epsilon_{r,t} r_{t-1}, \left( \epsilon_{r,t}^2 - (\sigma_r + \delta_{t-1}\delta_\sigma)^2 r_{t-1}^{2(\gamma_r + \delta_{t-1}\delta_\gamma)} \right) r_{t-1}, \\
& \epsilon_{r,t} \delta_{t-1}, \left( \epsilon_{r,t}^2 - (\sigma_r + \delta_{t-1}\delta_\sigma)^2 r_{t-1}^{2(\gamma_r + \delta_{t-1}\delta_\gamma)} \right) \delta_{t-1}, \\
& \left. \epsilon_{r,t} \delta_{t-1} r_{t-1}, \left( \epsilon_{r,t}^2 - (\sigma_r + \delta_{t-1}\delta_\sigma)^2 r_{t-1}^{2(\gamma_r + \delta_{t-1}\delta_\gamma)} \right) \delta_{t-1} r_{t-1} \right)'
\end{aligned} \tag{3.25}$$

definiert. Nach Gleichung (3.12a) gilt dabei für die Störgrößen  $\epsilon_{r,t} = r_t - r_{t-1} - (\alpha_r + \delta_{t-1}\delta_\alpha) - (\beta_r + \delta_{t-1}\delta_\beta) r_{t-1}$ .

### 3.3.2.2 Modellvergleich

Für den Modellvergleich nutzen CHAN ET AL. (1992) sowohl für die GMM entwickelte bzw. erweiterte Hypothesentests als auch allgemeine Kenngrößen.

An *Hypothesentests* führen sie den sogenannten Test der überidentifizierenden Restriktionen (auch: J-Test) sowie den Likelihood-Ratio-Test (LR-Test) durch und berechnen die t-Werte der geschätzten Parameter. Details zu den Tests finden sich in HALL (2005, Kapitel 5, S. 141 ff.). CHAN ET AL. (1992) nutzen sie wie folgt: Mit dem J-Test beurteilen sie, inwiefern die Modelle ohne Strukturbruch fehlspezifiziert sind. Mit dem LR-Test vergleichen sie die Modelle ohne Strukturbruch mit den ihnen übergeordneten Modellen ohne Strukturbruch außer dem Modell (3.9a) sowie die Modelle mit Strukturbruch mit ihrem jeweiligen Pendant ohne Strukturbruch. Die t-Werte erlauben ihnen Rückschlüsse auf die Signifikanz der Parameter, auch wenn sie hierauf nur selten eingehen.

An *allgemeinen Kenngrößen* bestimmen CHAN ET AL. (1992) für die Modelle ohne Strukturbruch zwei Bestimmtheitsmaße. Das erste ist als der Anteil an der Varianz der Zinsveränderung definiert, der durch die bedingten, erwarteten Zinsveränderungen erklärt wird; das zweite stellt den Anteil an der Varianz der quadrierten Zinsveränderung dar, der durch die bedingte Varianz der Zinsveränderung erklärt wird. Sie dienen als Maß dafür, wie gut ein Modell die Zinsveränderung und -volatilität prognostizieren kann.

### 3.3.3 Ergebnisse

CHAN ET AL. (1992) kommen in ihrem Modellvergleich zu folgenden Ergebnissen. Bei den *Modellen ohne Strukturbruch* lehnt der J-Test alle Modelle mit  $\gamma_r < 1$  bei einem Konfidenz-

niveau von 5% ab. Die Modelle von MERTON (1973), VASIČEK (1977) und COX ET AL. (1985) sind demnach fehlspezifiziert. Modelle mit  $\gamma_r \geq 1$  hingegen können nicht abgelehnt werden. Beim Vergleich der Modelle (3.9b) bis (3.9i) kann der LR-Test keines der untergeordneten Modelle ablehnen. Nach den t-Werten des Parametervektors des nicht restringierten Modells von CHAN ET AL. (1992) ist der Wert für  $\gamma_r$  signifikant und der für  $\beta_r$  nicht signifikant von null verschieden. Dies spricht für eine hohe Abhängigkeit der bedingten Volatilität vom Zinsniveau, aber gegen eine Mean Reversion.

Das Bestimmtheitsmaß der Zinsveränderung unterscheidet sich nur unwesentlich zwischen den Modellen; das der quadrierten Zinsveränderung, d. h. das der bedingten Varianz, hingegen ist für Modelle mit hohen Werten für  $\gamma_r$  deutlich größer als für Modelle mit niedrigen Werten für  $\gamma_r$ . Modelle die einen vergleichsweise großen Teil der bedingten Varianz der Zinsveränderung erklären können, werden auch nach dem J-Test präferiert.

Bei den *Modellen mit Strukturbruch* können die Modelle von CHAN ET AL. (1992), BRENNAN & SCHWARTZ (1980), COX ET AL. (1980) und COX (1975) ohne Strukturbruch im LR-Test nicht gegen ihre Pendanten mit Strukturbruch abgelehnt werden. In diesen Fällen scheint die Modellierung der bedingten Heteroskedastizität der Zinsveränderung, die eines Strukturbruchs unnötig zu machen.

CHAN ET AL. (1992) schließen aus diesen Ergebnissen, dass der wesentliche Unterschied zwischen den Zinsmodellen im Grad der Abhängigkeit der Volatilität vom Zinsniveau liegt. Die Modellierung dieser Abhängigkeit sei für die Genauigkeit des Zinsmodells entscheidender als die anderer Modelleigenschaften wie einer Mean Reversion oder eines Strukturbruchs. Insbesondere können laut CHAN ET AL. (1992) Modelle mit  $\gamma_r \geq 1$  die Zinsentwicklung besser modellieren als Modelle mit  $\gamma_r < 1$ . Ihre nicht restringierte Schätzung für  $\gamma_r$  liegt bei 1,5 und damit deutlich höher als in den bekannten Zinsmodellen von VASIČEK (1977) und COX ET AL. (1985). Zudem zeigen CHAN ET AL. (1992), dass die Berücksichtigung der Abhängigkeit der Volatilität vom Zinsniveau bzw. ihre Vernachlässigung starke Auswirkungen auf die Preise von Call-Optionen auf Kuponanleihen hat.



## Kapitel 4

# Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt

Wie in Kapitel 2.2.2 erläutert, sind bei der Bewertung von Sterblichkeitsderivaten Annahmen zu zwei wesentlichen Arten von Abhängigkeiten zu treffen: Abhängigkeiten in den Todeszeitpunkten verschiedener Individuen und Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt. Während erstere in fast allen Modellen in angemessenem Umfang berücksichtigt werden, werden letztere meist einfach vernachlässigt.

Diese implizite Unabhängigkeitsannahme mag bei deterministischen Sterblichkeiten in der traditionellen Lebensversicherungsmathematik einleuchten,<sup>34</sup> kann jedoch bei stochastischer Sterblichkeit nicht unbedingt beibehalten werden. Zum einen sind Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt grundsätzlich vorstellbar und theoretisch erklärbar; zum anderen gibt es erste empirische Anhaltspunkte für sie.

Diese Theorien und Anhaltspunkte werden ebenso wie die Relevanz einer eventuellen Abhängigkeit für die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten im Folgenden diskutiert.

---

<sup>34</sup>Bei deterministischer Sterblichkeit und Unabhängigkeit zwischen Individuen strebt die Unsicherheit in der realisierten Sterblichkeit eines Portfolios nach dem Gesetz der großen Zahl für viele Individuen gegen null. Eine de facto sichere Sterberate kann aber nicht mit dem volatilen Finanzmarkt korreliert sein.

## 4.1 Hypothesen und empirische Anhaltspunkte

Verschiedene Theorien und einzelne empirische Anhaltspunkte lassen einen Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt vermuten. Bei ihrer Diskussion ist es hilfreich, die Hypothesen und Abhängigkeiten nach drei Kriterien zu klassifizieren.

*Als erstes* bietet sich dazu eine Differenzierung in Langlebighkeitsrisiken und kurzfristige Sterblichkeitsrisiken an. Zum einen unterscheiden sich Langlebighkeits- und kurzfristige Sterblichkeitsrisiken trotz des gemeinsamen Bezugs zur Sterblichkeit in der Art des abzusichernden Risikos, da bei letzteren im Gegensatz zu ersteren der Schwerpunkt auf Katastrophenrisiken liegt (CAIRNS ET AL., 2006b, S. 712). Folglich ist für die Bewertung kurzfristiger Sterblichkeitsrisiken die Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt in Extremsituationen relevanter als für die Bewertung von Langlebighkeitsrisiken. Zum anderen ist der Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos bei Langlebighkeitsrisiken positiv (vgl. z. B. BAUER ET AL., 2010; LIN & COX, 2008) und bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken negativ (vgl. z. B. COX ET AL., 2006; LIN & COX, 2008). Dies ist für durch Marktpreise des Risikos verursachte Abhängigkeiten von Bedeutung.<sup>35</sup>

*Als zweites* Klassifizierungskriterium dient die Prozesskomponente, über die die Abhängigkeit verursacht wird. Geht man von einem einfachen Sprungdiffusionsprozess für die Sterblichkeit und die betrachteten Finanzmarktgrößen aus, kann eine Abhängigkeit durch die Diffusions-, Sprung- und/oder Driftterme entstehen. Diffusionsterme sollten vor allem bei Langlebighkeitsrisiken, Sprungterme hauptsächlich bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken von Bedeutung sein.

Bei den Drifttermen spielen die Marktpreise des Risikos eine besondere Rolle. Denn wenn der Maßwechsel von oder zum Martingalmaß mit Hilfe des Satzes von GIRSANOV (1960) erfolgt, ändert sich der Drift um den Marktpreis des Risikos. Eine Abhängigkeit der Marktpreise des Risikos voneinander oder von den anderen Modellkomponenten führt daher zu einer anderen Abhängigkeitsstruktur unter dem realen als unter dem Martingalmaß. BAUER (2006) argumentiert deshalb, dass bei Abhängigkeit des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos vom Finanzmarkt eine Abhängigkeit unter dem Martingalmaß auch bei Unabhängigkeit unter dem realen Maß entstehen kann. Auch die spätere Diskussion der Hypothesen unterscheidet daher zwischen Abhängigkeiten, die durch die Marktpreise des Risikos verursacht werden,

---

<sup>35</sup>Die scheinbar widersprüchlichen Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos ergeben sich dann, wenn sowohl Renten- als auch Risikolebensversicherer für die Absicherung ihrer Langlebighkeits- bzw. kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken eine Prämie zahlen müssen. Eine Erklärung dafür sehen CAIRNS ET AL. (2006b, S. 711 f.) in Marktunvollkommenheiten, in demographischen sowie nicht demographischen Unterschieden zwischen Renten- und Risikolebensversicherungsnehmern und in der genannten Andersartigkeit des abzusichernden Risikos.

und solchen, die durch andere Prozesskomponenten entstehen.

*Als drittes* und letztes Differenzierungskriterium dient die Unterscheidung in direkte und indirekte Effekte. Bei direkten Effekten beeinflusst die Sterblichkeit den Finanzmarkt oder andersherum. Bei indirekten Effekten werden beide durch eine dritte Größe beeinflusst.

### 4.1.1 Langlebigkeitsrisiken

Bei Langlebigkeitsrisiken können Abhängigkeiten am ehesten durch eine Abhängigkeit der Diffusionsterme oder der Marktpreise des Risikos entstehen. Die jeweiligen Hypothesen sind in Tabellen 4.1 bzw. 4.2 zusammengefasst.

Bei den durch die Diffusionsterme verursachten Abhängigkeiten muss zwischen unterschiedlichen Zeitverzögerungen unterschieden werden. So sollte der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und vergangenen Aktienrenditen bzw. Zinsen gemäß den Hypothesen langfristig eher negativ, kurzfristig jedoch positiv sein. Weiter sollte die Abhängigkeit zwischen aktuellen Aktien- bzw. Zinsrenditen und der Sterblichkeit positiv bzw. negativ ausfallen. Das Gegenteil sollte auf aktuelle Renditen und die vergangene Sterblichkeit zutreffen. Auch bei Abhängigkeiten, die durch die Marktpreise des Risikos entstehen, muss nach Zeitverzögerungen differenziert werden. So sollte die Abhängigkeit zwischen aktuellen Aktien- bzw. Zinsrendite und der vergangenen Sterblichkeit negativ ausfallen. Bei fehlender oder nur geringer Zeitverzögerung hingegen bleibt der Gesamteffekt aufgrund gegenläufiger Effekte unklar.

#### 4.1.1.1 Abhängigkeiten durch Diffusionsprozesse

Bei Langlebigkeitsrisiken sind Abhängigkeiten über die Diffusionsprozesse sowohl durch direkte als auch durch indirekte Effekte vorstellbar.

##### Direkte Effekte

Direkte Effekte können bei Langlebigkeitsrisiken durch einen Einfluss des Finanzmarkts auf die Sterblichkeit oder der Sterblichkeit auf den Finanzmarkt entstehen.

Bei einer *Beeinflussung der Sterblichkeit durch den Finanzmarkt* könnte der Konsum gesundheitsfördernder und -schädlicher Güter vom Einkommen und damit vom Finanzmarkt abhängen. Denn sofern es sich um normale Güter handelt, sollte ihr Konsum in Zeiten hoher (niedriger) Realeinkommen steigen (fallen) (NEUMAYER, 2004, S. 1039). Und da bei hohen (niedrigen) Finanzmarktrenditen auch das Realeinkommen ceteris paribus hoch (niedrig) ausfällt, sollte der Konsum normaler Güter positiv vom Finanzmarkt abhängen.

Risikoart und Erklärungsansatz	Erwartetes Lag <sup>a</sup>	Erwartete Abhängigkeit von Sterblichkeit und ...	
		Aktien	Zinsen
<b>Direkte Effekte</b>			
Verstärkter (verringter) Konsum gesundheitsfördernder Güter in Zeiten hohen (niedrigen) Einkommens	Negativ	Negativ	Negativ
Verstärkter (verringter) Konsum gesundheitsschädigender Güter in Zeiten hohen (niedrigen) Einkommens	Negativ	Positiv	Positiv
Unerwartete Verschiebung der Altersstruktur und Anstieg (Rückgang) in der Ersparnis in Zeiten unerwartet hoher (niedriger) Sterblichkeit	Null	Positiv	Negativ
Unerwarteter Rückgang (Anstieg) der Lebenserwartung, des Vorsorgebedarfs und der Notwendigkeit einer langsamen Vermögensakkumulation in Zeiten unerwartet hoher (niedriger) Sterblichkeit	Positiv	Negativ	Positiv
-----			
<b>Indirekte Effekte</b>			
Kurzfristiger Anstieg (Rückgang) der Sterblichkeit im wirtschaftlichen Aufschwung (Abschwung)	Leicht negativ	Positiv	Positiv
Langfristig geringer (starker) Rückgang in der Sterblichkeit bei nachhaltig niedrigem (hohem) Wirtschaftswachstum	Stark negativ	Negativ	Negativ

<sup>a</sup>Positiv: Sterblichkeit vor Finanzmarkt; negativ: Finanzmarkt vor Sterblichkeit.

Tabelle 4.1: Hypothesen zu Abhängigkeiten bei Langlebensrisiken (Diffusionsprozesse)

	Erwartetes Lag <sup>a</sup>	Erwartete Abhängigkeit von Sterblichkeit und ...	
		Aktien	Zinsen
<b>Risikoart und Erklärungsansatz</b>			
<b>Sterblichkeit und Marktpreise der Finanzmarktrisiken: direkte Effekte</b>			
Unerwartete Verschiebung der Altersstruktur und Rückgang (Anstieg) in der Risikoaversität in Zeiten unerwartet hoher (niedriger) Sterblichkeit	Null	Positiv	Positiv
Unerwarteter Rückgang (Anstieg) der Lebenserwartung, Verkürzung (Verlängerung) der Investitionsdauer und Anstieg (Rückgang) in der Risikoaversität nach Zeiten unerwartet hoher (niedriger) Sterblichkeit	Positiv	Negativ	Negativ
<b>Finanzmarkt und Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos: direkte Effekte</b>			
Geringere (größere) Vorsicht von Rentenversicherern in hohen (niedrigem) Zinsumfeld <sup>b</sup>	Null	Positiv	Positiv
Verzögerte Anpassung von Leibrentenraten an geändertes Zinsumfeld <sup>c</sup>	Null	Negativ	Negativ
Hohe (niedrige) Renditeversprechen von Rentenversicherern bei hohen (niedrigen) Aktienrenditen <sup>c</sup>	Null	Positiv	Positiv
<b>Marktpreise der Sterblichkeits- und Finanzmarktrisiken: direkte Effekte</b>			
Geringere (größere) Vorsicht bei der Übernahme von Langlebigkeitsrisiken, unerwartete Verschiebung der Altersstruktur und Rückgang (Anstieg) in der Risikoaversität in Zeiten unerwartet hoher (niedriger) Sterblichkeit	Null/leicht negativ	Positiv	Positiv
Geringere (größere) Vorsicht bei der Übernahme von Langlebigkeitsrisiken, unerwarteter Rückgang (Anstieg) der Lebenserwartung, Verkürzung (Verlängerung) der Investitionsdauer und Anstieg (Rückgang) in der Risikoaversität nach Zeiten unerwartet hoher (niedriger) Sterblichkeit	Null	Negativ	Negativ

<sup>a</sup>Positiv: Sterblichkeit vor Finanzmarkt; negativ: Finanzmarkt vor Sterblichkeit.

<sup>b</sup>BAUER (2006).

<sup>c</sup>BAUER ET AL. (2010).

Tabelle 4.2: Hypothesen zu Abhängigkeiten bei Langlebigkeitsrisiken (Marktpreise des Risikos)



In der Tat sprechen laut NEUMAYER (2004, S.1039) eine Reihe empirischer Studien dafür, dass sowohl gesundheitsfördernde Güter wie Gesundheitsvorsorge als auch gesundheits-schädigende Güter wie Alkohol und Tabak normale Güter seien. Bei gesundheitsfördernden Gütern impliziert dies eine negative Abhängigkeit, bei gesundheitsschädigenden Güter eine positive Abhängigkeit der Sterblichkeit vom Finanzmarkt. In beiden Fällen sollte es zu einer deutlichen zeitlichen Verzögerung kommen, bei der die Sterblichkeit nach dem Finanzmarkt und dem Einkommen reagiert. Der Nettoeffekt bleibt unklar.

Eine *Beeinflussung des Finanzmarkts durch die Sterblichkeit* könnte über das Spar- und Investitionsverhalten erfolgen. Dabei sind zwei Wirkungsweisen zu unterscheiden. Zum einen könnte die Sterblichkeit die Ersparnis der Bevölkerung, zum anderen ihre Risikoaversität und damit die Verteilung der Ersparnis auf verschiedene Anlageklassen beeinflussen. Letzteres betrifft die Abhängigkeit der Marktpreise des Risikos unterschiedlicher Anlageklassen von der Sterblichkeit und wird daher später als eine mögliche, zusätzliche Abhängigkeit durch die Marktpreise des Risikos diskutiert. Bei ersterem müssen zwei gegenläufige Effekte unterschieden werden (LI ET AL., 2007): der Effekt der Altersstruktur und der Effekt der Lebenserwartung.

Denn einerseits kommt es bei unerwartet niedriger (hoher) Sterblichkeit *ceteris paribus* zu einer Verschiebung der *Altersstruktur*: Die Bevölkerung altert stärker (weniger stark) als erwartet. Wenn Individuen, wie von der Lebenszyklushypothese des Sparens von MODIGLIANI & BRUMBERG (1954) vorausgesagt, ihren Konsum zur Maximierung ihres Lebenszeitnutzens glätten und dazu in jungen Jahren sparen und im Rentenalter entsparen (vgl. auch MODIGLIANI, 1986), sollte bei einem höheren (geringeren) Anteil älterer Menschen in der Bevölkerung die Gesamtersparnis *ceteris paribus* fallen (steigen). Das Ergebnis wären fallende (steigende) Aktien- und Anleihenpreise und steigende (fallende) Zinsen, also eine positive Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen und eine negative Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen. Sie sollten jeweils ohne Zeitverzögerung auftreten.

Andererseits steigt bei einem unerwartet starken (geringen) Rückgang der Sterblichkeit auch die *Lebenserwartung* stärker (weniger stark) als erwartet. Insbesondere wenn die Lebensarbeitszeitgrenze nicht ausreichend angepasst wird, sollte dies *ceteris paribus* den Vorsorgebedarf für den arbeitenden Teil der Bevölkerung sowie die Notwendigkeit einer langsamen Vermögensdekumulation für die Rentner erhöhen (verringern). Dies sollte die Gesamtersparnis steigern (reduzieren). Steigende (fallende) Aktien- und Anleihenpreise und fallende (steigende) Zinsen wären die Folge. Dies entspräche einer negativen Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen und einer positiven Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen, wobei der Finanzmarkt zeitverzögert auf die Sterblichkeit reagieren sollte. Der

Gesamteffekt von Altersstruktur und Lebenserwartung bliebe damit unklar.

Eine Reihe von Studien liefern empirische Anhaltspunkte für die beiden beschriebenen Effekte. Laut LI ET AL. (2007) fokussieren sie sich i. d. R. auf den Einfluss von entweder Altersstruktur oder Lebenserwartung auf Ersparnis bzw. Investition und Wachstum. Studien der zweiten Kategorie würden typischerweise einen positiven Effekt von Lebenserwartung auf Investition nachweisen (z. B. EHRlich & LUI, 1991), während die Ergebnisse bei ersteren keineswegs so eindeutig seien. Insbesondere findet ein Teil der Studien keine oder nur geringe Anzeichen für die von Lebenszyklustheorie vorausgesagte Vermögensdekumulation im Rentenalter (z. B. POTERBA, 2004). Dies wird regelmäßig mit Vererbungsmotiven und einem angesichts unsicherer Lebenserwartung notwendigen, vorbeugenden Sparen erklärt (z. B. SCHICH, 2008).

Im Gegensatz zu anderen Studien trennen LI ET AL. (2007) in ihrem Beitrag die Effekte von sterblichkeitsbedingter Verschiebung der Altersstruktur, Lebensdauer und Geburtenrate. Sowohl modelltheoretisch als auch empirisch weisen sie einen negativen Effekt des Alterskoeffizienten und einen positiven Effekt von Lebenserwartung auf die Ersparnis nach. Der Alterskoeffizient ist dabei als Verhältnis der Renten- zur arbeitenden Bevölkerung definiert. Der Gesamteffekt bleibt unklar, kann jedoch laut LI ET AL. (2007) durchaus null betragen.

Auch wenn die Ergebnisse von LI ET AL. (2007) den aus der Lebenszyklushypothese des Sparens abgeleiteten Altersstruktureffekt sowohl modelltheoretisch als auch empirisch zu bestätigen scheinen, bleibt sein tatsächliches Ausmaß fraglich. Zum einen erlauben die Autoren in ihrem Modell weder Vererbungsmotive noch eine unsichere Lebenserwartung. Beides sollte jedoch die Vermögensdekumulation im Alter und damit den Effekt der Altersstruktur auf die Ersparnis verringern. Zum anderen verwenden LI ET AL. (2007) zur empirischen Überprüfung den Alterskoeffizienten, der nicht nur durch die Sterblichkeit, sondern auch durch die Geburtenraten früherer Perioden getrieben wird.

### **Indirekte Effekte**

Eine weitere mögliche Ursache für Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt ist deren gemeinsame Abhängigkeit von der allgemeinen Wirtschaftslage. In der Literatur zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten führen als erste MILTERSEN & PERSSON (2006) dieses Argument an; sie treffen jedoch keine Aussagen zum Mechanismus, zum Grad oder zur Richtung des Zusammenhangs.<sup>36</sup>

<sup>36</sup>MILTERSEN & PERSSON (2006) verweisen lediglich auf Studien zum Zusammenhang zwischen politischen Ereignissen und der Lebenserwartung in Russland sowie zur Sterblichkeitsentwicklung in der ehemaligen DDR nach der Wiedervereinigung.

Diese findet man umso mehr in der epidemiologischen Forschung. Dort existiert eine Vielzahl von Theorien und empirischen Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen der Wirtschaftslage und dem Gesundheitszustand bzw. der Sterblichkeit von Individuen und Bevölkerungen. NEUMAYER (2004) fasst sie zu zwei großen Sichtweisen zusammen, nach denen Sterblichkeit sich anti- bzw. prozyklisch entwickle.

Nach der *ersten Sichtweise* (z. B. BRENNER & MOONEY, 1983; WATKINS, 1985) würden Rezessionen aufgrund ihrer finanziellen, psychologischen und sozialen Auswirkungen eine Verschlechterung des Gesundheitszustandes und einem Anstieg der Sterblichkeit bewirken. Tatsächliche oder drohende Arbeitslosigkeit führe aufgrund des (befürchteten) finanziellen Verlustes zu einer Verringerung von gesundheitsfördernden Ausgaben sowie einer möglicherweise schlechteren Ernährung und aufgrund des Stresses zu gesundheitsschädlichem Verhalten wie z. B. verstärktem Alkohol- und Drogenkonsum. Auch habe Arbeitslosigkeit aufgrund der starken sozialen Veränderungen wie des Verlusts von sozialen Netzwerken und Selbstachtung Auswirkungen auf das psychische Wohlbefinden.

Nach der *zweiten Sichtweise* (z. B. RUHM, 2000, 2005) hätten Rezessionen positive Auswirkungen auf den Gesundheitszustand, da Individuen mehr Zeit auf gesundheitsfördernde Maßnahmen wie z. B. medizinische Vorsorge und das Kochen gesunder Mahlzeiten verwendeten, da der geringere arbeitsbedingte Stress und das geringere Einkommen die Ausgaben für gesundheitsschädigende Güter wie Alkohol und Nikotin senkten und da es weniger Arbeitsunfälle gebe.

Beide Sichtweisen scheinen, durch empirische Untersuchungen bestätigt zu werden.<sup>37</sup> So weisen auf der einen Seite verschiedene Studien mit Hilfe von Mikrodaten einen positiven Einfluss von Arbeitslosigkeit auf die individuelle, todesartübergreifende Sterblichkeit sowie einen Teil der individuellen, todesartspezifischen Sterblichkeiten nach (z. B. GERDTHAM & JOHANNESSON, 2003; NYLÉN ET AL., 2001; VOSS ET AL., 2004). Außerdem zeigt beispielsweise BRENNER (2005) auf Basis von Makrodaten, dass niedrige Arbeitslosigkeit und hohes Wirtschaftswachstum die Sterblichkeit einer Bevölkerung mittel- bis langfristig reduzieren.

Auf der anderen Seite finden jedoch z. B. RUHM (2000), NEUMAYER (2004) und GERDTHAM & RUHM (2006) für die USA, Deutschland bzw. 23 Länder der Organisation for Economic Co-Operation and Development (OECD) einen kurzfristigen, negativen Zusammenhang zwischen Arbeitslosigkeit und Sterblichkeit. Dies gilt sowohl für die todesartübergreifende als auch für eine Reihe von todesartspezifischen Sterberaten. Ihre Analysen basieren auf Makrodaten, doch wird die Sichtweise der Autoren, Sterblichkeit entwickle sich prozy-

---

<sup>37</sup> Als Maß für die Wirtschaftslage dienen dabei i. d. R. Maße für die Arbeitslosigkeit und das Bruttoinlandsprodukt, wobei bei letzterem häufig auf das reale und/oder pro-Kopf-Bruttoinlandsprodukt zurückgegriffen wird.

klisch, auch durch Mikrodaten untermauert. RUHM (2000, 2005) zeigt beispielsweise, dass in Wirtschaftsaufschwüngen mehr geraucht wird, die Fettleibigkeit zunimmt und sportliche Aktivitäten eingeschränkt werden.

Der scheinbare Widerspruch zwischen den beiden Sichtweisen und den empirischen Untersuchungen kann durch vier Argumente entkräftet werden. Erstens müssen sich die beiden Sichtweisen laut NEUMAYER (2004) nicht gegenseitig ausschließen; sie könnten lediglich unterschiedliche Facetten eines komplexen Zusammenhangs beschreiben.

Zweitens muss – wie auch CATALANO & BELLOWS (2005) betonen – bei der Interpretation der empirischen Ergebnisse das Problem des ökologischen Trugschlusses bedacht werden, bei dem fälschlicherweise von Zusammenhängen auf der Makroebene auf Zusammenhänge auf der Mikroebene geschlossen wird.

Im konkreten Fall dürfen beispielsweise die aus aggregierten Daten gewonnenen Ergebnisse von RUHM (2000), NEUMAYER (2004) und GERDTHAM & RUHM (2006), nach denen steigende Arbeitslosigkeit mit einem Rückgang der Sterblichkeit der Bevölkerung einhergeht, nicht dahingehend interpretiert werden, dass Arbeitslosigkeit auch im Einzelfall zu geringerer Sterblichkeit führe.

Wahrscheinlicher ist laut CATALANO & BELLOWS (2005), dass in Rezessionen bzw. bei steigender Arbeitslosigkeit sich der Gesundheitszustand und die Sterblichkeit zwar für die Betroffenen verschlechtern, aber gleichzeitig für die Beschäftigten verbessern würden, z. B. aufgrund eines gesünderen und weniger antisozialen Verhaltens<sup>38</sup> oder einer geringeren Anzahl von Arbeitsunfällen. Der Nettoeffekt einer Rezession wäre dann eine Reduktion der Sterblichkeit, die sich in dem von beispielsweise RUHM (2000), NEUMAYER (2004) und GERDTHAM & RUHM (2006) gefundenem Makrozusammenhang äußert.

Drittens spielen Zeitverzögerungen eine wichtige Rolle. So argumentiert BRENNER (2005) zwar, dass starkes Wirtschaftswachstum die Sterblichkeit einer Bevölkerung mittel- bis langfristig reduziere, und sogar, dass es die treibende Kraft hinter Verbesserungen in der Lebenserwartung sei. Gleichzeitig räumt er aber ein, dass es die Sterblichkeit kurzfristig – d. h. innerhalb der ersten Monate – erhöhen könne. Im ersten Fall spricht BRENNER (2005) von nachhaltigem Trendwachstum, im zweiten Fall von schnellem Wachstum.

Der kurzfristige Effekt liege zum einen an den mit schnellem Wirtschaftswachstum einhergehenden Veränderungen. So müssten Arbeitnehmer sich an neue Arbeitsweisen gewöhnen, neue Fähigkeiten erlernen, mit der Gefahr eines Statusverlusts und mit erhöhter Arbeitsbelastung umgehen. Zum anderen würden Arbeitsgeber zu Beginn des Aufschwungs nur

---

<sup>38</sup>Verschiedene Studien weisen diesen sogenannten Inhibitionseffekt auf der Mikroebene nach (z. B. CATALANO ET AL., 1993).

zögerlich weitere Mitarbeiter einstellen, so dass die Arbeitsbelastung zusätzlich steige.

Viertens und letztens kann die Verwendung unterschiedlicher statistischer Methoden und Kontrollvariablen die Unterschiede in den empirischen Ergebnissen erklären (NEUMAYER, 2004; RUHM, 2000).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Sterberaten der Bevölkerung wahrscheinlich kurzfristig positiv und mittel- bis langfristig negativ von der Wirtschaftsentwicklung abhängen. Da Aktienkurse und Zinsen sich prozyklisch entwickeln, bedeutet dies Folgendes für den Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktien bzw. Zinsen:

*Kurzfristig* sollte die Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen bzw. Zinsen positiv sein. Da der Finanzmarkt die Erwartungen des Markts zum Wirtschaftswachstum und insbesondere zu der als zeitverzögerte Variable bekannten Arbeitslosenrate vorwegnimmt, kann es hier durchaus zu einer leichten Zeitverzögerung zwischen dem Finanzmarkt und der Sterblichkeit kommen. Der Finanzmarkt sollte dabei vor der Sterblichkeit reagieren.

*Langfristig* sollte der Zusammenhang negativ sein. Die Zeitverzögerung zwischen Wirtschaftsentwicklung und Sterblichkeit sollte dabei durch die Vorausschau des Finanzmarkts weiter verstärkt werden.

#### 4.1.1.2 Abhängigkeiten durch Marktpreise des Risikos

Weitere Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt können durch eine Abhängigkeit zwischen den Marktpreisen der Finanzmarktrisiken und der Sterblichkeit, zwischen dem Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos und dem Finanzmarkt oder zwischen den Marktpreisen des Sterblichkeits- und der Finanzmarktrisiken entstehen. Dies gilt sowohl für Langlebighkeits- als auch für kurzfristige Sterblichkeitsrisiken.

Die Marktpreise des Risikos seien dabei jeweils so definiert, dass ein positiver (negativer) Marktpreis des Risikos den Drift der jeweiligen Größe beim Maßwechsel zum Martingalmaß verringere (erhöhe). Bei einem positiven (negativen) Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos werden demnach unter dem Martingalmaß niedrigere (höhere) Sterbewahrscheinlichkeiten bzw. höhere (niedrigere) Überlebenswahrscheinlichkeiten angesetzt als unter dem realen Maß. Dies entspricht nicht immer der Definition anderer Forscher (z. B. COX ET AL., 2006; LIN & COX, 2008).

Bei Langlebighkeitsrisiken können die zusätzlichen Abhängigkeiten durch direkte Effekte entstehen. Dabei beeinflusst die Sterblichkeit oder der Finanzmarkt die Marktpreise der Finanzmarkt- und/oder Sterblichkeitsrisiken.

### **Sterblichkeit und Marktpreise der Finanzmarktrisiken**

Eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und den Marktpreisen der Finanzmarktrisiken kann bei Langlebigkeitsrisiken durch den Einfluss der Sterblichkeit auf die durchschnittliche Risikoaversität der Bevölkerung entstehen. Dabei müssen zwei gegenläufige Effekte unterschieden werden. *Einerseits* kommt es ceteris paribus bei unerwartet niedrigen (hohen) Sterberaten zu einer Verschiebung der Altersstruktur: Die Bevölkerung altert stärker (weniger stark) als erwartet. Da die Risikoaversität nach der Lebenszyklushypothese der Risikoaversität mit dem Alter zunehmen sollte (BAKSHI & CHEN, 1994), sollte die durchschnittliche Risikoaversität der Bevölkerung durch die Verschiebung der Altersstruktur höher (niedriger) ausfallen als erwartet.<sup>39</sup>

Der Marktpreis des Aktienrisikos sollte steigen (fallen) und die Nachfrage sich von Aktien zu Anleihen (Anleihen zu Aktien) verschieben. Das Ergebnis wären fallende (steigende) Aktienkurse und Zinsen, was einer positiven Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktien bzw. Zinsen entspräche. Sie sollte ohne Zeitverzögerung auftreten.

*Andererseits* steigt bei einem unerwartet starken (niedrigen) Rückgang der Sterblichkeit auch die Lebenserwartung stärker (weniger stark) als erwartet. Dies erhöht (verringert) nicht nur den Vorsorgebedarf (vgl. Kapitel 4.1.1.1) und damit die Notwendigkeit risikoreicherer Investitionen, sondern verlängert (verkürzt) insbesondere bei einer Anpassung der Lebensarbeitszeit auch den Investitionshorizont, so dass die individuelle Risikoaversion niedriger (höher) ausfallen sollte als erwartet.

Es käme dann zu einem Rückgang (Anstieg) des Marktpreises des Aktienrisikos und einer Verschiebung der Nachfrage von Anleihen zu Aktien (Aktien zu Anleihen). Steigende (fallende) Aktienkursen und Zinsen wären die Folge. Dies entspräche einer negativen Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen bzw. Zinsen, wobei der Finanzmarkt zeitverzögert auf die Sterblichkeit reagieren sollte. Der Gesamteffekt von Altersstruktur und Lebenserwartung bliebe damit unklar.

Der erste der beiden beschriebenen Effekte, die Lebenszyklushypothese der Risikoaversität, wird insbesondere im Zusammenhang mit dem Baby Boom der USA und seinen Auswirkun-

---

<sup>39</sup>FEHR & JOKISCH (2006, S. 508 f.) betonen mit Verweis auf BODIE ET AL. (1992) und JAGANNATHAN & KOCHERLAKOTA (1996), dass diese Aussage nur unter bestimmten Annahmen gültig ist: Während bei sicherem Arbeitseinkommen der Aktienanteil im Alter angesichts der geringeren Flexibilität des Arbeitsangebot sinken sollte (vgl. BODIE ET AL., 1992), bestimme bei unsicherem Arbeitseinkommen auch dessen Korrelation mit dem Aktienmarkt die Entwicklung des Aktienanteils über den Lebenszyklus (vgl. JAGANNATHAN & KOCHERLAKOTA, 1996). So könne bei positiv mit dem Aktienmarkt korrelierten Arbeitseinkommen der Aktienanteil im Alter sogar steigen. Auch die OECD (2005, S. 28) argumentiert, dass junge Rentner u. U. risikofreudiger seien als die Arbeitsbevölkerung, weil Renten besser vorhersagbar seien als das Arbeitseinkommen.

gen auf Finanzmarktpreise und Risikoprämien diskutiert. Zur empirischen Untermauerung werden i. d. R. entweder mit dem Alter sinkende Aktienanteile oder der positive Einfluss des Durchschnittsalters oder Alterskoeffizienten auf Risikoprämien am Aktienmarkt angeführt. Die Ergebnisse sind jedoch keineswegs eindeutig. Zum ersten Punkt fassen FEHR & JOKISCH (2006, S. 509f.) die Ergebnisse verschiedener Arbeiten zusammen. Nur bei einem Teil von ihnen gehe der Aktienanteil im Alter zurück (z. B. HEATON & LUCAS, 2000); bei anderen bleibe er im Rentenalter konstant oder steige sogar (z. B. AMERIKS & ZELDES; POTERBA & SAMWICK, 2001). FEHR & JOKISCH (2006) führen diese Unterschiede u. a. darauf zurück, dass Alters-, Perioden- und Kohorteffekte nicht getrennt werden könnten.

Zum zweiten Punkt weisen zwar BAKSHI & CHEN (1994) für die USA einen signifikanten, positiven Einfluss des Durchschnittsalters auf die Risikoprämie des Standard & Poor's 500 (S&P 500) nach. Doch können ANG & MADDALONI (2005) diesen Zusammenhang nur für die USA, nicht aber für andere Länder bestätigen: Nicht nur sei dort der Zusammenhang zwischen Durchschnittsalter und Risikoprämie nicht signifikant; die Autoren zeigen auch, dass der Anteil der Renter an der erwachsenen Bevölkerung anders als in den USA und im Widerspruch zur Lebenszyklushypothese der Risikoaversion ein signifikanter, aber negativer Prädiktor für Überrenditen am Aktienmarkt sei.

Darüber hinaus vermischen BAKSHI & CHEN (1994), indem sie in ihrer Analyse das Durchschnittsalter betrachten, die Effekte von Geburtenrate, Altersstruktur und Lebenserwartung. Die Autoren selbst weisen auf die Bedeutung des Baby Booms für den Altersanstieg in den USA nach 1945 hin. Ihre Ergebnisse sollten daher erstens stark durch die Veränderung der Geburtenrate getrieben sein und können nicht als empirischer Anhaltspunkt für den Effekt einer veränderten Sterblichkeit dienen. Zweitens handelt es sich – wie auch ANG & MADDALONI (2005) argumentieren – bei dem Baby Boom der USA, streng genommen, nur um einen einzelnen, nicht repräsentativen Datenpunkt.

### **Finanzmarkt und Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos**

Eine Abhängigkeit zwischen dem Finanzmarkt und dem Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos kann bei Langlebigkeitsrisiken durch einen Einfluss von ersterem auf letzteren entstehen. Drei verschiedene Mechanismen werden dazu von BAUER (2006) und BAUER ET AL. (2010) vorgeschlagen und zum Teil mit empirischen Anhaltspunkten untermauert. In allen drei Fällen sollte die Abhängigkeit ohne Zeitverzögerung auftreten.

Der *erste Erklärungsansatz* stammt von BAUER (2006). Er argumentiert, dass Lebensversicherer Langlebigkeitsrisiken in einem niedrigen (hohen) Zinsumfeld mehr (weniger) Beachtung schenken würden. Dies könne daran liegen, dass in einem niedrigen (hohen) Zinsum-

feld die aktuellen Verbindlichkeiten der Lebensversicherer stiegen (fielen) und sie dadurch im Allgemeinen auch bei der Aufnahme neuer Verbindlichkeiten vorsichtiger (weniger vorsichtig) würden. Der Anstieg (Rückgang) der Verbindlichkeiten komme dabei nicht nur durch den reinen Diskonteffekt zustande, sondern auch durch die Tatsache, dass einige in Rentenversicherungen enthaltene Optionen wie z. B. die einer Mindestrente in einem niedrigen (hohen) Zinsumfeld eher (seltener) im Geld seien.

Sofern Versicherer Verbindlichkeiten aus Langlebigkeitsrisiken in einem niedrigen (hohen) Zinsumfeld tatsächlich einen höheren (niedrigeren) Wert beimessen als durch den reinen Diskonteffekt und eine Abhängigkeit der realen Sterblichkeit erklärbar, kann dies als negative Abhängigkeit des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos vom Zinsniveau interpretiert werden. Bei der Bewertung von Lebensversicherungen und Langlebigkeitsderivaten würden dann in einem niedrigen Zinsumfeld höhere Überlebenswahrscheinlichkeiten bzw. niedrigere Sterbewahrscheinlichkeiten verwendet als in einem hohen Zinsumfeld. Dies entspräche einer positiven Abhängigkeit zwischen der bei der Bewertung angesetzten Sterblichkeit und den Zinsen.

Ein *weiter Erklärungsansatz* von BAUER ET AL. (2010) zielt ebenfalls auf den Einfluss des Zinsniveaus auf den Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos ab. Da bei fallenden (steigenden) Zinsen der Wert einer Leibrente mit gegebener Annuitätenrate steigt (fällt), muss jeder Zinsrückgang (-anstieg) theoretisch eine Reduktion (Erhöhung) der Annuitätenraten nach sich ziehen.

Wenn jedoch – so BAUER ET AL. (2010) – Lebensversicherer diese Anpassung, sei es aus rein praktischen oder aus wettbewerbstechnischen Gründen, erst mit Verzögerung vornehmen, müssen die impliziten Überlebenswahrscheinlichkeiten und der implizite Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos fallen (steigen). Dies entspräche einer positiven Abhängigkeit des impliziten Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos vom Zinsniveau und folglich einer negativen Abhängigkeit zwischen der impliziten Sterblichkeit unter dem Martingalmaß und den Zinsen.

In der Tat finden BAUER ET AL. (2010) für den Zeitraum von März 2003 bis Dezember 2006 eine Korrelation von 0,907 zwischen den aus britischen Leibrentenraten geschätzten Marktpreisen des Sterblichkeitsrisikos<sup>40</sup> und der zehnjährigen Zinsstrukturrendite britischer Staatsanleihen.

Ob diese Abhängigkeit auch bei der Bewertung von Langlebigkeitsderivaten berücksichtigt werden sollte, ist jedoch fraglich. Denn die Preise von am Kapitalmarkt gehandelten Instru-

---

<sup>40</sup>BAUER ET AL. (2010) berücksichtigen in ihrem Modell allerdings keine Abhängigkeit zwischen der realen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt.



menten sollten unmittelbar oder zumindest deutlich schneller an das aktuelle Zinsniveau angepasst werden als die Preise von Versicherungsprodukten. Die diskutierte Abhängigkeit könnte daher vielmehr ein weiterer Einwand gegen die Verwendung von aus Leibrentenraten geschätzten Marktpreisen des Risikos sein.

Im Gegensatz zu den beiden ersteren beschreibt der *dritte Erklärungsansatz* den Zusammenhang zwischen dem Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos und Aktienrenditen. Laut BAUER ET AL. (2010) erlauben hohe (niedrige) Aktienrenditen den Rentenversicherern, ihren Versicherungsnehmern eine hohe (niedrige) Verzinsung zu versprechen.

Falls Versicherer ihre Annuitätenraten in Zeiten hoher (niedriger), tatsächlicher oder erwarteter Aktienrenditen stärker erhöhen (senken), als durch geänderte Zins- oder Sterblichkeits-erwartungen gerechtfertigt, fallen (steigen) die impliziten Überlebenswahrscheinlichkeiten und der implizite Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos. Es käme zu einer positiven Abhängigkeit der zur Bewertung angesetzten Sterblichkeit bzw. einer negativen Abhängigkeit des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos von den Aktienrenditen.

Und tatsächlich finden BAUER ET AL. (2010) eine deutlich negative Korrelationen von  $-0,800$  von September 2000 bis März 2003 bzw. von  $-0,496$  von März 2003 bis Dezember 2006 zwischen den aus britischen Leibrentenraten geschätzten Marktpreisen des Sterblichkeitsrisikos<sup>40</sup> und dem wichtigsten Aktienindex des britischen Financial Times Stock Exchange (FTSE), dem FTSE 100.

Wieder ist jedoch fraglich, ob diese Abhängigkeit bei der Bewertung von Langleblichkeitsderivaten berücksichtigt werden sollte. Dass Lebensversicherer ihren Versicherungsnehmern in Zeiten hoher Aktienrenditen höhere Renditen versprechen können und es – womöglich aus wettbewerbstechnischen Gründen – auch tun, ist für Kapitalmarktteilnehmer kein Grund, bei florierenden Aktienmärkten zugunsten der sich absichernden Lebensversicherer auf einen Teil ihrer Prämie zu verzichten.

### **Marktpreise der Sterblichkeits- und Finanzmarktrisiken**

Eine Abhängigkeit zwischen den Marktpreisen des Sterblichkeits- und der Finanzmarktrisiken kann bei Langleblichkeitsrisiken durch den Einfluss der Sterblichkeit auf die Marktpreise des Risikos entstehen.

Bei einer wiederholten Unterschätzung (Überschätzung) der Überlebensraten könnten Lebensversicherer und Investoren vorsichtiger (weniger vorsichtig) bei der Übernahme von Langleblichkeitsrisiken werden. Dies würde sich in einem Anstieg (Rückgang) des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos äußern und zu einer Reduktion (Erhöhung) der bei der Bewertung angesetzten Sterbewahrscheinlichkeiten führen.

Der unerwartete starke (schwache) Rückgang in der realen Sterblichkeit könnte gleichzeitig die bereits diskutierten Auswirkungen auf die Risikoaversität und die Marktpreise der Finanzmarktrisiken haben (vgl. S. 63 ff.). Durch eine stärkere (schwächere) Alterung könnte die Bevölkerung im Durchschnitt risikoaverser (risikofreudiger), durch eine Verlängerung (Verkürzung) der erwarteten Investitionsdauer und des höheren (niedrigeren) Vorsorgebedarfs hingegen risikofreudiger (risikoaverser) anlegen.

Ersteres entspräche einer positiven, letzteres einer negativen Abhängigkeit zwischen der Sterblichkeit und Aktienrenditen bzw. Zinsen. Während die Abhängigkeit im zweiten Fall ohne Zeitverzögerung auftreten sollte, könnten im ersten Fall bei zeitverzögerter Veröffentlichung der Sterblichkeitsdaten die Marktpreise der Finanzmarktrisiken vor denen des Sterblichkeitsrisikos reagieren.

#### 4.1.2 Kurzfristige Sterblichkeitsrisiken

Bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken sollte es ausschließlich zu nicht oder nur geringfügig zeitverzögerten Abhängigkeiten kommen. Sie können am ehesten durch eine Abhängigkeit der Sprungprozesse oder der Marktpreise des Risikos entstehen und sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

Sowohl bei Aktien als auch bei Zinsen sind gegenläufige Effekte vorstellbar, wobei bei Aktien die Effekte überwiegen sollten, die eine negative Abhängigkeit zwischen Aktien und Sterblichkeit implizieren.

##### 4.1.2.1 Abhängigkeiten durch Sprungprozesse

Bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken ist eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt am ehesten durch den Einfluss von Katastrophen, also durch einen indirekten Effekt und Sprünge, vorstellbar.

Natur- und andere Katastrophen wie Pandemien oder große Terroranschläge führen bei vielen Todesopfern unmittelbar zu einem Anstieg der Sterblichkeit. Als Beispiel sei die Spanische Grippe von 1918 genannt. Gleichzeitig könnten sie Auswirkungen auf die Finanzmärkte haben, wenn Investoren angesichts der gestiegenen Unsicherheit und Volatilität an den Märkten aus finanziellen Anlagen wie Aktien und Anleihen in physische Anlagen fliehen. Man denke nur an die Kurseinbrüche am Aktienmarkt nach dem 11. September 2001.

Risikoart und Erklärungsansatz	Erwartetes Lag <sup>c</sup>	Erwartete Abhängigkeit von Sterblichkeit und ...	
		Aktien	Zinsen
<b>ABHÄNGIGKEITEN DURCH SPRUNGPROZESSE</b>			
<b>Indirekte Effekte</b>			
Anstieg der Sterblichkeit, Flucht aus Aktien und Anleihen sowie ggf. Zentralbankintervention nach Katastrophen mit vielen Todesopfern	Null	Negativ	Negativ/ positiv
<b>ABHÄNGIGKEITEN DURCH MARKTPREISE DES RISIKOS</b>			
<b>Sterblichkeit und Marktpreise der Finanzmarktrisiken: indirekte Effekte</b>			
Anstieg der Sterblichkeit, größere Vorsicht bei Investitionen in Aktien und Anleihen und ggf. Zentralbankintervention nach Katastrophen	Null	Negativ	Negativ/ positiv
<b>Finanzmarkt und Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos: direkte Effekte</b>			
Geringere (größere) Bereitschaft von Investoren, bei hohen (niedrigen) erwarteten Finanzmarkrenditen, Katastrophenrisiken zu halten	Null	Positiv	Positiv
<b>Marktpreise der Sterblichkeits- und Finanzmarktrisiken: indirekte Effekte</b>			
Größere Vorsicht bei der Übernahme von Sterblichkeitsrisiken sowie bei Investitionen in Aktien und Anleihen und ggf. Zentralbankintervention nach Katastrophen	Null	Negativ	Negativ/ positiv

<sup>c</sup>Positiv: Sterblichkeit vor Finanzmarkt; negativ: Finanzmarkt vor Sterblichkeit.

Tabelle 4.3: Hypothesen zu Abhängigkeiten bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken

Aktien- und Anleihenpreise würden dann ebenso wie die realisierten Aktienrenditen fallen; die Zinsen würden steigen. Dies entspräche einer negativen Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen. Die Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen wäre positiv, sofern die Turbulenzen an den Kapitalmärkten keine Zentralbankintervention zur Folge hätten. In diesem Fall könnten die Zinsen durch eine Vergrößerung der Geldmenge oder eine Reduktion des Leitzinses sogar fallen, so dass die Abhängigkeit zwischen Zinsen und Sterblichkeit negativ wäre.

Unabhängig von der Richtung des Zusammenhangs sollte die Abhängigkeit ohne oder mit nur sehr geringer Zeitverzögerung auftreten.

#### 4.1.2.2 Abhängigkeiten durch Marktpreise des Risikos

Bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken können zusätzliche Abhängigkeiten durch die Marktpreise des Risikos sowohl durch direkte als auch durch indirekte Effekte entstehen. Im ersten Fall beeinflussen die Sterblichkeit oder der Finanzmarkt die Marktpreise der Sterblichkeits- und/oder Finanzmarktrisiken; im zweiten Fall beeinflusst eine dritte Größe die Marktpreise des Risikos, die Sterblichkeit und/oder den Finanzmarkt.

##### **Sterblichkeit und Marktpreise der Finanzmarktrisiken**

Eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und den Marktpreisen der Finanzmarktrisiken ist bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken aufgrund von Natur- und anderen Katastrophen möglich.

Diese könnten nicht nur zu einem starken Anstieg in der Sterblichkeit führen, sondern auch zu einer großen Unsicherheit an den Kapitalmärkten und größerer Vorsicht bei Investitionen in Aktien und Anleihen, also zu einem Einfluss auf die Marktpreise des Aktien- und Zinsrisikos. Aktien- und Anleihenpreise würden ebenso wie die realisierten Aktienrenditen fallen; die Zinsen würden steigen. Dies entspräche einer negativen Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen. Die Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen wäre positiv, sofern die Turbulenzen an den Kapitalmärkten keine Zentralbankintervention zur Folge hätten. In diesem Fall könnten die Zinsen durch eine Vergrößerung der Geldmenge oder eine Reduktion des Leitzinses sogar fallen, so dass die Abhängigkeit zwischen Zinsen und Sterblichkeit negativ wäre.

Unabhängig von der Richtung des Zusammenhangs sollte die Abhängigkeit ohne oder mit nur sehr geringer Zeitverzögerung auftreten.

**Finanzmarkt und Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos**

Eine zusätzliche Abhängigkeit kann bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken wie z. B. bei Katastrophenanleihen auch durch einen Einfluss des Finanzmarkts auf den Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos entstehen. Dies wäre beispielsweise dann der Fall, wenn die Bereitschaft von Investoren, Katastrophenrisiken zu halten, bei hohen (niedrigen) erwarteten Finanzmarktrenditen fiel (stiege).

Bei hohen (niedrigen) erwarteten Aktienrenditen bzw. Zinsen übernehmen Investoren dann das Risiko steigender Sterblichkeit von Risikolebensversicherern im Ausgleich für eine höhere (niedrigere) Rendite auf das Sterblichkeitsderivat. Bei der Bewertung würden dazu ein niedrigerer (höherer) Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos bzw. höhere (niedrigere) Sterbewahrscheinlichkeiten angesetzt. Dies entspräche einer positiven Abhängigkeit zwischen der für die Bewertung angesetzten Sterblichkeit und den Aktienrenditen bzw. Zinsen. Es sollte keine Zeitverzögerung geben.

**Marktpreise der Sterblichkeits- und Finanzmarktrisiken**

Eine Abhängigkeit zwischen den Marktpreisen des Sterblichkeits- und der Finanzmarktrisiken ist durch den Einfluss von Katastrophen denkbar.

In Zeiten tatsächlicher oder drohender Natur- und anderer Katastrophen mit potenziell starkem, aber unsicherem Anstieg in der Sterblichkeit könnten Investoren vorsichtiger bei Übernahme von Sterblichkeitsrisiken werden. Für das Risiko steigender Sterblichkeit würden sie dann eine deutlich höhere Rendite auf das Sterblichkeitsderivat fordern und dazu bei der Bewertung höhere Sterbewahrscheinlichkeiten bzw. einen niedrigeren, d. h. betragsmäßig höheren, Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos ansetzen.

Gleichzeitig könnten Investoren angesichts der großen Unsicherheit an den Kapitalmärkten vorsichtiger mit Investitionen in Aktien und Anleihen werden. Aktien- und Anleihenpreise würden ebenso wie die realisierten Aktienrenditen fallen und die Zinsen steigen.

Dies entspräche einer negativen Abhängigkeit zwischen der bei der Bewertung verwendeten Sterblichkeit und den Aktienrenditen bzw. zwischen ihren Marktpreisen des Risikos. Die Abhängigkeit zwischen den risikoneutralen Sterbewahrscheinlichkeiten und Zinsen hingegen wäre *ceteris paribus* positiv. Allerdings würden die Turbulenzen an den Kapitalmärkten eine Zentralbankintervention wahrscheinlich machen, so dass es insgesamt zu fallenden Zinsen und einer negativen Abhängigkeit zwischen der bei der Bewertung angesetzten Sterblichkeit und den Zinsen kommen könnte.

Unabhängig von der Richtung des Zusammenhangs sollte die Abhängigkeit ohne Zeitverzögerung auftreten.

## 4.2 Relevanz einer Abhängigkeit

Die Relevanz einer Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt für den Wert von Sterblichkeitsderivaten lässt sich abhängig vom gewählten Modellansatz begründen. Zur Bewertung mit *Nichtarbitragemodellen* sei hier beispielhaft der CAPM-Ansatz von FRIEDBERG & WEBB (2006) diskutiert.

Die erwartete Rendite eines Wertpapiers ergibt sich im CAPM aus dem risikolosen Zins und einer Risikoprämie (vgl. OEHLER & UNSER, 2002, S. 55). Diese wird als Produkt der Überrendite des Marktportfolios über den risikolosen Zins und dem Beta des Wertpapiers bestimmt (ebd.). Das Beta ist als Kovarianz der Wertpapier- und Marktportfoliorenditen, geteilt durch die Varianz der Marktportfoliorendite, definiert (ebd.). Eine Korrelation zwischen den Wertpapierrenditen und den Renditen des Marktportfolios beeinflusst deshalb ceteris paribus die erwartete Rendite des Wertpapiers und damit indirekt seinen Wert.

Bei Derivaten, deren Rendite von der Sterblichkeit abhängt, wirkt sich daher eine Abhängigkeit zwischen der Sterblichkeit und den Renditen des Marktportfolios auf den Wert des Derivats aus. Da die Marktportfoliorenditen wesentlich durch den Finanzmarkt bestimmt sind, sollte bei der Bewertung von Sterblichkeitsderivaten mit dem CAPM deshalb eine eventuelle Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt berücksichtigt werden.

Bei der Bewertung mit *Arbitragemodellen* ergibt sich die Relevanz einer eventuellen Abhängigkeit aus ihrem Einfluss auf die zu bildenden Erwartungswerte.

Arbitragemodelle setzen die Existenz eines sogenannten äquivalenten Martingalmaßes voraus, unter dem der diskontierte, positive Preisprozess eines nicht ausschüttenden Wertpapiers ein Martingal ist (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 25 f., Definition 2.1.2). Für ein gegebenes Numéraire  $\mathcal{B}$  und das dazu gehörige Martingalmaß  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  ist der Preisprozess  $V$  einer darstellbaren Eventualforderung dann durch

$$V_t = \mathcal{B}_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}} \left[ \frac{V_T}{\mathcal{B}_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (4.1)$$

gegeben (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 27, Satz 2.2.1). Dabei seien  $T > t$ ,  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}}[\cdot]$  der Erwartungswertoperator unter  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  und  $\mathcal{F}_t$  die zum Zeitpunkt  $t$  verfügbare Information.

Der Wert  $\Pi$  eines Derivats mit diskreten, darstellbaren Auszahlungen  $V_s$ ,  $s \geq t$ , ergibt sich dann als Summe der Erwartungswerte aller zukünftigen, diskontierten Auszahlungen,

multipliziert mit dem aktuellen Wert des Numéraire:

$$\Pi_t = B_t \sum_{s \geq t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_B} \left[ \frac{V_s}{B_s} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.2)$$

Hängen nun die diskontierten Zahlungen  $V_s/B_s$  sowohl von der Sterblichkeit als auch von Finanzmarktgrößen ab, beeinflusst eine unter dem äquivalenten Martingalmaß  $\mathbb{Q}_B$  bestehende Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt i. d. R.<sup>41</sup> den Wert der einzelnen Erwartungswerte  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_B} [V_s/B_s | \mathcal{F}_t]$  und damit i. d. R.<sup>42</sup> ebenfalls den Wert des Derivats.

Dies lässt sich leicht am Beispiel eines Sterblichkeitsderivats verdeutlichen, dessen Auszahlung nur von der Sterblichkeit abhängt und das unter dem äquivalenten Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  des Geldmarktkontos  $B$  mit  $B_t := \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$  bewertet wird. Der Wert  $\Pi$  des Derivats ist dann für  $t > 0$  durch

$$\Pi_t = B_t \sum_{s \geq t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{V_s}{B_s} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sum_{s \geq t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_t}{B_s} V_s \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (4.3)$$

gegeben, wobei die Auszahlungen  $V_s$ ,  $s \geq t$ , annahmegemäß nur von der Höhe oder dem Verlauf von Sterblichkeitsgrößen abhängen.

Bei Unabhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt lässt sich dies vereinfachen zu

$$\Pi_t = \sum_{s \geq t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_t}{B_s} \middle| \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V_s | \mathcal{F}_t] = \sum_{s \geq t} P_t(s) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V_s | \mathcal{F}_t]. \quad (4.4)$$

Dabei steht  $P(T)$  mit  $P_t(T) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$  für den Preisprozess einer Nullkuponanleihe mit Nennwert eins und Fälligkeitstermin  $T$ . Im Gegensatz dazu gilt Gleichung (4.4) bei einer Abhängigkeit i. d. R. nicht.

<sup>41</sup>Dies muss nicht immer der Fall sein. Lassen sich die diskontierten Zahlungen  $V_s/B_s$  beispielsweise als Linearkombination von Sterblichkeits- und Finanzmarktgrößen darstellen, werden ihre Erwartungswerte durch eine eventuelle Abhängigkeit nicht beeinflusst.

<sup>42</sup>Wenn eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt die Erwartungswerte  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_B} [V_s/B_s | \mathcal{F}_t]$  verschiedener Zahlungszeitpunkte  $s$  in unterschiedliche Richtungen verändert, ist es theoretisch möglich, dass sich der Effekt bei der Summenbildung aufhebt und eine Abhängigkeit keine Auswirkung auf den Wert des Derivats hat.

## Kapitel 5

# Empirische Messung des Zusammenhangs

Trotz der in Kapitel 4.1 diskutierten Hypothesen und Anhaltspunkte erlauben nur sehr wenige Autoren in ihren Modellen eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Finanzmarktrisiken (vgl. Kapitel 2.2.2.2). Und selbst diese wenigen Autoren spezifizieren Art, Richtung und Grad der Abhängigkeit nicht genau und vernachlässigen sie bei eventuellen Modellimplementierungen. Dies ist umso erstaunlicher, als dass eine signifikante Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt i. d. R. bewertungsrelevant wäre (vgl. Kapitel 4.2).

Zugegebenermaßen ist eine Berücksichtigung von Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt in Bewertungsmodellen auf Basis existierender epidemiologischer oder demographischer Untersuchungen nicht ohne Weiteres möglich.

Bestehende Untersuchungen aus der epidemiologischen Forschung (vgl. Kapitel 4.1.1.1) verfolgen ein anderes Ziel: die Bestimmung und Messung der Einflussfaktoren menschlicher Sterblichkeit und Gesundheit. Als zu erklärende Variable wählen sie dabei teilweise todesartspezifische Sterblichkeiten oder stark aggregierte Größen wie die Lebenserwartung und als Erklärungsvariablen meist keine Finanzmarkt-, sondern allenfalls verwandte Größen wie das Bruttoinlandsprodukt oder Arbeitslosigkeit.

Beiträge aus der demographischen Forschung (vgl. Kapitel 4.1.1) untersuchen zwar zum Teil den Zusammenhang zu Finanzmarktgrößen wie Renditen oder Prämien. Als demographische Größe wählen sie dann jedoch häufig Größen, die die Altersstruktur einer Bevölkerung anstatt ihrer Sterblichkeit beschreiben. Außerdem liegt der Schwerpunkt oft auf Aktien statt



auf den für die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten besonders relevanten Zinsen.

Sowohl epidemiologische als auch demographische Forschungsbeiträge fokussieren sich i. d. R. auf den Nachweis einzelner Aspekte des Wirkungszusammenhangs und verwenden dazu vielfältige, zusätzliche Erklärungsvariablen.

Für die Berücksichtigung einer eventuellen Abhängigkeit bei der praktischen Bewertung von Sterblichkeitsderivaten sind die Ergebnisse existierender Untersuchungen deshalb nur bedingt hilfreich: Erstens ist für die Bewertung der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und bestimmten Finanzmarktgrößen relevant und nicht derjenige zwischen beispielsweise Sterblichkeit und Arbeitslosigkeit oder der Altersstruktur und Risikoprämien am Kapitalmarkt. Zweitens spielen – sofern der Zusammenhang als beständig angesehen werden kann – der kausale Zusammenhang und Mechanismus nur eine untergeordnete Rolle.

Drittens müssten bei Anwendung des bei der Empirie verwendeten Modells zur Bewertung auch die weiteren Erklärungsvariablen modelliert werden, d. h. insbesondere ein Modell für ihre Entwicklung spezifiziert und die Abhängigkeitsstruktur festgelegt werden. Dies würde nicht nur zu einem komplexeren Bewertungsmodell führen, für das eine komplizierte Abhängigkeitsstruktur zu kalibrieren und das aufwändiger zu simulieren ist, sondern würde besonders problematisch, wenn keine einfachen und gleichzeitig zuverlässigen Modelle für die zusätzlichen Erklärungsvariablen existieren.

Um Bewertungsmodelle für Sterblichkeitsderivate endlich auch bei ihrer Anwendung um eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt erweitern oder sie auf Basis empirischer Untersuchungen in dieser Hinsicht vereinfachen zu können, soll der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt empirisch gemessen werden. Dazu wird zunächst die Methodik, d. h. der genaue Untersuchungsgegenstand, das Vorgehen und die Datenbasis, festgelegt. Dann werden die Ergebnisse der einzelnen Modellschätzungen sowie der Abhängigkeitsanalysen vorgestellt und bewertet.

## 5.1 Methodik

Wie bereits erklärt, soll der Zusammenhang zwischen menschlicher Sterblichkeit und dem Finanzmarkt mit dem Ziel untersucht werden, Bewertungsmodelle für Sterblichkeitsderivate darum zu erweitern oder ggf. zu vereinfachen. Diese Zielsetzung impliziert zwei Dinge: Zum einen muss der direkte Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und den bewertungsrelevanten Finanzmarktgrößen untersucht werden; zum anderen sollten die Ergebnisse möglichst leicht in einem Bewertungsmodell berücksichtigt werden können.

Diese Anforderungen und die teilweise sehr eingeschränkte Datenlage beeinflussen ganz wesentlich den Untersuchungsgegenstand und das Vorgehen.

### 5.1.1 Untersuchungsgegenstand

Hinsichtlich des Untersuchungsgegenstands sind insbesondere das betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß und die zu untersuchenden Sterblichkeits- und Finanzmarktgrößen festzulegen.

#### Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Da die Bewertung in Arbitragemodellen durch Bildung von Erwartungswerten unter dem Martingalmaß erfolgt, sollten auch die Abhängigkeiten vorzugsweise direkt unter diesem Maß gemessen werden. Theoretisch müssten dazu durch Marktpreise implizierte Abhängigkeiten bestimmt werden. Dazu würde man zunächst für jede der zu untersuchenden Größen ein eigenes Modell unter dem Martingalmaß spezifizieren und kalibrieren. Aus den Marktpreisen von Instrumenten, die sowohl von Sterblichkeit als auch den betrachteten Finanzmarktgrößen abhängen, könnte man dann die Parameter der Abhängigkeit schätzen. Die Ergebnisse wären allerdings von der Korrektheit der angenommenen Modelle abhängig. Außerdem ist diese Möglichkeit aufgrund des Fehlens ausreichender Marktpreise nicht gegeben.

Alternativ könnte man die historische Abhängigkeit zwischen Finanzmarktgrößen und durch Marktpreise implizierte Sterblichkeiten bestimmen. Dadurch würden nicht nur die verwendeten Finanzmarkt-, sondern auch die Sterblichkeitsdaten auf unter dem Martingalmaß gebildeten Erwartungswerten basieren. Die Abhängigkeit selbst würde jedoch – da historisch – unter dem realen Maß gemessen. De facto ist jedoch auch diese Möglichkeit aufgrund der wenigen Marktpreise nicht gegeben.

Statt dessen müssen daher Abhängigkeiten unter dem realen Maß zwischen Finanzmarktpreisen und der tatsächlichen, nicht durch Marktpreise implizierten Sterblichkeit analysiert werden. Dabei kann es sich nur um historisch beobachtete Abhängigkeiten handeln. Unter der Annahme, dass sie auch in Zukunft bestehen bleiben, können sie jedoch später in einem Bewertungsmodell unter dem realen Maß für die tatsächliche Sterblichkeit berücksichtigt und dann per Maßwechsel auf die bewertungsrelevante Sterblichkeit und das Martingalmaß übertragen werden.

#### Die Sterblichkeitsgrößen

Als Maß für die Sterblichkeit kommen theoretisch verschiedene Größen in Frage. Da unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß nur die Realisationen der aktuellen, nicht aber die der

für die Zukunft erwarteten Sterblichkeit beobachtbar sind, müssen Spot- und nicht etwa Forward-Größen verwendet werden. Dazu bieten sich sowohl diskrete, einjährige Sterberaten als auch einjährige Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten an.

Da Bevölkerungsdaten öffentlich zugänglich und zudem oft die Grundlage für Sterblichkeitsderivate sind, wird die Allgemeinbevölkerung anstatt der Risikolebens- oder Rentenversicherungsnehmer als Referenzbevölkerung dienen.

### Die Finanzmarktgrößen

Auch für die Finanzmarktrisiken stehen verschiedene Größen zur Verfügung. Besonders bieten sich risikolose Zinsen und Aktienkurse an.

*Risikolose Zinsen* werden i. d. R. zum Diskontieren zukünftiger Zahlungsströme unter dem risikoneutralen Maß benötigt (vgl. Kapitel 4.2). Der Zusammenhang mit der Sterblichkeit ist daher i. d. R. unmittelbar bewertungsrelevant. In Short-Rate-Modellen werden sie meist in Form des Momentanzinses, in Forward-Rate-Modellen in Form des Terminzinses modelliert. Um die Berücksichtigung der Ergebnisse in einem Bewertungsmodell zu erleichtern, wird für die Zinsen analog zur Sterblichkeit der Momentan- bzw. Kassazins und nicht der Terminzins betrachtet. Dazu können realisierte Renditen von Staatsanleihen oder Geldmarktsätze herangezogen werden.

*Aktienkurse* spielen bei der Bewertung von Sterblichkeitsderivaten oder Lebensversicherungen, deren Auszahlung von der Entwicklung eines Aktienindex abhängt, eine Rolle. Sie können außerdem als Anhaltspunkt zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten nach dem CAPM dienen (vgl. FRIEDBERG & WEBB, 2006). Für die Entwicklung der Aktienkurse wird auf breit aufgestellte Aktienindizes zurückgegriffen.

### 5.1.2 Vorgehen

Auch nach der Entscheidung über das betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß und die geeigneten Sterblichkeits- und Finanzmarktgrößen gibt es verschiedene Möglichkeiten, den Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt zu messen. Existierende Beiträge schätzen beispielsweise multivariate, lineare Regressionsmodelle (z. B. BAKSHI & CHEN, 1994), Probit-Modelle (z. B. GERDTHAM & JOHANNESSON, 2003) oder Paneldatenmodelle (z. B. RUHM, 2000), um nur einen Teil der angewandten Verfahren zu nennen.

In dieser Arbeit wird jedoch ein anderes Vorgehen gewählt, das der Zielsetzung, die Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt zur Entwicklung eines Bewertungsmodells für Sterblichkeitsderivate zu messen, besser gerecht wird.

### 5.1.2.1 Detailliertes Vorgehen

Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt erfolgt in zwei großen Schritten: Zunächst werden Modelle für die Entwicklung des Zeitindex eines Sterblichkeitsmodells (ab jetzt vereinfachend: Sterblichkeitsindex), der Aktienindizes und der Kassazinsen geschätzt (vgl. Kapitel 5.2). Dann werden die Residuen der geschätzten Modelle auf das Vorliegen einer multivariaten Normalverteilung überprüft und ihre Korrelation bestimmt (vgl. Kapitel 5.3).

Für den *ersten Schritt* werden die für Sterblichkeit, Aktienindizes und Zinsen präferierten Modelle bestimmt. Im Fall des *Sterblichkeitsindex* muss dazu zunächst ein Sterblichkeitsmodell geschätzt werden. Dazu wird das Modell von LEE & CARTER (1992) in der Erweiterung von CARTER & LEE (1992) und BROUHNS ET AL. (2002) verwendet (vgl. Kapitel 2.3). Die Modellschätzung wird getrennt für zwei Länder – Westdeutschland und die USA – sowie drei Geschlechterspezifikationen – nur für Männer, nur für Frauen und gemeinsam für Männer und Frauen – durchgeführt. Für die so gewonnenen Sterblichkeitsindizes werden dann ARIMA-Modelle geschätzt.

Auch für die *Aktienindizes* werden ARIMA-Modelle geschätzt. Da bei der Entwicklung von Aktienkursen gängigerweise von einer geometrischen Brown'schen Bewegung mit Drift ausgegangen wird, werden die Aktienkurse zuerst logarithmiert.<sup>43</sup> Untersucht werden die wichtigsten Indizes von Deutschland und den USA, für die Zeitreihen von mindestens 30 Jahren vorliegen. Für die *Zinsen* wird eine Reihe von gängigen zeithomogenen Einfaktor-Short-Rate-Modellen geschätzt und verglichen.<sup>44</sup> Das Vorgehen dazu folgt weitestgehend dem von CHAN ET AL. (1992). Untersucht werden möglichst risikolose Kassazinsen von Deutschland und den USA, die Laufzeiten von bis zu einem Jahr haben und für die Zeitreihen von mindestens 30 Jahren verfügbar sind.

Im *zweiten Schritt* werden dann die Residuen der jeweils präferierten Modelle für die untersuchten Sterblichkeitsindizes, Aktienindizes und Zinsen auf das Vorliegen einer multivariaten Normalverteilung untersucht und ihre Korrelation bestimmt.

<sup>43</sup>Eine geometrische Brown'sche Bewegung entspricht einem ARIMA(0,1,0)-Modell für die logarithmierte Zeitreihe.

<sup>44</sup>Zeithomogene Einfaktormodelle eignen sich besser für die gewünschten Abhängigkeitsanalysen als Mehrfaktor- oder zeitinhomogene Einfaktormodelle. Mehrfaktormodelle sind zwar realistischer, da sie nicht perfekte Korrelationen zwischen Zinssätzen bzw. Zinsprodukten unterschiedlicher Laufzeit erlauben; allerdings steht diesem Vorteil eine größere Modellkomplexität gegenüber. Bei zeitinhomogenen Einfaktormodellen wie z. B. dem Modell von HULL & WHITE (1990) können die zeitabhängigen Parameter so gewählt werden, dass das Modell die aktuelle Zinsstruktur genau wiedergibt (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 55). Um diesen Vorteil zu nutzen, muss man jedoch für jeden Zeitpunkt eine eigene Schätzung durchführen und erhält so statt eines einzigen Parametervektors und einer Residuenzeitreihe einen Parametervektor je Zeitpunkt und keine Residuen. Die gewünschte Abhängigkeitsanalyse der Residuen ist so nicht möglich.

### 5.1.2.2 Begründung

Im Gegensatz zu existierenden Forschungsbeiträgen erlaubt das beschriebene Vorgehen nicht die Überprüfung einzelner Hypothesen zum Wirkungszusammenhang zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt. Es bietet jedoch einen entscheidenden Vorteil: Die Ergebnisse sind leichter auf Modelle zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten anwendbar. Abgesehen von der Tatsache, dass der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Finanzmarktgrößen untersucht wird – im Gegensatz zu dem Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und etwa der Arbeitslosenrate oder dem Bruttoinlandsprodukt –, liegt dies vor allem an zwei Punkten.

Zum einen wird das LEE & CARTER (1992)-Modell geschätzt und der Zusammenhang zwischen dessen Zeitindex – nicht den einzelnen Sterberaten – und dem Finanzmarkt untersucht. Dies erlaubt nicht nur die Berücksichtigung individueller Unterschiede in der Sterblichkeit, sondern auch die Entwicklung eines sparsamen, für alle Bevölkerungsgruppen konsistenten, relativ genauen und simulationsfähigen Modells für den Sterblichkeitsprozess.

Zum anderen werden sowohl für den Zeitindex des Sterblichkeitsmodells als auch für die Finanzmarktgrößen zunächst diskrete Zeitreihenmodelle geschätzt und dann deren Modellresiduen auf eine Abhängigkeit untersucht. Die so gewählte Modell- und Abhängigkeitsstruktur stellt eine konsequente Weiterentwicklung existierender Short-Rate-Modelle zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten dar und vereinfacht die Modellformulierung und -anwendung wesentlich.

Beide Punkte zeichnen das Vorgehen aus und werden nun noch einmal im Detail begründet.

#### **Schätzen des LEE & CARTER (1992)-Modells und Untersuchung der Abhängigkeit zwischen dessen Zeitindex und dem Finanzmarkt**

Die teils starken Unterschiede in der Sterblichkeit verschiedener Individuen (vgl. Kapitel 2.1.1) legen nahe, diese auch bei der Messung des Zusammenhangs zum Finanzmarkt zu berücksichtigen. Denn zum einen wird die Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung durch die im Zeitablauf variierende Gewichtung verschiedener Bevölkerungsgruppen beeinflusst. Vernachlässigt man diesen Effekt, könnte dies das Ergebnis verzerren. Zum anderen beziehen sich Sterblichkeitsderivate oft auf einzelne, genau definierte und ggf. gewichtete Bevölkerungsgruppen und erfordern daher eine differenzierte Modellierung dieser Gruppen. Der mit Hilfe eines undifferenzierten Modells gemessene Zusammenhang könnte in solchen Modellen nur bedingt verwendet werden.<sup>45</sup>

Für beide Punkte gibt es verschiedene Lösungsansätze: Statt zur Sterblichkeit der Gesamt-

<sup>45</sup>Dies gilt insbesondere dann, wenn verschiedene Bevölkerungsgruppen einen unterschiedlichen Zusammenhang zum Finanzmarkt aufweisen sollten.

bevölkerung könnte man z. B. den Zusammenhang zu einer adjustierten Sterblichkeit messen, die unter der Annahme konstanter Gewichte verschiedener Bevölkerungsgruppen berechnet wird. Dieser Ansatz ist gut verständlich und leicht umsetzbar, löst jedoch nur das erste der beiden genannten Probleme.

Alternativ könnte man auf Basis gruppenspezifischer Sterblichkeiten den Zusammenhang zum Finanzmarkt für jede einzelne, als homogen angesehene Bevölkerungsgruppe messen und so auch den zweiten Punkt adressieren. Leider ist dieses Vorgehen nicht nur aufwändig, auch lassen sich die Ergebnisse nur schwer in einem einfachen und für alle Bevölkerungsgruppen konsistenten Bewertungsmodell berücksichtigen.

Als Kompromiss bietet sich das gewählte Vorgehen an, bei dem zunächst ein alle Bevölkerungsgruppen umfassendes Sterblichkeitsmodell geschätzt und dann der Zusammenhang zwischen dem Finanzmarkt und den zeitabhängigen Parametern des Modells gemessen wird. Da die Messung des Zusammenhangs unter dem realen Maß und damit unter der Verwendung von Spot-Größen erfolgen muss (vgl. Kapitel 5.1.1), stehen dazu nur Short-Rate-Modelle zur Verfügung (für einen Überblick über existierende Sterblichkeitsmodelle vgl. Kapitel 2.2.2).

Unter den Short-Rate-Modellen eignen sich besonders die demographischen Modelle, da diese im Gegensatz zu epidemiologischen und finanzmathematischen Modellen den Schwerpunkt auf die genaue Abbildung vergangener Sterblichkeit und die gesicherte Prognose zukünftiger Sterberaten legen und zu diesem Zweck bereits sehr erfolgreich angewandt wurden. Auch erlauben sie die Berücksichtigung demographischer Faktoren sowie von Perioden- und Kohorteffekten (vgl. Kapitel 2.1.1).<sup>46</sup>

Innerhalb der demographischen Modelle sind insbesondere extrapolierende und auf der aggregierten Sterblichkeit beruhende, diskrete Zeitreihenmodelle für das Analysevorhaben interessant: Extrapolierende Modelle haben gegenüber interpolierenden den Vorteil, keine subjektiven Annahmen zu einem Zielwert zu erfordern und im Einklang mit der Theorie über das Fehlen einer (absehbaren) Untergrenze für die menschliche Sterblichkeit zu stehen (vgl. Kapitel 2.1.2). Auf der aggregierten Sterblichkeit basierende Modelle sind nicht nur hinsichtlich der Datenanforderungen und Modellstruktur wesentlich weniger anspruchsvoll als nach Todesart differenzierende Modelle;<sup>47</sup> auch sind ihre Prognosen nicht unbedingt weniger ge-

<sup>46</sup>Die Nutzung nicht demographischer Faktoren bei der Analyse des Zusammenhangs und der Entwicklung von Bewertungsmodellen ist aufgrund der schlechten Datenlage ohnehin nur bedingt möglich und wird durch ihre Stochastizität zusätzlich erschwert.

<sup>47</sup>Nach Todesart differenzierende Modelle erfordern Daten zur Entwicklung der Todesfälle nach Todesarten. Diese sind nicht immer in ausreichender Tiefe und Datenqualität (z. B. wegen falscher Klassifizierung der Todesart oder Änderungen in der Diagnose und Klassifizierung von Todesarten, vgl. CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION, 2004) oder sogar gar nicht vorhanden (z. B. im Fall von neuen Krankheiten, ebd.). Darüber hinaus müssten diese Modelle, streng genommen, auch Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Todesarten und Risikofaktoren modellieren, was die Modellstruktur weiter kompliziert (ebd.).

nau.<sup>48</sup> Diskrete Modelle bieten sich aufgrund der schlechten Verfügbarkeit von unterjährigen Sterbedaten an. Zeitreihenmodelle erlauben die einfache Anwendung von Zeitreihenmethoden und damit eine statistisch saubere Messung des Zusammenhangs zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt.

Der wichtigste und am weitesten verbreitete Vertreter der oben beschriebenen Gruppe der extrapolierenden, aggregierten, demographischen Zeitreihenmodelle ist das Modell von LEE & CARTER (1992) (vgl. Kapitel 2.3). Es soll in der Erweiterung von CARTER & LEE (1992) und BROUHNS ET AL. (2002) zur Analyse herangezogen werden.

Dieses Vorgehen erlaubt nicht nur die Entwicklung eines relativ genauen, aber gleichzeitig sparsamen, für alle Bevölkerungsgruppen konsistenten und simulationsfähigen Bewertungsmodells, sondern steht auch in Einklang mit existierenden Forschungsbeiträgen und ist leicht um zusätzliche Effekte erweiterbar (z. B. um einen weiteren Zeitindex nach RENSHAW & HABERMAN, 2003b, oder Kohorteffekte nach RENSHAW & HABERMAN, 2006).

### **Schätzen von Zeitreihenmodellen und Untersuchung ihrer Residuen auf eine Abhängigkeit**

Wie bereits diskutiert, soll die Abhängigkeit zwischen dem Zeitindex eines demographischen Sterblichkeitsmodells und Aktienindizes bzw. Zinsen untersucht werden.

In bestehenden Forschungsbeiträgen werden der Zeitindex üblicherweise als ARIMA-Modell modelliert (vgl. Kapitel 2.3.3), Aktienindizes im einfachsten Fall als geometrische Brown'sche Bewegung mit Drift (vgl. Kapitel 3.1) und Kassa- bzw. Momentanzinsen nach verschiedenen Zinsmodellen (vgl. Kapitel 3.2.1 und 3.3). All diesen Modellen ist gemein, dass sie auf exogene Erklärungsvariablen verzichten und von normalverteilten Störgrößen ausgehen. Dies legt nahe, statt der Abhängigkeit der Sterblichkeits- und Finanzmarktgrößen die Abhängigkeit ihrer Störgrößen zu untersuchen. Genauer gesagt, soll überprüft werden, ob letztere multivariat normalverteilt sind, und ihre Korrelation bestimmt werden.

Dieser Ansatz hat drei wesentliche Vorteile: Erstens basiert die Analyse auf einer klar definierten und leicht überprüfaren Abhängigkeitsstruktur. Die Annahme einer multivariaten Normalverteilung entspricht dabei nicht nur der in der Finanzmathematik üblichen Praxis und dem später in Kapitel 6.1 vorgestellten, zeitstetigen Modell, sondern erlaubt im Gegensatz zu vielen anderen Verteilungsannahmen auch den Schluss von Unkorreliertheit auf Unabhängigkeit (CHHETRY ET AL., 1986) sowie eine leichte Anwendung des Modells zur Bewertung.

---

<sup>48</sup>So zeigen CASELLI ET AL. (2006), dass bei Differenzierung nach Todesarten die Verringerung der Sterblichkeit in der Vergangenheit stärker unterschätzt wurde als ohne Differenzierung nach Todesarten.

Zweitens verringert die Betrachtung der Residuen die Gefahr von Scheinregressionen. Letztere kommen vor allem bei nicht stationären Zeitreihen (vgl. z. B. GRANGER & NEWBOLD, 1974) zustande, aber nicht nur hier (GRANGER ET AL., 1998; HASSLER, 2003). Da die Residuen eines korrekt formulierten und geschätzten Sterblichkeits-, Aktien- und Zinsmodells weißes Rauschen sind, kann das Risiko einer Scheinregression durch eine vorgeschaltete Modellschätzung verringert werden. Dieses Vorgehen entspricht auch einem Vorschlag von GRANGER & NEWBOLD (1974) in ihrem wegweisendem Artikel zu Scheinregressionen.

Drittens und letztens stellt der gewählte Ansatz eine konsequente Erweiterung der bestehenden Modellierungspraxis dar: Existierende Sterblichkeits-, Aktien- und Zinsmodelle müssen lediglich um eine Abhängigkeit ihrer Residuen erweitert werden; es werden keine exogenen Erklärungsvariablen aufgenommen.

Besonders letzteres erleichtert die Modellformulierung und -anwendung wesentlich. Denn bei Berücksichtigung weiterer Erklärungsvariablen müssten diese zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten modelliert werden. Dazu müsste ein geeignetes Modell für ihre Entwicklung spezifiziert und ihre Abhängigkeitsstruktur festgelegt werden. Dies würde nicht nur zu einem komplexeren Bewertungsmodell führen, für das eine komplizierte Abhängigkeitsstruktur zu kalibrieren und das aufwändiger zu simulieren ist, sondern würde besonders problematisch, wenn keine einfachen und gleichzeitig zuverlässigen Modelle für die zusätzlichen Erklärungsvariablen existieren.

Darüber hinaus verbessern zusätzliche Erklärungsvariablen die Vorhersagekraft des Modells nicht unbedingt bzw. nicht unbedingt in einem Maße, das die größere Komplexität rechtfertigt. Dafür spricht auch, dass bei der Modellierung von Sterblichkeitsindizes, Aktienkursen und Zinsen üblicherweise keine exogenen Erklärungsvariablen verwendet werden (vgl. Kapitel 2.2, 3.1 bzw. 3.2).

### 5.1.3 Datenbasis

Grundlage für die *Sterblichkeitsdaten* bilden die jährlichen Periodensterblichkeitstabellen der HUMAN MORTALITY DATABASE (2010) für Westdeutschland (ab jetzt: Deutschland) und die USA.<sup>49</sup> Diesen lassen sich für einzelne Kalenderjahre nach Geschlecht und bis zu einem Alter von 109 Jahren nach einjährigen Altersgruppen differenzierte Sterberaten, mittlere Exposure-Daten und die Anzahl der Todesfälle entnehmen.

Die Daten reichen für die USA bis 1933 und Deutschland bis 1956 zurück. Um die Aussage-

<sup>49</sup>Die HUMAN MORTALITY DATABASE trägt für eine Vielzahl von Ländern Sterblichkeitsdaten aus verschiedenen offiziellen Statistiken zusammen. Auf Basis der gesammelten Rohdaten erstellt sie nach einer einheitlichen Methodik Perioden- und – sofern möglich – kohortenspezifische Sterbetabellen.



kraft der Analyse nicht eventuell durch sehr weit zurück liegende Daten zu beeinträchtigen und die Linearität des Zeitindex als wesentlichen Vorteil des LEE & CARTER (1992)-Modells (vgl. Kapitel 2.3) möglichst gut zu gewährleisten, werden die Zeitreihen bewusst kürzer gewählt. Für die Wahl des Zeitraums wird der Ansatz von BOOTH ET AL. (2002) verfolgt (vgl. Kapitel 2.3.3). Die verfügbaren und verwendeten Zeiträume zeigt Tabelle 5.1.

<b>Land und Geschlecht</b>	<b>Verfügbarer Zeitraum</b>	<b>Verwendeter Zeitraum</b>
<b>Deutschland</b>		
<b>Männer</b>	1956–2008	1974–2008
<b>Frauen</b>	1956–2008	1968–2008
<b>Männer und Frauen</b>	1956–2008	1968–2008
<b>USA</b>		
<b>Männer</b>	1933–2006	1966–2006
<b>Frauen</b>	1933–2006	1948–2006
<b>Männer und Frauen</b>	1933–2006	1963–2006

Tabelle 5.1: Verfügbarkeit der Sterblichkeitsdaten

Als Quellen für die *Aktienindexdaten* dienen DATASTREAM (2008) und BLOOMBERG (2008), letzterer jedoch nur für den Deutschen Aktienindex (DAX). Analysiert werden Indizes in Deutschland und den USA, für die bis 2008 eine Zeitreihe von mindestens 30 Jahren verfügbar ist. Für Deutschland sind dies der DAX und der Composite DAX (CDAX), für die USA der S&P 500 und der S&P 600 Dividend Stocks (S&P 600 DS) sowie der Dow Jones Industrial Average (DJ Ind. Average), der DJ Composite und der DJ Wilshire.

Als Stichtag dient der Jahreserste. Streng genommen, sollten Performance-Indizes (Perf.-Indizes) betrachtet werden. Aufgrund der eingeschränkten Datenverfügbarkeit von Performance-Indizes wird die Analyse ebenfalls für Kursindizes durchgeführt. In Einzelfällen ist es nötig, den Modellzeitraum zu verkürzen, da die Zeitreihen für den Ausgangszeitraum nicht stationär und/oder die Residuen des präferierten ARIMA-Modells autokorreliert oder heteroskedastisch sind. Die verfügbaren und die verwendeten Zeiträume zeigt Tabelle 5.2.

Als Quellen für die *Zinsdaten* dienen die DEUTSCHE BUNDESBANK (2010) für Deutschland und THE FEDERAL RESERVE SYSTEM (2010) für die USA. Untersucht werden Kassarenditen von drei, sechs oder zwölf Monaten Laufzeit, für die eine Zeitreihe von mindestens 30 Jahren bis 2008 verfügbar ist. Dies ist in den USA für die drei-, sechs- und zwölfmonatigen T-Bill-Zinssätze, in Deutschland für die dreimonatigen Geldmarktsätze am Frankfurter Bankplatz sowie die sechsmonatige und einjährige Zinstruktur von Bundeswertpapieren der Fall.

Land und Index	Performance-Index		Kursindex	
	Verfügbarer Zeitraum	Verwendeter Zeitraum	Verfügbarer Zeitraum	Verwendeter Zeitraum
<b>Deutschland</b>				
<b>DAX</b>	1960–2008	1960–2008	1988–2008	–
<b>CDAX</b>	1970–2008	1970–2008	1970–2008	1970–2008
<b>USA</b>				
<b>S&amp;P 500</b>	1988–2008	–	1964–2008	1964–2008
<b>S&amp;P 600 DS</b>	1973–2008	1975–2008	1973–2008	1975–2008
<b>DJ Ind. Average</b>	1988–2008	–	1951–2008	1951–2008
<b>DJ Composite</b>	1988–2008	–	1965–2008	1965–2008
<b>DJ Wilshire</b>	1971–2008	1977–2008	1971–2008	1974–2008

Tabelle 5.2: Verfügbarkeit der Aktien Daten

Wie bereits diskutiert, sollen die Modelle in diskreter Zeit nach dem Ansatz von CHAN ET AL. (1992) geschätzt werden. Die auf Discount Basis quotierten T-Bill-Zinssätze werden dazu zunächst in Renditen umgewandelt. Im Gegensatz zum Vorgehen von CHAN ET AL. (1992) werden darüber hinaus alle Zinssätze von jährlicher bzw. unterjähriger Verzinsung auf kontinuierliche Verzinsung umgerechnet. Als Schrittgröße werden ein, drei und zwölf Monate gewählt; als Stichtage dienen der Monats-, Quartals- bzw. Jahres- und Halbjahreserste. Sollten die Stichtage keine Handelstage sein, wird der letzte verfügbare Zins verwendet.

Über die verwendeten Zinssätze und Zeiträume gibt Tabelle 5.3 Aufschluss.

Land und Zinssatz	Verfügbarer Zeitraum	Verwendeter Zeitraum
<b>Deutschland</b>		
<b>Dreimonatiger Geldmarktsatz<sup>a</sup></b>	12/1959–07/2010	01/1960–07/2010
<b>Sechsmonatige Zinsstruktur<sup>b</sup></b>	09/1972–07/2010	01/1973–07/2010
<b>Einjährige Zinsstruktur<sup>b</sup></b>	09/1972–07/2010	01/1973–07/2010
<b>USA</b>		
<b>Dreimonatiger T-Bill-Satz</b>	01/1954–07/2010	07/1954–07/2010
<b>Sechsmonatiger T-Bill-Satz</b>	12/1958–07/2010	01/1959–07/2010
<b>Einjähriger T-Bill-Satz</b>	07/1959–07/2010	01/1960–07/2010

<sup>a</sup>Monatsdurchschnitt.

<sup>b</sup>Daten zum Monatsende.

Tabelle 5.3: Verfügbarkeit der Zinsdaten

## 5.2 Ergebnisse der Modellschätzungen

Wie in Kapitel 5.1.2 erläutert, erfolgt die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt in zwei Schritten: Erst werden Modelle für die Entwicklung der Sterblichkeitsindizes, der Aktienindizes und der Kassazinsen geschätzt; dann werden die Residuen der geschätzten Modelle auf das Vorliegen einer multivariaten Normalverteilung überprüft und ihre Korrelation bestimmt.

Das Vorgehen und die Ergebnisse des ersten Schrittes werden im Folgenden vorgestellt.

### 5.2.1 Schätzen der Sterblichkeitsmodelle

Im Fall der Sterblichkeit muss zunächst das Modell von LEE & CARTER (1992) bzw. seine Erweiterung von CARTER & LEE (1992) und BROUHNS ET AL. (2002) geschätzt werden. Die entsprechende Funktion wird dazu eigens im Statistikprogramm „R“ programmiert. Im Anschluss werden für die so gewonnenen Zeitindizes Zeitreihenanalysen durchgeführt und ARIMA-Modelle geschätzt. Auch dies erfolgt in „R“, soweit möglich jedoch unter Verwendung gegebener Funktionen.

Beide Schritte werden getrennt für Deutschland und die USA sowie für die drei betrachteten Geschlechterspezifikationen durchgeführt. Sowohl die Ergebnisse der Modellschätzungen als auch die Ergebnisse der Zeitreihenanalysen decken sich mit denen anderer Forscher.

#### 5.2.1.1 Ergebnisse der LEE & CARTER (1992)-Modellschätzungen

Das Modell von LEE & CARTER (1992) wird in der Erweiterung von BROUHNS ET AL. (2002) und CARTER & LEE (1992) geschätzt (zur Modellstruktur und zum grundsätzlichen Vorgehen vgl. Kapitel 2.3).

Die Erweiterung von BROUHNS ET AL. (2002) impliziert eine Poisson'sche Fehlerstruktur und eine Modellschätzung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode. Als Startwert für  $\hat{\alpha}_x^{(0)}$  wird der Durchschnitt von  $\ln m_{x,t}$  über  $t$  gewählt;  $\hat{\beta}_x^{(0)}$  und  $\hat{\kappa}_t^{(0)}$  werden zunächst gleich null bzw. eins gesetzt. Fehlende Datenpunkte und Datenpunkte von null werden mit null, alle anderen mit eins gewichtet.

Die Erweiterung von CARTER & LEE (1992) bedeutet, dass das Modell für drei Geschlechterspezifikationen bestimmt wird: als Modell nur für Männer, als Modell nur für Frauen und als gemeinsames Modell für Männer und Frauen mit einem gemeinsamen Zeitindex, aber geschlechtsspezifischen Altersparametern. Menschen ab einem Alter von 100 Jahren werden dabei zu einer Altersklasse zusammengefasst; bis zu einem Alter von einschließlich 99 Jahren

umfassen die Altersklassen jeweils ein Jahr.

Die beschriebenen Modellschätzungen werden für zwei Länder durchgeführt: Deutschland und die USA. Die Datengrundlage bilden die jährlichen, alters- und geschlechtsspezifischen Periodensterbetafeln der HUMAN MORTALITY DATABASE (2010) (vgl. Kapitel 5.1.3). Der zugrunde gelegte Zeitraum wird nach der Methode von BOOTH ET AL. (2002) mit Hilfe des Deviance-Verhältnisses bestimmt (vgl. Kapitel 2.3.3).

### Sterblichkeitsmodelle von Deutschland

Als Startjahr im Modell für Männer, Frauen bzw. Männer und Frauen werden die Jahre 1974, 1968 bzw. 1968 gewählt. Sie stellen einen Kompromiss zwischen einem möglichst langen Modellzeitraum und einem möglichst geringen Deviance-Verhältnis dar (vgl. Abbildung 5.1).

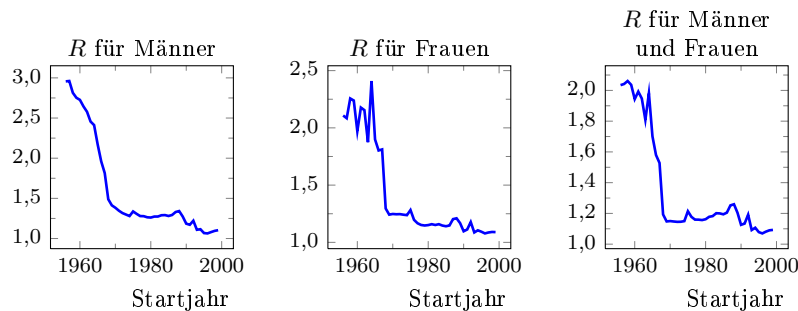


Abbildung 5.1: Verhältnis  $R$  der durchschnittlichen Deviances für Deutschland

Für die so identifizierten Zeiträume werden dann die LEE & CARTER (1992)-Modelle geschätzt. Die folgende Beschreibung der Ergebnisse beschränkt sich auf den Modellzeitraum 1956 bis 2008 (vgl. Abbildung 5.2.). Die Ergebnisse für die anderen betrachteten Zeiträume verhalten sich ähnlich und können den Abbildungen 5.3 und 5.4 entnommen werden.

Die Graphen der *Alterskoeffizienten*  $\hat{\alpha}_x$  spiegeln sehr schön die J-Form der logarithmierten Sterberaten wider (vgl. Kapitel 2.1.1). Auch der vor allem bei Männern stark ausgeprägte, unfallbedingte Anstieg der Sterblichkeit bei einem Alter von ca. 20 Jahren ist gut erkennbar (ebd.). Die Ähnlichkeit von  $\hat{\alpha}_x$  zur logarithmierten Sterberate ist nicht überraschend; schließlich beschreibt  $\alpha_x$  die allgemeine Altersstruktur der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten und entspricht näherungsweise ihrem Durchschnitt über die Zeit. Dies erklärt auch, warum die Alterskoeffizienten  $\hat{\alpha}_x$  bei allen Altersklassen für Frauen niedriger liegen als für Männer (ebd.) und warum die Koeffizienten des für beide Geschlechter gemeinsam geschätzten Modells mit denen der geschlechtsspezifischen Modelle übereinstimmen.

Der Verlauf der *Alterskoeffizienten*  $\hat{\beta}_x$  ist für alle Geschlechterspezifikationen ähnlich: Von sehr hohen Werten bei Kleinkindern fallen sie bis zu einem Alter von 18 Jahren rapide, um danach bis zu einem Alter von 21 Jahren für Männer und 28 Jahren für Frauen wieder anzusteigen. Der darauf folgende, deutlich langsamere Rückgang dauert bis zu einem Alter von 49 bzw. 50 Jahren. Auf einen erneuten Anstieg bis zu einem Alter von 66 Jahren für Männer und 74 Jahren für Frauen folgt ein weiterer Rückgang bis zu einem Alter von 98 Jahren.

Da  $\beta_x$  die Sensitivität der logarithmierten Sterblichkeitsintensität der Altersklasse  $x$  auf Veränderungen im Zeitindex angibt, zeigt diese Entwicklung, wie sich laut Modell die logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten verschiedener Altersklassen relativ zu einander verändern. Für Altersklassen mit hohen Werten für  $\hat{\beta}_x$  wie z. B. Kleinkinder sagt das Modell eine stärkere Abnahme der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten voraus als für Altersklassen mit niedrigeren Werten für  $\hat{\beta}_x$ . Dies deckt sich mit der historischen Entwicklung.

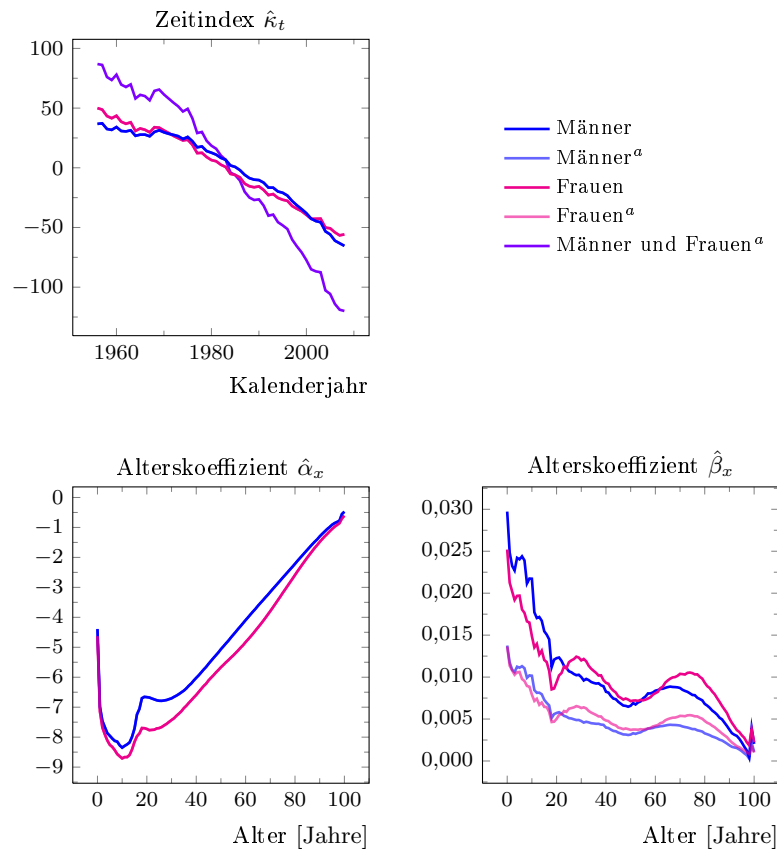
Bei einem Vergleich der Alterskoeffizienten  $\hat{\beta}_x$  verschiedener Modelle und Geschlechter fallen zwei Punkte auf: Erstens sind die Koeffizienten im für beide Geschlechter gemeinsam geschätzten Modell nur ca. halb so hoch wie in den für Männer und Frauen getrennt geschätzten Modellen. Dies folgt unmittelbar aus der Skalierung der Alterkoeffizienten  $\beta_x$  gemäß Gleichung (2.4) und der Tatsache, dass das gemeinsame Modell doppelt so viele Alterskoeffizienten besitzt wie die geschlechtsspezifischen Modelle. Zweitens sind im gemeinsamen Modell für Männer und Frauen die Alterskoeffizienten  $\hat{\beta}_x$  für Männer bis zu einem Alter von ca. 20 Jahren höher und darüber niedriger als die für Frauen. Dies impliziert einen bis zu einem Alter von ca. 20 Jahren stärkeren und darüber hinaus schwächeren Rückgang der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten für Männer als für Frauen.

Darüber hinaus ist ein Vergleich zwischen den Alterskoeffizienten  $\hat{\beta}_x$  verschiedener Modelle nicht sinnvoll. Dies liegt neben ihrer Skalierung vor allem an der Tatsache, dass sich die Veränderungen der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten sich aus dem Produkt von  $\beta_x$  und dem Zeitindex  $\kappa_t$  ergeben.

Die *Zeitindizes*  $\hat{\kappa}_t$  verlaufen in allen drei Geschlechterspezifikationen annähernd linear. Neben ihrer Linearität fallen zwei weitere Punkte auf: Zum einen liegen der Zeitindex für Männer und jener für Frauen sehr eng beieinander. Dies spricht dafür, dass sich das allgemeine Sterblichkeitsniveau von Männern und Frauen sehr ähnlich entwickelt hat, lässt aber keine Aussage über die relative Entwicklung einzelner Altersklassen zu.

Zum anderen fällt der Zeitindex des für Männer und Frauen gemeinsam geschätzten Modells sehr viel stärker als die Zeitindizes der geschlechtsspezifischen Modelle. Dies liegt an der Skalierung von  $\beta_x$  und  $\kappa_t$  nach Gleichungen (2.4) bzw. (2.5). Da – wie bereits diskutiert –

die Alterskoeffizienten des gemeinsam geschätzten Modell nur annähernd halb so hoch sind wie die der geschlechtsspezifischen Modelle, muss der Zeitindex des ersteren Modells mit einem Faktor von ca. zwei skaliert werden, um die gleiche Veränderung der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten zu bewirken.

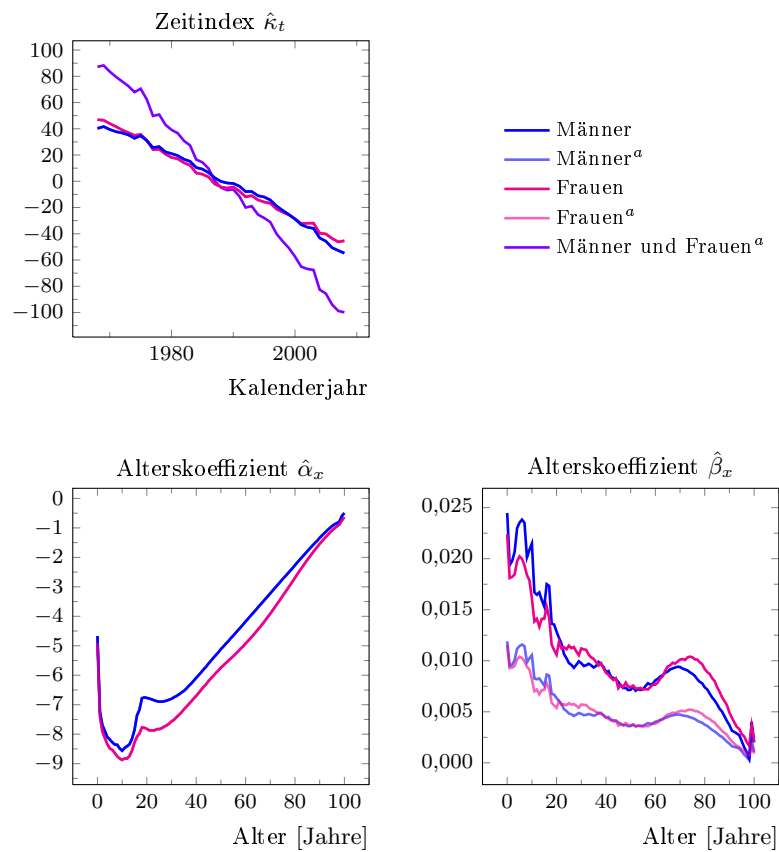


<sup>a</sup>Bei gemeinsamer Modellschätzung für Männer und Frauen.

Abbildung 5.2: Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für Deutschland, 1956–2008

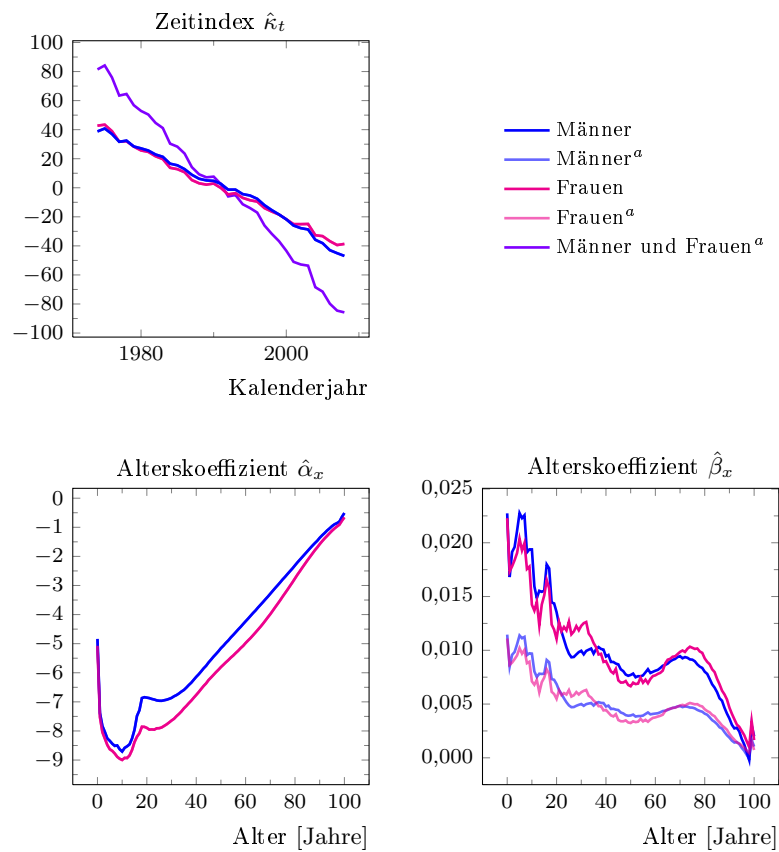
### Sterblichkeitsmodelle der USA

Auch im Fall der USA wird zunächst der optimale Modellzeitraum mit Hilfe der Methode von BOOTH ET AL. (2002) bestimmt. Als Startjahr im Modell für Männer, Frauen bzw. Männer und Frauen werden die Jahre 1966, 1948 bzw. 1963 gewählt. Sie stellen einen Kompromiss zwischen einem möglichst langen Modellzeitraum und einem möglichst geringen Deviance-



<sup>a</sup>Bei gemeinsamer Modellschätzung für Männer und Frauen.

Abbildung 5.3: Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für Deutschland, 1968–2008



<sup>a</sup>Bei gemeinsamer Modellschätzung für Männer und Frauen.

Abbildung 5.4: Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für Deutschland, 1974–2008



Verhältnis dar (vgl. Abbildung 5.5).

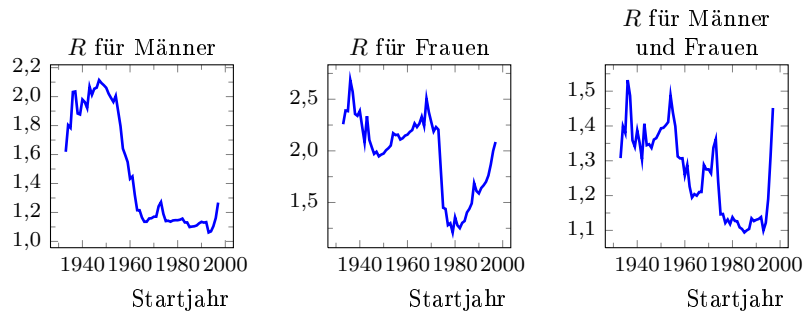


Abbildung 5.5: Verhältnis  $R$  der durchschnittlichen Deviances für die USA

Für die so identifizierten Zeiträume werden dann die LEE & CARTER (1992)-Modelle geschätzt. Die folgende Beschreibung der Modellergebnisse beschränkt sich auf den Modellzeitraum 1933 bis 2006 (vgl. Abbildung 5.6.). Die Ergebnisse für die anderen betrachteten Zeiträume verhalten sich ähnlich und können den Abbildungen 5.7, 5.8 und 5.9 entnommen werden.

Die *Alterskoeffizienten*  $\hat{\alpha}_x$  der USA ähneln in ihrem Verlauf denen von Deutschland stark: Genau wie letztere spiegeln sie die typische J-Form der logarithmierten Sterberaten und den unfallbedingten Anstieg der Sterblichkeit bei jungen Erwachsenen wider (vgl. Kapitel 2.1.1). Auch sind sie – wie angesichts der geringeren Sterblichkeit von Frauen zu erwarten (ebd.) – für Frauen bei allen Altersklassen niedriger als für Männer und stimmen für das gemeinsam geschätzte Modell sowie die geschlechtsspezifischen Modelle überein.

Die *Alterskoeffizienten*  $\hat{\beta}_x$  der drei Geschlechterspezifikationen nehmen wie in den Modellen für Deutschland von sehr hohen Werten bei Kindern bis zu einem Alter von 18 Jahren rapide ab. Danach – und hier zeigt sich ein deutlicher Unterschied zu Deutschland – steigen sie für Männer leicht und sehr langsam bis zu einem Alter von ca. 50 Jahren an, um dann kontinuierlich bis zu einem Alter von 100 Jahren wieder abzufallen, während die Koeffizienten für Frauen stärker und schneller bis zu einem Alter von 24 Jahren ansteigen und anschließend – abgesehen von einer leichten Stagnation bei einem Alter von ca. 60 bis 85 Jahren – ebenfalls bis zu einem Alter von 100 Jahren kontinuierlich fallen.

Wie im Fall von Deutschland sagt das Modell für Altersklassen mit hohen Werten für  $\hat{\beta}_x$  wie z. B. Kinder und Jugendliche eine stärkere Abnahme der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten voraus als für Altersklassen mit niedrigeren Werten für  $\hat{\beta}_x$ . Auch sind die Koeffizienten im für beide Geschlechter gemeinsam geschätzten Modell nur ca. halb so hoch

wie in den für Männer und Frauen getrennt geschätzten Modellen. Dies folgt wieder aus der Skalierung der Alterkoeffizienten  $\beta_x$  gemäß Gleichung (2.4) und der Tatsache, dass das gemeinsame Modell doppelt so viele Alterskoeffizienten besitzt wie die geschlechtsspezifischen Modelle.

Im Gegensatz zu den Koeffizienten für Deutschland liegen die Alterskoeffizienten im gemeinsamen Modell für die USA für Frauen stets höher als für Männer. Danach sagt das Modell für Frauen einen stärkere Rückgang der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten voraus als für Männer. Ein weiterer Vergleich zwischen den Alterskoeffizienten  $\hat{\beta}_x$  verschiedener Modelle ist nicht sinnvoll.

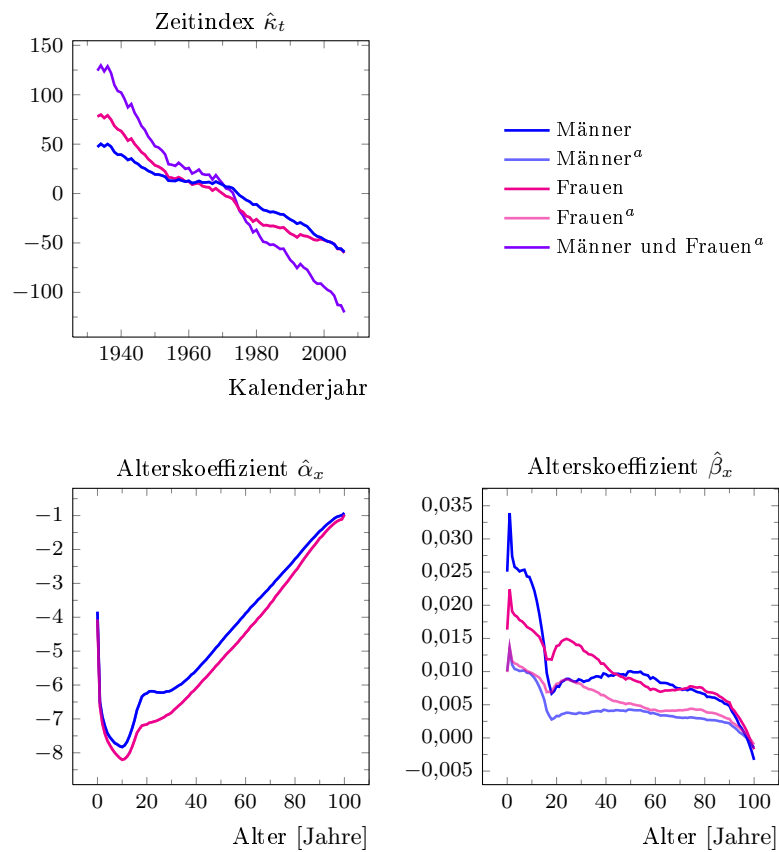
Der Verlauf des *Zeitindex*  $\hat{\kappa}_t$  hängt im Fall der USA und im Gegensatz zum Modell für Deutschland wesentlich von der Geschlechterspezifikation ab. Während er im Modell für Frauen näherungsweise linear ist und gleichmäßig fällt, verlangsamt sich der Rückgang im Modell für Männer zwischen 1948 und 1973 stark; der Zeitindex stagniert fast. Dementsprechend zeigt der Zeitindex im gemeinsamen Modell für Männer und Frauen zwischen 1948 und 1973 eine deutliche Verlangsamung des Rückgangs, aber keine Stagnation. Wie im Fall von Deutschland fällt er wesentlich stärker als jene der geschlechtsspezifischen Modelle. Dies hängt wieder mit der Skalierung der Koeffizienten nach Gleichungen (2.4) und (2.5) zusammen.

### 5.2.1.2 Ergebnisse der Zeitreihenanalyse

Für die aus den LEE & CARTER (1992)-Modellschätzungen gewonnenen Sterblichkeitsindizes werden Zeitreihenanalysen in „R“ durchgeführt. Sofern nicht anders vermerkt, wird dabei ein Konfidenzniveau von 5% zugrunde gelegt. Die Längen der verwendeten Zeitreihen sind in Tabelle 5.4 dargestellt.

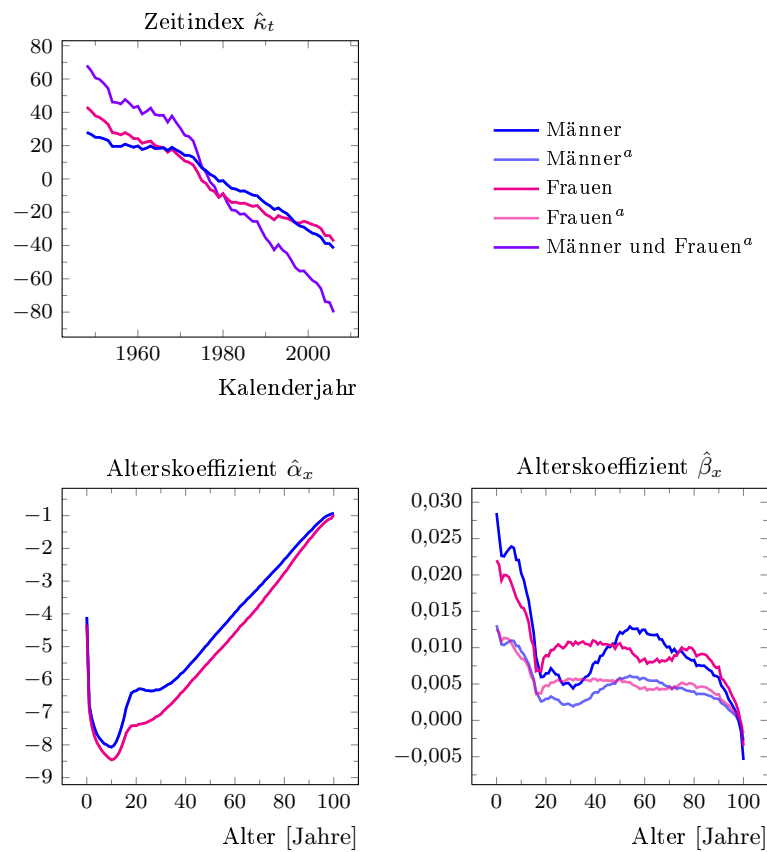
Land und Geschlecht	Indizes	Residuen
<b>Deutschland</b>		
Männer	35	34
Frauen	41	40
Männer und Frauen	41	40
<b>USA</b>		
Männer	41	40
Frauen	59	58
Männer und Frauen	44	43

Tabelle 5.4: Zeitreihenlängen der Sterblichkeitsindizes



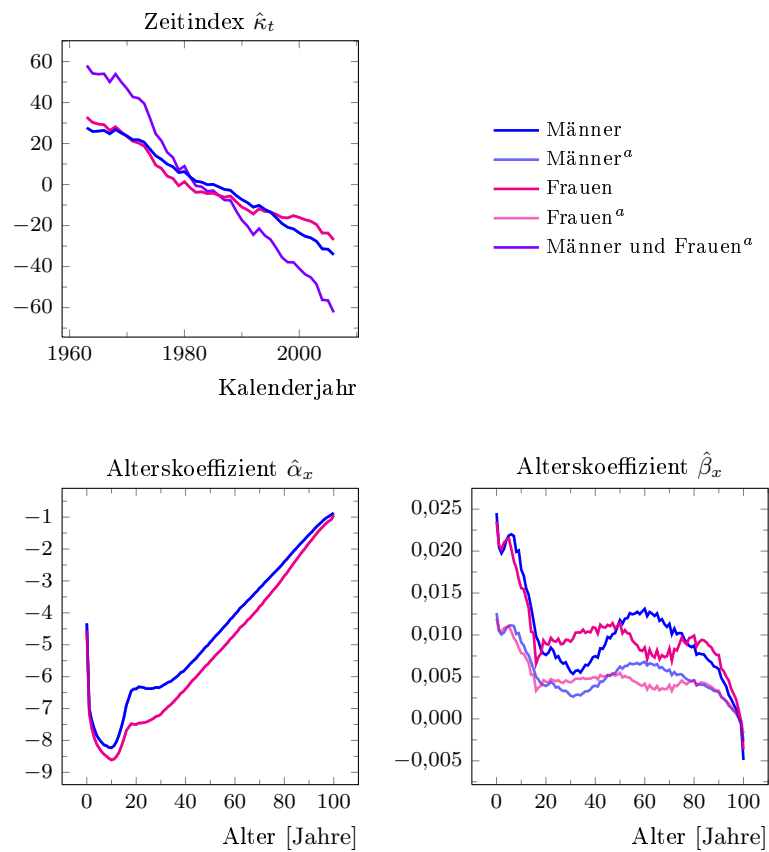
<sup>a</sup>Bei gemeinsamer Modellschätzung für Männer und Frauen.

Abbildung 5.6: Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für die USA, 1933–2006



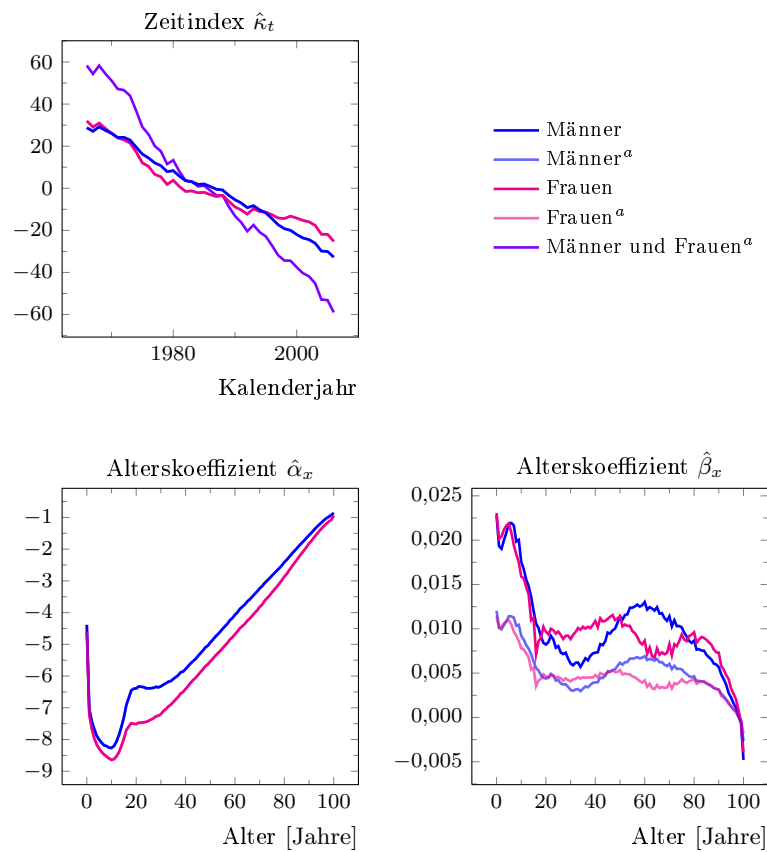
<sup>a</sup>Bei gemeinsamer Modellschätzung für Männer und Frauen.

Abbildung 5.7: Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für die USA, 1948–2006



<sup>a</sup>Bei gemeinsamer Modellschätzung für Männer und Frauen.

Abbildung 5.8: Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für die USA, 1963–2006



<sup>a</sup>Bei gemeinsamer Modellschätzung für Männer und Frauen.

Abbildung 5.9: Parameter des LEE & CARTER (1992)-Modells für die USA, 1966–2006

Angesichts der Bekanntheit der Box-Jenkins-Methode wird auf das allgemeine Vorgehen der Identifikation, Schätzung und Diagnose an dieser Stelle nur kurz eingegangen. Für mehr Details sei auf LÜTKEPOHL (2004) verwiesen.

In der *Identifikationsphase* wird die Zeitreihe auf Stationarität sowie mögliche AR- bzw. MA-Elemente untersucht. Sollte eine Zeitreihe nicht stationär sein, kann sie ggf. durch Logarithmieren und/oder Differenzieren in eine stationäre Zeitreihe transformiert werden (LÜTKEPOHL, 2004, S. 17 ff.). Die Untersuchung erfolgt zum einen graphisch anhand der Darstellung der Zeitreihe, ihrer Autokorrelationsfunktion (ACF) und partiellen Autokorrelationsfunktion (PACF) und zum anderen mit verschiedenen statistischen Tests. Dazu zählen der erweiterte Dickey-Fuller-Test (DICKEY & FULLER, 1979; SAID & DICKEY, 1984), der KPSS-Test und dessen Erweiterung nach AHAMADA (2004).<sup>50</sup> Für die Autokorrelationsfunktionen, den erweiterten Dickey-Fuller-Test und den KPSS-Test kann auf die „R“-Funktionen „acf“, „ur.df“ bzw. „urkpsstest“ zurückgegriffen werden; Ahamadas Test wird programmiert.

In der *Schätzphase* werden das als richtig vermutete Zeitreihenmodell und ggf. einzelne Alternativen mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode der Funktion „arima“ in „R“ geschätzt.

In der *Diagnosephase* werden die geschätzten Modelle mit Hilfe eines F-Tests, des Akaike Information Criterion (AKAIKE, 1974) und des Bayesian Information Criterion (BIC, SCHWARZ, 1978) mit anderen Modellen verglichen und ihre Koeffizienten mit einem t-Test auf Signifikanz untersucht. Die dazu benötigten Funktionen werden in „R“ programmiert. Außerdem werden die Modellresiduen auf weißes Gauß'sches Rauschen untersucht.

Eine Zeitreihe stellt weißes Rauschen dar, wenn sie stationär und nicht autokorreliert ist (LÜTKEPOHL, 2004, S. 13). Ist sie zusätzlich normalverteilt, spricht man von weißem Gauß'schen Rauschen. Die Analyse der Residuen auf Stationarität, Autokorrelation und Normalverteilung erfolgt zum einen graphisch und zum anderen mit Hilfe verschiedener statistischer Tests. Bei der graphischen Analyse werden die Darstellungen der Zeitreihen sowie der ACF und PACF der standardisierten und der quadrierten, standardisierten Modellresiduen betrachtet.

An statistischen Tests werden zur Untersuchung auf Stationarität u. a. der erweiterte Dickey-Fuller-Test, der KPSS-Test und dessen Erweiterung von AHAMADA (2004) durchgeführt.<sup>51</sup>

<sup>50</sup>Der erweiterte Dickey-Fuller-Test existiert in drei Varianten: mit Trend und Drift, nur mit Drift sowie ohne Trend und Drift (HACKL, 2005, Kapitel 14.4 und 14.5, S. 238–247). Er testet mit Hilfe der t-Statistiken  $\tau_3$ ,  $\tau_2$  bzw.  $\tau_1$  die Nullhypothese einer Einheitswurzel im jeweiligen Modell gegen die Alternative von Stationarität (ebd.). Weiter testet er mit den F-Statistiken  $\Phi_3$ ,  $\Phi_2$  und  $\Phi_1$  die Nullhypothese einer Einheitswurzel bei gleichzeitigem Trend von null, Drift und Trend von null bzw. Drift von null (ebd.). Im Gegensatz dazu testen der KPSS-Test die Nullhypothese von Stationarität gegen die Alternative von Integriertheit (LÜTKEPOHL, 2004, S. 63 ff.) und Ahamadas Test die Nullhypothese konstanter Varianz des vermeintlich stationären Prozesses gegen die Alternative von Heteroskedastizität (AHAMADA, 2004).

<sup>51</sup>Der Dickey-Fuller-Test wird mit und ohne Drift für die nach dem BIC präferierte Lag-Länge durch-

Bei einer stationären Zeitreihe sollten die Nullhypothese des bevorzugten Dickey-Fuller-t-Tests abgelehnt und die des KPSS-Tests und von Ahamadas Test nicht abgelehnt werden. Als Tests zur Untersuchung auf Autokorrelation bzw. Normalverteilung dienen der Ljung-Box-Test (LJUNG & BOX, 1978) bzw. der Jarque-Bera-Test (JARQUE & BERA, 1987). Ihre Nullhypothesen sollten nicht abgelehnt werden, damit der untersuchte Datenvektor als nicht autokorriert bzw. als normalverteilt gelten kann.<sup>52</sup>

Die Zeitreihenanalysen ergeben für die betrachteten Zeiträume und alle Geschlechterspezifikationen für Deutschland ein ARIMA(0,1,1)- und für die USA ein ARIMA(0,1,0)-Modell.<sup>53</sup> Dies steht in Einklang mit existierenden LEE & CARTER (1992)-Modellschätzungen für Belgien, die USA und Großbritannien (BROUHNS ET AL., 2002; CARTER & LEE, 1992; LEE & CARTER, 1992; RENSHAW & HABERMAN, 2003c).

Die beiden identifizierten ARIMA-Modelle lassen sich formulieren als:

$$\text{ARIMA}(0,1,0) \text{ mit Drift: } \Delta \hat{\kappa}_t = \alpha_\kappa + \epsilon_{\kappa,t} \quad (5.1a)$$

$$\text{ARIMA}(0,1,1) \text{ mit Drift: } \Delta \hat{\kappa}_t = \alpha_\kappa + \epsilon_{\kappa,t} + \psi_{\kappa,1} \epsilon_{\kappa,t-1}, \quad (5.1b)$$

wobei  $\hat{\kappa}_t$  den Schätzwert des untersuchten Zeitindex der Sterblichkeit in Zeitperiode  $t$ ,  $\Delta \hat{\kappa}_t := \hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1}$  seine Veränderung zwischen  $t-1$  und  $t$ ,  $\alpha_\kappa$  seinen Drift,  $\psi_{\kappa,1}$  das erste MA-Element und  $\epsilon_\kappa$  weißes Gauß'sches Rauschen mit Varianz  $\sigma_\kappa^2$  darstellen.

Die Schätzwerte  $\hat{\alpha}_\kappa$ ,  $\hat{\psi}_{\kappa,1}$  und  $\hat{\sigma}_\kappa$  für  $\alpha_\kappa$ ,  $\psi_{\kappa,1}$  bzw.  $\sigma_\kappa$  lassen sich für die untersuchten Länder und Geschlechterspezifikationen der Tabelle 5.5 entnehmen. Sie sind in allen Fällen bei einem Konfidenzniveau von 5% signifikant von null verschieden (vgl. Tabelle 5.6).

Die Residuen  $\hat{\epsilon}_{\kappa,t}$  der Modellschätzungen können bei allen ausgewählten Modellen als weißes Gauß'sches Rauschen angesehen werden. Die graphischen Darstellungen geben weder Hin-

---

geführt, maximal aber für  $\lceil T^{1/3} \rceil$  Lags. Der KPSS-Test wird ohne Trend und für Stützungsparameter  $l_k = k(T/100)^{1/4}$  mit  $k = 4$  bzw.  $k = 12$  durchgeführt.  $T$  entspricht dabei der Länge der Zeitreihe.

<sup>52</sup>Der Ljung-Box-Test testet die Nullhypothese fehlender Autokorrelation vom ersten bis zu einem bestimmten Lag gegen die Alternative mindestens eines Lags mit einer Autokorrelation von ungleich null (LҮТКЕРОНЛ, 2004, S. 44). Seine Testgröße ist Chi-Quadrat-verteilt; die Freiheitsgrade entsprechen der Anzahl der berücksichtigten Lags abzüglich der Anzahl der AR- und MA-Elemente (ebd.). Der Test wird bis zum maximal 20. Lag durchgeführt. Der Jarque-Bera-Test testet die Nullhypothese einer Schiefe von null und Kurtosis von drei gegen die Alternative einer Schiefe von ungleich null und/oder einer Kurtosis von ungleich drei (ebd., S. 46). Seine Teststatistik ist Chi-Quadrat-verteilt mit zwei Freiheitsgraden (ebd.).

<sup>53</sup>Alle Sterblichkeitsindizes stellen sich in der Identifikationsphase als integrierte Prozesse erster Ordnung heraus. Ihre nicht differenzierten Zeitreihen sind weder nach dem erweiterten Dickey-Fuller-Test noch nach dem KPSS-Test stationär. Die einmal differenzierten Zeitreihen können hingegen nach dem erweiterten Dickey-Fuller-Test mit Trend und nach demjenigen mit Drift sowie nach dem KPSS-Test und Ahamadas Test als stationär gelten. Die graphische Analyse spricht bei allen Modellen in den USA für keine AR- oder MA-Elemente, in Deutschland für maximal zwei AR- und ein MA-Element. Die präferierten Modelle weisen in allen Fällen das niedrigste BIC auf.



<b>Land und Geschlecht</b>	$\hat{\alpha}_\kappa$	$\hat{\psi}_{\kappa,1}$	$\hat{\sigma}_\kappa$
<b>Deutschland</b>			
<b>Männer</b>	-2,5645	-0,3320	1,7492
<b>Frauen</b>	-2,3772	-0,6163	1,8334
<b>Männer und Frauen</b>	-4,7726	-0,4246	3,5345
<b>USA</b>			
<b>Männer</b>	-1,5376	-	1,2120
<b>Frauen</b>	-1,3868	-	1,6437
<b>Männer und Frauen</b>	-2,8008	-	2,6070

Tabelle 5.5: ARIMA-Modellschätzungen für die Sterblichkeitsindizes

weise auf eine durch zeitabhängige Erwartungswerte oder Heteroskedastizität verursachte Instationarität noch auf eine Autokorrelation der Residuen.

Auch den statistischen Tests zufolge sind die Residuen weder instationär noch autokorreliert und außerdem normalverteilt (vgl. Tabellen 5.7 und 5.8): Der erweiterte Dickey-Fuller-Test mit und ohne Drift lehnt die Nullhypothese einer Einheitswurzel in beiden Ländern und bei allen Geschlechterspezifikationen bei einem Konfidenzniveau von 5% und meist sogar 1% ab; der KPSS-Test und Ahamadas Test können die Stationaritätshypothese bei einem Konfidenzniveau von 5% bzw. meist sogar 10% nicht verwerfen (vgl. Tabelle 5.8).

Die Nullhypothese fehlender Autokorrelation lehnt der Ljung-Box-Test selbst bei einem Konfidenzniveau von 10% und auch deutlich darüber nicht ab (vgl. Tabelle 5.7). Dasselbe gilt i. d. R. für den Jarque-Bera-Test und seine Normalverteilungshypothese; lediglich beim Modell für Männer in den USA kann er seine Nullhypothese bei einem Konfidenzniveau von 10%, nicht aber bei einem Konfidenzniveau von 5% verwerfen (ebd.).

## 5.2.2 Schätzen der Aktienmodelle

Wie für die Sterblichkeitsindizes werden für die Aktienindizes ARIMA-Modelle geschätzt. Sofern nicht anders vermerkt, wird dabei weiterhin ein Konfidenzniveau von 5% zugrunde gelegt.

Da bei der Entwicklung von Aktienkursen gängigerweise von einer geometrischen Brown'schen Bewegung mit Drift ausgegangen wird, werden die Aktienkurse zunächst logarithmiert.<sup>54</sup> Die Längen der verwendeten Zeitreihen lassen sich Tabelle 5.9 entnehmen.

<sup>54</sup>Eine geometrische Brown'sche Bewegung entspricht einem ARIMA(0,1,0)-Modell für die logarithmierte Zeitreihe.

Land und Geschlecht	Schätzwerte		
	{Standardfehler} [t-Werte] (p-Werte)		
	$\hat{\alpha}_\kappa$	$\hat{\psi}_{\kappa,1}$	$\hat{\sigma}_\kappa$
<b>Deutschland</b>			
<b>Männer</b>	-2,5645	-0,3320	1,7492
	{0,2010}	{0,1496}	{-}
	[-12,7576]	[-2,2191]	[-]
	(0,0000)	(0,0337)	(-)
<b>Frauen</b>	-2,3772	-0,6163	1,8334
	{0,1154}	{0,1462}	{-}
	[-20,5963]	[-4,2140]	[-]
	(0,0000)	(0,0001)	(-)
<b>Männer und Frauen</b>	-4,7726	-0,4246	3,5345
	{0,3252}	{0,1525}	{-}
	[-14,6776]	[-2,7848]	[-]
	(0,0000)	(0,0083)	(-)
<b>USA</b>			
<b>Männer</b>	-1,5376	-	1,2120
	{0,1892}	{-}	{-}
	[-8,1259]	[-]	[-]
	(0,0000)	(-)	(-)
<b>Frauen</b>	-1,3868	-	1,6437
	{0,2140}	{-}	{-}
	[-6,4815]	[-]	[-]
	(0,0000)	(-)	(-)
<b>Männer und Frauen</b>	-2,8008	-	2,6070
	{0,3929}	{-}	{-}
	[-7,1284]	[-]	[-]
	(0,0000)	(-)	(-)

Tabelle 5.6: Detaillierte ARIMA-Modellschätzungen für die Sterblichkeitsindizes

Land und Geschlecht	Ljung-Box-Test		Jarque-Bera-Test	
	Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert
<b>Deutschland</b>				
Männer	10,9360	0,9260	0,0097	0,9952
Frauen	13,8076	0,7948	0,4692	0,7909
Männer und Frauen	13,4161	0,8166	0,5595	0,7560
<b>USA</b>				
Männer	17,6938	0,6076	5,3284	0,0697
Frauen	20,5149	0,4262	0,0223	0,9890
Männer und Frauen	21,8244	0,3501	1,2444	0,5368

Tabelle 5.7: Ljung-Box- und Jarque-Bera-Test für die Residuen der ARIMA-Modelle der Sterblichkeitsindizes

Land und Geschlecht	Dickey-Fuller-Test			KPSS-Test		Ahamadas Test
	$\Phi_1$	$\tau_2$	$\tau_1$	$l_4$	$l_{12}$	
<b>Deutschland</b>						
Männer	4,4736 <sup>c</sup>	-2,9911 <sup>b</sup>	-3,0403 <sup>a</sup>	0,4413 <sup>c</sup>	0,3514 <sup>c</sup>	0,8216
Frauen	10,2344 <sup>a</sup>	-4,5214 <sup>a</sup>	-4,5904 <sup>a</sup>	0,0966	0,1034	0,5487
Männer und Frauen	10,8672 <sup>a</sup>	-4,6618 <sup>a</sup>	-4,6877 <sup>a</sup>	0,3346	0,3172	0,5091
<b>USA</b>						
Männer	8,8092 <sup>a</sup>	-4,1974 <sup>a</sup>	-4,2167 <sup>a</sup>	0,1385	0,1779	0,8377
Frauen	9,9776 <sup>a</sup>	-4,4671 <sup>a</sup>	-4,5006 <sup>a</sup>	0,1374	0,1235	0,5281
Männer und Frauen	10,3478 <sup>a</sup>	-4,5230 <sup>a</sup>	-4,5445 <sup>a</sup>	0,0798	0,0932	0,6542

<sup>a</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 1%.

<sup>b</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 5%.

<sup>c</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 10%.

Tabelle 5.8: Stationaritätstests für die Residuen der ARIMA-Modelle der Sterblichkeitsindizes

Land und Geschlecht	Performance-Indizes		Kursindizes	
	Indizes	Residuen	Indizes	Residuen
<b>Deutschland</b>				
<b>DAX</b>	49	48	-	-
<b>CDAX</b>	39	38	39	38
<b>USA</b>				
<b>S&amp;P 500</b>	-	-	45	44
<b>S&amp;P 600 DS</b>	34	33	34	33
<b>DJ Industrial Average</b>	-	-	58	57
<b>DJ Composite</b>	-	-	44	43
<b>DJ Wilshire</b>	32	31	35	34

Tabelle 5.9: Zeitreihenlängen der Aktienindizes

Die Zeitreihenanalysen ergeben für die betrachteten Zeiträume (vgl. Kapitel 5.1.3) und alle Aktienindizes ein ARIMA(0,1,0)-Modell.<sup>55</sup> Im Fall des Kursindex des CDAX handelt es sich um ein Modell ohne Drift, was der für Aktienkurse typischen Annahme einer geometrischen Brown'schen Bewegung mit Drift nicht unbedingt widerspricht, da die im Kursindex nicht berücksichtigten Dividendenrenditen ein plausibler Grund für einen Drift von null sein könnten.

Die zwei identifizierten ARIMA-Modelle lassen sich formulieren als:

$$\text{ARIMA}(0,1,0) \text{ mit Drift: } \Delta \ln S_t = \alpha_S + \epsilon_{S,t} \quad (5.2a)$$

$$\text{ARIMA}(0,1,0) \text{ ohne Drift: } \Delta \ln S_t = \epsilon_{S,t}, \quad (5.2b)$$

wobei  $S_t$  den untersuchten Aktienindex im Zeitpunkt  $t$ ,  $\Delta \ln S_t := \ln S_t - \ln S_{t-1}$  seine logarithmische Veränderung zwischen  $t-1$  und  $t$ ,  $\alpha_S$  seinen Drift und  $\epsilon_S$  weißes Gauß'sches Rauschen mit Varianz  $\sigma_S^2$  darstellen.

Die Schätzwerte  $\hat{\alpha}_S$  und  $\hat{\sigma}_S$  für  $\alpha_S$  bzw.  $\sigma_S$  lassen sich für die untersuchten Aktienindizes Tabelle 5.10 entnehmen. Sie sind in fast allen Fällen bei einem Konfidenzniveau von 5% signifikant von null verschieden (vgl. Tabelle 5.11). Lediglich beim Performance-Index des DAX ist der Drift erst bei einem Konfidenzniveau von 6,79% signifikant.

Die Residuen  $\hat{\epsilon}_{S,t}$  der Modellschätzungen können bei allen ausgewählten Modellen als weißes

<sup>55</sup> Alle Aktienindizes stellen sich in der Identifikationsphase als integrierte Prozesse erster Ordnung heraus. Die einmal differenzierten Zeitreihen sind nach dem erweiterten Dickey-Fuller-Test mit Trend und demjenigen mit Drift sowie nach dem KPSS-Test und Ahamadas Test stationär. Die graphische Analyse spricht bei keinem Modell für AR- oder MA-Elemente. Auch nach dem BIC ist das ARIMA(0,1,0)-Modell stets das präferierte Modell.

Land und Index	Performance-Indizes		Kursindizes	
	$\hat{\alpha}_S$	$\hat{\sigma}_S$	$\hat{\alpha}_S$	$\hat{\sigma}_S$
<b>Deutschland</b>				
DAX	0,0617	0,2311	–	–
CDAX	0,0802	0,2243	–	0,2253
<b>USA</b>				
S&P 500	–	–	0,0676	0,1528
S&P 600 DS	0,1227	0,1497	0,1003	0,1475
DJ Industrial Average	–	–	0,0704	0,1501
DJ Composite	–	–	0,0620	0,1541
DJ Wilshire	0,1175	0,1410	0,0837	0,1608

Tabelle 5.10: ARIMA-Modellschätzungen für die logarithmierten Aktienindizes

Gauß'sches Rauschen angesehen werden. Die graphischen Darstellungen geben weder Hinweise auf eine durch zeitabhängige Erwartungswerte oder Heteroskedastizität verursachte Instationarität noch auf eine Autokorrelation der Residuen.

Auch den statistischen Tests zufolge sind die Residuen weder instationär noch autokorreliert und außerdem normalverteilt: Der erweiterte Dickey-Fuller-Test mit und ohne Drift lehnt die Nullhypothese einer Einheitswurzel bei allen Aktienindizes bei einem Konfidenzniveau von 5% und meist sogar 1% ab; der KPSS-Test und Ahamadas Test können die Stationaritätshypothese bei einem Konfidenzniveau von 5% bzw. meist sogar 10% nicht verwerfen (vgl. Tabelle 5.12).

Die Nullhypothese fehlender Autokorrelation lehnt der Ljung-Box-Test ebenfalls bei einem Konfidenzniveau von 10% nie ab (vgl. Tabelle 5.13). Die Nullhypothese einer Normalverteilung kann der Jarque-Bera bei einem Konfidenzniveau von 5% in keinem Fall und bei einem Konfidenzniveau von 10% nur im Fall des Kursindex des DJ Wilshire verwerfen (ebd.).

### 5.2.3 Schätzen der Zinsmodelle

Für die Zinsen werden nach dem Ansatz von CHAN ET AL. (1992) (vgl. Kapitel 3.3) diskrete Kassazinsmodelle geschätzt. Dies geschieht getrennt für jeweils drei möglichst risikolose Zinssätze unterschiedlicher Laufzeiten von Deutschland und den USA sowie für verschiedene Schrittgrößen und Stichtage (vgl. Kapitel 5.1.3). Die Längen der verwendeten Zeitreihen sind in Tabelle 5.14 dargestellt.

Die Ergebnisse der Modellschätzung und des Modellvergleichs decken sich nur zum Teil

Land und Index	Schätzwerte {Standardfehler} [t-Werte] (p-Werte)			
	Performance-Indizes		Kursindizes	
	$\hat{\alpha}_S$	$\hat{\sigma}_S$	$\hat{\alpha}_S$	$\hat{\sigma}_S$
<b>Deutschland</b>				
<b>DAX</b>	0,0617	0,2311	-	-
	{0,0330}	{-}	{-}	{-}
	[1,8686]	[-]	[-]	[-]
	(0,0679)	(-)	(-)	(-)
<b>CDAX</b>	0,0802	0,2243	-	0,2253
	{0,0359}	{-}	{-}	{-}
	[2,2341]	[-]	[-]	[-]
	(0,0316)	(-)	(-)	(-)
<b>USA</b>				
<b>S&amp;P 500</b>	-	-	0,0676	0,1528
	{-}	{-}	{0,0228}	{-}
	[-]	[-]	[2,9689]	[-]
	(-)	(-)	(0,0049)	(-)
<b>S&amp;P 600 DS</b>	0,1227	0,1497	0,1003	0,1475
	{0,0257}	{-}	{0,0253}	{-}
	[4,7794]	[-]	[3,9650]	[-]
	(0,0000)	(-)	(0,0004)	(-)
<b>DJ Industrial Average</b>	-	-	0,0704	0,1501
	{-}	{-}	{0,0197}	{-}
	[-]	[-]	[3,5728]	[-]
	(-)	(-)	(0,0007)	(-)
<b>DJ Composite</b>	-	-	0,0620	0,1541
	{-}	{-}	{0,0232}	{-}
	[-]	[-]	[2,6681]	[-]
	(-)	(-)	(0,0108)	(-)
<b>DJ Wilshire</b>	0,1175	0,1410	0,0837	0,1608
	{0,0249}	{-}	{0,0272}	{-}
	[4,7162]	[-]	[3,0788]	[-]
	(0,0001)	(-)	(0,0042)	(-)

Tabelle 5.11: Detaillierte ARIMA-Modellschätzungen für die logarithmierten Aktienindizes

Land und Geschlecht	Dickey-Fuller-Test			KPSS-Test		Ahamadas
	$\Phi_1$	$\tau_2$	$\tau_1$	$l_4$	$l_{12}$	Test
<b>DEUTSCHLAND</b>						
<b>Performance-Indizes</b>						
DAX	13,4570 <sup>a</sup>	-5,1870 <sup>a</sup>	-5,2503 <sup>a</sup>	0,1957	0,3260	0,7280
CDAX	10,9527 <sup>a</sup>	-4,6732 <sup>a</sup>	-4,7176 <sup>a</sup>	0,0915	0,2038	0,8414
<b>Kursindizes</b>						
DAX	-	-	-	-	-	-
CDAX	10,9953 <sup>a</sup>	-4,6814 <sup>a</sup>	-4,0667 <sup>a</sup>	0,1166	0,2408	0,8166
<b>USA</b>						
<b>Performance-Indizes</b>						
S&P 500	-	-	-	-	-	-
S&P 600 DS	14,6168 <sup>a</sup>	-5,3937 <sup>a</sup>	-5,3413 <sup>a</sup>	0,3472 <sup>c</sup>	0,3292	0,7958
DJ Industrial Average	-	-	-	-	-	-
DJ Composite	-	-	-	-	-	-
DJ Wilshire	5,1471 <sup>b</sup>	-3,2083 <sup>b</sup>	-3,2768 <sup>a</sup>	0,1374	0,2163	0,7349
<b>Kursindizes</b>						
S&P 500	12,7784 <sup>a</sup>	-5,0550 <sup>a</sup>	-5,1249 <sup>a</sup>	0,1836	0,1867	0,5673
S&P 600 DS	15,3941 <sup>a</sup>	-5,5401 <sup>a</sup>	-5,5291 <sup>a</sup>	0,2289	0,2507	0,8035
DJ Industrial Average	21,7478 <sup>a</sup>	-6,5920 <sup>a</sup>	-6,6433 <sup>a</sup>	0,1668	0,1273	0,8770
DJ Composite	16,2163 <sup>a</sup>	-5,6827 <sup>a</sup>	-5,7276 <sup>a</sup>	0,3576 <sup>c</sup>	0,2871	0,8389
DJ Wilshire	7,5853 <sup>a</sup>	-3,8928 <sup>a</sup>	-3,9227 <sup>a</sup>	0,0921	0,1547	0,9816

<sup>a</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 1%.

<sup>b</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 5%.

<sup>c</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 10%.

Tabelle 5.12: Stationaritätstests für die Residuen der ARIMA-Modelle der logarithmierten Aktienindizes

Land und Geschlecht	Ljung-Box-Test		Jarque-Bera-Test	
	Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert
<b>DEUTSCHLAND</b>				
<b>Performance-Indizes</b>				
DAX	24,1895	0,2342	1,6107	0,4469
CDAX	17,7201	0,6058	2,2376	0,3267
<b>Kursindizes</b>				
DAX	-	-	-	-
CDAX	17,2538	0,6364	1,8102	0,4045
<b>USA</b>				
<b>Performance-Indizes</b>				
S&P 500	-	-	-	-
S&P 600 DS	15,4020	0,7530	0,2554	0,8801
DJ Industrial Average	-	-	-	-
DJ Composite	-	-	-	-
DJ Wilshire	7,0101	0,9967	1,9741	0,3727
<b>Kursindizes</b>				
S&P 500	9,8032	0,9716	3,8058	0,1491
S&P 600 DS	16,5712	0,6806	0,3627	0,8342
DJ Industrial Average	21,7747	0,3529	2,0773	0,3539
DJ Composite	14,1047	0,8251	3,4863	0,1750
DJ Wilshire	9,1167	0,9815	4,8332	0,0892

Tabelle 5.13: Ljung-Box- und Jarque-Bera-Test für die Residuen der ARIMA-Modelle der logarithmierten Aktienindizes



mit denen von CHAN ET AL. (1992), sind jedoch auch nicht völlig vergleichbar, da andere Zinssätze und größtenteils andere Schrittgrößen untersucht werden.

### 5.2.3.1 Detailliertes Vorgehen

Das Schätzen der Zinsmodelle erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden die neun von CHAN ET AL. (1992) untersuchten Zinsmodelle ohne Strukturbruch für jeden Zinssatz und jede Schrittgröße anhand der GMM geschätzt. Der Argumentation und dem Vorgehen von BECKER (1998) folgend, geschieht dies unabhängig von der Stationarität der Zinszeitreihen. Dann wird mit Hilfe eines Modellvergleichs das jeweils präferierte Zinsmodell bestimmt. Sofern nicht anders vermerkt, wird dabei ein Konfidenzniveau von 5% zugrunde gelegt. Unter Umständen wird jedoch keines der geschätzten Modelle bei den später folgenden Abhängigkeitsanalysen berücksichtigt.

#### Modellschätzung

Geschätzt werden die neun von CHAN ET AL. (1992) untersuchten, diskretisierten Zinsmodelle ohne Strukturbruch. Modelle mit Strukturbruch werden aus drei Gründen nicht betrachtet. Erstens kommen CHAN ET AL. (1992) zu dem Schluss, dass ihr Modellrahmen hinreichend flexibel sei, um die Zinsentwicklung auch ohne Strukturbruch zu modellieren. Zweitens geben die betrachteten Zinszeitreihen weniger Hinweise auf einen permanenten Strukturbruch als die Zeitreihe von CHAN ET AL. (1992) (vgl. Abbildung 5.10). Drittens sollen die Modelle möglichst einfach gehalten werden.

An der ursprünglichen diskreten Modellformulierung von CHAN ET AL. (1992) wird eine leichte Änderung vorgenommen. Während die Nebenbedingungen aus Tabelle 3.1 bestehen bleiben, wird in Gleichung (3.11) die Schrittgröße  $\Delta t$  explizit berücksichtigt:

$$r_t - r_{t-\Delta t} = (\alpha_r + \beta_r r_{t-\Delta t}) \Delta t + \epsilon_{r,t} \quad (5.3a)$$

$$\mathbb{E}_{t-\Delta t}[\epsilon_{r,t}] \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.3b)$$

$$\mathbb{E}_{t-\Delta t}[\epsilon_{r,t}^2] \stackrel{!}{=} \sigma_r^2 r_{t-\Delta t}^{2\gamma_r} \Delta t. \quad (5.3c)$$

Dies steht im Einklang mit der stetigen Modellformulierung in Gleichung (3.8) und stellt sicher, dass die Parameterschätzwerte stets auf den Zeitraum eines Jahres skaliert sind. Dadurch sind die Schätzwerte von Modellen mit unterschiedlichen Schrittgrößen besser vergleichbar.

Land, Schrittgröße und Zinssatz	Zinssätze	Residuen
<b>DEUTSCHLAND</b>		
<b>Einmonatsschritte zum Monatsersten</b>		
Dreimonatiger Geldmarktsatz	607	606
Sechsmonatige Zinsstruktur	454	453
Einjährige Zinsstruktur	454	453
<b>Dreimonatsschritte zum Quartalersten</b>		
Dreimonatiger Geldmarktsatz	203	202
Sechsmonatige Zinsstruktur	152	151
Einjährige Zinsstruktur	152	151
<b>Jahresschritte zum 1. Januar</b>		
Dreimonatiger Geldmarktsatz	51	50
Sechsmonatige Zinsstruktur	38	37
Einjährige Zinsstruktur	38	37
<b>Jahresschritte zum 1. Juli</b>		
Dreimonatiger Geldmarktsatz	51	50
Sechsmonatige Zinsstruktur	38	37
Einjährige Zinsstruktur	38	37
<b>USA</b>		
<b>Einmonatsschritte zum Monatsersten</b>		
Dreimonatiger T-Bill-Satz	678	677
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	619	618
Einjähriger T-Bill-Satz	612	611
<b>Dreimonatsschritte zum Quartalersten</b>		
Dreimonatiger T-Bill-Satz	226	225
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	207	206
Einjähriger T-Bill-Satz	204	203
<b>Jahresschritte zum 1. Januar</b>		
Dreimonatiger T-Bill-Satz	56	55
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	52	51
Einjähriger T-Bill-Satz	51	50
<b>Jahresschritte zum 1. Juli</b>		
Dreimonatiger T-Bill-Satz	57	56
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	52	51
Einjähriger T-Bill-Satz	51	50

Tabelle 5.14: Zeitreihenlängen der Zinssätze

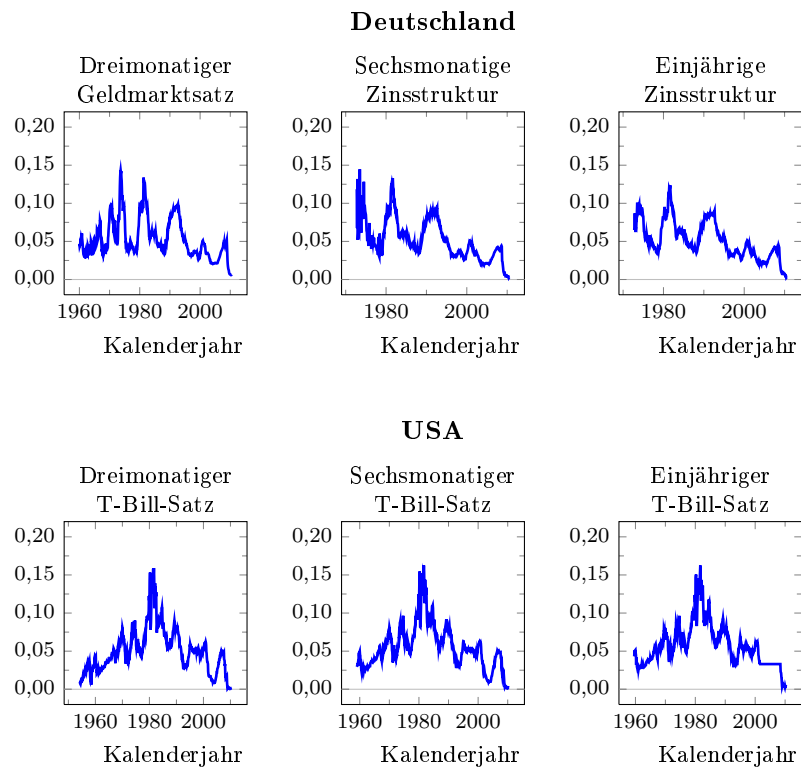


Abbildung 5.10: Zeitreihen der Kassazinsrenditen

Quelle: DEUTSCHE BUNDESBANK (2010) und THE FEDERAL RESERVE SYSTEM (2010)

Weiter werden adjustierte Störgrößen definiert:

$$\epsilon_{r,t}^{\text{adj}} := \frac{\epsilon_{r,t}}{\sigma_r r_{t-\Delta t}^{\gamma_r} \sqrt{\Delta t}} \quad (5.4)$$

Eine Umformulierung der Gleichungen (5.3) zu

$$r_t - r_{t-\Delta t} = (\alpha_r + \beta_r r_{t-\Delta t}) \Delta t + \sigma_r r_{t-\Delta t}^{\gamma_r} \sqrt{\Delta t} \epsilon_{r,t}^{\text{adj}} \quad (5.5a)$$

$$\mathbb{E}_{t-\Delta t} \left[ \epsilon_{r,t}^{\text{adj}} \right] \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.5b)$$

$$\mathbb{E}_{t-\Delta t} \left[ \left( \epsilon_{r,t}^{\text{adj}} \right)^2 \right] \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{E}_{t-\Delta t} \left[ \left( \sqrt{\Delta t} \epsilon_{r,t}^{\text{adj}} \right)^2 \right] \stackrel{!}{=} \Delta t \quad (5.5c)$$

verdeutlicht abermals den Zusammenhang zur stetigen Modellformulierung aus Gleichung (3.8):  $\sqrt{\Delta t} \epsilon_{r,t}^{\text{adj}}$  lässt sich als diskretisiertes Pendant zu dem Inkrement  $dW_{r,t}$  des Wiener Prozesses  $W_r$  interpretieren.

Dies erweist sich für einen über die üblichen Methoden der GMM hinausgehenden Modellvergleich als hilfreich. Denn wenn die Eigenschaften des Wiener Prozesses in den stetigen Modellen auch auf ihre diskretisierten Fassungen zutreffen soll, sollten zum einen die adjustierten Residuen weißes Rauschen darstellen und zum anderen ihre bedingte Varianz  $\text{VAR}_{t-\Delta t} \left[ \epsilon_{r,t}^{\text{adj}} \right] = \mathbb{E}_{t-\Delta t} \left[ \left( \epsilon_{r,t}^{\text{adj}} \right)^2 \right] = 1$  sein.

Die durch Gleichung (5.3) und die Nebenbedingungen in Tabelle 3.1 definierten Modelle werden weitestgehend nach dem Ansatz von CHAN ET AL. (1992) und damit insbesondere mit Hilfe der GMM geschätzt.

Als Prozess des Datenvektors  $v$  dienen die Zeitreihen der Kassarenditen und ihrer Veränderungen. Der Parametervektor  $\theta$  ist durch Gleichung (3.21) gegeben. Die zur Bestimmung der Momentenbedingungen benötigte Funktion  $f_{\text{Mom}}$  wird analog zu Gleichung (3.23) durch

$$f_{\text{Mom}}(v_t, \theta) := \begin{pmatrix} \epsilon_{r,t} \\ \epsilon_{r,t} r_{t-\Delta t} \\ \epsilon_{r,t}^2 - \sigma_r^2 r_{t-\Delta t}^{2\gamma_r} \Delta t \\ \left( \epsilon_{r,t}^2 - \sigma_r^2 r_{t-\Delta t}^{2\gamma_r} \Delta t \right) r_{t-\Delta t} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

definiert. Die Verteilungsmomente, die Stichprobenmomente und die zu minimierende Funktion  $Q_T$  werden weiterhin durch Gleichungen (3.22), (3.15) bzw. (3.16) definiert.

Zur Implementierung wird weitestgehend auf die bereits existierende Funktion „gmm“ in „R“ zurückgegriffen. Sie wird nur leicht angepasst. Insbesondere müssen die Gewichtungs-

matrizen nicht extra programmiert werden, sondern können durch Argumente der Funktion ausgewählt werden.

Dies erweist sich als sehr hilfreich. Denn während CHAN ET AL. (1992) bei überbestimmten Modellen  $W_T = \hat{S}_{\text{SU}}^{-1}$  als Gewichtungsmatrix verwenden und dadurch implizit unterstellen, dass die Funktionswerte  $f_{\text{Mom}}(v_t, \theta^*)$  nicht seriell autokorreliert seien, werden in der vorliegenden Arbeit alle Modelle sowohl mit der Gewichtungsmatrix  $W_T = \hat{S}_{\text{SU}}^{-1}$  als auch mit  $W_T = \hat{S}_{\text{HAC}}^{-1}$  geschätzt. Die resultierenden, wohlgemerkt geschätzten Funktionswerte  $f_{\text{Mom}}(v_t, \hat{\theta}_T)$  werden mit dem Ljung-Box-Test und der Funktion „Box.test“ auf Autokorrelation untersucht. Lehnt dieser die Nullhypothese fehlender Autokorrelation ab, wird die auf  $W_T = \hat{S}_{\text{HAC}}^{-1}$  und ansonsten die auf  $W_T = \hat{S}_{\text{SU}}^{-1}$  basierende Schätzung verwendet.

Die Modellschätzung selbst folgt dem in Kapitel 3.3.2, S. 48, beschriebenen, iterativen Verfahren mit einem Konvergenzkriterium von  $10^{-10}$  und maximal 100 Iterationen. Es ist bereits in der Funktion „gmm“ hinterlegt. Die Gewichtungsmatrix im ersten Iterationsschritt ist dabei die Einheitsmatrix.

Die Minimierung der Zielfunktion  $Q_T$  erfolgt bei einem zu schätzenden Parameter mit Hilfe der Funktion „optimize“ und bei mindestens zwei zu schätzenden Parametern mit Hilfe der Funktion „optim“. Erstere stellt eine Kombination des Verfahrens des goldenen Schnitts und der schrittweisen, parabolischen Interpolation dar (THE R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010, S. 1310 f.). Bei letzterer wird der Simplex-Algorithmus von NELDER & MEAD (1965) mit maximal 10000 Iterationen und einem Konvergenzkriterium von ebenfalls  $10^{-10}$  angewandt (THE R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010, S. 1305 ff.).

Bei der Funktion „optimize“ muss für den gefragten Parameter das zu durchsuchende Intervall angegeben werden. Die Funktion „optim“ hingegen benötigt für jedes zu schätzende Element des Parametervektors  $\theta$  einen Startwert. Bei den beiden Modellen mit nur einem freien Parameter, DOTHAN (1978) und COX ET AL. (1980), wird als Intervall für  $\sigma_r$  das Intervall  $\left[0; 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \widehat{\text{SD}}\left[\frac{r_t - r_{t-\Delta t}}{r_{t-\Delta t}^r}\right]\right]$  gewählt. Dabei steht  $\widehat{\text{SD}}$  für die Funktion der Stichprobenstandardabweichung. Bei Modellen mit mindestens zwei freien Parametern hängt die Wahl des Startwertvektors  $\hat{\theta}_T^{(0)} = \left(\hat{\alpha}_r^{(0)}, \hat{\beta}_r^{(0)}, \hat{\sigma}_r^{(0)}, \hat{\gamma}_r^{(0)}\right)'$  vom jeweiligen Modell ab.

Bei der Brown'schen Bewegung von MERTON (1973) werden  $\hat{\alpha}_r^{(0)} = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (r_t - r_{t-\Delta t})$  und  $\hat{\sigma}_r^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \widehat{\text{SD}}[r_t - r_{t-\Delta t}]$ , bei der geometrischen Brown'schen Bewegung von RENDLEMAN & BARTTER (1980)  $\hat{\beta}_r^{(0)} = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \left(\frac{r_t}{r_{t-\Delta t}} - 1\right)$  und  $\hat{\sigma}_r^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \widehat{\text{SD}}\left[\frac{r_t}{r_{t-\Delta t}} - 1\right]$  gesetzt. Die Startwerte des Drifts  $\alpha_r$  bzw.  $\beta_r$  entsprechen also dem Durchschnitt und die der Volatilität  $\sigma_r$  der Stichprobenstandardabweichung der absoluten bzw. prozentualen Zinsveränderung je Zeiteinheit. Bei den übrigen, nicht freien Parametern werden die Startwerte entsprechend ihrer Nebenbedingungen (vgl. Tabelle 3.1) festgelegt.

Bei allen anderen Modellen mit mindestens zwei freien Parametern wird die Zinsveränderung  $r_t - r_{t-\Delta t}$  mit Hilfe der „R“-Funktion „lm“ linear gegen den Zins  $r_{t-\Delta t}$  der Vorperiode regressiert. Ist  $\alpha_r = 0$ , erfolgt die Regression ohne und ansonsten mit Konstante. Die Startwerte für  $\alpha_r$  werden dann gleich null bzw. dem Regressionskoeffizienten der Konstante, die für  $\beta_r$  gleich dem Regressionskoeffizienten des Zinses  $r_{t-\Delta t}$  gesetzt. Die Startwerte der Volatilität  $\sigma_r$  werden als Stichprobenstandardabweichung der durch  $r_{t-\Delta t}^{\hat{\gamma}_r^{(0)}}$  und  $\sqrt{\Delta t}$  geteilten Regressionsresiduen bestimmt. Dabei ist bei COX (1975) und CHAN ET AL. (1992)  $\hat{\gamma}_r^{(0)} = 1$  und in allen anderen Fällen  $\hat{\gamma}_r^{(0)} = \gamma_r$ .

### Modellvergleich

Der Modellvergleich erfolgt in weiten Teilen analog zu CHAN ET AL. (1992) (vgl. Kapitel 3.3.2.2). Es werden der J-Test sowie der LR-Test durchgeführt und die Signifikanz einzelner Parameter mit ihrem t-Wert überprüft. Dazu werden die entsprechenden Teststatistiken und p-Werte auf Basis der GMM-Ergebnisse in „R“ bestimmt. Anders als bei CHAN ET AL. (1992) werden keine Bestimmtheitsmaße berechnet, da sie im Wesentlichen durch die Nebenbedingungen bzw. die freien Parameter der Modelle getrieben scheinen.

Der J-Test wird wie bei CHAN ET AL. (1992) für alle Modelle außer für das eindeutig bestimmte Modell (3.9a) durchgeführt. Mit dem LR-Test werden im Gegensatz zu CHAN ET AL. (1992) die Modelle (3.9b) bis (3.9i) nicht nur untereinander, sondern auch zu (3.9a) verglichen. Zwar sollten beim Vergleich zum eindeutig bestimmten Modell (3.9a) die Testwerte des LR-Tests wegen  $Q_T(\hat{\theta}_T) \sim 0$  denen des J-Tests ähneln; doch unterscheiden sie sich bei genauerem Hinsehen durch die unterschiedliche Gewichtungsmatrix.

Die t-Werte werden für alle freien Parameter bestimmt. Im Gegensatz zu dem Vorgehen bei CHAN ET AL. (1992) wird außerdem der jeweilige p-Wert bestimmt. Bei den Modellen mit der Möglichkeit einer Mean-Reversion – CHAN ET AL. (1992), VASIČEK (1977), COX ET AL. (1985) und BRENNAN & SCHWARTZ (1980) – wird dabei auf  $\alpha_r \leq 0$  und  $\beta_r \geq 0$ , bei allen anderen Modellen auf  $\alpha_r = 0$  und  $\beta_0 = 0$  getestet. Unabhängig vom Modell wird auf  $\sigma_r \leq 0$  bzw.  $\gamma_r = 0$  getestet.

Zusätzlich zu den von CHAN ET AL. (1992) durchgeführten und oben beschriebenen Hypothesentests werden die Modellresiduen analysiert. Zwar stellt die GMM nur geringe Anforderungen an die Störgrößen der zu schätzenden Modelle und unterstellt insbesondere nicht, dass sie einer bestimmten Verteilungsklasse folgten und diese bekannt sei. Dennoch ist eine Untersuchung der Residuen hilfreich.

Zum einen erlaubt sie, in den Momentenbedingungen nicht formulierte, aber i. d. R. implizit getroffene Modellannahmen zu überprüfen. So sollten z. B., wenn die Eigenschaften des Wie-

ner Prozesses auch in der diskretisierten Fassung der Modelle zutreffen sollen, die adjustierten Residuen  $\epsilon_{r,t}^{\text{adj}}$  unabhängig standardnormalverteilt sein, also Gauß'sches weißes Rauschen darstellen. Wichtiger als die Normalverteilung ist dabei die serielle Unkorreliertheit und die Varianz von eins, da Abweichungen hier Hinweise auf eine im Modell und den Momentenbedingungen unzureichend berücksichtigte Abhängigkeit vom Zinsniveau oder von früheren Störgrößen geben können. Andere Ursachen wie Strukturbrüche sind ebenfalls denkbar.

Zum anderen kann durch die Wahl eines Modells mit stationären und nicht autokorrelierten Residuen das Risiko einer Scheinregression bei den später folgenden Abhängigkeitsanalysen verringert werden (vgl. Kapitel 5.1.2).

Die adjustierten Residuen werden daher mit dem erweiterten Dickey-Fuller-Test, dem KPSS-Test und Ahamadas Test auf Stationarität, mit dem Ljung-Box-Tests auf das Fehlen von Autokorrelation und mit dem Jarque-Bera-Test auf Normalverteilung getestet. Außerdem wird ihre Stichprobenvarianz berechnet. Dazu werden die „R“-Funktionen „ur.df“, „urkpsstest“, „Box.test“, „jarque.bera.test“ und „sd“ verwendet; lediglich die Funktion für Ahamadas Test muss programmiert werden.

Die Ergebnisse werden bei der Entscheidung über das bei den Abhängigkeitsanalysen verwendete Zinsmodell berücksichtigt. Sollte für einen Zinssatz und eine Schrittgröße keines der neun Modelle über stationäre, nicht autokorrelierte und normalverteilte adjustierte Residuen verfügen, wird der betroffene Zinssatz und die betroffene Schrittgröße bei den Abhängigkeitsanalysen nicht weiter betrachtet.

### 5.2.3.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Modellschätzungen und des Modellvergleichs werden im Folgenden vorgestellt. Sie decken sich nur zum Teil mit denen von CHAN ET AL. (1992).

Wie bei CHAN ET AL. (1992) ist bei den meisten Zeitreihen nur ein Teil der Parameter des nicht restringierten Modells signifikant. Ansonsten finden sich Übereinstimmungen hauptsächlich bei den Zinssätzen der USA bei Ein- und Dreimonatsschritten. In diesen Fällen liegen die nicht restringierten Schätzungen  $\hat{\gamma}_r$  deutlich über eins und mit  $1,4881 \leq \hat{\gamma}_r \leq 1,6623$  relativ nah an der Schätzung  $\hat{\gamma}_r = 1,4999$  von CHAN ET AL. (1992). Auch lehnt der J-Test Modelle mit  $\gamma_r < 1$  bei Einmonatsschritten und allen T-Bill-Sätzen als fehlspezifiziert ab.

Auf andere Schrittgrößen und vor allem die deutschen Zinssätze treffen diese Aussagen so nicht zu. Abgesehen von der sechsmonatigen Zinsstruktur bei Ein- und Dreimonatsschritten beträgt bei allen anderen Zeitreihen die nicht restringierte Schätzung  $\hat{\gamma}_r < 1$ . Dementsprechend werden Modelle mit  $\gamma_r < 1$  nicht nur im J-Test, sondern auch im LR-Test gegen

die Alternative des nicht restringierten Modells regelmäßig nicht abgelehnt. Letzteres gilt insbesondere für das Modell von COX ET AL. (1985). Ursachen für diese Abweichungen sind höchstwahrscheinlich die unterschiedlichen Zinssätze und größeren Schrittgrößen sowie ggf. die unterschiedlichen Zeiträume und die andere Quotierung der Zinssätze.

### Modellschätzung

Die Modellschätzung erfolgt nach der in Kapitel 5.2.3.1 beschriebenen Vorgehensweise. Als Gewichtungsmatrix wird i. d. R.  $W_T = \hat{S}_{HAC}^{-1}$  verwendet. Lediglich bei Jahresschritten zum Jahres- oder Halbjahresersten sind bei einem Teil der Zinssätze die geschätzten Funktionswerte  $f_{Mom}(v_t, \hat{\theta}_T)$  für beide Gewichtungsmatrizen  $W_T = \hat{S}_{SU}^{-1}$  und  $W_T = \hat{S}_{HAC}^{-1}$  sowie fast alle schätzbaren Modelle seriell unkorreliert, so dass in diesen Fällen die Gewichtungsmatrix  $W_T = \hat{S}_{SU}^{-1}$  verwendet wird.

An dieser Stelle werden nur die Ergebnisse der Modellschätzungen für das nicht restringierte Modell diskutiert. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Signifikanz und dem Wert der geschätzten Parameter.

Untersucht man die *Signifikanz* der Parameter, so zeigt sich, dass bei einem Konfidenzniveau von 5% nur in einem Fall alle Parameter signifikant sind (vgl. Tabellen 5.15 und 5.16).<sup>56</sup> Bei einem Konfidenzniveau von 10% trifft dies auf lediglich sechs weitere Zinssätze und Schrittgrößen zu, darunter die sechsmonatige Zinsstruktur deutscher Bundeswertpapiere für verschiedene Schrittgrößen und die T-Bill-Sätze aller Laufzeiten bei Jahresschritten zum Jahresersten.

In allen anderen Fällen sind entweder die Parameterschätzwerte für  $\alpha_r$  und  $\beta_r$  nicht signifikant oder die für  $\sigma_r$  bzw.  $\gamma_r$ . In Deutschland trifft ersteres i. d. R. auf Zeitreihen mit Monats- und Dreimonatsschritten, letzteres wegen der Insignifikanz von  $\hat{\gamma}_r$  auf Zeitreihen mit Jahresschritten zu. In den USA ist ersteres bei Monatsschritten, letzteres bei Dreimonatsschritten und bei Jahresschritten zum Halbjahresersten der Fall – diesmal jedoch wegen fehlender Signifikanz von  $\hat{\sigma}_r$ .

Die fehlende Signifikanz eines Teils der Parameterschätzwerte legt nahe, dass u. U. ein Modell mit weniger frei wählbaren Parametern ausreicht, um die Zinsentwicklung zu modellieren. Diese Vermutung wird im Modellvergleich bestätigt.

Vernachlässigt man die Signifikanz der Parameter und betrachtet nur ihren *Wert* (vgl. Tabelle 5.17), fallen zwei Punkte auf. Zum einen sind bei allen Zinssätzen und Schrittgrößen die Schätzwerte für  $\alpha_r$  positiv und die für  $\beta_r$  negativ. Dies steht im Einklang mit einer Mean-Reversion zu einem positiven langfristigen Zins von  $-\alpha_r/\beta_r$ . Zum anderen gibt es

<sup>56</sup>Es wird auf  $\alpha_r \leq 0$ ,  $\beta_r \geq 0$ ,  $\sigma_r \leq 0$  und  $\gamma = 0$  getestet.



Schrittgröße und Zinsmodell	Schätzwerte			
	{Standardfehler} [t-Werte] (p-Werte)			
	$\hat{\alpha}_r$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\sigma}_r$	$\hat{\gamma}_r$
<b>Einmonatsschritte zum Monatsersten</b>				
	0,0055	-0,1186	0,1034	0,6862
<b>Dreimonatiger Geldmarktsatz</b>	{0,0044}	{0,0963}	{0,0438}	{0,1429}
	[0,9085]	[-0,8405]	[1,9173]	[3,9782]
	(0,1818)	(0,2003)	(0,0276)	(0,0001)
	0,0367	-0,7600	1,6472	1,4383
<b>Sechsmonatige Zinsstruktur</b>	{0,0148}	{0,3448}	{1,3905}	{0,3223}
	[2,5952]	[-2,7911]	[1,3710]	[5,4994]
	(0,0047)	(0,0026)	(0,0852)	(0,0000)
	0,0027	-0,0839	0,1915	0,9518
<b>Einjährige Zinsstruktur</b>	{0,0044}	{0,1057}	{0,0707}	{0,1241}
	[0,4873]	[-0,6942]	[2,6978]	[7,7752]
	(0,3130)	(0,2438)	(0,0035)	(0,0000)
<b>Dreimonatsschritte zum Quartalersten</b>				
	0,0092	-0,1852	0,1169	0,6659
<b>Dreimonatiger Geldmarktsatz</b>	{0,0047}	{0,1044}	{0,0637}	{0,1739}
	[1,6083]	[-1,4064]	[2,6612]	[5,3963]
	(0,0539)	(0,0798)	(0,0039)	(0,0000)
	0,0199	-0,4335	0,5584	1,1275
<b>Sechsmonatige Zinsstruktur</b>	{0,0100}	{0,2312}	{0,4268}	{0,3328}
	[2,0783]	[-2,7100]	[1,5272]	[3,6527]
	(0,0188)	(0,0034)	(0,0633)	(0,0003)
	0,0038	-0,1053	0,0812	0,6145
<b>Einjährige Zinsstruktur</b>	{0,0044}	{0,0973}	{0,0378}	{0,1520}
	[0,6508]	[-0,8099]	[1,9919]	[3,5571]
	(0,2576)	(0,2090)	(0,0232)	(0,0004)
<b>Jahresschritte zum 1. Januar</b>				
	0,0153	-0,2836	0,0611	0,4158
<b>Dreimonatiger Geldmarktsatz</b>	{0,0064}	{0,1179}	{0,0488}	{0,2879}
	[2,4080]	[-2,4050]	[1,2523]	[1,4445]
	(0,0080)	(0,0081)	(0,1052)	(0,1486)
	0,0112	-0,2357	0,0207	0,0517
<b>Sechsmonatige Zinsstruktur</b>	{0,0060}	{0,1029}	{0,0116}	{0,2061}
	[1,8549]	[-2,2899]	[1,7861]	[0,2511]
	(0,0318)	(0,0110)	(0,0370)	(0,8017)
	0,0079	-0,1801	0,0415	0,3518
<b>Einjährige Zinsstruktur</b>	{0,0053}	{0,1047}	{0,0288}	{0,2502}
	[1,4917]	[-1,7204]	[1,4401]	[1,4060]
	(0,0679)	(0,0427)	(0,0749)	(0,1597)
<b>Jahresschritte zum 1. Juli</b>				
	0,0180	-0,3520	0,0388	0,1978
<b>Dreimonatiger Geldmarktsatz</b>	{0,0054}	{0,0964}	{0,0264}	{0,2494}
	[2,5112]	[-3,2559]	[1,3074]	[0,6526]
	(0,0060)	(0,0006)	(0,0955)	(0,5140)
	0,0125	-0,2957	0,1258	0,6863
<b>Sechsmonatige Zinsstruktur</b>	{0,0061}	{0,1310}	{0,0874}	{0,2346}
	[2,0534]	[-2,2582]	[1,4398]	[2,9255]
	(0,0200)	(0,0120)	(0,0750)	(0,0034)
	0,0086	-0,2106	0,0511	0,4105
<b>Einjährige Zinsstruktur</b>	{0,0053}	{0,1061}	{0,0458}	{0,2966}
	[1,6266]	[-1,9849]	[1,1153]	[1,3838]
	(0,0519)	(0,0236)	(0,1324)	(0,1664)

Tabelle 5.15: CHAN ET AL. (1992)-Modellschätzungen für Deutschland

Schrittgröße und Zinsmodell	Schätzwerte			
	{Standardfehler} [t-Werte] (p-Werte)			
	$\hat{\alpha}_r$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\sigma}_r$	$\hat{\gamma}_r$
<b>Einmonatsschritte zum Monatsersten</b>				
	0,0082	-0,1677	1,0058	1,4881
<b>Dreimonatiger T-Bill-Satz</b>	{0,0069}	{0,1699}	{0,6006}	{0,2234}
	[1,1987]	[-0,9959]	[1,5433]	[6,1790]
	(0,1153)	(0,1597)	(0,0614)	(0,0000)
	0,0077	-0,1499	1,2022	1,6007
<b>Sechsmonatiger T-Bill-Satz</b>	{0,0079}	{0,1741}	{0,7911}	{0,2513}
	[1,2122]	[-1,0913]	[1,4001]	[5,9142]
	(0,1127)	(0,1376)	(0,0807)	(0,0000)
	0,0074	-0,1433	1,0362	1,5621
<b>Einjähriger T-Bill-Satz</b>	{0,0082}	{0,1705}	{0,6327}	{0,2323}
	[1,2471]	[-1,1870]	[1,4754]	[6,1583]
	(0,1062)	(0,1176)	(0,0701)	(0,0000)
<b>Dreimonatsschritte zum Quartalersten</b>				
	0,0114	-0,2309	1,4844	1,5919
<b>Dreimonatiger T-Bill-Satz</b>	{0,0086}	{0,2085}	{0,9906}	{0,2532}
	[2,3187]	[-2,5069]	[1,2628]	[5,2426]
	(0,0102)	(0,0061)	(0,1033)	(0,0000)
	0,0114	-0,2164	1,6138	1,6623
<b>Sechsmonatiger T-Bill-Satz</b>	{0,0098}	{0,2130}	{1,1992}	{0,2857}
	[1,9690]	[-2,2861]	[0,9957]	[4,4094]
	(0,0245)	(0,0111)	(0,1597)	(0,0000)
	0,0108	-0,2038	1,3166	1,6039
<b>Einjähriger T-Bill-Satz</b>	{0,0099}	{0,2040}	{0,9708}	{0,2821}
	[1,6048]	[-1,7236]	[0,9330]	[4,0689]
	(0,0543)	(0,0424)	(0,1754)	(0,0000)
<b>Jahresschritte zum 1. Januar</b>				
	0,0085	-0,1683	0,0658	0,4746
<b>Dreimonatiger T-Bill-Satz</b>	{0,0043}	{0,0934}	{0,0352}	{0,1855}
	[2,6038]	[-2,2283]	[1,9307]	[2,7528]
	(0,0046)	(0,0129)	(0,0268)	(0,0059)
	0,0083	-0,1596	0,0491	0,3734
<b>Sechsmonatiger T-Bill-Satz</b>	{0,0049}	{0,0938}	{0,0286}	{0,2043}
	[1,7074]	[-1,6292]	[2,3046]	[2,4845]
	(0,0439)	(0,0516)	(0,0106)	(0,0130)
	0,0069	-0,1364	0,0579	0,4693
<b>Einjähriger T-Bill-Satz</b>	{0,0052}	{0,0975}	{0,0391}	{0,2481}
	[1,3174]	[-1,3988]	[1,4823]	[1,8918]
	(0,0938)	(0,0809)	(0,0691)	(0,0585)
<b>Jahresschritte zum 1. Juli</b>				
	0,0090	-0,1820	0,0560	0,4001
<b>Dreimonatiger T-Bill-Satz</b>	{0,0037}	{0,0824}	{0,0534}	{0,2816}
	[2,4239]	[-2,2087]	[1,0497]	[1,4210]
	(0,0077)	(0,0136)	(0,1469)	(0,1553)
	0,0085	-0,1658	0,0748	0,5149
<b>Sechsmonatiger T-Bill-Satz</b>	{0,0046}	{0,0935}	{0,0662}	{0,2730}
	[1,8576]	[-1,7732]	[1,1302]	[1,8856]
	(0,0316)	(0,0381)	(0,1292)	(0,0593)
	0,0084	-0,1537	0,1386	0,7749
<b>Einjähriger T-Bill-Satz</b>	{0,0052}	{0,1051}	{0,1090}	{0,2619}
	[1,6325]	[-1,4624]	[1,2713]	[2,9588]
	(0,0513)	(0,0718)	(0,1018)	(0,0031)

Tabelle 5.16: CHAN ET AL. (1992)-Modellschätzungen für die USA

deutliche Unterschiede zwischen Deutschland und den USA (vgl. Tabelle 5.17).

Das langfristige, geschätzte Zinsniveau  $-\hat{\alpha}_r/\hat{\beta}_r$  hängt in den USA mit einem Wertebereich von 4,91% bis 5,49% nur leicht, in Deutschland mit einem Wertebereich von 3,23% bis 5,39% deutlich von dem betrachteten Zinssatz und der gewählten Schrittgröße ab. Im ersten Fall beträgt die maximale Differenz zwischen den langfristigen Niveaus verschiedener Zinssätze bei identischer Schrittgröße 56 Basispunkte oder 11,36%, im zweiten Fall 160 Basispunkte oder 49,54%. Die maximale Differenz für unterschiedliche Schrittgrößen und denselben Zinssatz beläuft sich auf 30 Basispunkte und 5,78% bzw. auf 116 Basispunkte und 50,00%.

Auch der Wertebereich der geschätzten Mean-Reversion-Geschwindigkeit  $-\hat{\beta}_r$  ist in den USA deutlich kleiner als in Deutschland. In den USA werden erwartungsgemäß zwischen 13,64% und 23,09% des Unterschieds zwischen dem langfristigen und aktuellen Zinsniveau pro Jahr aufgeholt, in Deutschland zwischen 8,39% und 76,00%. Die große Spannweite kommt in Deutschland durch die Werte bei Einmonatsschritten zustande. Bei Dreimonats- und Einjahresschritten ist sie kleiner, aber immer noch deutlich größer als im Fall der USA. Bei Einjahresschritten fällt außerdem auf, dass die Mean-Reversion-Geschwindigkeit in Deutschland bei fast allen Zinssätzen höher ist als in den USA.

Für die Schätzwerte der halben, bedingten Varianzelastizität und der bedingten Volatilität,  $\hat{\gamma}_r$  bzw.  $\hat{\sigma}_r$ , zeigt sich in den USA ein deutlicher Zusammenhang zur Schrittgröße. Bei Einmonats- und Dreimonatsschritten liegt  $\hat{\gamma}_r$  zwischen 1,4881 und 1,6623 und damit sehr nah an der ursprünglichen Schätzung von CHAN ET AL. (1992) von  $\hat{\gamma}_r = 1,4999$ . Bei Einjahresschritten ist  $\hat{\gamma}_r$  mit Werten von 0,3734 bis 0,7749 deutlicher niedriger und eher im Bereich von  $\gamma_r = 0,5$  wie bei COX ET AL. (1985) angesiedelt. Auch  $\hat{\sigma}_r$  ist bei Einmonatsschritten und insbesondere bei Dreimonatsschritten um ein Vielfaches höher als bei Jahresschritten.

Ganz anders verhält es sich für  $\hat{\gamma}_r$  und  $\hat{\sigma}_r$  in Deutschland. Zum einen gibt es bei beiden Parametern starke Unterschiede zwischen den verschiedenen Zinssätzen. Insbesondere die Schätzwerte für die sechsmonatige Zinsstruktur weichen deutlich von denen der anderen beiden Zinssätze ab, und zwar i. d. R. nach oben.

Zum anderen ist der Unterschied zwischen den Schrittgrößen weniger stark ausgeprägt als in den USA. Zwar sind – wenn man von der sechsmonatigen Zinsstruktur absieht – auch in Deutschland die Schätzwerte beider Parameter bei Einjahresschritten niedriger als die bei Ein- und Dreimonatsschritten; doch sind bei letzteren die Schätzwerte nicht so hoch wie im Fall der USA. So ist der Schätzwert  $\hat{\gamma}_r$  für den dreimonatigen Geldmarktsatz und die einjährige Zinsstruktur stets kleiner eins und liegt damit deutlich unter der nicht restringierten Schätzung von CHAN ET AL. (1992). Er ist eher mit  $\gamma_r = 0,5$  bei COX ET AL. (1985) oder  $\gamma_r = 1$  bei DOTHAN (1978), RENDLEMAN & BARTTER (1980) und BRENNAN & SCHWARTZ

(1980) vergleichbar.

Land, Schrittgröße und Zinssatz	$\hat{\alpha}_r$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\sigma}_r$	$\hat{\gamma}_r$	$-\hat{\alpha}_r/\hat{\beta}_r$
<b>DEUTSCHLAND</b>					
<b>Einmonatsschritte zum Monatsersten</b>					
Dreimonatiger Geldmarktsatz	0,0055	-0,1186	0,1034	0,6862	0,0468
Sechsmonatige Zinsstruktur	0,0367	-0,7600	1,6472	1,4383	0,0483
Einjährige Zinsstruktur	0,0027	-0,0839	0,1915	0,9518	0,0323
<b>Dreimonatsschritte zum Quartalersten</b>					
Dreimonatiger Geldmarktsatz	0,0092	-0,1852	0,1169	0,6659	0,0495
Sechsmonatige Zinsstruktur	0,0199	-0,4335	0,5584	1,1275	0,0458
Einjährige Zinsstruktur	0,0038	-0,1053	0,0812	0,6145	0,0364
<b>Jahresschritte zum 1. Januar</b>					
Dreimonatiger Geldmarktsatz	0,0153	-0,2836	0,0611	0,4158	0,0539
Sechsmonatige Zinsstruktur	0,0112	-0,2357	0,0207	0,0517	0,0475
Einjährige Zinsstruktur	0,0079	-0,1801	0,0415	0,3518	0,0439
<b>Jahresschritte zum 1. Juli</b>					
Dreimonatiger Geldmarktsatz	0,0180	-0,3520	0,0388	0,1978	0,0510
Sechsmonatige Zinsstruktur	0,0125	-0,2957	0,1258	0,6863	0,0424
Einjährige Zinsstruktur	0,0086	-0,2106	0,0511	0,4105	0,0410
<b>USA</b>					
<b>Einmonatsschritte zum Monatsersten</b>					
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,0082	-0,1677	1,0058	1,4881	0,0491
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	0,0077	-0,1499	1,2022	1,6007	0,0514
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0074	-0,1433	1,0362	1,5621	0,0519
<b>Dreimonatsschritte zum Quartalersten</b>					
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,0114	-0,2309	1,4844	1,5919	0,0494
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	0,0114	-0,2164	1,6138	1,6623	0,0525
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0108	-0,2038	1,3166	1,6039	0,0530
<b>Jahresschritte zum 1. Januar</b>					
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,0085	-0,1683	0,0658	0,4746	0,0504
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	0,0083	-0,1596	0,0491	0,3734	0,0521
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0069	-0,1364	0,0579	0,4693	0,0506
<b>Jahresschritte zum 1. Juli</b>					
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,0090	-0,1820	0,0560	0,4001	0,0493
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	0,0085	-0,1658	0,0748	0,5149	0,0510
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0084	-0,1537	0,1386	0,7749	0,0549

Tabelle 5.17: CHAN ET AL. (1992)-Modellschätzungen

### Modellvergleich

Beim Modellvergleich mit J-Test, LR-Test und t-Werten zeigt sich, dass bei allen Zinssätzen und Schrittgrößen ein oder mehrere Untermodelle von CHAN ET AL. (1992) für die Modellierung in Frage kommen. Der J-Test kann stets mehrere Untermodelle von CHAN ET AL. (1992) nicht als fehlspezifiziert verwerfen. Beim LR-Test kann zumindest ein Teil dieser Modelle nicht gegen das nicht restringierte Modell abgelehnt werden. Bei diesen Modellen sind dann i. d. R. auch alle Parameterwerte bei einem Konfidenzniveau von 5% oder ggf. 10% signifikant.

Die Zinszeitreihen können daher gut mit einem dieser Modelle modelliert werden. Dabei lässt sich folgendes Muster erkennen: Beträgt die nicht restringierte Schätzung  $\hat{\gamma}_r \geq 1$ , bieten sich dazu Modelle mit  $\gamma_r \geq 1$  an; gilt für die nicht restringierte Schätzung  $\hat{\gamma}_r < 1$ , werden Modelle mit  $\gamma_r \leq 1$  präferiert (vgl. Tabelle 5.18).

Ersteres ist bei Ein- und Dreimonatsschritten und der sechsmonatigen Zinsstruktur in Deutschland bzw. allen Zinssätzen in den USA der Fall. In Deutschland werden dann das Modell von BRENNAN & SCHWARTZ (1980), in den USA vor allem die Modelle von COX ET AL. (1980), BRENNAN & SCHWARTZ (1980) und DOTHAN (1978) präferiert. Letzteres, d. h.  $\hat{\gamma}_r < 1$ , trifft auf alle verbleibenden Zinssätze und Schrittgrößen zu. In all diesen Fällen kommt COX ET AL. (1985) in Frage; als Alternative bieten sich meist DOTHAN (1978) und VASIČEK (1977) sowie in Einzelfällen RENDLEMAN & BARTTER (1980), BRENNAN & SCHWARTZ (1980) und MERTON (1973) an.

Bei nicht allen dieser Modellen können die adjustierten Residuen als weißes Rauschen angesehen werden. Um Scheinregressionen zu vermeiden, wird bei den Abhängigkeitsanalysen daher nur ein Teil der Zinssätze und Schrittgrößen weitergehend untersucht. Insbesondere fallen alle Zeitreihen mit Einmonats- und Dreimonatsschritten weg. Bei den verbleibenden wird das jeweils am besten passende Modell herangezogen. Dies ist i. d. R. das von COX ET AL. (1985); nur im Fall des einjährigen T-Bill-Satzes bei Jahresschritten zum Halbjahresersten wird das Modell von DOTHAN (1978) verwendet. Die Ergebnisse der verwendeten Modellschätzungen sind in Tabelle 5.19 zusammengefasst.

Bei allen verwendeten Modellen sind die Parameterschätzwerte bei einem Konfidenzniveau von 10% signifikant (vgl. Tabellen 5.20 und 5.21).<sup>57</sup> Bei einem Konfidenzniveau von 5% trifft dies auf alle Zinssätze und Schrittgrößen außer die einjährige Zinsstruktur und den einjährigen T-Bill-Satz mit Stichtag 1. Januar zu.

Darüber hinaus sind die adjustierten Residuen aller verwendeten Modelle weißes Gauß'sches Rauschen mit einer Stichprobenvarianz von näherungsweise eins (vgl. Tabellen 5.22 und 5.23): Der erweiterte Dickey-Fuller-Test verwirft die Nullhypothese einer Einheitswurzel bei einem Konfidenzniveau von 5% und häufig sogar von 1%; der KPSS-Test und Ahamadas Test können die Stationaritätshypothese bei einem Konfidenzniveau von 5% meist nicht bzw. nie ablehnen. Die Nullhypothese fehlender Autokorrelation bzw. der Normalverteilung lehnt der Ljung-Box- bzw. der Jarque-Bera-Test bei keinem Modell ab. Die Stichprobenvarianz beträgt vor allem im Vergleich zu den Stichprobenvarianzen der nicht verwendeten Modelle näherungsweise eins.

<sup>57</sup> Es wird auf  $\alpha_r \leq 0$ ,  $\beta_r \geq 0$ ,  $\sigma_r \leq 0$  bzw.  $\gamma_r = 0$  getestet.

Schrittgröße und Zinssatz	Präferierte Modelle
<b>DEUTSCHLAND</b>	
<b>Einmonatsschritte zum Monatsersten</b>	
Dreimonatiger Geldmarktsatz	COX ET AL. (1985), DOTHAN (1978)
Sechsmonatige Zinsstruktur	BRENNAN & SCHWARTZ (1980)
Einjährige Zinsstruktur	DOTHAN (1978)
<b>Dreimonatsschritte zum Quartalersten</b>	
Dreimonatiger Geldmarktsatz	COX ET AL. (1985), DOTHAN (1978)
Sechsmonatige Zinsstruktur	BRENNAN & SCHWARTZ (1980)
Einjährige Zinsstruktur	DOTHAN (1978), COX ET AL. (1985)
<b>Jahresschritte zum 1. Januar</b>	
Dreimonatiger Geldmarktsatz	COX ET AL. (1985), VASIČEK (1977), DOTHAN (1978)
Sechsmonatige Zinsstruktur	VASIČEK (1977), COX ET AL. (1985), RENDLEMAN & BARTTER (1980)
Einjährige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985), VASIČEK (1977), DOTHAN (1978)
<b>Jahresschritte zum 1. Juli</b>	
Dreimonatiger Geldmarktsatz	VASIČEK (1977), COX ET AL. (1985), BRENNAN & SCHWARTZ (1980)
Sechsmonatige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985), DOTHAN (1978), VASIČEK (1977)
Einjährige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985), VASIČEK (1977), DOTHAN (1978)
<b>USA</b>	
<b>Einmonatsschritte zum Monatsersten</b>	
Dreimonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1980), BRENNAN & SCHWARTZ (1980)
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1980), DOTHAN (1978)
Einjähriger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1980), DOTHAN (1978)
<b>Dreimonatsschritte zum Quartalersten</b>	
Dreimonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1980), BRENNAN & SCHWARTZ (1980)
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1980), DOTHAN (1978), COX ET AL. (1985)
Einjähriger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1980), DOTHAN (1978)
<b>Jahresschritte zum 1. Januar</b>	
Dreimonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)
Einjähriger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985), DOTHAN (1978), MERTON (1973)
<b>Jahresschritte zum 1. Juli</b>	
Dreimonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985), VASIČEK (1977)
Sechsmonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985), DOTHAN (1978), VASIČEK (1977)
Einjähriger T-Bill-Satz	DOTHAN (1978), COX ET AL. (1985), VASIČEK (1977)

Tabelle 5.18: Ergebnisse der Zinsmodellvergleiche für die USA

Land, Schrittgröße und Zinssatz	Modell	$\hat{\alpha}_r$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\sigma}_r$	$\hat{\gamma}_r$	$-\hat{\alpha}_r/\hat{\beta}_r$
<b>DEUTSCHLAND</b>						
Jahresschritte zum 1. Januar						
Dreimonatiger Geldmarktsatz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Sechsmonatige Zinsstruktur <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Einjährige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	0,0068	-0,1632	0,0617	0,5000	0,0416
Jahresschritte zum 1. Juli						
Dreimonatiger Geldmarktsatz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Sechsmonatige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	0,0107	-0,2608	0,0710	0,5000	0,0410
Einjährige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	0,0080	-0,1938	0,0664	0,5000	0,0412
<b>USA</b>						
Jahresschritte zum 1. Januar						
Dreimonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Sechsmonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Einjähriger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)	0,0070	-0,1392	0,0629	0,5000	0,0506
Jahresschritte zum 1. Juli						
Dreimonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)	0,0084	-0,1622	0,0776	0,5000	0,0517
Sechsmonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Einjähriger T-Bill-Satz	DOTHAN (1978)	0,0000	0,0000	0,2499	1,0000	-

<sup>a</sup>Kein Modell mit weiß rauschenden und normalverteilten adjustierten Residuen.

Tabelle 5.19: Zinsmodellschätzungen für die Abhängigkeitsanalysen

Schrittgröße und Zinssatz Jahresschritte zum 1. Januar	Modell	Schätzwerte {Standardfehler} [t-Werte] (p-Werte)			
		$\hat{\alpha}_r$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\sigma}_r$	$\hat{\gamma}_r$
Dreimonatiger Geldmarktzinsatz <sup>a</sup>	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
Sechsmonatige Zinsstruktur <sup>a</sup>	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
Einjährige Zinsstruktur	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
Cox ET AL. (1985)					
		0,0068	-0,1632	0,0617	0,5000
		{0,0049}	{0,1005}	{0,0075}	{-}
		[1,3893]	[-1,6247]	[8,2290]	{-}
		(0,0824)	(0,0521)	(0,0000)	{-}
Jahresschritte zum 1. Juli					
Dreimonatiger Geldmarktzinsatz <sup>a</sup>	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
Sechsmonatige Zinsstruktur	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
Einjährige Zinsstruktur	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
	-	{-}	{-}	{-}	{-}
Cox ET AL. (1985)					
		0,0107	-0,2608	0,0710	0,5000
		{0,0056}	{0,1240}	{0,0095}	{-}
		[1,9155]	[-2,1042]	[7,4673]	{-}
		(0,0277)	(0,0177)	(0,0000)	{-}
		0,0080	-0,1938	0,0664	0,5000
		{0,0049}	{0,0917}	{0,0085}	{-}
		[1,6270]	[-2,1134]	[7,8176]	{-}
		(0,0519)	(0,0173)	(0,0000)	{-}

<sup>a</sup>Kein Modell mit weiß rauschenden und normalverteilten adjustierten Residuen.

Tabelle 5.20: Detaillierte Zinsmodellschätzungen für Deutschland



Schrittgröße und Zinssatz Jahresschritte zum 1. Januar	Modell	Schätzwerte {Standardfehler} [t-Werte] (p-Werte)				
		$\hat{\alpha}_r$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\sigma}_r$	$\hat{\gamma}_r$	
Dreimonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	{-}	{-}	{-}	{-}	{-}
		[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
		(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
Sechsmonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	{-}	{-}	{-}	{-}	{-}
		[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
		(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
Einjähriger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)	0,0070	-0,1392	0,0629	0,5000	{-}
		{0,0051}	{0,0949}	{0,0060}	{-}	{-}
		[1,3736]	[-1,4663]	[10,4178]	[-]	[-]
		(0,0848)	(0,0713)	(0,0000)	(-)	(-)
Jahresschritte zum 1. Juli						
Dreimonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)	0,0084	-0,1622	0,0776	0,5000	{-}
		{0,0034}	{0,0640}	{0,0094}	{-}	{-}
		[2,4521]	[-2,5365]	[8,2883]	[-]	[-]
		(0,0071)	(0,0056)	(0,0000)	(-)	(-)
Sechsmonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	{-}	{-}	{-}	{-}	{-}
		[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
		(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
Einjähriger T-Bill-Satz	DOTHAN (1978)	0,0000	0,0000	0,2499	1,0000	{-}
		{-}	{-}	{0,0339}	{-}	{-}
		[-]	[-]	[7,3699]	[-]	[-]
		(-)	(-)	(0,0000)	(-)	(-)

<sup>a</sup>Kein Modell mit weiß rauschenden und normalverteilten adjustierten Residuen.

Tabelle 5.21: Detaillierte Zinsmodellschätzungen für die USA

Land, Schrittgröße und Zinssatz	Modell	Dickey-Fuller-Test			KPSS-Test		Ahamadas Ttest
		$\Phi_1$	$\tau_2$	$\tau_1$	$I_4$	$I_{12}$	
<b>DEUTSCHLAND</b>							
Jahresschritte zum 1. Januar							
Dreimonatiger Geldmarktsatz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-	-
Sechsmonatige Zinsstruktur <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-	-
Einjährige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	5,2961 <sup>c</sup>	-3,2442 <sup>c</sup>	-3,3099 <sup>b</sup>	0,3370	0,4714 <sup>c</sup>	1,0172
Jahresschritte zum 1. Juli							
Dreimonatiger Geldmarktsatz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-	-
Sechsmonatige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	4,7073 <sup>d</sup>	-3,0293 <sup>c</sup>	-3,1207 <sup>b</sup>	0,3034	0,3658 <sup>d</sup>	0,9500
Einjährige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	6,5424 <sup>c</sup>	-3,5904 <sup>b</sup>	-3,6692 <sup>b</sup>	0,2503	0,3737 <sup>d</sup>	0,8782
<b>USA</b>							
Jahresschritte zum 1. Januar							
Dreimonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-	-
Sechsmonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-	-
Einjähriger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)	8,8644 <sup>b</sup>	-4,1912 <sup>b</sup>	-4,2590 <sup>b</sup>	0,3711 <sup>d</sup>	0,3259	0,7574
Jahresschritte zum 1. Juli							
Dreimonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)	8,4174 <sup>b</sup>	-4,0418 <sup>b</sup>	-4,0924 <sup>b</sup>	0,4031 <sup>d</sup>	0,3950 <sup>d</sup>	0,9374
Sechsmonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-	-
Einjähriger T-Bill-Satz	DO THAN (1978)	10,4200 <sup>b</sup>	-4,5421 <sup>b</sup>	-4,6130 <sup>b</sup>	0,5323 <sup>c</sup>	0,4763 <sup>c</sup>	0,9271

<sup>a</sup>Kein Modell mit weiß rauschenden und normalverteilten adjustierten Residuen.

<sup>b</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 1%.

<sup>c</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 5%.

<sup>d</sup>Signifikant bei einem Konfidenzniveau von 10%.

Tabelle 5.22: Stationaritätstests für die adjustierten Residuen der Zinsmodelle

Land, Schrittgröße und Zinssatz	Modell	Ljung-Box-Test		Jarque-Bera-Test		
		Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert	Varianz
<b>DEUTSCHLAND</b>						
Jahresschritte zum 1. Januar						
Dreimonatiger Geldmarktsatz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Dreimonatiger Geldmarktsatz	COX ET AL. (1985)	18,6115	0,4820	12,3945	0,0020	1,0503
Sechsmontatige Zinsstruktur <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Einjährige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	18,5039	0,4890	4,3049	0,1162	1,1142
Jahresschritte zum 1. Juli						
Dreimonatiger Geldmarktsatz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Sechsmontatige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	17,6890	0,5433	0,3130	0,8551	1,1278
Einjährige Zinsstruktur	COX ET AL. (1985)	19,5422	0,4226	0,1604	0,9229	1,0732
<b>USA</b>						
Jahresschritte zum 1. Januar						
Dreimonatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Sechsmontatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Einjähriger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)	19,9226	0,3993	0,8780	0,6447	1,0609
Jahresschritte zum 1. Juli						
Dreimonatiger T-Bill-Satz	COX ET AL. (1985)	13,9835	0,7847	5,6436	0,0595	1,1280
Sechsmontatiger T-Bill-Satz <sup>a</sup>	-	-	-	-	-	-
Einjähriger T-Bill-Satz	DO THAN (1978)	10,7069	0,8714	5,1658	0,0756	1,1220

<sup>a</sup>Kein Modell mit weiß rauschenden und normalverteilten adjustierten Residuen.

Tabelle 5.23: Ljung-Box-Test, Jarque-Bera-Test und Varianzberechnung für die adjustierten Residuen der Zinsmodelle

## 5.3 Ergebnisse der Abhängigkeitsanalysen

Nachdem die Modelle für die Entwicklung der Sterblichkeitsindizes, der Aktienindizes und der Kassazinsen geschätzt sind, können ihre Residuen auf multivariate Normalverteilung getestet und ihre Korrelation bestimmt werden.

Es werden Lags von minus fünf bis plus fünf untersucht, wobei ein positives bzw. negatives Lag impliziert, dass die Sterblichkeitsresiduen aus einem Jahr vor bzw. nach dem der Aktien- und Zinsresiduen stammen. Beim Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktien bzw. zwischen Sterblichkeit und Zinsen zum Stichtag 1. Januar sind die Lag-Angaben der Messungen dabei gedanklich um ein halbes Jahr zu reduzieren.<sup>58</sup>

Die verwendeten Residuenzeitreihen stammen aus den in Kapitel 5.2 durchgeführten Modellschätzungen. Für die Sterblichkeit wurde dort das Modell von LEE & CARTER (1992) in der Erweiterung von BROUHNS ET AL. (2002) geschätzt. Die verwendeten Zeiträume sind in Tabelle 5.1, die Schätzergebnisse in Tabelle 5.6 aufgeführt. Für die Aktienindizes wurden Zeitreihenanalysen durchgeführt; die Schätzergebnisse der resultierenden ARIMA(0,1,0)-Modelle finden sich in Tabelle 5.11. Die Zinsmodelle wurden nach dem Ansatz von CHAN ET AL. (1992) geschätzt und unter Berücksichtigung ihrer Residuenverteilung für die Abhängigkeitsanalysen ausgewählt. Die verwendeten Modelle – in den meisten Fällen das Modell von COX ET AL. (1985) – sind in Tabellen 5.20 und 5.21 dargestellt.

### 5.3.1 Vorgehen

Die Analysen werden zunächst für den längstmöglichen Zeitraum durchgeführt und dann für alle Subzeiträume von mindestens 20 Jahren wiederholt. Die Sterblichkeits-, Aktien- und Zinsmodelle werden dazu nicht neu geschätzt; statt dessen werden Teile der für den jeweils längstmöglichen Zeitraum ermittelten Residuenzeitreihe verwendet.

Zur Überprüfung der Normalverteilungshypothese wird Test von MARDIA (1985) auf jeweils ein Paar von Sterblichkeits- und Aktien- bzw. Zinsresiduenzeitreihen angewandt. Er ist in „R“ in der Funktion „mardia“ hinterlegt. Der Test verwendet zwei, auf der multivariaten Schiefe bzw. Kurtosis basierende Teststatistiken. Diese sind unter der Nullhypothese einer multivariaten Normalverteilung Chi-Quadrat- bzw. standardnormalverteilt. Sofern die Nullhypothese für mindestens eine der beiden Teststatistiken abgelehnt wird, können die untersuchten Zeitreihen nicht als multivariat normalverteilt angesehen werden und damit

<sup>58</sup>Dies liegt daran, dass der Sterblichkeitsindex zunächst über den Zeitraum eines Kalenderjahrs geschätzt wird und der den Zeitreihenmodellen zugrunde gelegte Schätzwert daher näherungsweise dem Zeitpunkt 1. Juli entsprechen sollte. Dieser Stichtag liegt ein halbes Jahr nach dem Jahreswechsel, der als Stichtag für die Aktienmodelle und für die Zinsmodelle mit Stichtag 1. Januar dient.

nicht zwingend von ihrer Unkorreliertheit auf ihre Unabhängigkeit geschlossen werden. Bei multivariat normalverteilten Zufallsvariablen ist dies möglich (CHHETRY ET AL., 1986).

Als Korrelation wird Pearsons Korrelationskoeffizient bestimmt und mit Hilfe eines t-Tests auf Signifikanz untersucht (vgl. BRONSTEIN ET AL., 2008, S. 845). Beides erfolgt mit Hilfe der Funktion „cor.test“ in „R“. Der t-Test ist nur aussagekräftig, wenn die Residuen annähernd bivariat normalverteilt sind. Er wird daher nur auf diejenigen Zeitreihenpaare angewandt, bei denen Mardias Test nicht abgelehnt wird.

Die Beurteilung der Signifikanz muss vor dem Hintergrund der Hypothesen aus Kapitel 4.1 erfolgen. Aufgrund des Vorgehens ist dabei nur ein Teil der Hypothesen relevant.

Zum einen sollten nur Abhängigkeiten von Langlebigkeitsrisiken in Betracht gezogen werden. Bei kurzfristigen Sterblichkeitsrisiken hätten die Zeitreihenmodelle vorübergehende Sprünge in der Sterblichkeit erlauben und deutlich längere Zeiträume verwendet werden sollen.

Zum anderen sollten, da die Zeitreihen- und Korrelationsanalysen auf Sterblichkeitsdaten statt auf Preisen von Sterblichkeitsderivaten basieren, nur Abhängigkeiten beachtet werden, die nicht erst durch den Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos entstehen. Folglich sind bei den empirischen Untersuchungen neben eventuellen Abhängigkeiten der Diffusionsprozesse nur Abhängigkeiten der Marktpreise der Finanzmarktrisiken von der Sterblichkeit von Bedeutung.

Die relevanten Hypothesen lassen sich in Abhängigkeit des Lags wie folgt zusammenfassen (vgl. auch Tabellen 4.1 und 4.2).

Bei einer *negativen Zeitverzögerung*, bei der die Sterblichkeit definitionsgemäß auf den oder nach dem Finanzmarkt reagiert, sollte die Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen bzw. Zinsen langfristig eher negativ, kurzfristig jedoch positiv sein. Für den kurzfristigen Effekt sprechen der beispielsweise von RUHM (2000), NEUMAYER (2004) und GERDTHAM & RUHM (2006) nachgewiesene, kurzfristig positive Zusammenhang zwischen Wirtschaftslage und Sterblichkeit, für den langfristigen Effekt hingegen z. B. die Untersuchungen von BRENNER (2005), nach denen niedrige Arbeitslosigkeit und hohes Wirtschaftswachstum die Sterblichkeit einer Bevölkerung mittel- bis langfristig reduzieren.

*Ohne bzw. bei nur sehr geringer Zeitverzögerung* kann eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt durch eine sterblichkeitsinduzierte Verschiebung der Altersstruktur entstehen. Die Argumentation geht auf die Lebenszyklustheorie des Sparens von MODIGLIANI & BRUMBERG (1954) bzw. auf die der Risikoaversität (vgl. BAKSHI & CHEN, 1994) zurück, nach denen ältere Menschen ihr Vermögen entsparen bzw. risikoaverser investieren als jüngere Menschen. Eine Verschiebung der Altersstruktur sollte daher ceteris paribus eine Verschiebung zwischen Sparern und Entsparern und zwischen Aktien und An-

leihen bewirken.<sup>59</sup> Der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktien sollte durch beide Effekte positiv, der zwischen Sterblichkeit und Zinsen durch ersteren negativ und durch letzteren positiv sein. Bei Zinsen bleibt der Gesamteffekt also unklar.

Bei einer *positiven Zeitverzögerung*, bei der der Finanzmarkt auf die oder nach der Sterblichkeit reagiert, kann eine Abhängigkeit durch eine Anpassung der Lebenserwartung nach Zeiten unerwartet niedriger (hoher) Sterblichkeit entstehen. Auch hier sind zwei Effekte zu unterscheiden. Zum einen sollte eine vergleichsweise hohe (niedrige) Lebenserwartung *ceteris paribus* den Vorsorgebedarf der arbeitenden Bevölkerung sowie die Notwendigkeit einer langsamen Vermögensdekumulation der Rentner erhöhen (verringern) und so die Gesamtersparnis steigern (reduzieren). Zum anderen sollte sie den Investitionshorizont verlängern (verkürzen), so dass die individuelle Risikoaversion niedriger (höher) ausfallen sollte als erwartet und sich die Nachfrage unerwartet von Anleihen zu Aktien (Aktien zu Anleihen) verschieben sollte.<sup>60</sup> Der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktien sollte durch beide Effekte negativ, der zwischen Sterblichkeit und Zinsen im ersten Fall positiv und im zweiten negativ sein. Der Gesamteffekt bei Zinsen bleibt damit unklar.

Vor dem Hintergrund dieser Hypothesen werden die zuvor beschriebenen Abhängigkeitsanalysen bei Konfidenzniveaus von 5% und 10% durchgeführt. Dabei werden nicht nur das Vorzeichen und die Signifikanz des Zusammenhangs, sondern auch seine Stabilität im Zeitablauf und Übereinstimmungen oder Unterschiede zwischen verschiedenen Ländern, Geschlechterspezifikationen und Aktienindizes bzw. Zinssätzen beachtet.

In allen Fällen wird die Nullhypothese des t-Tests so gewählt, dass sie der Hypothese zum Zusammenhang entgegengesetzt ist. Bei einer vermuteten positiven (negativen) Abhängigkeit wird mit einem rechtsseitigen (linksseitigen) t-Test also auf eine nicht positive (nicht negative) Korrelation getestet. Gibt es keine gerichtete Hypothese zum Zusammenhang, wird mit einem zweiseitigen Test auf eine Korrelation von null getestet. Immer wenn die Nullhypothese des t-Tests abgelehnt wird, kann man von einer der Vermutung entsprechenden, signifikanten Korrelation ausgehen.

Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen *Sterblichkeit und Aktien* werden daher folgende t-Tests durchgeführt (vgl. Abbildung 5.11):

**Negative Zeitverzögerung.** Gemäß den Hypothesen sollte der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktienkursen bei einer negativen Zeitverzögerung kurzfristig positiv,

<sup>59</sup>Die Argumentation setzt jedoch voraus, dass ältere Menschen tatsächlich entsparen bzw. den Aktienanteil ihres Portfolios reduzieren. Verschiedene empirische Untersuchungen bezweifeln dies (vgl. Kapitel 4.1.1.1, S. 55 ff., und Kapitel 4.1.1.2, S. 63 ff.).

<sup>60</sup>Das positive Lag kommt hier dadurch zustande, dass Individuen oder Lebensversicherer erst auf die Abweichungen der Sterblichkeit reagieren und Lebenserwartung sowie Investitionen anpassen müssen.

mittel- bis langfristig jedoch negativ sein. Für Lags von minus fünf bis minus drei wird daher ein linksseitiger, für Lags von minus zwei bis null ein rechtsseitiger t-Test durchgeführt. Das Lag von null wird untersucht, da die Lag-Angaben der Messungen aufgrund des gewählten Vorgehens gedanklich um ein halbes Jahr zu reduzieren sind, also auch hier de facto eine leicht negative Zeitverzögerung vorliegt.

**Keine oder sehr geringe Zeitverzögerung.** Der nicht zeitverzögerte Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktienkursen sollte den Hypothesen zufolge positiv sein. Daher wird ein rechtsseitiger t-Test durchgeführt. Da die Lag-Angaben der Messungen gedanklich um ein halbes Jahr zu reduzieren sind und nach der zugrunde liegenden Hypothese der Finanzmarkt durch die Sterblichkeit beeinflusst wird, also nicht vor ihr agieren kann, muss ein Lag von eins statt von null betrachtet werden.

**Positive Zeitverzögerung.** Bei einer positiven Zeitverzögerung sollte der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktienkursen negativ sein. Daher wird für Lags von eins bis fünf ein linksseitiger Test durchgeführt. Das Lag von eins wird also zweimal untersucht.

Der Zusammenhang zwischen den *Sterblichkeit und Zinsen* hingegen wird mit folgenden t-Tests auf Signifikanz untersucht (vgl. Abbildung 5.11):

**Negative Zeitverzögerung.** Wie der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktien sollte auch derjenige zwischen Sterblichkeit und Zinsen bei einer negativen Zeitverzögerung kurzfristig positiv, mittel- bis langfristig jedoch negativ sein. Für Lags von minus fünf bis minus drei wird daher ein linksseitiger, für Lags von minus zwei und minus eins ein rechtsseitiger t-Test durchgeführt. Beim Zinsmodellstichtag des 1. Januar wird zusätzlich ein Lag von null mit einem rechtsseitigen Test untersucht, da die Lag-Angaben der Messungen hier gedanklich um ein halbes Jahr zu reduzieren sind und demnach auch hier de facto eine leicht negative Zeitverzögerung vorliegt.

**Keine oder sehr geringe Zeitverzögerung.** Zum nicht zeitverzögerten Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Zinsen ist aufgrund gegenläufiger Effekte keine gerichtete Hypothese möglich. Daher muss ein zweiseitiger t-Test durchgeführt werden.

Bei der Wahl des Lags muss auch hier beachtet werden, dass beim Zinsmodellstichtag des 1. Januar die Lag-Angaben der Messungen gedanklich um ein halbes Jahr zu reduzieren sind. Da nach der zugrunde liegenden Hypothese der Finanzmarkt durch die Sterblichkeit beeinflusst wird und deshalb nicht vor ihr agieren kann, muss daher beim Stichtag des 1. Januar ein Lag von eins statt von null betrachtet werden. Beim Stichtag des 1. Juli hingegen wird ein Lag von null untersucht.

**Positive Zeitverzögerung.** Auch bei einer positiven Zeitverzögerung ist keine gerichtete Hypothese möglich, sodass auch hier der zweiseitige t-Test verwendet werden muss. Er wird bei beiden Stichtagen für Lags von eins bis fünf durchgeführt.

### Korrelationshypothese

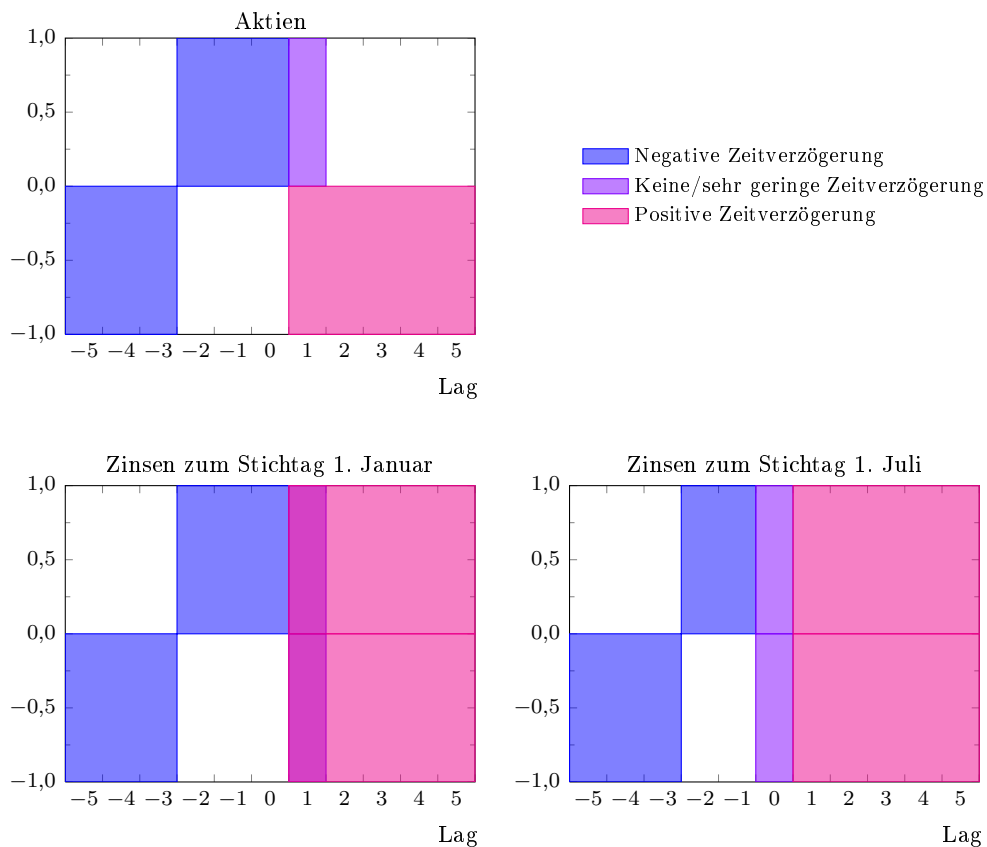


Abbildung 5.11: Korrelationshypothesen zwischen Sterblichkeit und Aktien bzw. Zinsen nach Zinsmodellstichtagen und Lags

### 5.3.2 Ergebnisse nach Lags

Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt finden sich bei beiden Ländern und bei der Verwendung von sowohl Aktien- als auch Zinsdaten (für die Ergebnisse von Mardias Test vgl. Kapitel 5.3.3 und 5.3.4). In allen Fällen bestehen sie bei nur wenigen



und betragsmäßig eher niedrigen Lags. Genauer lassen sich die untersuchten Lags in drei Gruppen einteilen.

Bei der *ersten Gruppe* sind die für das jeweilige Land und die jeweilige Finanzmarktgröße gemessenen Korrelationen bei allen Geschlechterspezifikationen sowie allen Aktienindizes bzw. Zinssätzen für keinen oder nur sehr wenige der analysierten Zeiträume signifikant. Schon auf den ersten Blick zeigt sich hier eine Unabhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt. Sowohl in Deutschland als auch in den USA und sowohl bei Aktien als auch bei Zinsen trifft dies auf die Mehrheit der Lags zu.

Bei der *zweiten Gruppe* verwirft der entsprechend der Hypothesen ausgewählte t-Test seine Nullhypothese zwar bei einzelnen oder mehreren Zeitreihenpaaren für einen teils beachtlichen Teil der analysierten Zeiträume. Allerdings ist der Zusammenhang bei diesen Lags entweder durch bestimmte Start- oder Endjahre verursacht oder er besteht nur für einen sehr kleinen Teil der Zeitreihenpaare oder Zeiträume. Hier kann man daher nur schwer von einer konsistenten und dauerhaft signifikanten Abhängigkeit sprechen und sollte vielmehr von einer Unabhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt ausgehen. In den USA tritt dieser Fall vor allem bei den Sterblichkeits- und Aktienresiduen (Lags minus fünf, minus eins, null und eins), in Deutschland bei den Sterblichkeits- und Zinsresiduen auf (Lags zwei und drei beim Stichtag 1. Juli).

Bei der *dritten Gruppe* sind die für das jeweilige Land und die jeweilige Finanzmarktgröße gemessenen Korrelationen bei allen Geschlechterspezifikationen für die meisten der untersuchten Aktienindizes bzw. Zinssätze sowie für einen großen Teil der untersuchten Zeiträume signifikant. Die Sterblichkeits- und Aktien- bzw. Zinsresiduen sollten daher in diesen Fällen als abhängig gelten. Dies trifft bei Aktien auf das Lag von zwei und bei Zinsen auf die Lags von minus zwei, minus eins, eins und drei zu, wenngleich nicht immer auf beide Zinsmodellstichtage und nicht immer auf beide Länder. Das Risiko einer durch einen Trend oder Heteroskedastizität verursachten Scheinregression besteht dabei nicht.<sup>61</sup>

Dass sich signifikante Abhängigkeiten bei nur wenigen und betragsmäßig eher niedrigen Lags finden lassen, ist nicht überraschend.

Bei *stark negativer Zeitverzögerung* wird ein Zusammenhang vor allem durch den langfristigen, negativen Einfluss der Wirtschaftslage auf die Sterblichkeit vermutet. Wenn eine

---

<sup>61</sup>Zum einen beruhen die Abhängigkeitsanalysen auf Modellresiduen, die sich in verschiedenen Tests als stationär erweisen. Zum anderen legt gerade die Tatsache, dass die Korrelationen nur bei wenigen Lags signifikant sind, nahe, dass die Signifikanz nicht durch einen Trend oder Heteroskedastizität verursacht sein kann; denn letztere sollten auch bei anderen Lags bestehen bleiben und zu einer Ablehnung des jeweiligen t-Tests führen.

unerwartet gute (schlechte) Wirtschaftsentwicklung die Sterblichkeitsresiduen jedoch nicht nur einmalig, sondern über mehrere Jahre verringert (erhöht), könnte dies nur schwer bei den durchgeführten Abhängigkeitsanalysen entdeckt werden. Auch könnte sich der Einfluss der Wirtschaftsentwicklung auf die Sterblichkeit erst nach einem Zeitraum von mehr als fünf Jahren äußern.

*Ohne bzw. bei nur sehr geringer Zeitverzögerung* könnte eine sterblichkeitsinduzierte Verschiebung der Altersstruktur eine Abhängigkeit verursachen. Nach der Lebenszyklustheorie des Sparens von MODIGLIANI & BRUMBERG (1954) bzw. nach der Lebenszyklustheorie der Risikoaversität (vgl. BAKSHI & CHEN, 1994) sollten nämlich ältere Menschen ihr Vermögen entsparen bzw. risikoaverser investieren als jüngere Menschen. Diese Argumentation setzt jedoch voraus, dass ältere Menschen dies tatsächlich tun und den Aktienanteil ihres Portfolios reduzieren. Verschiedene empirische Untersuchungen ziehen genau dies in Zweifel (vgl. Kapitel 4.1.1, S. 55 ff. und S. 63 ff.). Bei Zinsen wirken zudem der Effekt der Ersparnis und derjenige der Risikoaversität in entgegengesetzte Richtungen.

Bei *positiver Zeitverzögerung* kann eine Abhängigkeit durch Nachfrageänderungen am Finanzmarkt oder durch Änderungen der Marktpreise des Finanzmarktrisikos nach unerwarteten Sterblichkeitsentwicklungen entstehen. Die Anpassung der Finanzmarktpreise sollte einmalig und zeitnah nach Bekanntwerden der unerwarteten Sterblichkeitsentwicklung bzw. bei Änderung der Marktpreise des Risikos erfolgen. Hier sind Abhängigkeiten daher nur für einzelne Lags zu erwarten. Bei Zinsen könnten außerdem gegenläufige Effekte einander aufheben.

Im Einklang mit diesen Überlegungen finden sich Abhängigkeiten nur bei leicht negativen sowie bei einzelnen positiven Lags.

### 5.3.3 Ergebnisse für Sterblichkeit und Aktien

Bei fast allen untersuchten Aktienindizes, Sterblichkeitsindizes und Lags kann Mardias Test die Nullhypothese einer bivariaten Normalverteilung der Modellresiduen bei einem Konfidenzniveau von 5% und meist sogar von deutlich über 10% nicht ablehnen. Dies gilt sowohl für den jeweils längstmöglichen Zeitraum als auch – in etwas geringerem Maße – für Subzeiträume von mindestens 20 Jahren (vgl. Tabellen A.1 bzw. A.2 in Anhang A.1).

Im Allgemeinen sind daher der t-Test anwendbar und nicht nur der Schluss von Korreliertheit auf Abhängigkeit, sondern auch derjenige von Unkorreliertheit auf Unabhängigkeit möglich. Zur Untersuchung der Signifikanz werden die in Kapitel 5.3.1 beschriebenen und entsprechend der Hypothesen ausgewählten t-Tests durchgeführt. Eine detailliertere Dis-

kussion und tabellarische Zusammenfassung der Ergebnisse findet sich in Anhang A.1.

Den Hypothesen entsprechende und dauerhaft signifikante Korrelationen werden nur bei einem Lag von zwei, also einer Zeitverzögerung von eineinhalb Jahren, gemessen. In den USA trifft dies bei allen Sterblichkeitsindizes und den meisten Aktienindizes auf einen großen Teil der analysierten Zeiträume zu (vgl. beispielhaft Abbildung 5.12), in Deutschland bestehen Einschränkungen bei jüngeren Endjahren (vgl. Anhang A.1.1 und beispielhaft Abbildung 5.13).

Für den jeweils längstmöglichen Zeitraum liegen die bei einem Konfidenzniveau von 10% bzw. 5% signifikanten Korrelationen in den USA zwischen  $-0,2146$  bzw.  $-0,2792$  und  $-0,4035$  und in Deutschland zwischen  $-0,2584$  bzw.  $-0,2767$  und  $-0,2860$ . Bei kürzeren Zeiträumen weisen sie eine höhere Streuung auf und sind tendenziell stärker negativ.

Die gefundene, negative Abhängigkeit passt zu den Hypothesen, dass eine Anpassung der Lebenserwartung nach Zeiten unerwartet niedriger (hoher) Sterblichkeit die Gesamtersparnis steigere (verringere) und die Risikoaversität aufgrund des längeren (kürzeren) Investmenthorizonts verringere (erhöhe). Insofern deckt sie sich mit den Ergebnissen von LI ET AL. (2007), die mit einem gänzlich anderen Ansatz sowohl modelltheoretisch als auch empirisch einen positiven Effekt von Lebenserwartung auf Ersparnis nachweisen.

Dass die Abhängigkeit bei einer Zeitverzögerung von eineinhalb Jahren und nicht bei anderen t-positiven Lags auftritt, lässt sich wie folgt erklären. Einerseits ist eine baldige Anpassung der Investitionsentscheidung sinnvoll; andererseits müssen die Investoren erst von der unerwarteten Sterblichkeitsentwicklung Kenntnis nehmen und ihre Investitionen anpassen. Über entsprechende Informationen sollten Lebensversicherer nach Ende eines jeden Kalenderjahres verfügen. Der Allgemeinheit sind sie spätestens mit der Veröffentlichung von Sterbetafeln zugänglich. Dies kann zwar länger als ein Jahr dauern, doch veröffentlichen die nationalen Statistikämter bereits nach maximal 15 Monaten weniger detaillierte Statistiken, die eine erste Indikation für die Entwicklung von Sterblichkeit und Lebenserwartung liefern.<sup>62</sup> Beide Überlegungen zusammen passen zu einer Zeitverzögerung von eineinhalb Jahren.

Ein ebenso wichtiges Ergebnis wie die gefundene Abhängigkeit bei einem Lag von zwei ist die Unabhängigkeit der Aktien- und Sterblichkeitsresiduen bei nicht positiven Lags.<sup>63</sup>

<sup>62</sup>In Deutschland gehören dazu beispielsweise die Sterberate der Gesamtbevölkerung und die verbleibende, geschlechtsspezifische Lebenserwartung einzelner Altersgruppen, die das statistische Bundesamt auf seiner Website zur Verfügung stellt. In den USA veröffentlicht das Center for Disease Control vorläufige Todeszahlen, Sterberaten und verbleibende Lebenserwartungen, und zwar jeweils getrennt nach Geschlecht, Altersgruppe und ethnischer Herkunft.

<sup>63</sup>Zwar wird in den USA auch bei Lags von minus fünf, minus eins, null und eins die Nullhypothese des jeweils gewählten t-Tests bei einzelnen oder mehreren Sterblichkeits- und Aktienindizes bei einem durchaus

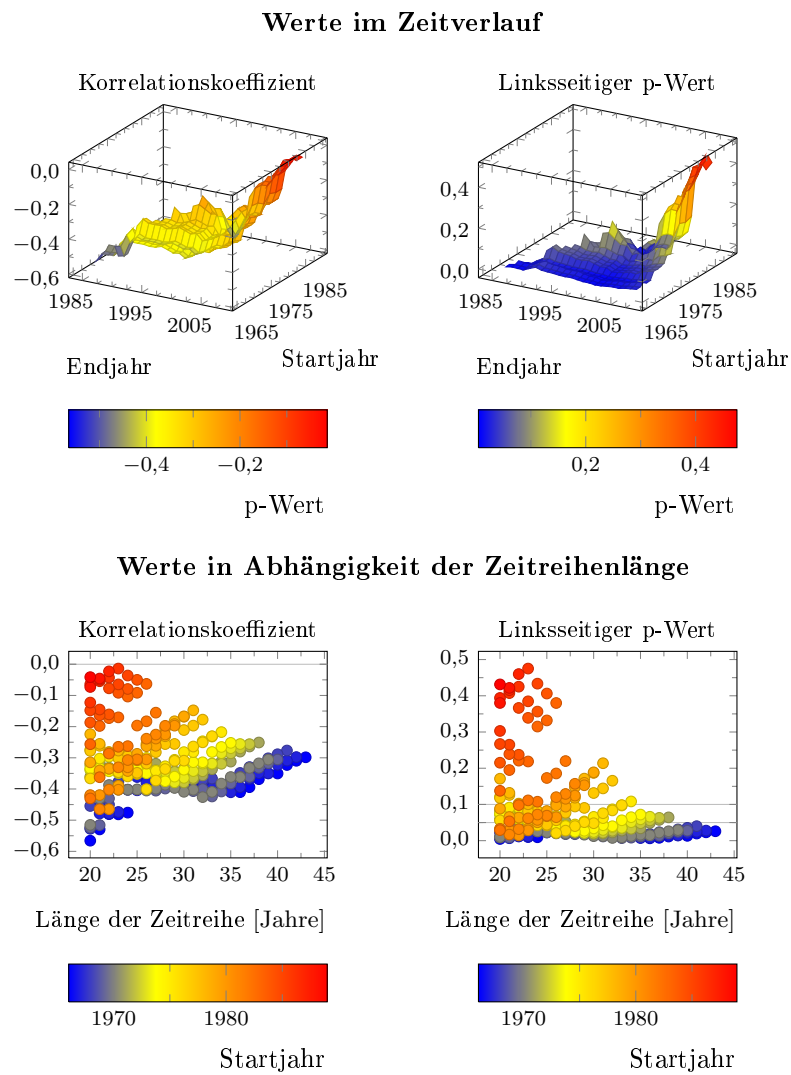


Abbildung 5.12: Korrelationsanalysen für den Kursindex des S&P 500 und die Sterblichkeit von Männern und Frauen bei einem Lag von 2

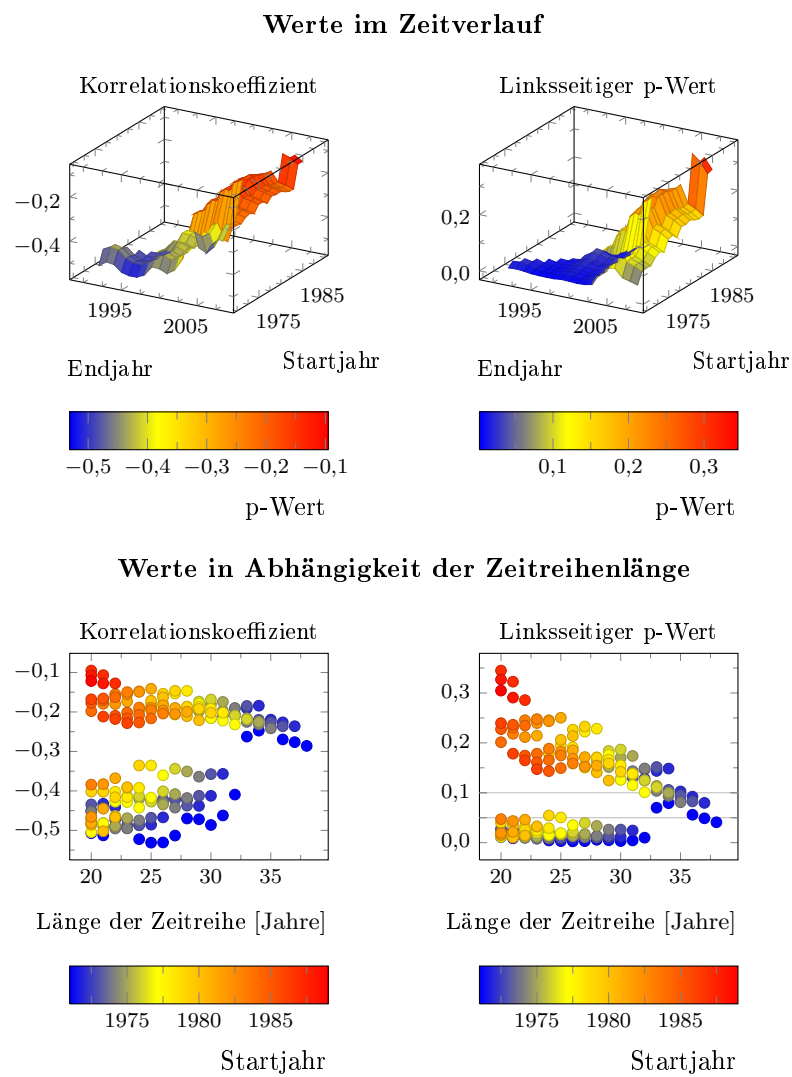


Abbildung 5.13: Korrelationsanalysen für den Kursindex des CDAX und die Sterblichkeit von Männern und Frauen bei einem Lag von 2

Bei einer *stark negativen Zeitverzögerung* kann die fehlgeschlagene Messung eines signifikanten Zusammenhangs ggf. mit einem sehr späten und/oder nur allmählichen Einfluss der Wirtschaftslage auf die Sterblichkeit erklärt werden.

Bei *fehlender oder sehr geringer Zeitverzögerung* deckt sich die gefundene Unabhängigkeit mit den Ergebnissen derjenigen Studien, die den nach der Lebenszyklustheorie des Sparens und der Risikoaversität vermuteten Zusammenhang zwischen Alter und Vermögensdekumulation bzw. Risikoaversität nicht nachweisen können (vgl. Kapitel 4.1.1, S. 55 ff. und S. 63 ff.).

Bei einer nur *leicht negativen Zeitverzögerung* hingegen ist das Fehlen eines signifikanten Zusammenhangs zumindest insofern überraschend, als dass beispielsweise NEUMAYER (2004) und RUHM (2000) für Deutschland bzw. die USA einen kurzfristigen, positiven Zusammenhang zwischen der Wirtschaftsentwicklung und der Sterblichkeit nachweisen. Dass sich dieser Zusammenhang in den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit nicht wiederfindet, könnte an der verwendeten Wirtschaftsgröße liegen.

So basieren die Analysen von RUHM (2000) und NEUMAYER (2004) ebenso wie ähnliche Untersuchungen von GERDTHAM & RUHM (2006) auf der Arbeitslosenquote. Im Gegensatz zu Finanzmarktrenditen handelt es sich dabei um einen Spätindikator der Wirtschaftsentwicklung. Der Tatsache, dass der Finanzmarkt der Wirtschaft und Arbeitslosigkeit vorausseilt, wird in den Analysen zwar durch eine Zeitverzögerung von bis zu zweieinhalb Jahren Rechnung getragen. Allerdings ist fraglich, ob der Aktienmarkt ihre Entwicklung stets mit dem gleichen Zeitabstand vorwegnimmt. Auch spiegelt er, streng genommen, nur die Markterwartung über die zukünftige Wirtschaftsentwicklung wider, von der die spätere, tatsächliche Entwicklung natürlich abweichen kann.

Sowohl variierende Lags zwischen dem Aktienmarkt und der Wirtschafts- bzw. Arbeitslosigkeitsentwicklung als auch Abweichungen der tatsächlichen Wirtschaftsentwicklung von der zuvor erwarteten sind plausible Gründe, warum es bei leicht negativen Lags keine Abhängigkeit zwischen den Sterblichkeits- und Aktienresiduen gibt.

#### 5.3.4 Ergebnisse für Sterblichkeit und Zinsen

Beim Test auf bivariate Normalverteilung der Zins- und Sterblichkeitsresiduen muss zwischen den beiden Ländern und Stichtagen differenziert werden. Bei den deutschen Zins- und Sterblichkeitsmodellen kann Mardias Test seine Nullhypothese bei einem Konfidenzniveau

---

beachtenswerten Teil der analysierten Zeiträume verwerfen. Allerdings scheint der Zusammenhang bei diesen Lags entweder, durch bestimmte Start- oder Endjahre verursacht zu sein, oder er besteht für einen zu kleinen Teil der Indizes und Zeiträume, als dass man von einer konsistenten und dauerhaft signifikanten Abhängigkeit sprechen könnte. Bei allen anderen Lags zeigt sich auf den ersten Blick, dass die gemessenen Korrelationen nicht signifikant sind.

von 5% und meist sogar von deutlich über 10% fast nie ablehnen. Dies trifft sowohl auf den jeweils längstmöglichen Zeitraum als auch auf Subzeiträume von mindestens 20 Jahren zu und gilt in ähnlicher Weise für die amerikanischen Zins- und Sterblichkeitsmodelle beim Zinsmodellstichtag des 1. Januar (vgl. Tabellen A.8 bis A.11 in Anhang A.2)

Im Gegensatz dazu wird bei den amerikanischen Zins- und Sterblichkeitsmodellen und dem Zinsmodellstichtag des 1. Juli die Nullhypothese einer bivariaten Normalverteilung sowohl beim jeweils längstmöglichen Zeitraum als auch bei den analysierten Subzeiträumen (vgl. Tabellen A.10 und A.11) deutlich häufiger abgelehnt. Dies gilt vor allem für den dreimonatigen T-Bill-Satz und dort in besonderem Maße für negative Lags; der einjährige T-Bill-Satz hingegen ist in deutlich geringem Maße und vor allem bei hohen Lags betroffen. Es liegt nahe, dass dies an den Zinsmodellresiduen liegt. Insbesondere beim dreimonatigen T-Bill-Satz lehnt der Jarque-Bera-Test die Normalverteilungshypothese nur bei einem vergleichsweise niedrigen Konfidenzniveau nicht ab (vgl. Tabelle 5.23).

Unter Beachtung der genannten Einschränkungen sind auch bei den Modellresiduen der Zins- und Sterblichkeitsmodelle der t-Test anwendbar und der Schluss von Unkorreliertheit auf Unabhängigkeit möglich. Zur Untersuchung der Signifikanz werden die in Kapitel 5.3.1 beschriebenen und entsprechend der Hypothesen ausgewählten t-Tests durchgeführt. Sie werden nur auf Zeiträume angewandt, für die die Modellresiduen des betrachteten Zeitreihenpaares als bivariat normalverteilt gelten können. Eine detailliertere Diskussion und tabellarische Zusammenfassung der Ergebnisse findet sich in Anhang A.2.

Den Hypothesen entsprechende und dauerhaft signifikante Korrelationen werden bei Lags von minus zwei, minus eins, eins und drei gemessen.

Bei *Lags von minus zwei und minus eins* sind die Korrelationen in Deutschland bei allen Zinssätzen und Sterblichkeitsindizes für den Großteil der untersuchten Zeiträume signifikant positiv (vgl. beispielhaft Abbildungen 5.14, 5.15 und 5.16). Bei einem Lag von minus eins gilt dies für beide Zinsmodellstichtage, bei einem Lag von minus zwei nur für den Stichtag des 1. Juli. Da das Lag der Messung beim Zinsmodellstichtag des 1. Januar gedanklich um ein halbes Jahr zu reduzieren ist, besteht ein signifikant positiver Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Zinsen in Deutschland also bei einer Zeitverzögerung von einem, eineinhalb und zwei Jahren.

Die für den jeweils längstmöglichen Zeitraum gemessenen und signifikanten Korrelationen bewegen sich zwischen 0,2562 und 0,3642, zwischen 0,4852 und 0,5289 bzw. zwischen 0,3867 und 0,4658. Bei kürzeren Zeiträumen weisen sie eine größere Streuung auf. Bei einem Lag von minus eins und dem Zinsmodellstichtag des 1. Juli liegen sie zudem tendenziell höher.

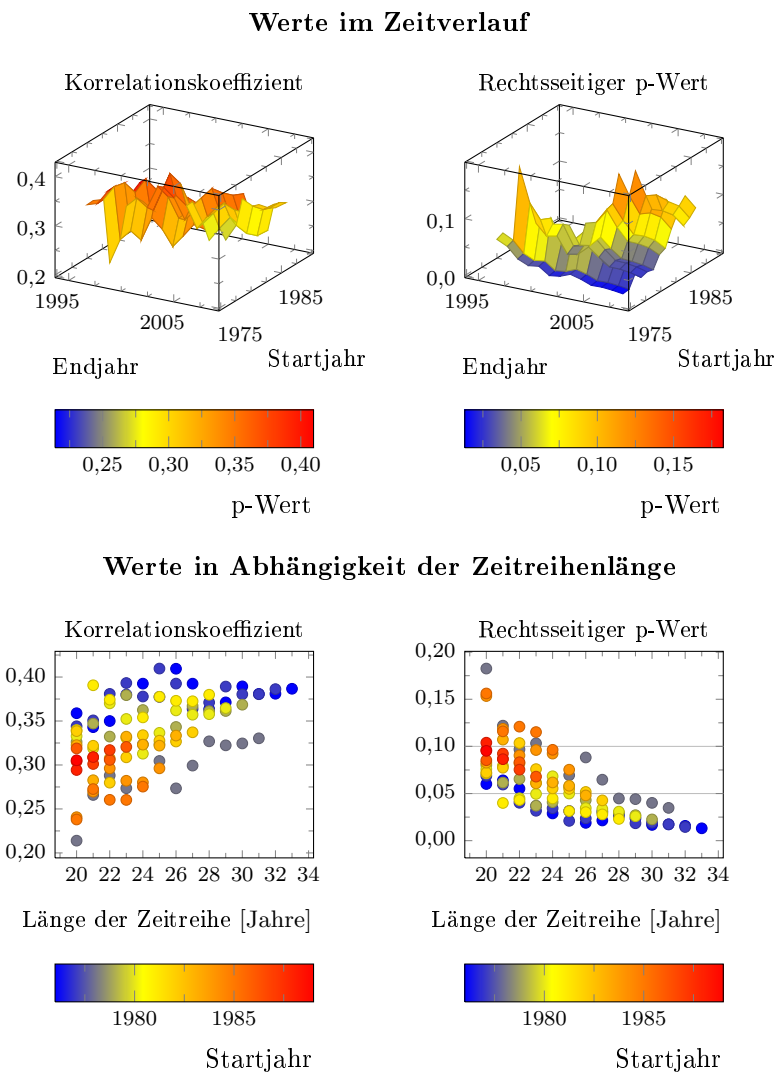


Abbildung 5.14: Korrelationsanalysen für die einjährige Zinsstrukturrendite und die Sterblichkeit von Männern bei einem Lag von -2 und dem Stichtag 1. Juli



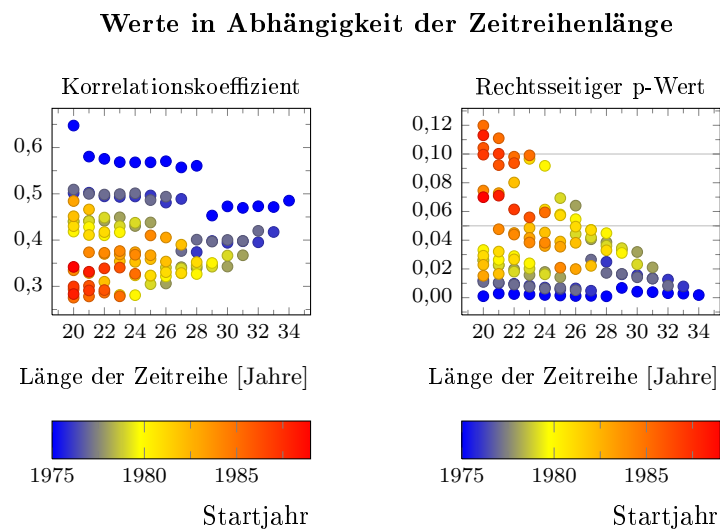
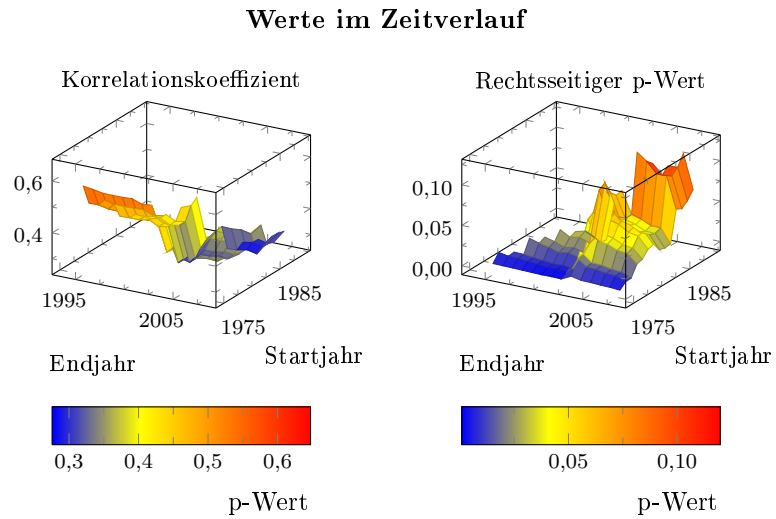
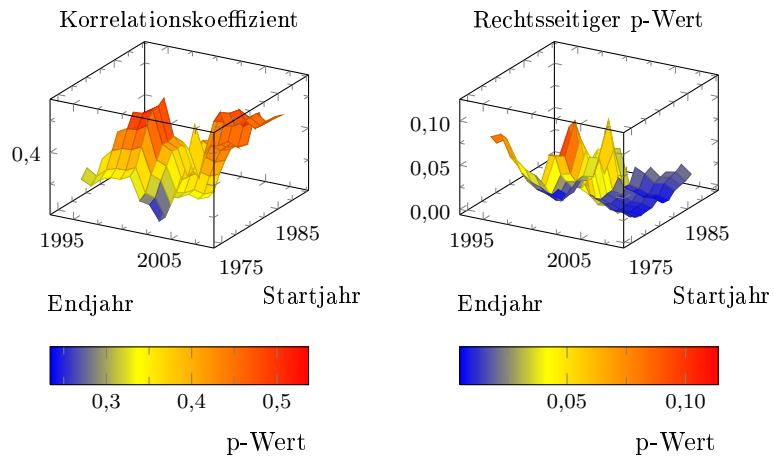


Abbildung 5.15: Korrelationsanalysen für die einjährige Zinsstrukturrendite und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von -1 und dem Stichtag 1. Januar

**Werte im Zeitverlauf**



**Werte in Abhängigkeit der Zeitreihenlänge**

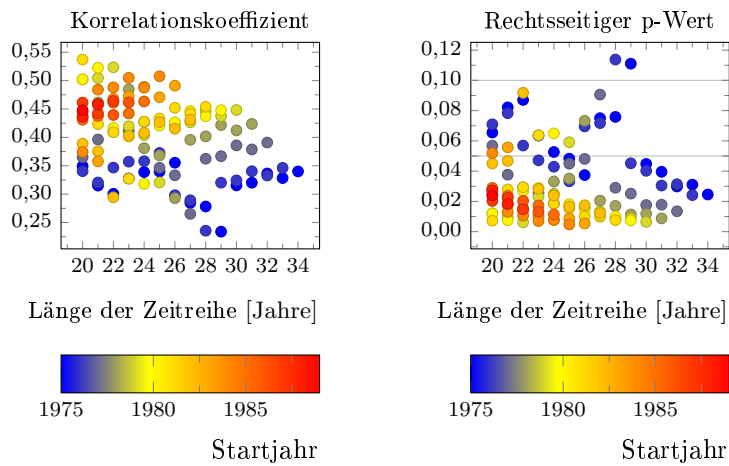


Abbildung 5.16: Korrelationsanalysen für die sechsmonatige Zinsstrukturrendite und die Sterblichkeit von Männern und Frauen bei einem Lag von -1 und dem Stichtag 1. Juli

Die gefundene, positive Abhängigkeit passt zu der Hypothese, dass ein wirtschaftlicher Aufschwung (eine Rezession) die Sterblichkeit zunächst erhöhe (verringere). Insofern deckt sie sich mit den Ergebnissen von RUHM (2000), NEUMAYER (2004) und GERDTHAM & RUHM (2006), die eben dies für die USA, Deutschland bzw. 23 OECD-Länder nachweisen.

Allerdings fällt auf, dass der positive Zusammenhang in dieser Arbeit nur in Deutschland und nur zwischen den Sterblichkeits- und Zinsmodellresiduen besteht. Dass er sich weder für die USA noch für die Sterblichkeits- und Aktienmodellresiduen nachweisen lässt, könnte sowohl an variierenden Lags zwischen den betrachteten Finanzmarktrenditen und der Wirtschafts- bzw. Arbeitslosigkeitsentwicklung als auch an Abweichungen der tatsächlichen Wirtschaftsentwicklung von der zuvor erwarteten liegen. Dies würde implizieren, dass deutsche Zinsrenditen die Wirtschaftsentwicklung besser und mit konstanterem Lag vorwegnehmen als Aktienrenditen oder amerikanische Zinsrenditen.

Bei einem *Lag von eins* werden in USA zwischen allen Zinssätzen und Sterblichkeitsindizes signifikante Korrelationen gemessen. Dies gilt nur für den Zinsmodellstichtag des 1. Juli, dort jedoch sowohl für den jeweils längstmöglichen Zeitraum als auch für einen Großteil der verkürzten Zeiträume (vgl. beispielhaft Abbildung 5.17). Die signifikanten Korrelationen sind stets positiv. Für den längstmöglichen Zeitraum betragen sie zwischen 0,4493 und 0,5450. Bei kürzeren Zeiträumen weisen sie eine größere Streuung auf.

Die gefundene, positive Abhängigkeit passt zu der Hypothese, dass eine Anpassung der Lebenserwartung nach Zeiten unerwartet niedriger (hoher) Sterblichkeit die Gesamtersparnis steigere (verringere) und damit die Zinsrendite reduziere (erhöhe). Insofern deckt sie sich sowohl mit der in dieser Arbeit entdeckten, positiven Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen bei einer Zeitverzögerung von eineinhalb Jahren als auch mit den Ergebnissen von LI ET AL. (2007). Letztere weisen mit einem gänzlich anderen Ansatz sowohl modelltheoretisch als auch empirisch einen positiven Effekt von Lebenserwartung auf Ersparnis nach.

Es fällt jedoch auf, dass der positive Zusammenhang zwischen den Sterblichkeits- und Zinsmodellresiduen nur in den USA besteht. Dass er sich für Deutschland nicht nachweisen lässt, könnte an dem zum Teil noch umlagefinanzierten Rentensystem in Deutschland liegen, das die Notwendigkeit einer der Lebenserwartung angepassten Ersparnis verringert.

Ebenfalls auffällig ist das sehr geringe Lag von nur einem Jahr. Wie bereits diskutiert, ist zwar einerseits eine baldige Anpassung der Investitionsentscheidung sinnvoll. Andererseits müssen die Investoren jedoch erst von der unerwarteten Sterblichkeitsentwicklung Kenntnis nehmen und ihre Investitionen anpassen. Sollte die zugrunde gelegte Hypothese zutreffen, muss dies auf Basis vorläufiger Statistiken von Lebensversicherungen oder nationaler Statis-

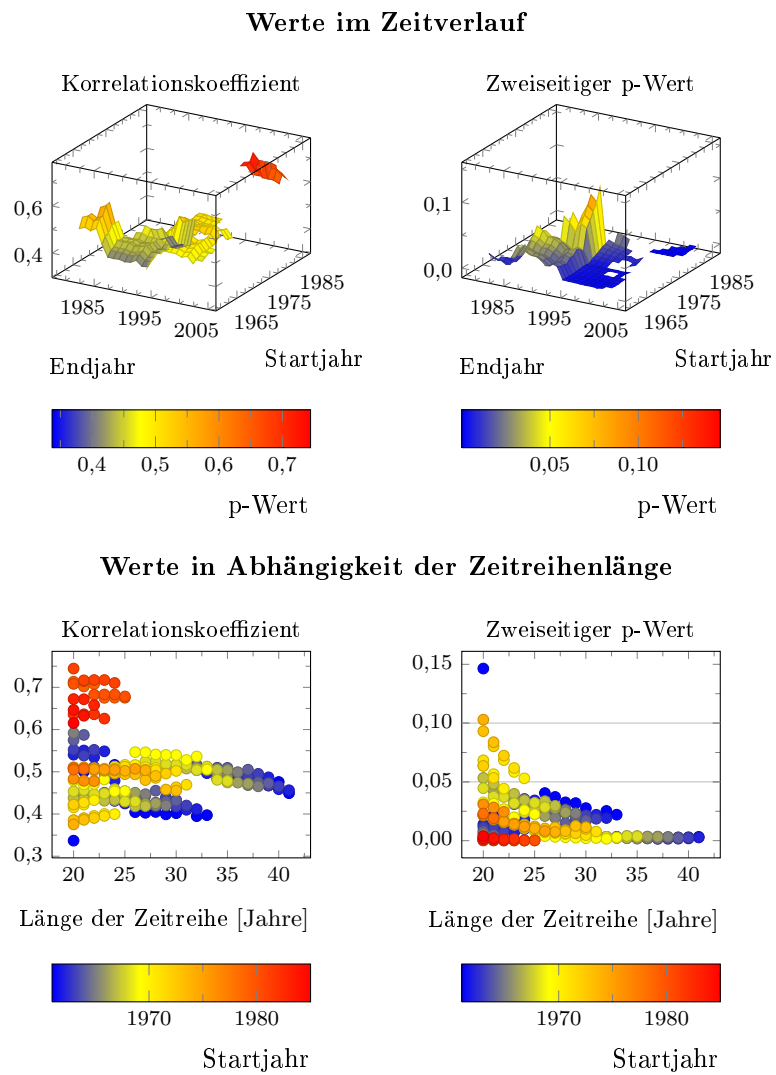


Abbildung 5.17: Korrelationsanalysen für die einjährige T-Bill-Rendite und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von 1 und dem Stichtag 1. Juli

tikämter erfolgen.

Bei einem *Lag von drei* werden in beiden Ländern signifikante Korrelationen gemessen. Dies gilt für alle Sterblichkeitsindizes und einen großen Teil der untersuchten Zeiträume (vgl. beispielhaft Abbildungen 5.18, 5.19 und 5.20), jedoch nur für den Zinsmodellstichtag des 1. Januar. Da das Lag der Messung hier gedanklich um ein halbes Jahr zu reduzieren ist, besteht ein signifikanter Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Zinsen also bei einer Zeitverzögerung von zweieinhalb Jahren.

Die signifikanten Korrelationen sind stets negativ. Für den längstmöglichen Zeitraum und bei einem Konfidenzniveau von 10% betragen sie in Deutschland zwischen  $-0,3177$  und  $-0,4108$ , in den USA  $-0,2670$ . Bei kürzeren Zeiträumen weisen sie eine größere Streuung auf und sind tendenziell stärker negativ.

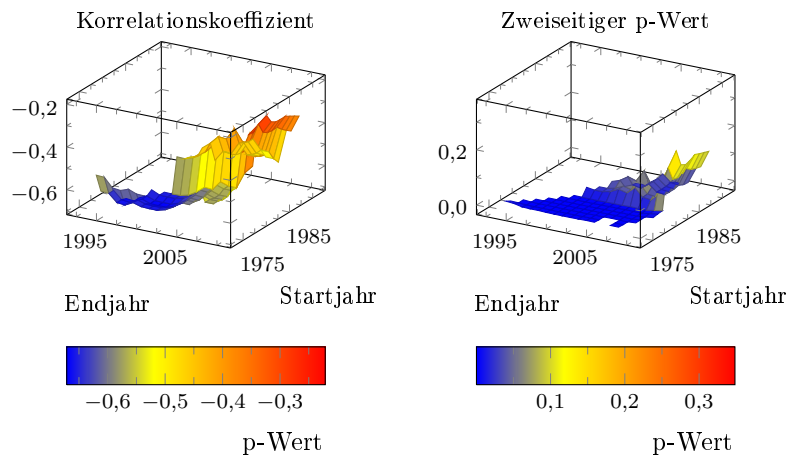
Die gefundene, negative Abhängigkeit passt zu der Hypothese, dass eine Anpassung der Lebenserwartung nach Zeiten unerwartet niedriger (hoher) Sterblichkeit die Risikoaversität aufgrund des längeren (kürzeren) Investmenthorizonts verringere (erhöhe) und so zu einer Umschichtung von Anleihen zu Aktien (Aktien zu Anleihen) sowie einer Steigerung (Reduktion) der Zinsrendite führe. Insofern deckt sie sich mit der in dieser Arbeit entdeckten, positiven Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktienrenditen bei einer Zeitverzögerung von eineinhalb Jahren. Auffällig ist dabei jedoch der Unterschied in der Zeitverzögerung. Er impliziert, dass die durch die veränderte Risikoaversität verursachte Verschiebung zwischen Aktien und Anleihen in den Aktienkursen früher berücksichtigt wird als in den Kassazinsen.

Dass die negative Abhängigkeit bei einer Zeitverzögerung von zweieinhalb Jahren auftritt, passt einerseits zu einer baldigen Anpassung der Investitionsentscheidung und erlaubt den Investoren andererseits, die unerwartete Sterblichkeitsentwicklung zu bemerken und ihre Investitionen entsprechend zu überdenken. Allerdings bestehen sowohl zwischen den Sterblichkeits- und Aktienresiduen als auch zwischen den amerikanischen Sterblichkeits- und Zinsresiduen signifikante Abhängigkeiten bei geringeren positiven Lags. Sollten die Hypothesen zutreffen, könnte dies implizieren, dass Investoren nach unerwarteten Sterblichkeitsentwicklung zunächst vor allem ihre Gesamtersparnis und später stärker die Gewichtung der Asset-Klassen anpassen.

Ein ebenso wichtiges Ergebnis wie die gefundenen Abhängigkeiten ist die Unabhängigkeit der Zins- und Sterblichkeitsresiduen bei den verbleibenden Lags.<sup>64</sup>

<sup>64</sup>Zwar verwirft der jeweils durchgeführte t-Test seine Nullhypothese auch bei einzelnen weiteren Lags und Stichtagen, nämlich bei einem Lag von zwei mit dem Stichtag des 1. Januar in den USA und bei den Lags zwei und drei mit dem Stichtag des 1. Juli in Deutschland. Allerdings scheint der Zusammenhang hier, durch bestimmte Startjahre verursacht zu sein, und besteht außerdem nur für einen vergleichsweise kleinen

Werte im Zeitverlauf



Werte in Abhängigkeit der Zeitreihenlänge

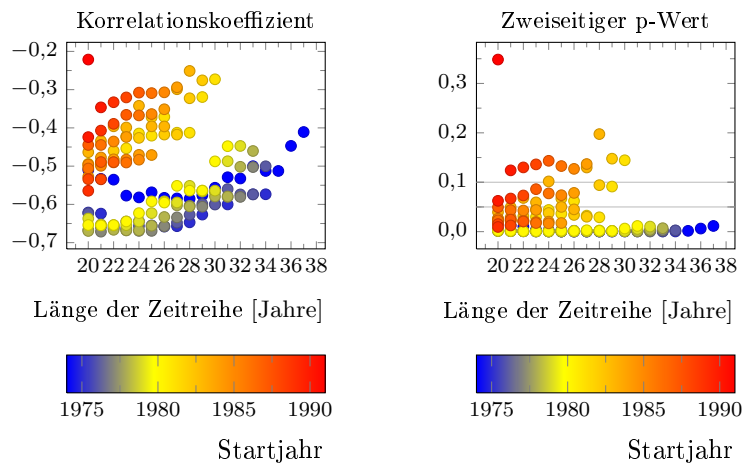


Abbildung 5.18: Korrelationsanalysen für die einjährige Zinsstrukturrendite und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von 3 und dem Stichtag 1. Januar

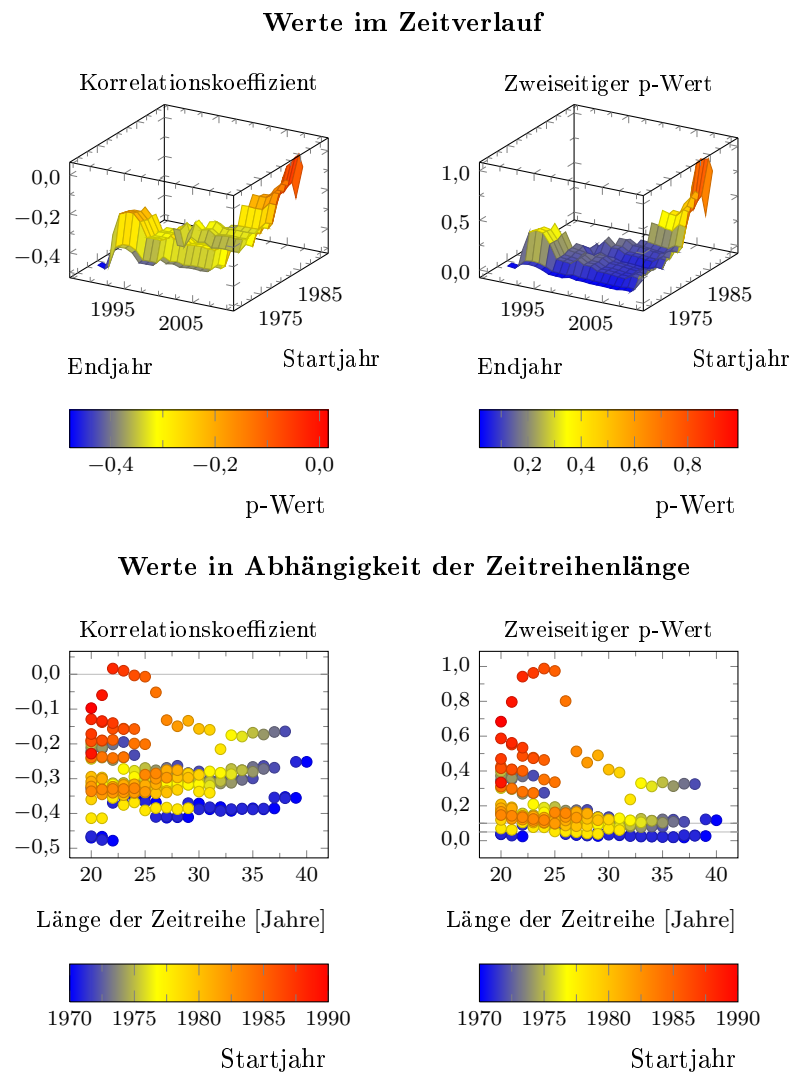


Abbildung 5.19: Korrelationsanalysen für die einjährige T-Bill-Rendite und die Sterblichkeit von Männern bei einem Lag von 3 und dem Stichtag 1. Januar

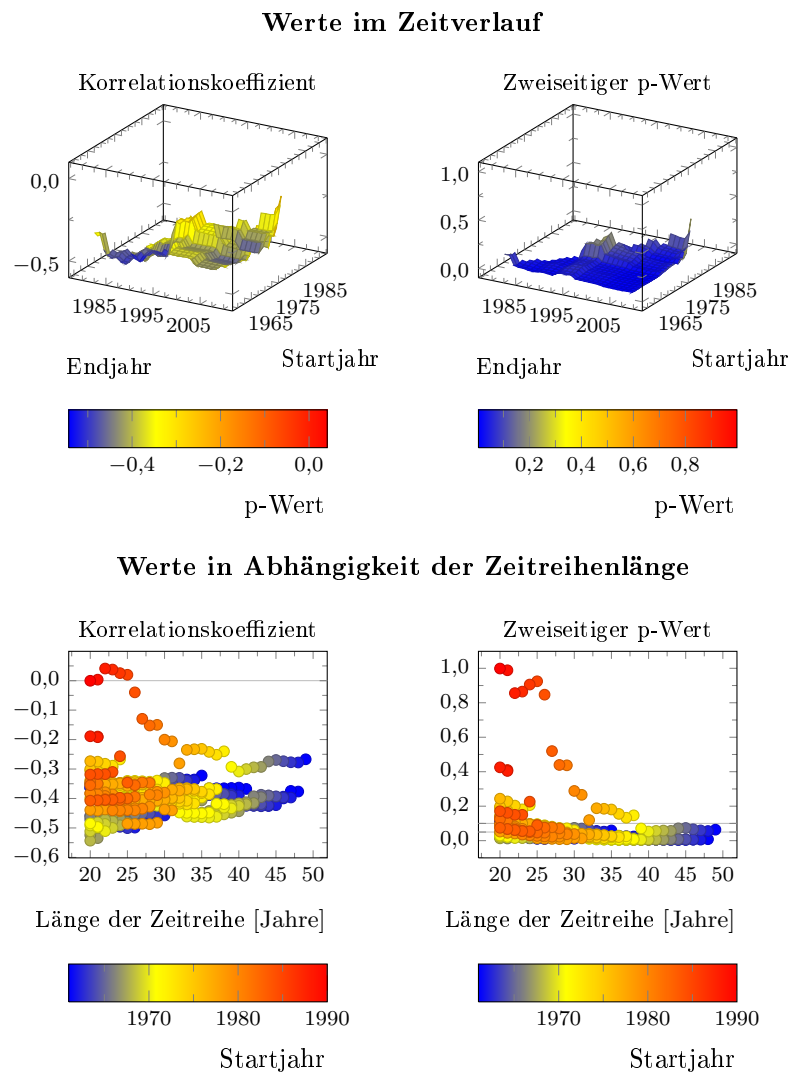


Abbildung 5.20: Korrelationsanalysen für die einjährige T-Bill-Rendite und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von 3 und dem Stichtag 1. Januar



Bei einer *stark negativen Zeitverzögerung* kann das Fehlen eines signifikanten Zusammenhangs ggf. mit einem sehr späten und/oder nur allmählichen Einfluss der Wirtschaftslage auf die Sterblichkeit erklärt werden.

Bei *fehlender oder sehr geringer Zeitverzögerung* deckt sich die gefundene Unabhängigkeit mit den Ergebnissen derjenigen Studien, die den nach der Lebenszyklustheorie des Sparens bzw. der Risikoaversität vermuteten Zusammenhang zwischen Alter und Vermögensdekumulation bzw. Risikoaversität nicht nachweisen können (vgl. Kapitel 4.1.1, S. 55 ff. und S. 63 ff.).

Bei einer nur *leicht negativen Zeitverzögerung* hingegen überrascht die Unabhängigkeit amerikanischer Zins- und Sterblichkeitsresiduen zumindest insofern, als dass die deutschen Modellresiduen eine signifikant positive Abhängigkeit aufweisen und auch beispielsweise NEUMAYER (2004) und RUHM (2000) für Deutschland bzw. die USA einen kurzfristigen, positiven Zusammenhang zwischen der Wirtschaftsentwicklung und der Sterblichkeit nachweisen. Wie bereits diskutiert, könnten die Ursachen der Unabhängigkeit sowohl in variierenden Lags zwischen den amerikanischen Zinsrenditen und der Wirtschafts- bzw. Arbeitslosenentwicklung als auch in Abweichungen der tatsächlichen Wirtschaftsentwicklung von der vom Finanzmarkt erwarteten Entwicklung liegen.

Die empirischen Untersuchungen zeigen deutlich, dass die tatsächliche Sterblichkeit und der Finanzmarkt nicht unabhängig sind. Allerdings erlaubt das gewählte Vorgehen keine Aussage zum Mechanismus der gefundenen Abhängigkeiten. Dessen muss man sich bei der Interpretation der Ergebnisse bewusst sein. So stehen die signifikanten Korrelationen zwar im Einklang mit den für das jeweilige Lag aufgestellten Hypothesen, dürfen aber nicht als Nachweis des vermuteten Wirkungszusammenhangs missverstanden werden. Dazu wären weitere Analysen notwendig, die jedoch nicht Teil des vorliegenden Forschungsvorhabens sind und vielmehr Raum für weitere Forschung bieten. Auch die vermuteten Ursachen für Abweichungen zwischen Deutschland und den USA, zwischen Aktien und Zinsen sowie zwischen dieser und anderen Arbeiten müssen durch zusätzliche Analysen überprüft werden.

---

Teil der Indizes und Zinssätze, so dass man nur schwer von einer konsistenten und dauerhaft signifikanten Abhängigkeit sprechen kann. Bei den verbleibenden Lags zeigt sich auf den ersten Blick, dass die gemessenen Korrelationen nicht signifikant sind.

## Kapitel 6

# Anwendung zur Bewertung

Nachdem Abhängigkeiten zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt empirisch untersucht wurden, soll nun ihr Einfluss auf die Preise von Langlebigkeitsderivaten bestimmt werden. Dazu wird ein zeitstetiges Short-Rate-Modell für die Sterblichkeitsintensitäten verschiedener Individuen und den Momentanzins aufgestellt und zur Bewertung von Termingeschäften und Optionen auf die Sterblichkeit angewandt. Aktien und ihre Abhängigkeit von der Sterblichkeit werden nicht modelliert, da sie für die Auszahlung der betrachteten Langlebigkeitsderivate keine Rolle spielen.

### 6.1 Modell

Wie die meisten Modellen zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten verfolgt auch das im Folgenden vorgestellte Modell den Arbitrageansatz. Genauer handelt es sich ein zeitstetiges Short-Rate-Modell, das eine Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen über ihre Diffusionsterme modelliert. Für den Short-Rate-Ansatz ist dies neu. Bisher wurden Abhängigkeiten zwischen dem Sterblichkeits- und Zinsprozess nur in den Forward-Rate-Modellen von MILTERSEN & PERSSON (2006), BARBARIN (2008), BAUER (2006) und BAUER (2008, Kapitel 2.1) berücksichtigt. Allerdings wurde die Abhängigkeitsstruktur hier nie im Detail spezifiziert und bei eventuellen Modellimplementierungen stets vernachlässigt. Auch in dieser Hinsicht stellen das vorgeschlagene Modell und seine Anwendung ein Novum dar.

### 6.1.1 Modellrahmen

Der Modellrahmen wird weitestgehend wie durch BAUER (2008, S. 40 ff.) definiert. Er stimmt, wie BAUER (2008, S. 42 f.) zeigt, mit einer allgemeineren Formulierung von BIFFIS ET AL. (2005b) überein.<sup>65</sup>

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{H}, \mathbb{P})$ , dessen Filtration  $\mathbb{H} := (\mathcal{H}_t)_{t \in [0, T^*]}$  ebenso wie die noch näher zu definierenden Filtrationen  $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}$  und  $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T^*]}$  die üblichen Bedingungen rechtsseitiger Stetigkeit und  $\mathbb{P}$ -Vollständigkeit erfüllen.  $\mathbb{P}$  bezeichne dabei das reale Wahrscheinlichkeitsmaß. Der Zeithorizont sei auf  $[0, T^*]$  beschränkt,  $\mathcal{H}_0, \mathcal{F}_0$  und  $\mathcal{G}_0$  seien trivial und es gelte  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{T^*}, \mathcal{F} := \mathcal{F}_{T^*}$  und  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{T^*}$ . Ferner seien alle an  $\mathbb{F}, \mathbb{G}$  und  $\mathbb{H}$  adaptierten Prozesse wohldefiniert.

Betrachtet wird eine Menge  $I \subseteq \mathbb{N}, I \neq \emptyset$ , von zum Zeitpunkt  $t = 0$  lebenden Individuen. Der stochastische Todeszeitpunkt  $\tau_i$  eines jeden Individuums  $i \in I$  wird als erste Sprungzeit eines Cox-Prozesses mit Intensitätsprozess  $\mu_i$  modelliert:

$$\tau_i := \inf \left\{ t : \int_0^t \mu_{i,s} ds \geq E_i \right\}. \quad (6.1)$$

Dabei seien  $E_i, i \in I$ , standardexponentialverteilte Zufallsvariablen und für verschiedene  $i \in I$  unabhängig.

Die  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_t$  und  $\mathcal{G}_t$  seien echte Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{H}_t$  und letztere als  $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$  strukturiert.  $\mathcal{F}_t := \sigma(Z_s, 0 \leq s \leq t)$  werde durch eine  $n_Z$ -dimensionale Brown'sche Bewegung  $Z$  mit  $Z_0 = 0$  erzeugt, die den Finanzmarkt und die Sterblichkeit, nicht aber den Todeseintritt bei gegebener Sterblichkeit treibe. Es seien daher die Preisprozesse aller Finanzmarktinstrumente und die Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$  aller Individuen  $i \in I$ , nicht aber ihre Todeszeitpunkte  $\tau_i$  an  $\mathbb{F}$  adaptiert. Auf die Sterblichkeitsintensitäten treffe dies mit einer Zeitverzögerung  $l^* \in \mathbb{R}_0^+$  zu.

Die Todeszeitpunkte  $\tau_i$  bzw. die dazu gehörenden Zählprozesse  $N_i$  mit  $N_{i,t} := \mathbf{1}_{\tau_i \leq t}$  erzeugen die  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{G}_{i,t} := \sigma(N_{i,s}, 0 \leq s \leq t)$  und damit auch  $\mathcal{G}_t := \bigvee_{i \in I} \mathcal{G}_{i,t}$ .  $\mathcal{G}_{i,t}$  enthält also die Information, ob der Tod eines einzelnen Individuums  $i \in I$  zum Zeitpunkt  $s \leq t$  eingetreten ist oder nicht.  $\mathcal{G}_t$  enthält diese Information für alle Individuen.

Der beschriebene Modellrahmen differenziert folglich zwischen Informationen zur Entwicklung des Finanzmarkts und der Sterblichkeit und Informationen zum Tod einzelner Individuen. Erstere sind in der Filtration  $\mathbb{F}$ , letztere in  $\mathbb{G}$  und beide in  $\mathbb{H}$  enthalten. Da bei

<sup>65</sup>Neuere Versionen des genannten Arbeitspapiers sind BIFFIS ET AL. (2005a) und BIFFIS ET AL. (2010). Ihr Modellrahmen findet sich in verkürzter Form auch in BIFFIS & DENUIT (2006).

der Bewertung von Sterblichkeitsderivaten die Todeszeitpunkte einzelner Individuen jedoch weder relevant noch bekannt sind, muss die Bewertung unter Verwendung der Filtration  $\mathbb{F}$  erfolgen.

### 6.1.2 Modelldynamik

Im beschriebenen, realen, filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  werden der Momentanzins  $r$  und die Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$  aller Individuen  $i \in I$  modelliert. Wie in der Finanzmathematik üblich erfolgt die Modellierung in stetiger Zeit. Dass dies aufgrund nur jährlich verfügbarer Sterblichkeitsdaten der Allgemeinbevölkerung die Modellkalibrierung erschwert, wird angesichts der Vorteile einer stetigen Modellierung wie der Möglichkeit eines Maßwechsels bewusst in Kauf genommen.

Die Dynamiken von  $r$  und  $\mu_i$  werden zunächst unter dem realen Maß  $\mathbb{P}$  festgelegt und dann mit Hilfe eines Maßwechsels auf das zum Geldmarktkonto-Numéraire gehörende Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  übertragen.

#### 6.1.2.1 Dynamik unter dem realen Maß

Unter dem realen Maß folge der Momentanzins  $r$  einem mehrdimensionalen Diffusionsprozess der Form:

$$dr_t = (\alpha_r + \beta_r r_t) dt + \sigma_r r_t^{\gamma_r} \rho_r' dZ_t. \quad (6.2)$$

Dabei seien  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\gamma_r$  und  $\sigma_r$  konstante Skalare in  $\mathbb{R}$ ,  $\rho_r \in \mathbb{R}^{n_Z}$  ein konstanter Vektor mit  $\rho_r' \rho_r = 1$  und  $Z$  die bereits erwähnte  $n_Z$ -dimensionale, standardisierte Brown'sche Bewegung.

Für  $\alpha_r > 0$  und  $\beta_r < 0$ , d. h. bei einer positiven zinsunabhängigen Driftkomponente und einer negativen Sensitivität des bedingten Drifts auf das Zinsniveau, lassen sich  $-\alpha_r/\beta_r$  als langfristiger Mittelwert des Momentanzinses und  $-\beta_r$  als Mean-Reversion-Geschwindigkeit interpretieren.  $\gamma_r$  ist die Hälfte der bedingten Varianzelastizität und  $\sigma_r$  stellt einen zinsunabhängigen Faktor in der bedingten Varianz des Zinsveränderung dar.  $\rho_r$  sorgt, wie später gezeigt wird, für eine Korrelation zwischen dem Momentanzins  $r$  und den Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$ ,  $i \in I$ .<sup>66</sup>

<sup>66</sup>Eine komplexere Modelldynamik würde stochastische Korrelationen vorsehen. BRANGER & MUCK (2009) z. B. erreichen dies mit Wishart-Prozessen.

Definiert man nun einen Prozess  $W_r$  mit

$$W_{r,t} := \int_0^t \rho'_r dZ_s = \rho'_r Z_t, \quad (6.3)$$

handelt es sich dabei um eine an  $\mathbb{F}$  adaptierte, eindimensionale, standardisierte Brown'sche Bewegung und Gleichung (6.2) vereinfacht sich zu dem wohlbekannten Zinsmodellrahmen von CHAN ET AL. (1992) (vgl. auch Kapitel 3.3):

$$dr_t = (\alpha_r + \beta_r r_t) dt + \sigma_r r_t^{\gamma_r} dW_{r,t}. \quad (6.4)$$

Die Sterblichkeit wird wie in den meisten diskreten Zeitreihenmodellen mit Hilfe eines oder mehrerer, stochastischer Zeitindizes modelliert (vgl. auch Kapitel 2.2.2.1). Genauer seien die Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$ ,  $i \in I$ , in Anlehnung an die diskreten Erweiterungen des LEE & CARTER (1992)-Modells von BROUHNS ET AL. (2002) und RENSHAW & HABERMAN (2003b) als

$$\mu_{i,t} := \exp(\alpha_{i,t} + \beta'_{i,t} \kappa_t) \quad (6.5)$$

bzw.

$$\ln \mu_{i,t} := \alpha_{i,t} + \beta'_{i,t} \kappa_t \quad (6.6)$$

definiert (für das Modell von LEE & CARTER, 1992, vgl. auch Kapitel 2.3.1). Dabei seien  $\kappa$  ein  $n_\kappa$ -dimensionaler, stochastischer Prozess von Zeitindizes und  $\alpha_i$  bzw.  $\beta_i$  ein ein- bzw.  $n_\kappa$ -dimensionaler, deterministischer Prozess von Alterskoeffizienten.

Die Zeitabhängigkeit von  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  ergebe sich dabei ausschließlich aus der Alterung des Individuums  $i$ . Konkreter seien die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  Funktionen des Altersprozesses  $x_i$  und weiterer, jedoch unveränderlicher demographischer Merkmale  $d_i$  von Individuum  $i$ :

$$\alpha_{i,t} := \alpha(x_{i,t}, d_i) = \alpha(x_{i,0} + t, d_i) \quad (6.7)$$

$$\beta_{i,t} := \beta(x_{i,t}, d_i) = \beta(x_{i,0} + t, d_i). \quad (6.8)$$

Ein gutes Beispiel für solch ein demographisches Merkmal ist das Geschlecht.

Für  $n_\kappa = 1$  handelt es sich bei Gleichungen (6.5) bzw. (6.6) daher um eine zeitstetige Variante des LEE & CARTER (1992)-Modells in der Erweiterung von CARTER & LEE (1992) und BROUHNS ET AL. (2002), die ohne die explizite Modellierung geschlechtsspezifischer

Alterskoeffizienten auch von BIFFIS ET AL. (2005a,b, 2010) und BIFFIS & DENUIT (2006) vorgeschlagen wurde. Für  $n_\kappa = 2$  handelt es sich um eine zeitstetige Variante des Modells von RENSHAW & HABERMAN (2003b).

In dem hier vorgestellten, zeitstetigen Modell folge  $\kappa$  einem ggf. mehrdimensionalen Itô-Prozess:

$$d\kappa_t = \alpha_{\kappa,t} dt + \text{diag}(\sigma_{\kappa,t}) \rho'_\kappa dZ_{t+l^*}. \quad (6.9)$$

Dabei seien der Drift  $\alpha_\kappa$  und die Volatilität  $\sigma_\kappa$   $n_\kappa$ -dimensionale Vektorprozesse, deren Realisationen im Zeitpunkt  $t$  nur von  $\kappa_t$  und der Zeit abhängen. Weiter seien  $\text{diag}(\cdot)$  die aus einem Vektor erzeugte Diagonalmatrix und  $\rho_\kappa \in \mathbb{R}^{n_Z \times n_\kappa}$  eine Matrix von Konstanten. Sie ist für eine Korrelation zwischen verschiedenen Zeitindizes sowie zwischen Sterblichkeit und Zinsen verantwortlich und sei so gewählt, dass die Diagonalelemente von  $\rho'_\kappa \rho_\kappa$  eins betragen.  $l^* \in \mathbb{R}_0^+$  ist die bereits erwähnte Zeitverzögerung bei der Publikation von Sterblichkeitsdaten und sorgt dafür, dass die Sterblichkeitsindizes und -intensitäten nur mit einer Zeitverzögerung  $l^*$  an  $\mathbb{F}$  adaptiert sind (vgl. Kapitel 6.1.1).

Definiert man nun analog zu  $W_r$  in Gleichung (6.3) einen Prozess  $W_\kappa$  mit

$$W_{\kappa,t} := \int_{l^*}^{t+l^*} \rho'_\kappa dZ_s = \rho'_\kappa (Z_{t+l^*} - Z_{l^*}), \quad (6.10)$$

handelt es sich dabei um eine  $n_\kappa$ -dimensionale und mit einer Zeitverzögerung  $l^*$  an  $\mathbb{F}$  adaptierte Brown'sche Bewegung mit momentaner Varianz-Kovarianz-Matrix  $\rho'_\kappa \rho_\kappa$ . Gleichung (6.9) vereinfacht sich damit zu:

$$d\kappa_t = \alpha_{\kappa,t} dt + \text{diag}(\sigma_{\kappa,t}) dW_{\kappa,t}. \quad (6.11)$$

Sofern  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  stetig und differenzierbar sind, gilt für die Prozesse der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten:

$$\begin{aligned} d \ln \mu_{i,t} &= d\alpha_{i,t} + d(\beta'_{i,t} \kappa_t) \\ &= d\alpha_{i,t} + d\beta'_{i,t} \kappa_t + \beta'_{i,t} d\kappa_t + d[\beta'_i, \kappa]_t \\ &= \left( \frac{\partial \alpha_{i,t}}{\partial t} + \frac{\partial \beta'_{i,t}}{\partial t} \kappa_t + \beta'_{i,t} \alpha_{\kappa,t} \right) dt + \beta'_{i,t} \text{diag}(\sigma_{\kappa,t}) dW_{\kappa,t}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Mit Itô's Lemma folgt für die Prozesse der Sterblichkeitsintensitäten:

$$d\mu_{i,t} = \mu_{i,t} \left( \left( \frac{\partial \alpha_{i,t}}{\partial t} + \frac{\partial \beta'_{i,t}}{\partial t} \kappa_t + \beta'_{i,t} \alpha_{\kappa,t} + \frac{1}{2} \|\rho_{\kappa} \text{diag}(\sigma_{\kappa,t})' \beta_{i,t}\|^2 \right) dt + \beta'_{i,t} \text{diag}(\sigma_{\kappa,t}) dW_{\kappa,t} \right), \quad (6.13)$$

wobei  $\|\cdot\|$  für die euklidische Norm steht.

Im beschriebenen Modell kommt eine Abhängigkeit zwischen dem Momentanzins  $r$  und den Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$ ,  $i \in I$ , unter dem realen Maß ausschließlich aufgrund der Inkremente der Diffusionsprozesse  $W_{\kappa}$  und  $W_r$  zustande.

Dies ist nicht zwingend: Wären der Drift  $\alpha_{\kappa}$  oder die Volatilität  $\sigma_{\kappa}$  der Sterblichkeitsindizes vom Momentanzins  $r$  oder dessen Brown'scher Bewegung  $W_r$  abhängig, würde dies ebenfalls zu einer Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen führen. Dasselbe gilt, wenn die Parameter  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\gamma_r$  und  $\sigma_r$  des Zinsmodells nicht konstant wären, sondern von den Zeitindizes  $\kappa$  oder ihrer Brown'schen Bewegung  $W_{\kappa}$  abhingen.

In beiden Fällen wäre die Abhängigkeitsstruktur jedoch ungleich komplexer. Im Gegensatz dazu lässt sie sich im vorliegenden Modell leicht bestimmen. Für die auf Informationen zum Zeitpunkt  $s$  bedingte Kreuzkovarianz der Vektoren  $dW_{r,t}$  und  $dW_{\kappa,t-l}$  unter  $\mathbb{P}$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \text{COV}[dW_{r,t}, dW_{\kappa,t-l} | \mathcal{F}_s] &= \text{COV}[\rho'_r dZ_t, \rho'_{\kappa} dZ_{t+l^*-l} | \mathcal{F}_s] \\ &= \rho'_r \text{COV}[dZ_t, dZ_{t+l^*-l} | \mathcal{F}_s] \rho_{\kappa} \\ &= \mathbf{1}_{l=l^*} \cdot \mathbf{1}_{s < t} \cdot dt \cdot \rho'_r \rho_{\kappa}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Für ihre bedingte Kreuzkorrelation folgt bei  $s < \min(t, t + l^* - l)$ :

$$\text{CORR}[dW_{r,t}, dW_{\kappa,t-l} | \mathcal{F}_s] = \mathbf{1}_{l=l^*} \cdot \rho'_r \rho_{\kappa}. \quad (6.15)$$

Dabei stehen  $l \in \mathbb{R}$  für das betrachtete Lag zwischen der Sterblichkeit und dem Momentanzins,  $\mathbf{I}_n$  für die Einheitsmatrix der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{1}_{u_1=u_2}$  bzw.  $\mathbf{1}_{u_1 < u_2}$  für den Wert der Indikatorfunktion der Menge  $\{u_2\}$  bzw.  $]-\infty, u_2[$ ,  $u_2 \in \mathbb{R}$ , an der Stelle  $u_1 \in \mathbb{R}$ .

Ganz offensichtlich treten Abhängigkeiten zwischen den Inkrementen der Brown'schen Bewegungen  $W_r$  und  $W_{\kappa}$  nur bei einem Lag von  $l^*$  auf.<sup>67</sup> Das Lag der Abhängigkeit stimmt daher

<sup>67</sup>Zur Modellierung einer anders zeitverzögerten Abhängigkeit könnte man die Prozesse von  $r$  und/oder  $\kappa$  in Gleichungen (6.2) bzw. (6.9) ähnlich wie bei diskreten MA-Prozessen um vergangene Realisationen der Inkremente des Wiener Prozesses  $Z$  erweitern.

mit der Zeitverzögerung in der Publikation der Sterblichkeitsdaten überein. Dies vereinfacht nicht nur die Modellstruktur, sondern auch die Bewertung, da bei anders verzögerten Abhängigkeiten der Verlauf des Momentanzinses oder Sterblichkeitsindex vorab Informationen für den weiteren Verlauf der anderen Größe liefern könnte.

### 6.1.2.2 Maßwechsel nach dem Satz von GIRSANOV (1960)

Der Maßwechsel zum gewählten, äquivalenten Martingalmaß erfolgt mit Hilfe der Radon-Nikodym-Dichte und des Satzes von GIRSANOV (1960).

Zwei Maße  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  auf dem Messraum  $(\Omega, \mathcal{F})$  sind äquivalent, wenn sie bezüglich einander absolut stetig sind, d. h., wenn sie dieselben Nullmengen haben (PROTTER, 2004, S. 131, Definition). Wegen des Satzes von Radon-Nikodym (NIKODYM, 1930) besitzt jedes zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  äquivalente Maß  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  eine Dichtefunktion bezüglich  $\mathbb{P}$ , die sogenannte Radon-Nikodym-Dichte.<sup>68</sup> Dies ist eine nicht negative, messbare Funktion  $L_{\mathcal{B}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}(U) = \int_U L_{\mathcal{B}} \, d\mathbb{P} \quad \forall U \in \mathcal{F}. \quad (6.16)$$

Durch sie lässt sich das Maß  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  definieren. Weitere Dichtefunktionen mit dieser Eigenschaft stimmen  $\mathbb{P}$ -fast überall mit  $L_{\mathcal{B}}$  überein. Gilt außerdem  $\mathbb{E}[L_{\mathcal{B}}] = 1$ , so ist  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  wegen  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}(\Omega) = \int_{\Omega} L_{\mathcal{B}} \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[L_{\mathcal{B}}] = 1$  ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Seien nun  $Z$  die beschriebene,  $n_Z$ -dimensionale, standardisierte Brown'sche Bewegung unter  $\mathbb{P}$ ,  $\lambda_{\mathcal{B}}$  ein  $\mathbb{F}$ -adaptierter  $n_Z$ -dimensionaler Vektorprozess mit  $\int_0^{T^*} \lambda'_{\mathcal{B},s} \lambda_{\mathcal{B},s} \, ds < \infty$   $\mathbb{P}$ -fast sicher und der Prozess  $L_{\mathcal{B}}$  mit

$$L_{\mathcal{B},t} := \exp\left(-\int_0^t \lambda'_{\mathcal{B},s} \, dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda'_{\mathcal{B},s} \lambda_{\mathcal{B},s} \, ds\right) \quad (6.17)$$

ein Martingal bezüglich  $\mathbb{P}$ .<sup>69</sup> Dann sind  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  mit

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}(U) := \int_U L_{\mathcal{B},T^*} \, d\mathbb{P} \quad \forall U \in \mathcal{F} \quad (6.18)$$

ein zu  $\mathbb{P}$  äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß mit Radon-Nikodym-Dichte  $L_{\mathcal{B},T^*}$  und der

<sup>68</sup>Der Satz von Radon-Nikodym setzt lediglich voraus, dass  $\mathbb{P}$  ein  $\sigma$ -endliches Maß sei und dass  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  absolut stetig bezüglich  $\mathbb{P}$  sei. Diese Eigenschaften treffen auf jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  und per Definition auf jedes zu  $\mathbb{P}$  äquivalente Maß  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  zu.

<sup>69</sup>Eine hinreichende Bedingung für die Martingaleigenschaft von  $L_{\mathcal{B}}$  ist die Novikov-Bedingung  $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{T^*} \lambda'_{\mathcal{B},s} \lambda_{\mathcal{B},s} \, ds\right)\right] < \infty$ .



Prozess  $Z_{\mathcal{B}}$  mit

$$Z_{\mathcal{B},t} := Z_t + \int_0^t \lambda_{\mathcal{B},s} ds \quad (6.19)$$

nach dem Satz von GIRSANOV (1960) eine standardisierte, Brown'sche Bewegung bezüglich  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$ .

Unter der Annahme, dass das zum realen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  äquivalente Martingalmaß  $\mathbb{Q}_{\mathcal{B}}$  durch Gleichungen (6.17) und (6.18) gegeben ist,<sup>70</sup> ist ein Maßwechsel durch Wahl des Prozesses von  $\lambda_{\mathcal{B}}$ , dem sogenannten Marktpreis des Risikos, möglich.

### 6.1.2.3 Dynamik unter dem Martingalmaß

Um auf Basis der vorhergehenden Überlegung nun die Dynamik von  $r$  und  $\mu_i$ ,  $i \in I$ , unter dem zum Geldmarktkonto-Numéraire  $B$  gehörenden Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  mit

$$\mathbb{Q}(U) := \int_U L_{T^*} d\mathbb{P} \quad \forall U \in \mathcal{F} \quad (6.20)$$

und

$$L_t := \exp\left(-\int_0^t \lambda'_s dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda'_s \lambda_s ds\right), \quad (6.21)$$

abzuleiten, muss man lediglich den Prozess des entsprechenden Marktpreises des Risikos,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_Z})'$ , in geeigneter Form spezifizieren. Der Prozess  $\tilde{Z}$  mit

$$\tilde{Z}_t := Z_t + \int_0^t \lambda_s ds \quad (6.22)$$

ist dann eine standardisierte, Brown'sche Bewegung unter  $\mathbb{Q}$ .

Definiert man nun analog zu Gleichungen (6.3) und (6.10) zwei Prozesse  $\tilde{W}_r$  und  $\tilde{W}_\kappa$  mit

$$\tilde{W}_{r,t} := \int_0^t \rho'_r d\tilde{Z}_s = \rho'_r \tilde{Z}_t \quad (6.23)$$

<sup>70</sup>BIFFIS ET AL. (2005a, 2010) und BIFFIS & DENUIT (2006) wählen eine komplexere Dynamik für  $L_{\mathcal{B}}$ , die die beschriebene als Spezialfall umfasst.

bzw.

$$\tilde{W}_{\kappa,t} := \int_{l^*}^{t+l^*} \rho'_{\kappa} d\tilde{Z}_s = \rho'_{\kappa} (\tilde{Z}_{t+l^*} - \tilde{Z}_{l^*}), \quad (6.24)$$

handelt es sich dabei um zwei ein- bzw.  $n_{\kappa}$ -dimensionale Brown'sche Bewegungen unter  $\mathbb{Q}$ . Weiter ist  $\tilde{W}_r$  an  $\mathbb{F}$  adaptiert und wegen  $\rho'_r \rho_r = 1$  standardisiert, während  $\tilde{W}_{\kappa}$  nur mit Zeitverzögerung  $l^*$  an  $\mathbb{F}$  adaptiert ist und die momentane Varianz-Kovarianz-Matrix  $\rho'_{\kappa} \rho_{\kappa}$  hat.

Mit Hilfe der Definitionen von  $W_r$ ,  $W_{\kappa}$  und  $\tilde{Z}$  in Gleichungen (6.3), (6.10) bzw. (6.22) sowie der Prozesse  $\lambda_r$  und  $\lambda_{\kappa}$ ,

$$\lambda_{r,t} := \rho'_r \lambda_t \quad (6.25)$$

$$\lambda_{\kappa,t} := \rho'_{\kappa} \lambda_{t+l^*}, \quad (6.26)$$

lassen sich die Prozesse von  $\tilde{W}_r$  und  $\tilde{W}_{\kappa}$  umformulieren zu:

$$\tilde{W}_{r,t} = \rho'_r \left( Z_t + \int_0^t \lambda_s ds \right) = W_{r,t} + \int_0^t \lambda_{r,s} ds \quad (6.27)$$

$$\tilde{W}_{\kappa,t} = \rho'_{\kappa} \left( (Z_{t+l^*} - Z_{l^*}) + \int_{l^*}^{t+l^*} \lambda_s ds \right) = W_{\kappa,t} + \int_0^t \lambda_{\kappa,s} ds. \quad (6.28)$$

Für die Prozesse des Momentanzinses  $r$  und der Zeitindizes  $\kappa$  unter  $\mathbb{Q}$  gilt damit:

$$dr_t = (\alpha_r + \tilde{\beta}_r r_t) dt + \sigma_r r_t^{\gamma_r} d\tilde{W}_{r,t} \quad (6.29)$$

$$d\kappa_t = \tilde{\alpha}_{\kappa,t} dt + \text{diag}(\sigma_{\kappa,t}) d\tilde{W}_{\kappa,t} \quad (6.30)$$

mit

$$\tilde{\beta}_r := \beta_r - \sigma_r r_t^{\gamma_r - 1} \lambda_{r,t} \quad (6.31)$$

$$\tilde{\alpha}_{\kappa,t} := \alpha_{\kappa,t} - \text{diag}(\sigma_{\kappa,t}) \lambda_{\kappa,t}. \quad (6.32)$$

Für die Prozesse der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten  $\ln \mu_i$  bzw. der Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$ ,  $i \in I$ , unter  $\mathbb{Q}$  folgt analog zu Gleichungen (6.12) und (6.13):

$$d \ln \mu_{i,t} = \left( \frac{\partial \alpha_{i,t}}{\partial t} + \frac{\partial \beta'_{i,t}}{\partial t} \kappa_t + \beta'_{i,t} \tilde{\alpha}_{\kappa,t} \right) dt + \beta'_{i,t} \text{diag}(\sigma_{\kappa,t}) d\tilde{W}_{\kappa,t} \quad (6.33)$$

bzw.

$$\begin{aligned} d\mu_{i,t} = \mu_{i,t} & \left( \left( \frac{\partial \alpha_{i,t}}{\partial t} + \frac{\partial \beta'_{i,t}}{\partial t} \kappa_t + \beta'_{i,t} \tilde{\alpha}_{\kappa,t} + \frac{1}{2} \|\rho_{\kappa} \text{diag}(\sigma_{\kappa,t})' \beta_{i,t}\|^2 \right) dt \right. \\ & \left. + \beta'_{i,t} \text{diag}(\sigma_{\kappa,t}) d\tilde{W}_{\kappa,t} \right). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Offensichtlich ändert sich beim Maßwechsel vom realen zum Martingalmaß stets nur der Driftprozess. Neben dem jeweiligen Volatilitätsprozess bleiben auch die bedingte Kreuzkovarianz und Kreuzkorrelation der Diffusionsterme unverändert. Denn unter dem Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  beträgt die auf Informationen zum Zeitpunkt  $s$  bedingte Kreuzkovarianz der Vektoren  $d\tilde{W}_{r,t}$  und  $d\tilde{W}_{\kappa,t-l}$ :

$$\begin{aligned} \text{COV}^{\mathbb{Q}}[d\tilde{W}_{r,t}, d\tilde{W}_{\kappa,t-l} | \mathcal{F}_s] &= \text{COV}^{\mathbb{Q}}[\rho'_r d\tilde{Z}_t, \rho'_{\kappa} d\tilde{Z}_{t+l^*-l} | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{1}_{l=l^*} \cdot \mathbf{1}_{s < t} \cdot dt \cdot \rho'_r \rho_{\kappa} \\ &= \text{COV}[dW_{r,t}, dW_{\kappa,t-l} | \mathcal{F}_s]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Für ihre bedingte Kreuzkorrelation folgt bei  $s < \min(t, t + l^* - l)$ :

$$\begin{aligned} \text{CORR}^{\mathbb{Q}}[d\tilde{W}_{r,t}, d\tilde{W}_{\kappa,t-l} | \mathcal{F}_s] &= \mathbf{1}_{l=l^*} \cdot \rho'_r \rho_{\kappa} \\ &= \text{CORR}[dW_{r,t}, dW_{\kappa,t-l} | \mathcal{F}_s]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Unter dem Martingalmaß kann eine andere Abhängigkeitsstruktur als unter dem realen Maß daher nur über die Marktpreise des Risikos entstehen. Dazu müssten  $\lambda_r$  von  $\kappa$  oder  $\tilde{W}_{\kappa}$ ,  $\lambda_{\kappa}$  von  $r$  oder  $\tilde{W}_r$  oder aber  $\lambda_r$  und  $\lambda_{\kappa}$  voneinander abhängig sein.

#### 6.1.2.4 Konkretisierung des Modells

Bei der Modellanwendung wird nur ein Spezialfall des Modells betrachtet. Dazu werden beim Momentanzins, den Sterblichkeitsindizes, der Abhängigkeitsstruktur und dem Marktpreis des Risikos einschränkende Annahmen getroffen.

Genauer sei beim *Momentanzins*  $\gamma_r = 0,5$ ; er folge also dem wohlbekanntem Wurzel-diffusionsprozess von COX ET AL. (1985):

$$dr_t = (\alpha_r + \beta_r r_t) dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t}. \quad (6.37)$$

Für  $\alpha_r > 0$  und  $\beta_r < 0$  kehrt er mit Geschwindigkeit  $-\beta_r$  zum langfristigen Mittelwert

$-\alpha_r/\beta_r$  zurück und wird dabei fast sicher nie negativ. Für  $\alpha_r \geq \frac{1}{2}\sigma_r$  und  $r_0 > 0$  ist der Momentanzins sogar fast sicher positiv.

Bei den *Sterblichkeitsindizes* gelte  $n_\kappa = 1$ . Es wird also nur ein einziger Sterblichkeitsindex modelliert und die Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$  verschiedener Individuen  $i \in I$  sind perfekt korreliert. Weiter seien Drift und Volatilität unter dem realen Maß konstant. Der Sterblichkeitsindex folgt daher einer eindimensionalen Brown'schen Bewegung mit Drift  $\alpha_\kappa$  und Volatilität  $\sigma_\kappa$ :

$$d\kappa_t = \alpha_\kappa dt + \sigma_\kappa dW_{\kappa,t}. \quad (6.38)$$

Sie ist das stetige Pendant zu einem ARIMA(0,1,0)-Modell mit Drift und steht im Einklang mit den diskreten Modellschätzungen für die Sterblichkeitsindizes der USA sowie den Ergebnissen anderer Forscher für die USA (CARTER & LEE, 1992; LEE & CARTER, 1992) und Großbritannien (RENSHAW & HABERMAN, 2003c).

Das resultierende Sterblichkeitsmodell ist eine zeitstetige Variante des LEE & CARTER (1992)-Modells in der Erweiterung von CARTER & LEE (1992)- und BROUHNS ET AL. (2002). Es wurde ohne die explizite Modellierung geschlechtsspezifischer Alterskoeffizienten, ohne die Berücksichtigung einer zeitverzögerten Publikation der Sterblichkeitsdaten und ohne die Modellierung einer Abhängigkeit zum Momentanzinsprozess bereits von BIFFIS ET AL. (2005a,b, 2010) und BIFFIS & DENUIT (2006) vorgeschlagen. Ihr Maßwechsel ist komplexer, enthält jedoch den hier vorgeschlagenen als Spezialfall.

Zur Modellierung der *Abhängigkeitsstruktur* genügen wegen  $n_\kappa = 1$  drei Zustandsvariablen: ein gemeinsamer Faktor  $Z_1$  bzw.  $\tilde{Z}_1$ , ein zinsspezifischer Faktor  $Z_2$  bzw.  $\tilde{Z}_2$  und ein sterblichkeitspezifischer Faktor  $Z_3$  bzw.  $\tilde{Z}_3$ . Es seien daher  $n_Z = 3$ ,  $Z := (Z_1, Z_2, Z_3)'$  und  $\tilde{Z} := (\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3)'$ . Für die Korrelationsvektoren  $\rho_r$  und  $\rho_\kappa$  gelte:

$$\rho_r := \begin{pmatrix} \varrho_r \\ \sqrt{1 - \varrho_r^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

bzw.

$$\rho_\kappa := \begin{pmatrix} \varrho_\kappa \\ 0 \\ \sqrt{1 - \varrho_\kappa^2} \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

mit  $|\varrho_r| \leq 1$  und  $|\varrho_\kappa| \leq 1$ . Es folgen  $\rho'_r \rho_r = \rho'_\kappa \rho_\kappa = 1$  und  $\rho'_r \rho_\kappa = \varrho_r \varrho_\kappa$ . Durch geeignete Wahl der Koeffizienten  $\varrho_r$  und  $\varrho_\kappa$  des gemeinsamen Faktors  $Z_1$  bzw.  $\tilde{Z}_1$  lässt sich demnach jede gewünschte Korrelation  $\rho'_r \rho_\kappa$  erzeugen. Bei dem von nun an betrachteten Fall imperfekter Korrelation  $|\varrho_r \varrho_\kappa| \neq 1$  gelte dabei stets  $|\varrho_r| \neq 1 \neq |\varrho_\kappa|$ .

Der Prozess des *Marktpreises des Risikos* sei durch

$$\lambda_t := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta_r \sqrt{r_t}}{\sqrt{1-\varrho_r^2}} \\ \frac{\eta_\kappa}{\sqrt{1-\varrho_\kappa^2}} \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

mit zwei Konstanten  $\eta_r \in \mathbb{R}$  und  $\eta_\kappa \in \mathbb{R}$  gegeben. Dass der Marktpreis des gemeinsamen Faktors null sei, ist eine vereinfachende Annahme, die vor allem der Strukturhaltung dient. Denn die Definitionen (6.25) und (6.26) vereinfachen sich damit zu

$$\lambda_{r,t} = \rho'_r \lambda_t = \eta_r \sqrt{r_t} \quad (6.42)$$

$$\lambda_{\kappa,t} = \rho'_\kappa \lambda_{t+l^*} = \eta_\kappa \quad (6.43)$$

und für die Prozesse des Momentanzinses  $r$  und des Sterblichkeitsindex  $\kappa$  unter  $\mathbb{Q}$  folgt:

$$dr_t = \left( \alpha_r + \tilde{\beta}_r r_t \right) dt + \sigma_r \sqrt{r_t} d\tilde{W}_{r,t} \quad (6.44)$$

$$d\kappa_t = \tilde{\alpha}_\kappa dt + \sigma_\kappa d\tilde{W}_{\kappa,t} \quad (6.45)$$

mit

$$\tilde{\beta}_r = \beta_r - \sigma_r \eta_r \quad (6.46)$$

$$\tilde{\alpha}_\kappa = \alpha_\kappa - \sigma_\kappa \eta_\kappa. \quad (6.47)$$

Für die Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$ ,  $i \in I$ , gilt folglich:

$$\mu_{i,t} = \exp\left( \alpha_{i,t} + \beta_{i,t} \left( \kappa_0 + \tilde{\alpha}_\kappa t + \sigma_\kappa \tilde{W}_{\kappa,t} \right) \right). \quad (6.48)$$

### 6.1.3 Sterblichkeitsderivate

Im beschriebenen Modellrahmen wird der Todeszeitpunkt  $\tau_i$  eines jeden Individuums  $i \in I$  nach Gleichung (6.1) als erste Sprungzeit eines Cox-Prozesses mit Intensitätsprozess  $\mu_i$

modelliert. Seine Verteilungsfunktion ist daher durch

$$q_i(T) := \mathbb{P}(\tau_i \leq T) = 1 - \exp\left(-\int_0^T \mu_{i,s} ds\right) \quad (6.49)$$

definiert und gibt die Sterbewahrscheinlichkeit von Individuum  $i$  bis zum Zeitpunkt  $T$  an. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit  $p_i(T)$  von  $i$  bis  $T$  folgt:

$$p_i(T) := \mathbb{P}(\tau_i > T) = 1 - q_i(T) = \exp\left(-\int_0^T \mu_{i,s} ds\right). \quad (6.50)$$

Daraus lassen sich die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit

$$p_i(t, T) := \mathbb{P}(\tau_i > T | \tau_i > t) = \frac{p_i(T)}{p_i(t)} = \exp\left(-\int_t^T \mu_{i,s} ds\right) \quad (6.51)$$

und die bedingte Sterbewahrscheinlichkeit

$$q_i(t, T) := \mathbb{P}(\tau_i \leq T | \tau_i > t) = 1 - p_i(t, T) = 1 - \exp\left(-\int_t^T \mu_{i,s} ds\right) \quad (6.52)$$

ableiten. Sie geben die Wahrscheinlichkeit an, dass Individuum  $i$  bis zum Zeitpunkt  $T$  überlebt bzw. stirbt, gegeben, dass es bis  $t < T$  überlebt hat.

Ausgehend von diesen – wohlgermt stochastischen – Wahrscheinlichkeiten, lassen sich die Auszahlungen und Preise verschiedener Sterblichkeitsderivate bestimmen. Eine entscheidene Rolle spielt dabei die für die Zufallsvariablen  $E_i$  in Gleichung (6.1) getroffene Unabhängigkeitsannahme. Ihretwegen sind die Todeseritreitte verschiedener Individuen  $i \in I$ , gegeben die Entwicklung der Sterblichkeitsintensitäten  $\mu_i$ , unabhängige Ereignisse.

Für eine große Menge  $J := \{i \in I | \mu_{i,t} = \mu_{i_0,t} \forall t \in [0, T^*]\} \subseteq I$  von Individuen mit demselben Intensitätsprozess  $\mu_{i_0}$  stimmt daher nach dem Gesetz der großen Zahl die in einem Zeitraum  $[t, T]$  realisierte Sterberate mit der Realisation der allen Individuen  $i \in J$  gemeinsamen bedingten Sterbewahrscheinlichkeit  $q_{i_0}(t, T)$  überein. Analoges gilt für ihre Überlebensrate bzw. den sogenannten Survivor Index im Zeitraum  $[t, T]$  und die bedingte Sterbewahrscheinlichkeit  $p_{i_0}(t, T)$ . Der Survivor Index ist für den Zeitraum  $[t, T]$  dabei als Anteil der in  $T$  noch lebenden Individuen an der Referenzbevölkerung in  $t$  definiert.

Da die Underlyings von Sterblichkeitsderivaten i. d. R. die einjährige Sterberate oder der Survivor Index einer großen Referenzbevölkerung sind, vereinfacht dies ihre Bewertung wesentlich. Denn es müssen lediglich die Sterblichkeitsintensitäten bzw. die für die Auszahlung

des Derivats relevante Wahrscheinlichkeit, nicht aber die Verteilung der Todesfälle bei gegebener Sterblichkeit modelliert werden.

Auf Basis dieser Überlegungen werden im Folgenden die Auszahlungsfunktionen und Preise von zwei Langlebigkeitsderivaten bestimmt. Es handelt sich um ein Termingeschäft und eine Option auf einen Survivor Index. Beide Derivate beziehen sich auf die bereits definierte, homogene Referenzbevölkerung  $J \subseteq I$ , deren repräsentatives Individuum das Individuum  $i_0 \in I$  ist.<sup>71</sup>

### 6.1.3.1 Survivor Forward

Survivor Forwards sind Termingeschäfte auf einen Survivor Index. Unter diesem Begriff wurden sie von DAWSON ET AL. (2007) und unter dem Begriff „One-Payment Mortality Swaps“ zuvor von BLAKE ET AL. (2006a, S.172) vorgeschlagen.

Die Struktur und Wirkungsweise eines Survivor Forwards gleichen denen eines Forward Rate Agreements.<sup>72</sup> Wie letzteres sieht ein in  $t_0$  abgeschlossener Survivor Forward einen einmaligen Tausch zweier Zahlungen am Fälligkeitstermin  $T$  vor. Die Zahlung des Verkäufers hängt von der Entwicklung des Überlebensindex der Referenzbevölkerung  $J$  ab. Genauer ist sie das Produkt aus dem Nennwert  $N_{\text{SF}}$  des Forwards und der Realisation der Überlebensrate  $p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*)$  im Referenzzeitraum  $[t_0 - l^*, T - l^*]$ . Das Lag  $l^* \in \mathbb{R}_0^+$  ist notwendig, da der Survivor Index i. d. R. nur mit einer Zeitverzögerung  $l^* > 0$  bestimmt werden kann.

Im Gegensatz zur stochastischen Zahlung des Verkäufers ist die Zahlung des Käufers mit dem Abschluss des Forwards bekannt. Sie ist das Produkt aus dem Nennwert  $N_{\text{SF}}$  und dem vereinbarten Forward-Preis  $F_{\text{SF}}$ . Durch Kauf eines Survivor Forwards können sich daher Lebens- und Rentenversicherer eine bestimmte Überlebensrate sichern und so ihr Langlebigkeitsrisiko absichern. Allerdings müssen sie dazu auf ihr Einsparpotenzial bei unerwartet hoher Sterblichkeit verzichten.

Die Auszahlung des Survivor Forwards am Laufzeitende beträgt

$$\Pi_{\text{SF},T} = N_{\text{SF}} \left( p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*) - F_{\text{SF}} \right). \quad (6.53)$$

<sup>71</sup>Bei Sterblichkeitsderivaten auf heterogene Referenzbevölkerungen sind die Wahrscheinlichkeiten der homogenen Untergruppen entsprechend ihrer Exposure zu gewichten.

<sup>72</sup>Ebenfalls analog zu Forward Rate Agreements und Zins-Swaps ergibt eine Reihe von Survivor Forwards unterschiedlicher Laufzeiten einen sogenannten Survivor Swap (DAWSON ET AL., 2007). Survivor Swaps wurden u. a. von DOWD ET AL. (2006) und DAWSON ET AL. (2007) vorgeschlagen.

Für den Prozess  $\Pi_{\text{SF}}$  des Forward-Werts und  $t \geq t_0$  folgt nach Gleichung (4.3):

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{SF},t} &= N_{\text{SF}} \left( B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*) - F_{\text{SF}}}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= N_{\text{SF}} \left( B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] - P_t(T) F_{\text{SF}} \right),\end{aligned}\tag{6.54}$$

wobei  $B$  weiterhin den Prozess des Geldmarktkontos und  $P(T)$  den Preisprozess einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 1 und Fälligkeit  $T$  darstellen.

Da der Wert des Survivor Forwards bei Vertragsabschluss in  $t_0$  null beträgt, also  $\Pi_{\text{SF},t_0} \stackrel{!}{=} 0$  gilt, folgt für den Forward-Preis:

$$F_{\text{SF}} = \frac{1}{P_{t_0}(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right].\tag{6.55}$$

Bei einer Unabhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen vereinfacht sich dies zu:

$$F_{\text{SF}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right].\tag{6.56}$$

### 6.1.3.2 Survivor Caplet

Ein Survivor Caplet ist eine europäische Call-Option auf einen Survivor Index. Es wurde zuerst von BLAKE ET AL. (2006a) und später ohne Verwendung dieses Begriffs von BAUER (2008, Kapitel 5.1.2, S. 186 ff.) sowie BAUER ET AL. (2010) vorgeschlagen.

Die Struktur und Wirkungsweise eines Survivor Caplets gleichen denen eines Interest Rate Caplets.<sup>73</sup> Wie letzteres gibt ein im Zeitpunkt  $t_0$  abgeschlossenes Survivor Caplet dem Käufer am Fälligkeitstermin  $T$  das Recht auf eine Ausgleichszahlung. Diese bemisst sich als Produkt aus dem Nennwert  $N_{\text{SC}}$  des Caplets und der Differenz zwischen dem Survivor Index  $p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*)$  der Referenzbevölkerung  $J$  im Referenzzeitraum  $[t_0 - l^*, T - l^*]$ ,  $l^* \in \mathbb{R}_0^+$ , und der Cap Rate  $K_{\text{SC}}$ .

Die Ausgleichszahlung entspricht damit der Zahlung eines Survivor Forwards gleicher Laufzeit und gleichen Nennwerts mit dem Unterschied, dass der Käufer des Caplets das Recht auf, aber nicht die Verpflichtung zu dieser Zahlung hat. Durch Kauf eines Survivor Caplet können sich daher Lebens- und Rentenversicherer eine bestimmte maximale Überlebensrate sichern und so ihr Langlebighkeitsrisiko absichern, ohne ihre Einsparpotenziale bei unerwartet hoher Sterblichkeit zu begrenzen. Diese Optionalität müssen sie jedoch beim Kauf des

<sup>73</sup>Ebenfalls analog zu Interest Rate Caplets und Interest Caps ergibt eine Reihe von Survivor Caplets unterschiedlicher Laufzeiten einen sogenannten Survivor Cap (BLAKE ET AL., 2006a).



Caplets bezahlen.

Der Preis eines Survivor Caplets ergibt sich aus seiner unter dem Martingalmaß erwarteten, diskontierten Auszahlung. Die Auszahlung am Laufzeitende beträgt

$$\Pi_{\text{SC},T} = N_{\text{SC}} \left( p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*) - K_{\text{SC}} \right)^+ \quad (6.57)$$

mit  $(\cdot)^+ := \max(\cdot, 0)$ . Für den Preisprozess  $\Pi_{\text{SC}}$  des Caplets und  $t \geq t_0$  folgt nach Gleichung (4.3):

$$\Pi_{\text{SC},t} = N_{\text{SC}} \cdot B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{\left( p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*) - K_{\text{SC}} \right)^+}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (6.58)$$

Bei einer Unabhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Zinsen vereinfacht sich dies zu:

$$\Pi_{\text{SC},t} = N_{\text{SC}} \cdot P_t(T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( p_{i_0}(t_0 - l^*, T - l^*) - K_{\text{SC}} \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (6.59)$$

## 6.2 Implementierung

Das in Kapitel 6.1 vorgestellte und konkretisierte Modell wird im Folgenden zur Bewertung der in Kapitel 6.1.3 vorgeschlagenen Sterblichkeitsderivate angewandt.

Als Referenzbevölkerung  $J = \{i \in I \mid x_{i,0} = x_{i_0,0} = 65 \wedge d_i = d_{i_0} = 1\}$  diene die Menge aller Männer, die im Zeitpunkt  $t = 0$  genau 65 Jahre alt sind. Die Zeitverzögerung  $l^*$  bei der Veröffentlichung der Sterblichkeitsdaten betrage zweieinhalb Jahre. Der Vertragsabschluss- und Bewertungszeitpunkt  $t_0$  werde dem gleichgesetzt, d. h.:

$$t_0 := l^* := 2,5. \quad (6.60)$$

Dadurch vereinfachen sich die Preisgleichungen des Survivor Forwards zu

$$F_{\text{SF}} = \frac{1}{P_{t_0}(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{p_{i_0}(T - l^*)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (6.61)$$

und des Survivor Caplets zu

$$\Pi_{\text{SC},t_0} = N_{\text{SC}} \cdot B_{t_0} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{\left( p_{i_0}(T - l^*) - K_{\text{SC}} \right)^+}{B_T} \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right]. \quad (6.62)$$

Beide Derivate werden für Laufzeiten  $T - t_0 \in \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$  bzw. Fälligkeitstermine  $T \in \{7,5; 12,5; 17,5; 22,5; 27,5; 32,5\}$  bewertet. Bei dem Survivor Caplet werden außerdem verschiedene Cap Rates  $K_{SC}$  untersucht. Analog zu BAUER ET AL. (2010) werden letztere in Abhängigkeit der unter dem realen Maß erwarteten Überlebensrate gewählt. Sie wird dazu mit einem Aufschlag  $k_{SC} \in \{0,000; 0,025; 0,050\}$  versehen:

$$K_{SC} := (1 + k_{SC}) \mathbb{E}[p_{i_0}(T - l^*) | \mathcal{F}_{t_0}]. \quad (6.63)$$

Als Nennwert des Survivor Caplets diene stets  $N_{SC} := 1000$ .

## 6.2.1 Kalibrierung

Zur Anwendung des Bewertungsmodells wird es zunächst in „R“ an historischen Sterblichkeitsdaten und der Zinsstrukturkurve des Bewertungszeitpunkts kalibriert. Für den Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos und die Korrelationen werden verschiedene Szenarien festgelegt, die im Einklang mit den Ergebnissen von BAUER ET AL. (2010) bzw. von Kapitel 5.3 stehen.

### 6.2.1.1 Sterblichkeitsmodell

Die Kalibrierung des Sterblichkeitsmodells erfolgt zunächst unter dem realen Maß. Unter Rückgriff auf die diskreten LEE & CARTER (1992)- und ARIMA-Modellschätzungen aus Kapitel 5.2.1 werden dazu die reale Dynamik des Zeitindex und die Alterskoeffizienten festgelegt. Die Basis dafür bildet das gemeinsame Modell für Männer und Frauen in den USA. Es wurde über den Zeitraum von 1963 bis 2006 geschätzt.  $t = 0$  bezeichne von nun an den 1. Januar 2007,  $t_0 = 2,5$  den 1. Juli 2009. Der anschließende Maßwechsel zum Martingalmaß erfordert nur die Wahl des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos.

Die Dynamik des *Zeitindex* wird entsprechend der diskreten ARIMA-Modellschätzung gewählt:

$$\alpha_\kappa := \hat{\alpha}_\kappa = -2,8008 \quad (6.64)$$

$$\sigma_\kappa := \hat{\sigma}_\kappa = 2,6070. \quad (6.65)$$

Da die Brown'sche Bewegung mit Drift das stetige Pendant eines ARIMA(0,1,0)-Modells ist und es beim Übergang zwischen diskreter und stetiger Zeit hier kein temporales Aggregationsproblem gibt, ist dies problemlos möglich.

Als Startwert  $\kappa_0$  dient der Schätzwert  $\hat{\kappa}_{-1}$  der LEE & CARTER (1992)-Modellschätzung für die letzte Zeitperiode:

$$\kappa_0 := \hat{\kappa}_{-1} = -62,3387. \quad (6.66)$$

Obwohl  $\hat{\kappa}_{-1}$  über den Zeitraum  $[-1, 0[$  geschätzt wurde und in einem stetigen Modell näherungsweise dem Zeitindex im Zeitpunkt  $t = -0,5$  entsprechen sollte, ist eine Adjustierung aufgrund der noch folgenden Neuschätzung der Alterskoeffizienten  $\alpha_i$  nicht notwendig.

Bei den *Alterskoeffizienten*  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  aus Gleichungen (6.7) und (6.8) wird zwischen Männern,  $d_i = 1$ , und Frauen,  $d_i = 2$ , unterschieden. Analog zum diskreten LEE & CARTER (1992)-Modell wird unterstellt, dass sie während eines Altersjahres konstant seien, also einer rechtsseitig stetigen Treppenfunktion folgten:

$$\alpha_{i,t} := \alpha(\lfloor x_{i,t} \rfloor, d_i) \quad (6.67)$$

$$\beta_{i,t} := \beta(\lfloor x_{i,t} \rfloor, d_i). \quad (6.68)$$

$\lfloor x_{i,t} \rfloor$  bezeichnet dabei die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x_{i,t}$ .

Alle Individuen  $i \in I$  desselben Geschlechts  $d = d_i$  und desselben Altersjahres  $x = \lfloor x_{i,t} \rfloor$  verfügen demnach im Zeitpunkt  $t$  über dieselbe Sterblichkeitsintensität  $\mu_{x,d,t}$  mit

$$\mu_{x,d,t} := \exp(\alpha(x, d) + \beta(x, d) \kappa_t). \quad (6.69)$$

Ihre Exposure  $E_{x,d,t}$  und erwartete Anzahl  $D_{x,d,t}$  an Todesfällen betragen im Zeitpunkt  $t$

$$E_{x,d,t} := \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\lfloor x_{i,t} \rfloor = x} \cdot \mathbf{1}_{d_i = d} \cdot \mathbf{1}_{\tau_i \geq t} \quad (6.70)$$

bzw.

$$D_{x,d,t} := \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\lfloor x_{i,t} \rfloor = x} \cdot \mathbf{1}_{d_i = d} \cdot \mathbf{1}_{\tau_i \geq t} \cdot \mu_{i,t} = E_{x,d,t} \mu_{x,d,t}. \quad (6.71)$$

Bei der Kalibrierung von  $\alpha(x, d)$  und  $\beta(x, d)$  können anders als bei den Parametern der Brown'schen Bewegung  $\kappa$  nicht einfach die Schätzwerte aus dem diskreten Sterblichkeitsmodell verwendet werden. Dies liegt daran, dass bei Verwendung der diskreten Schätzwerte die aus dem stetigen Modell resultierenden, momentanen Sterblichkeitsintensitäten aufgrund der Exponentialfunktion in Gleichung (6.69) und der Stochastizität des Zeitindex  $\kappa$  selbst bei schrittweise konstanten Alterskoeffizienten nicht zu den jeweils für einen Einjahreszeitraum

gültigen Sterblichkeitsintensitäten des diskreten Modells konsistent wären.

Zur Kalibrierung werden die Alterskoeffizienten daher neu geschätzt und gefordert, dass die für Individuen  $i \in I$  des Geschlechts  $d_i = d$  und des Altersjahres  $x = \lfloor x_{i,t} \rfloor$  im diskreten LEE & CARTER (1992)-Modell geschätzte Sterblichkeitsintensität  $\hat{\mu}_{x,d,-1}$  in der letzten Zeitperiode  $[-1, 0[$  dem auf Basis des stetigen Modells erwarteten Wert entspreche:

$$\hat{\mu}_{x,d,-1} := \exp\left(\hat{\alpha}_{x,d} + \hat{\beta}_{x,d}\hat{\kappa}_{-1}\right) \stackrel{!}{=} \frac{\mathbb{E}\left[\int_{-1}^0 D_{x,d,t} dt\right]}{\mathbb{E}\left[\int_{-1}^0 E_{x,d,t} dt\right]}. \quad (6.72)$$

$\hat{\alpha}_{x,d}$  und  $\hat{\beta}_{x,d}$  seien dabei die Schätzwerte der Alterskoeffizienten für Männer bzw. Frauen aus dem diskreten Sterblichkeitsmodell.

Unter der vereinfachenden Annahme, dass die Exposure  $E_{x,d,t}$  im Zeitablauf näherungsweise konstant sei und

$$\frac{\mathbb{E}\left[\int_{-1}^0 D_{x,d,t} dt\right]}{\mathbb{E}\left[\int_{-1}^0 E_{x,d,t} dt\right]} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{-1}^0 E_{x,d,t} \mu_{x,d,t} dt\right]}{\mathbb{E}\left[\int_{-1}^0 E_{x,d,t} dt\right]} \stackrel{!}{=} \mathbb{E}\left[\int_{-1}^0 \mu_{x,d,t} dt\right] \quad (6.73)$$

gelte, lässt sich die Funktion der Altersparameter  $\alpha(\cdot, \cdot)$  aus den diskreten Schätzungen  $\hat{\alpha}_{x,d}$ , den gewählten Funktionswerten von  $\beta(\cdot, \cdot)$  und der bereits festgelegten Dynamik des Zeitindex bestimmen:

$$\begin{aligned} \alpha(x, d) &= \hat{\alpha}_{x,d} + \hat{\beta}_{x,d}\hat{\kappa}_{-1} - \beta(x, d) \kappa_0 \\ &+ \ln \frac{\left(\beta(x, d) \alpha_\kappa + \frac{1}{2}\beta(x, d)^2 \sigma_\kappa^2\right)}{1 - \exp\left(-\beta(x, d) \alpha_\kappa - \frac{1}{2}\beta(x, d)^2 \sigma_\kappa^2\right)} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Die geschlossene Lösung ist aufgrund der Verteilung von  $\kappa_t \sim \Phi(\kappa_0 + \alpha_\kappa t, \sigma_\kappa \sqrt{t})$  und der daraus folgenden Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_{-1}^0 \mu_{x,d,t} dt\right] &= \int_{-1}^0 \mathbb{E}\left[\exp(\alpha(x, d) + \beta(x, d) \kappa_t)\right] dt \\ &= \int_{-1}^0 \exp\left(\alpha(x, d) + \beta(x, d) (\kappa_0 + \alpha_\kappa t) + \frac{1}{2}\beta(x, d)^2 \sigma_\kappa^2 t\right) dt \\ &= \frac{\exp\left(\alpha(x, d) + \beta(x, d) \kappa_0\right) \left(1 - \exp\left(-\beta(x, d) \alpha_\kappa - \frac{1}{2}\beta(x, d)^2 \sigma_\kappa^2\right)\right)}{\beta(x, d) \alpha_\kappa + \frac{1}{2}\beta(x, d)^2 \sigma_\kappa^2}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

möglich.

Zur Kalibrierung des stetigen Sterblichkeitsmodells werden die Funktion  $\beta(\cdot, \cdot)$  und  $\alpha(\cdot, \cdot)$  nun gleich

$$\beta(x, d) := \hat{\beta}_{x,d} \quad (6.76)$$

bzw.

$$\alpha(x, d) := \hat{\alpha}_{x,d} + \ln \frac{\left( \hat{\beta}_{x,d} \alpha_\kappa + \frac{1}{2} \hat{\beta}_{x,d}^2 \sigma_\kappa^2 \right)}{1 - \exp\left( -\hat{\beta}_{x,d} \alpha_\kappa - \frac{1}{2} \hat{\beta}_{x,d}^2 \sigma_\kappa^2 \right)} \quad (6.77)$$

gesetzt. Wegen (6.76) entsprechen die erwartete Veränderung  $\beta(x, d) \alpha_\kappa dt$  und die Volatilität  $\beta(x, d) \sigma_\kappa \sqrt{dt}$  der logarithmierten Sterblichkeitsintensitäten von  $x$ -Jährigen ihren diskreten Pendanten; wegen (6.77) ist Gleichung (6.72) erfüllt. Die resultierenden Koeffizienten sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Wie zu erwarten, ähnelt der Verlauf von  $\alpha(x, d)$  demjenigen von  $\hat{\alpha}_{x,d}$  stark (vgl. Abbildung 5.8 unten links); der Verlauf von  $\beta(x, d)$  stimmt nach Gleichung (6.76) per Definition mit demjenigen von  $\hat{\beta}_{x,d}$  überein (vgl. Abbildung 5.8 unten rechts).

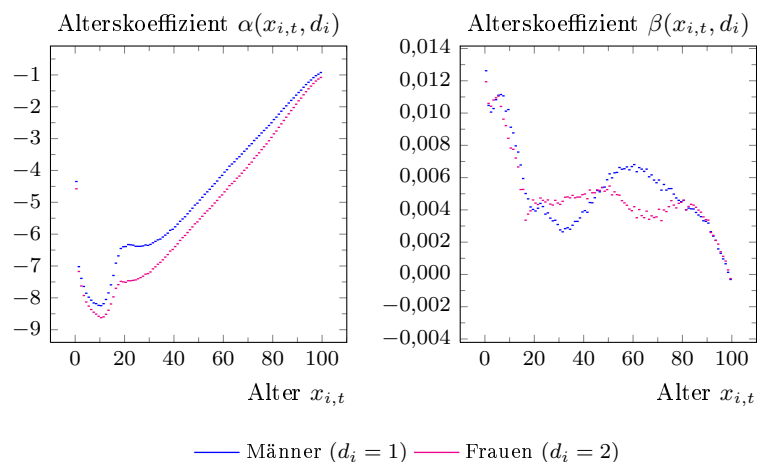


Abbildung 6.1: Alterskoeffizienten des Sterblichkeitsmodells

Im Gegensatz zur Dynamik des Zeitindex und den Alterskoeffizienten wird der zum Maßwechsel benötigte *Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos*  $\eta_\kappa$  nicht an konkreten Daten kalibriert. Zum einen sind Marktpreise für Langlebigkeitsderivate nur schwer zugänglich (vgl. Kapitel 2.2.1.3 für Alternativen); zum anderen soll die Modellanwendung primär den Effekt von

Abhängigkeiten auf den Preis von Langlebigkeitsderivaten und weniger die Angemessenheit beobachteter Marktpreise oder die Korrektheit des Bewertungsmodells aufzeigen.

Der Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos  $\eta_\kappa$  wird daher im Basisszenario ohne weitere Kalibrierung gleich

$$\eta_\kappa := 0,1 \quad (6.78)$$

gesetzt. In Alternativszenarien werden Risikopreise

$$\eta_\kappa \in \{0,00; 0,040; 0,080; 0,085; 0,095; 0,090; 0,100; 0,120; 0,160; 0,200\} \quad (6.79)$$

betrachtet. Sie alle entsprechen in der Größenordnung den Ergebnissen von BAUER ET AL. (2010, Abbildung 1 und Tabelle 1) von 2002 bis 2006, die für ihr Forward-Rate-Modell aus britischen Leibrentenraten und interpolierten, projizierten Sterblichkeitstafeln Sharpe Ratios schätzen. Ihre Schätzungen reichen für den genannten Zeitraum von ca. 0,040 bzw. 0,175 (ebd., Abbildung 1).

### 6.2.1.2 Zinsmodell

Im Gegensatz zur Kalibrierung des Sterblichkeitsmodells erfolgt die Kalibrierung des Zinsmodells direkt unter dem Martingalmaß. Dadurch erübrigt sich die Wahl des Marktpreises des Zinsrisikos.

Der Parametervektor  $\theta_r := (\alpha_r, \tilde{\beta}_r, \sigma_r, r_{t_0})' \in \mathbb{R}^4$  wird so geschätzt, dass die aus dem Modell abgeleitete Zinsstruktur möglichst gut die tatsächliche Zinsstruktur im Zeitpunkt  $t_0$ , d. h. am 1. Juli 2009, widerspiegelt. Dazu wird die Summe der quadratischen Abweichungen zwischen den tatsächlichen Preisen  $P_{t_0}(T_j)$  und den Modellpreisen  $P_{t_0}(\theta_r, T_j)$  verschiedener Nullkuponanleihen mit Nennwert eins und Fälligkeit  $T_j$ ,  $j \in \mathbb{N}_{n_T}$ , minimiert.

Der Vektor  $\hat{\theta}_r := (\hat{\alpha}_r, \hat{\beta}_r, \hat{\sigma}_r, \hat{r}_{t_0})'$  der Schätzwerte  $\hat{\alpha}_r$ ,  $\hat{\beta}_r$ ,  $\hat{\sigma}_r$  und  $\hat{r}_{t_0}$  für  $\alpha_r$ ,  $\tilde{\beta}_r$ ,  $\sigma_r$  bzw.  $r_{t_0}$  ist demnach durch

$$\hat{\theta}_r := \operatorname{argmin}_{\theta_r \in \mathbb{R}^4} \sum_{j=1}^{n_T} (P_{t_0}(\theta_r, T_j) - P_{t_0}(T_j))^2 \quad (6.80)$$

definiert, wobei für Modellpreise  $P_t(\theta_r, T)$  aufgrund der affinen Struktur des COX ET AL. (1985)-Modells die folgende geschlossene Lösung existiert (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 66):

$$P_t(\theta_r, T) = A_t(\theta_r, T) \exp(-C_t(\theta_r, T) r_t) \quad (6.81)$$

mit

$$A_t(\theta_r, T) := \left( \frac{2h(\theta_r) \exp\left(\left(h(\theta_r) - \tilde{\beta}_r\right)(T-t)/2\right)}{2h(\theta_r) + \left(h(\theta_r) - \tilde{\beta}_r\right) \left(\exp\left((T-t)h(\theta_r)\right) - 1\right)} \right)^{\frac{2\alpha_r}{\sigma_r^2}} \quad (6.82)$$

$$C_t(\theta_r, T) := \frac{2\left(\exp\left((T-t)h(\theta_r)\right) - 1\right)}{2h(\theta_r) + \left(h(\theta_r) - \tilde{\beta}_r\right) \left(\exp\left((T-t)h(\theta_r)\right) - 1\right)} \quad (6.83)$$

und

$$h(\theta_r) := \sqrt{\tilde{\beta}_r^2 + 2\sigma_r^2}. \quad (6.84)$$

Die Minimierung in Gleichung (6.80) erfolgt mit Hilfe der „R“-Funktion „optim“ und des dort hinterlegten Algorithmus von BYRD ET AL. (1995) unter den Nebenbedingungen  $\alpha_r \geq 0$ ,  $\tilde{\beta}_r \leq 0$ ,  $\sigma_r \geq 0$  und  $r_{t_0} \geq 0$ . Als Startwerte für  $\alpha_r$ ,  $\tilde{\beta}_r$  und  $\sigma_r$  dienen die Ergebnisse der diskreten Zinsmodellsschätzung aus Kapitel 5.2.3.2 für die einjährige T-Bill-Rendite bei Jahresschritten zum Jahresersten, als Startwert für  $r_{t_0}$  das sich daraus ergebende langfristige Zinsniveau  $-\alpha_r/\tilde{\beta}_r$ .

Die Datenbasis für die Preise  $P_{t_0}(T_j)$  der Nullkuponanleihen bilden die durch das U.S. DEPARTMENT OF THE TREASURY (2011) veröffentlichten und in Tabelle 6.1 aufgeführten, halbjährlich verzinsten Constant Maturity Treasury Yields (CMTs)  $R_{t_0}(T_j)$  vom 1. Juli 2009 mit Laufzeiten  $T_j - t_0$ ,  $j \in \mathbb{N}_{11}$ .

Die Ergebnisse der Modellschätzung sind wie folgt:

$$\hat{\alpha}_r = 0,0174 \quad (6.85)$$

$$\hat{\beta}_r = -0,3435 \quad (6.86)$$

$$\hat{\sigma}_r = 0,1145 \quad (6.87)$$

$$\hat{r}_{t_0} = 0,0000 \quad (6.88)$$

Das geschätzte, langfristige Zinsniveau liegt bei  $-\hat{\alpha}_r/\hat{\beta}_r = 0,0506$ , die Mean-Reversion-Geschwindigkeit bei  $-\hat{\beta}_r = 0,3435$ . Der Momentanzins  $r_t$  beträgt im Zeitpunkt  $t_0$  zwar null, ist jedoch wegen der positiven zinsunabhängigen Driftkomponente im Zeitpunkt  $t_0 + dt$  positiv (vgl. Kapitel 6.2.2). Wegen  $2\hat{\alpha}_r = 0,0348 > 0,0131 = \hat{\sigma}_r^2$  bleibt er dies Q-fast sicher für alle späteren Zeitpunkte  $t > t_0$  (BRIGO & MERCURIO, 2006, S. 64f.).

$j$	$T_j - t_0$	Marktdaten		Modellergebnisse	
		$R_{t_0}(T_j)$	$P_{t_0}(T_j)$	$R_{t_0}(\hat{\theta}_r, T_j)$	$P_{t_0}(\hat{\theta}_r, T_j)$
1	$\frac{1}{12}$	0,0013	0,9999	0,0007	0,9999
2	$\frac{1}{4}$	0,0017	0,9996	0,0021	0,9995
3	$\frac{1}{2}$	0,0033	0,9984	0,0041	0,9980
4	1	0,0054	0,9946	0,0078	0,9923
5	2	0,0105	0,9793	0,0140	0,9725
6	3	0,0157	0,9542	0,0190	0,9449
7	5	0,0251	0,8827	0,0262	0,8778
8	7	0,0320	0,8007	0,0311	0,8058
9	10	0,0355	0,7034	0,0357	0,7021
10	20	0,0432	0,4254	0,0420	0,4356
11	30	0,0434	0,2758	0,0442	0,2694

Tabelle 6.1: Tatsächliche und geschätzte Zinsstruktur am 1. Juli 2009  
Quelle: U.S. DEPARTMENT OF THE TREASURY (2011) und eigene Berechnungen

Die aus dem Modell resultierenden Zero-Coupon- und Zero-Bond-Kurven sind für die zur Schätzung verwendeten Laufzeiten  $T_j - t_0$ ,  $j \in \mathbb{N}_{11}$ , in Tabelle 6.1 und für weitere Laufzeiten  $T - t_0 \in \mathbb{R}_0^+$  in Abbildung 6.2 dargestellt. Die ermittelten Anleihenpreise stimmen bei allen Laufzeiten sehr genau mit den Marktdaten überein, während die berechneten CMTs  $R_{t_0}(\hat{\theta}_r, T)$  zum Teil leicht davon abweichen. Dies trifft vor allem auf hohe Laufzeiten von über zehn Jahren zu, bei denen die Modellkurve den zunächst noch steilen und dann sehr flachen Verlauf der tatsächlichen Zero-Coupon-Kurve nicht widerspiegeln kann. Bei der Modellanwendung wird diese Ungenauigkeit jedoch in Kauf genommen, da primär der Effekt von Abhängigkeiten auf den Preis von Langlebigkeitsderivaten und weniger die Angemessenheit beobachteter Marktpreise oder die Korrektheit des Bewertungsmodells aufgezeigt werden sollen.

Zur Vereinfachung der Notation werden im Folgenden  $\theta_r := \hat{\theta}_r$ ,  $P_t(T) := P_t(\hat{\theta}, T)$  und  $R_t(T) := R_t(\hat{\theta}, T)$  gesetzt.

### 6.2.1.3 Abhängigkeitsstruktur

Wie beim Marktpreis des Sterblichkeitsrisiko werden auch bei der Abhängigkeitsstruktur verschiedene Szenarien betrachtet. Der Korrelationsparameter  $\rho_r$  des Zinsmodells wird dabei



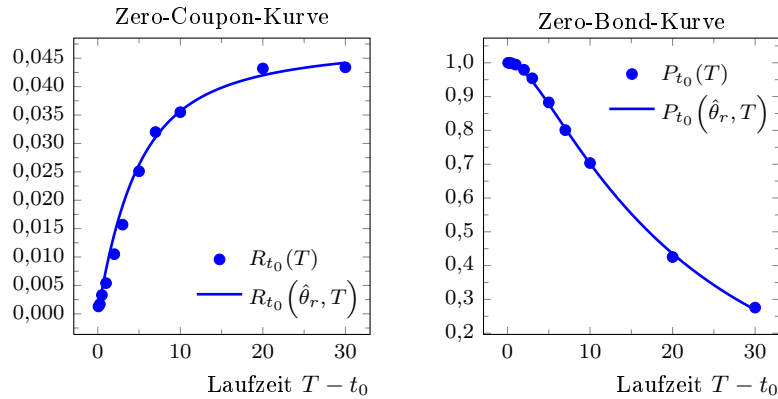


Abbildung 6.2: Tatsächliche und geschätzte Zinsstruktur am 1. Juli 2009  
 Quelle: U.S. DEPARTMENT OF THE TREASURY (2011) und eigene Berechnungen

konstant gehalten und als

$$\varrho_r := 0,8 \quad (6.89)$$

definiert. Durch geeignete Wahl des Korrelationsparameters  $\varrho_\kappa \in ]-1, 1[$  des Sterblichkeitsmodells können so verschiedene Korrelationen  $\varrho_r \varrho_\kappa \in ]-0,8; 0,8[$  erzeugt werden, ohne dass der Prozess des Momentanzinses erneut simuliert werden müsste.

Im Basisszenario wird

$$\varrho_\kappa := -\frac{3}{8} \quad (6.90)$$

gesetzt, also eine Korrelation  $\varrho_r \varrho_\kappa$  von  $-0,3$  modelliert. Für die übrigen Szenarien wird

$$\varrho_\kappa \in \left\{ -\frac{6}{8}, -\frac{5}{8}, \dots, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} \right\} \quad (6.91)$$

gewählt, so dass alle Korrelationen von  $-0,6$  bis  $0,6$  in  $0,1$ -Schritten untersucht werden.

Insbesondere das Basisszenario steht mit einer Korrelation von  $\varrho_r \varrho_\kappa = -0,3$  in Einklang mit den empirischen Ergebnissen aus Kapitel 5.3. Bei einer Zeitverzögerung von zweieinhalb Jahren wurden dort sowohl für Deutschland als auch für die USA signifikante, negative Korrelationen gemessen. Für den jeweils längstmöglichen Zeitraum bewegen sie sich in Deutschland zwischen  $-0,3177$  und  $-0,4188$  und betragen in den USA  $-0,2670$ .

Signifikant positive Korrelationen hingegen wurden bei einer positiven Zeitverzögerung nur

in den USA und nur bei einem Lag von einem Jahr gemessen. Für den längstmöglichen Zeitraum belaufen sie sich auf 0,4493 bis 0,5450.

## 6.2.2 Simulation

Die Bewertung der Sterblichkeitsderivate erfolgt mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation in „R“. Dazu werden in 50.000 Simulationen jeweils  $360 \cdot 30 = 10800$  unabhängige, dreidimensionale Vektoren von standardnormalverteilten Zufallsvariablen

$$\tilde{z}_{t_0}, \tilde{z}_{t_0+\Delta t}, \dots, \tilde{z}_{T^*-\Delta t} \sim \Phi(0, \mathbf{I}_3) \quad (6.92)$$

generiert und daraus die risikoneutralen Pfade von  $r$ ,  $B$ ,  $\kappa$ ,  $\mu_{i_0}$  und  $p_{i_0}(\cdot)$  nach dem Euler-Maruyama-Schema abgeleitet (vgl. GLASSERMAN, 2004, Kapitel 6.1.1, S. 339 f., und SCHÖNBUCHER, 2003, Kapitel 7.7.1, S. 214). Der Zeithorizont  $T^* := t_0 + 30$  richte sich nach dem spätesten Fälligkeitstermin der betrachteten Derivate; als Schrittgröße diene  $\Delta t := 1/360$ .

Zur Bestimmung der Simulationspfade von  $r$  und  $B$  setzt man  $B_{t_0} := 1$  und für alle  $t = t_0, t_0 + \Delta t, \dots, T^* - \Delta t$ :

$$\Delta \tilde{W}_{r,t} := \rho'_r \left( \sqrt{\Delta t} \cdot \tilde{z}_t \right) \quad (6.93)$$

sowie

$$r_{t+\Delta t} := r_t + \left( \alpha_r + \tilde{\beta}_r r_t^+ \right) \Delta t + \sigma_r \sqrt{r_t^+} \Delta \tilde{W}_{r,t} \quad (6.94)$$

$$B_{t+\Delta t} := B_t \exp(r_t \Delta t). \quad (6.95)$$

Die Verwendung von  $r_t^+ := \max(r_t, 0)$  anstelle von  $r_t$  im Drift- und Volatilitätsterm entspricht der von LORD ET AL. (2010) für stochastische Volatilitätsmodelle vorgeschlagenen Full-Truncation-Methode. Sie kann zwar kurzfristig negative Momentanzinsen nicht verhindern, stellt jedoch sicher, dass der Wurzelterm stets definiert ist.

Zur Simulation von  $\kappa$ ,  $\mu_{i_0}$  und  $p_{i_0}(\cdot)$  setzt man  $p_{i_0}(0) := 1$  und

$$\Delta \tilde{W}_{\kappa,t} := \rho'_\kappa \left( \sqrt{\Delta t} \cdot \tilde{z}_{t+l^*} \right) \quad (6.96)$$

sowie

$$\kappa_{t+\Delta t} := \kappa_t + \tilde{\alpha}_\kappa \Delta t + \sigma_\kappa \Delta \tilde{W}_{\kappa,t} \quad (6.97)$$

$$\mu_{i_0,t} := \exp(\alpha_{i,t} + \beta_{i,t} \kappa_t) \quad (6.98)$$

$$p_{i_0}(t + \Delta t) := p_{i_0}(t) \exp(-\mu_{i_0,t} \Delta t) \quad (6.99)$$

für alle  $t \in \{0, \Delta t, \dots, T^* - l^* - \Delta t\}$ . Die zur Bewertung benötigten Erwartungswerte erhält man durch Mittelwertbildung über die Simulationspfade.

## 6.3 Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Modellanwendung vorgestellt. Dabei wird besonders auf die Effekte von Laufzeit, Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos und Korrelation auf den Survivor Index und die Forward- und Caplet-Preise eingegangen.

### 6.3.1 Zins- und Sterblichkeitsmodell

Abbildungen 6.3 und 6.4 zeigen die Ergebnisse der Zins- bzw. Sterblichkeitssimulation. Dargestellt sind die Erwartungswerte und wichtigsten Quantile für den Momentanzins und das Geldmarktkonto unter dem Martingalmaß bzw. für den Sterblichkeitsindex und den Survivor Index unter sowohl dem realen als auch dem Martingalmaß.

Der Momentanzins liegt mit seinem Erwartungswert bereits nach zehn Jahren sehr nah am langfristigen Mittelwert  $-\alpha_r/\tilde{\beta}_r = 0,0506$  (vgl. Abbildung 6.3). Er weist ebenso wie das Geldmarktkonto eine deutliche und im Zeitablauf zunehmende Streuung sowie eine rechtsschiefe Verteilung auf (ebd.).

Die Erwartungswerte und Quantile des Sterblichkeitsindex verlaufen unter beiden Maßen, wie bei einer Brown'schen Bewegung mit negativem Drift zu erwarten (vgl. Abbildung 6.4 oben): Die Erwartungswerte fallen linear, die Varianz ist proportional zum Zeithorizont. Dies impliziert einen Rückgang der allgemeinen Sterblichkeit und eine mit dem Zeithorizont steigende Unsicherheit.

Der erwartete Survivor Index fällt ebenfalls annähernd linear (vgl. Abbildung 6.4 unten). Die Linearität ergibt sich aus den mit dem Alter stark steigenden Sterblichkeitsintensitäten – bei altersunabhängigen Sterblichkeitsintensitäten würde der Survivor Index in etwa exponentiell fallen. Da die Quantile und die Volatilität des Survivor Index aufgrund der Skalierung der Abbildung nur schwer zu erkennen ist, sind sie für das Martingalmaß in Tabellen 6.2 bis 6.4

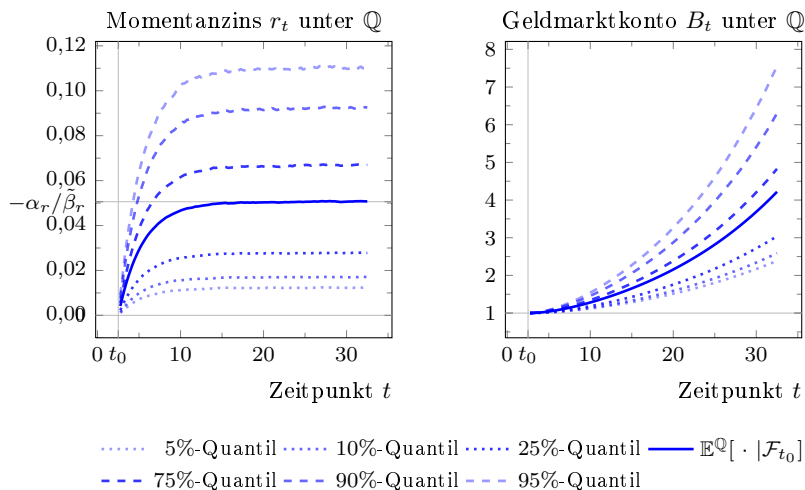


Abbildung 6.3: Simulation des Zinsmodells

aufgeführt.

Neben der recht symmetrischen Verteilung zeigt sich hier vor allem Folgendes: Die relative Streuung des Survivor Index, gemessen als Verhältnis der Standardabweichung oder Konfidenzintervalle zum Erwartungswert, steigt mit dem Zeithorizont (vgl. Tabelle 6.3), während die absolute Streuung nach ca. 24 Jahren abnimmt (vgl. Tabelle 6.4). Beispielsweise werden mit 10%-iger Wahrscheinlichkeit nach 20 Jahren 6,35% und nach 30 Jahren mindestens 9,66% mehr Menschen überlebt haben, als erwartet. Dies entspricht jedoch nur 1,69% bzw. 1,05% der ursprünglichen Referenzbevölkerung. Die geringere absolute Streuung bei sehr langen Zeithorizonten ergibt sich aus dem natürlichen Rückgang des Survivor Index. Sie wird sich bei der Bewertung des Survivor Caplets als wichtig erweisen.

Abbildung 6.4 gibt auch Aufschluss über die Unterschiede zwischen realem und Martingalmaß. Unter dem Martingalmaß fällt der erwartete Sterblichkeitsindex stärker als unter dem realen Maß; bei der Bewertung wird folglich eine stärkere Abnahme der Sterblichkeit unterstellt. Dies spiegelt sich auch in dem unter dem Martingalmaß stets höher liegenden Survivor Index wider, wenngleich der Unterschied aufgrund der Skalierung der Abbildung nur schwer zu erkennen ist. Aus diesem Grund werden die unter dem realen und dem Martingalmaß erwarteten Survivor Indexes noch einmal in Tabelle 6.5 und Abbildung 6.5 gegenübergestellt.

Erwartungsgemäß steigt der Unterschied zum realen Maß mit dem Marktpreis des Risikos. Die Abhängigkeit vom Zeithorizont ist weniger eindeutig: Während das Verhältnis vom

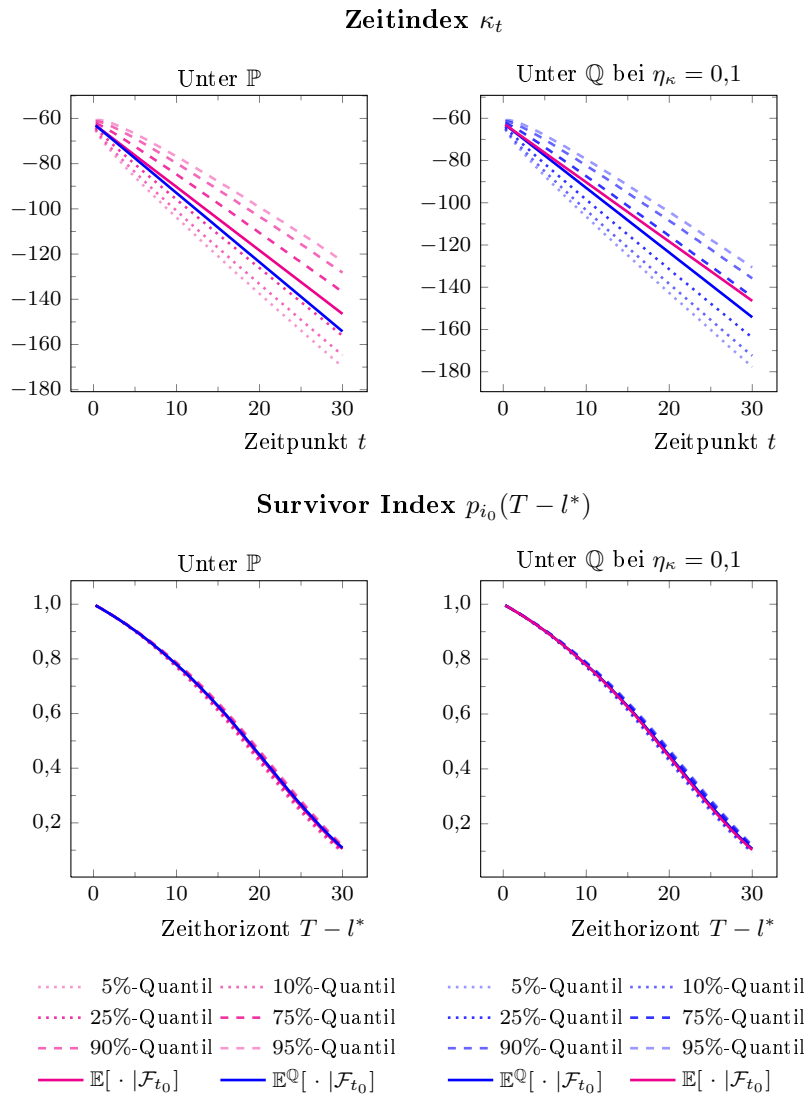


Abbildung 6.4: Simulation des Sterblichkeitsmodells

Quantil bzw. Moment	Survivor Index $p_{i_0}(T - l^*)$ bei $\eta_\kappa = 0,1$ und $T - l^* = \dots$					
	5	10	15	20	25	30
5%-Quantil	0,9004	0,7706	0,6119	0,4280	0,2449	0,0959
10%-Quantil	0,9011	0,7727	0,6156	0,4328	0,2496	0,0986
25%-Quantil	0,9023	0,7761	0,6217	0,4409	0,2576	0,1035
50%-Quantil	0,9036	0,7799	0,6284	0,4498	0,2667	0,1089
75%-Quantil	0,9049	0,7836	0,6350	0,4586	0,2756	0,1145
90%-Quantil	0,9060	0,7870	0,6408	0,4665	0,2836	0,1196
95%-Quantil	0,9067	0,7889	0,6443	0,4712	0,2886	0,1227
$\mathbb{E}^\mathbb{Q}[\cdot   \mathcal{F}_{t_0}]$	0,9036	0,7798	0,6282	0,4497	0,2667	0,1091

Tabelle 6.2: Erwartungswert und Quantile des Survivor Index in Abhängigkeit der Laufzeit

Quantil bzw. Moment	Relative Abweichung $p_{i_0}(T - l^*) / \mathbb{E}^\mathbb{Q}[p_{i_0}(T - l^*)   \mathcal{F}_{t_0}] - 1$ bei $\eta_\kappa = 0,1$ und $T - l^* = \dots$					
	5	10	15	20	25	30
5%-Quantil	-0,0035	-0,0119	-0,0260	-0,0482	-0,0818	-0,1210
10%-Quantil	-0,0027	-0,0092	-0,0202	-0,0377	-0,0641	-0,0960
25%-Quantil	-0,0014	-0,0047	-0,0105	-0,0197	-0,0338	-0,0513
50%-Quantil	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0000	-0,0012
75%-Quantil	0,0014	0,0049	0,0107	0,0199	0,0337	0,0503
90%-Quantil	0,0027	0,0091	0,0200	0,0373	0,0635	0,0966
95%-Quantil	0,0034	0,0116	0,0255	0,0479	0,0821	0,1254
$\widehat{\text{SID}}^\mathbb{Q}[\cdot   \mathcal{F}_{t_0}]$	0,0021	0,0071	0,0156	0,0292	0,0498	0,0751

Tabelle 6.3: Volatilität des Survivor Index und Abweichung der Quantile relativ zum Erwartungswert in Abhängigkeit der Laufzeit

Quantil bzw. Moment	Absolute Abweichung $p_{i_0}(T - l^*) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[p_{i_0}(T - l^*)   \mathcal{F}_{t_0}]$ bei $\eta_{\kappa} = 0,1$ und $T - l^* = \dots$					
	5	10	15	20	25	30
5%-Quantil	-0,0032	-0,0093	-0,0163	-0,0217	-0,0218	-0,0132
10%-Quantil	-0,0025	-0,0072	-0,0127	-0,0170	-0,0171	-0,0105
25%-Quantil	-0,0013	-0,0037	-0,0066	-0,0089	-0,0090	-0,0056
50%-Quantil	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	-0,0001
75%-Quantil	0,0013	0,0038	0,0067	0,0089	0,0090	0,0055
90%-Quantil	0,0024	0,0071	0,0125	0,0168	0,0169	0,0105
95%-Quantil	0,0031	0,0091	0,0160	0,0215	0,0219	0,0137
$\widehat{\text{SD}}^{\mathbb{Q}}[\cdot   \mathcal{F}_{t_0}]$	0,0019	0,0056	0,0098	0,0131	0,0133	0,0082

Tabelle 6.4: Volatilität des Survivor Index und Abweichung der Quantile vom Erwartungswert in Abhängigkeit der Laufzeit

$\eta_{\kappa}$	Erwartungswerte $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[p_{i_0}(T - l^*)   \mathcal{F}_{t_0}]$ bei $T - l^* = \dots$					
	5	10	15	20	25	30
0,00	0,9032	0,7783	0,6248	0,4444	0,2607	0,1051
0,04	0,9033	0,7789	0,6262	0,4465	0,2631	0,1067
0,08	0,9035	0,7795	0,6275	0,4486	0,2654	0,1082
0,10	0,9036	0,7798	0,6282	0,4497	0,2667	0,1091
0,12	0,9037	0,7802	0,6290	0,4508	0,2679	0,1099
0,16	0,9038	0,7808	0,6302	0,4528	0,2702	0,1115
0,20	0,9039	0,7814	0,6316	0,4550	0,2727	0,1132

Tabelle 6.5: Erwartungswert des Survivor Index in Abhängigkeit des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos und der Laufzeit

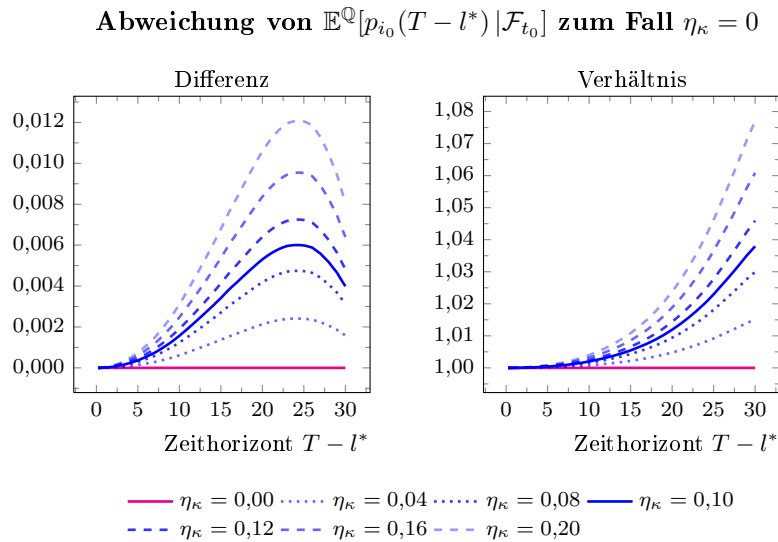


Abbildung 6.5: Abweichungen im erwarteten Survivor Index für verschiedene Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos in Abhängigkeit der Laufzeit

Survivor Index unter dem Martingalmaß zu demjenigen unter dem realen Maß mit der Laufzeit steigt, fällt die Differenz ab einem Zeithorizont von ca. 24 Jahren. Dies ist wieder auf den sterblichkeitsbedingten Rückgang des Survivor Index zurückzuführen, der bei langen Zeithorizonten den Anstieg des prozentualen Unterschieds kompensiert.

Der unter dem realen Maß erwartete Survivor Index und die für die Bewertung des Survivor Caplets resultierenden Cap Rates sind in Tabelle 6.6 dargestellt.

$k_{SC}$	Cap Rates $K_{SC}$ bei $T - t_0 = \dots$					
	5	10	15	20	25	30
0,000	0,9032	0,7783	0,6248	0,4444	0,2607	0,1051
0,025	0,9258	0,7977	0,6405	0,4555	0,2672	0,1077
0,050	0,9484	0,8172	0,6561	0,4666	0,2737	0,1103

Tabelle 6.6: Verwendete Cap Rates

### 6.3.2 Survivor Forward

Abbildung 6.6 zeigt die aus dem Basismodell mit  $\eta_{\kappa} = 0,1$  und  $\varrho_r \varrho_{\kappa} = -0,3$  resultierenden Survivor-Forward-Preise unterschiedlicher Laufzeiten. Für alternative Marktpreise des



Risikos sind sie in Tabelle 6.7, für alternative Korrelationen in Tabelle 6.8 dargestellt.

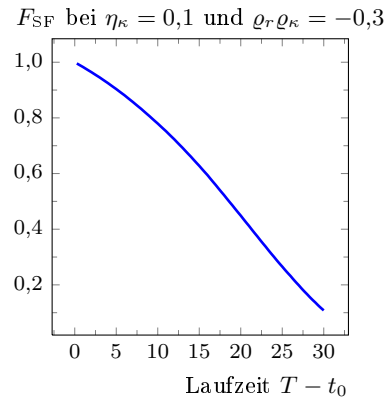


Abbildung 6.6: Survivor-Forward-Preis im Basismodell in Abhängigkeit der Laufzeit

<b>Survivor-Forward-Preis <math>F_{SF}</math> bei <math>\rho_r \rho_\kappa = -0,3</math> und <math>T - t_0 = \dots</math></b>						
$\eta_\kappa$	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>25</b>	<b>30</b>
0,00	0,9032	0,7781	0,6243	0,4435	0,2596	0,1043
0,04	0,9033	0,7787	0,6257	0,4457	0,2621	0,1060
0,08	0,9035	0,7793	0,6271	0,4478	0,2644	0,1076
0,10	0,9035	0,7797	0,6277	0,4488	0,2656	0,1083
0,12	0,9036	0,7800	0,6285	0,4500	0,2669	0,1092
0,16	0,9038	0,7806	0,6297	0,4520	0,2692	0,1108
0,20	0,9039	0,7812	0,6311	0,4542	0,2717	0,1125

Tabelle 6.7: Preis des Survivor Forwards in Abhängigkeit des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos und der Laufzeit

In allen Fällen fallen die Forward-Preise mit der Laufzeit. In den Werten und der *Abhängigkeit von der Laufzeit  $T - t_0$*  ähneln sie stark dem unter dem realen oder Martingalmaß erwarteten Survivor Index in Abbildung 6.4. Angesichts der Bewertungsformel (6.61) ist dies wenig überraschend: Bei einer Korrelation von  $\rho_r \rho_\kappa = 0$  stimmen die Forward-Preise mit dem unter dem Martingalmaß erwarteten Survivor Index überein. Eine Abweichung zu letzterem ergibt sich folglich nur aus der Korrelation, eine Abweichung zu dem unter dem realen Maß erwarteten Survivor Index nur aus der Korrelation und dem Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos.

Auch in ihrer *Abhängigkeit vom Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos  $\eta_\kappa$*  (vgl. Tabelle 6.7

Survivor-Forward-Preis $F_{\text{SF}}$ bei $\eta_{\kappa} = 0,1$ und $T - t_0 = \dots$						
$\varrho_r \varrho_{\kappa}$	5	10	15	20	25	30
-0,6	0,9035	0,7795	0,6272	0,4479	0,2646	0,1076
-0,5	0,9035	0,7795	0,6274	0,4482	0,2649	0,1079
-0,4	0,9035	0,7796	0,6275	0,4485	0,2653	0,1081
-0,3	0,9035	0,7797	0,6277	0,4488	0,2656	0,1083
-0,2	0,9035	0,7797	0,6279	0,4491	0,2659	0,1086
-0,1	0,9036	0,7798	0,6281	0,4494	0,2663	0,1088
0,0	0,9036	0,7798	0,6282	0,4497	0,2666	0,1090
0,1	0,9036	0,7800	0,6284	0,4500	0,2670	0,1093
0,2	0,9036	0,7800	0,6286	0,4503	0,2674	0,1096
0,3	0,9036	0,7801	0,6288	0,4506	0,2677	0,1098
0,4	0,9036	0,7801	0,6289	0,4509	0,2680	0,1100
0,5	0,9036	0,7802	0,6291	0,4511	0,2684	0,1102
0,6	0,9036	0,7802	0,6293	0,4514	0,2687	0,1105

Tabelle 6.8: Preis des Survivor Forwards in Abhängigkeit von Korrelation und Laufzeit

und Abbildung 6.7) stimmen die Forward-Preise und der unter dem Martingalmaß erwartete Survivor Index fast perfekt überein. Wie zu erwarten, steigen die Forward-Preise bei gegebener Korrelation und Laufzeit mit dem Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos. Dies liegt daran, dass ein höherer Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos eine geringere risikoneutrale Sterblichkeit und folglich einen höheren Überlebensindex impliziert. Interessanterweise sind die Forward-Preise annähernd linear vom Marktpreis des Risikos abhängig.

Wie beim erwarteten Survivor Index steigt dabei der relative Effekt des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos mit der Laufzeit – und zwar umso stärker je höher die Laufzeit –, während der absolute Effekt ab einem Zeithorizont von ca. 24 Jahren abnimmt. Letzteres ist wieder auf den natürlichen, sterblichkeitsbedingten Rückgang des Survivor Index zurückzuführen.

Trotz der beschriebenen, stets positiven Abhängigkeit scheint der Effekt des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos zunächst gering: So führt eine 20%-ige Überschätzung gegenüber dem Basismodell selbst bei einer Laufzeit von 25 Jahren lediglich zu einer Überschätzung des Forward-Preises um 0,0013, bei Laufzeiten von zehn, 20 bzw. 30 Jahren sogar nur um 0,0003, 0,0012 bzw. 0,0009. Relativ zum Forward-Preis im Basismodell entspricht dies einer Überschätzung um 0,48%, 0,04%, 0,25% bzw. 0,79%.

Beachtenswert wird die Abhängigkeit des Survivor-Forward-Preises vom Marktpreis des Ri-

Abweichung von  $F_{SF}$  zum Fall  $\eta_\kappa = 0$  bei  $\rho_r \rho_\kappa = -0,3$

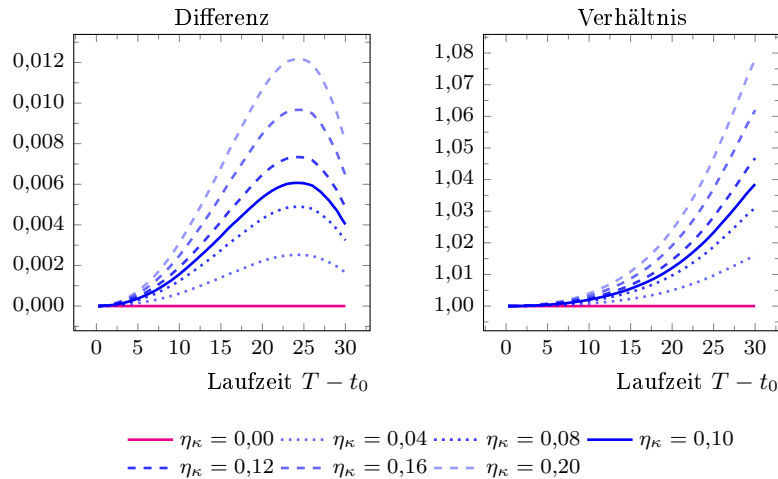


Abbildung 6.7: Abweichungen im Survivor-Forward-Preis für verschiedene Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos in Abhängigkeit der Laufzeit

sikos daher nur angesichts der langen Laufzeit von Sterblichkeitsderivaten und der großen Schwankungsbreite in den Schätzungen des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos (vgl. die Schätzungen von BAUER ET AL., 2010).

Die *Abhängigkeit des Forward-Preises von der Korrelation  $\rho_r \rho_\kappa$*  lässt sich für unterschiedliche Laufzeiten Tabelle 6.8 und Abbildungen 6.8 und 6.9, für unterschiedliche Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos Tabelle 6.9 und Abbildung 6.10 entnehmen.

Es zeigt sich, dass der Survivor-Forward-Preis stets positiv von der Korrelation abhängt. Dies lässt sich leicht erklären: Im Vergleich zum Nullkorrelationsfall geht bei einer positiven (negativen) Korrelation zwischen Sterblichkeit und Zinsen ein niedriger Survivor Index tendenziell mit einem hohen (niedrigen) Geldmarktkonto einher und andersherum. Hohe Auszahlungen des Survivor Forwards werden daher tendenziell weniger stark (stärker) diskontiert als niedrige Auszahlungen, was bei ansonsten gleichen Verteilungsannahmen den Wert des Survivor Forwards bei einem gegebenen Forward-Preis erhöht (schmälert). Um bei Vertragsabschluss einen Wert von null zu erreichen, muss der Forward-Preis daher höher (niedriger) ausfallen. Dies gilt umso mehr, je stärker positiv (negativ) die Korrelation ist.

Ähnlich wie die Abhängigkeit des Forward-Preises vom Marktpreis des Risikos stellt sich auch seine Abhängigkeit von der Korrelation als linear heraus (vgl. Abbildungen 6.9 und 6.10 rechts). Auch hängt der Preiseffekt wieder von der Laufzeit ab: Wie beim Marktpreis des

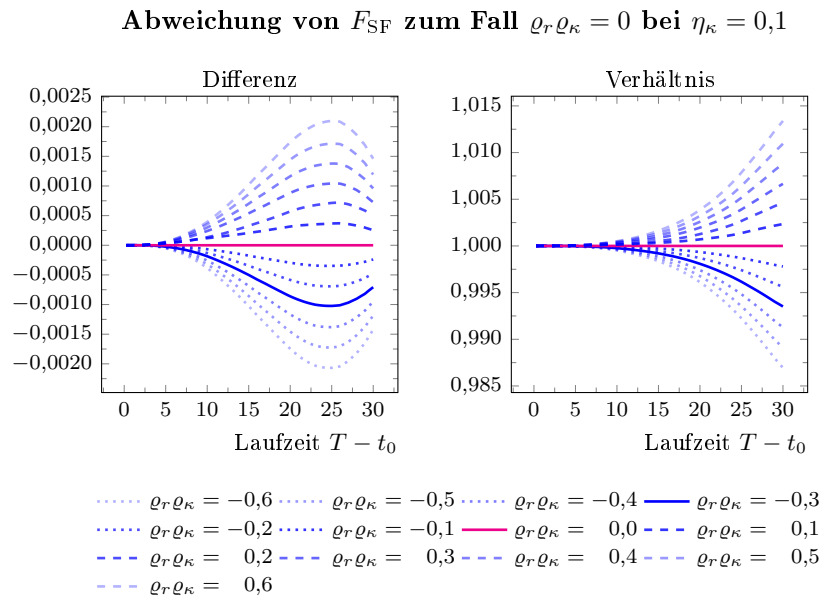


Abbildung 6.8: Abweichungen im Survivor-Forward-Preis für verschiedene Korrelationen in Abhängigkeit der Laufzeit

Survivor-Forward-Preis $F_{SF}$ bei $T - t_0 = 20$ und $\eta_\kappa = \dots$							
$\varrho_r \varrho_\kappa$	0,00	0,04	0,08	0,10	0,12	0,16	0,20
-0,6	0,4426	0,4449	0,4469	0,4479	0,4491	0,4511	0,4533
-0,5	0,4429	0,4451	0,4472	0,4482	0,4494	0,4514	0,4535
-0,4	0,4432	0,4454	0,4475	0,4485	0,4497	0,4517	0,4538
-0,3	0,4435	0,4457	0,4478	0,4488	0,4500	0,4520	0,4542
-0,2	0,4438	0,4460	0,4481	0,4491	0,4502	0,4523	0,4544
-0,1	0,4440	0,4463	0,4484	0,4494	0,4505	0,4526	0,4546
0,0	0,4443	0,4465	0,4486	0,4497	0,4508	0,4528	0,4550
0,1	0,4447	0,4468	0,4489	0,4500	0,4510	0,4531	0,4553
0,2	0,4450	0,4470	0,4492	0,4503	0,4514	0,4534	0,4556
0,3	0,4452	0,4474	0,4495	0,4506	0,4516	0,4537	0,4558
0,4	0,4455	0,4477	0,4498	0,4509	0,4519	0,4540	0,4561
0,5	0,4458	0,4480	0,4501	0,4511	0,4522	0,4543	0,4564
0,6	0,4461	0,4483	0,4503	0,4514	0,4525	0,4546	0,4567

Tabelle 6.9: Preis des Survivor Forwards in Abhängigkeit der Korrelation und des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos

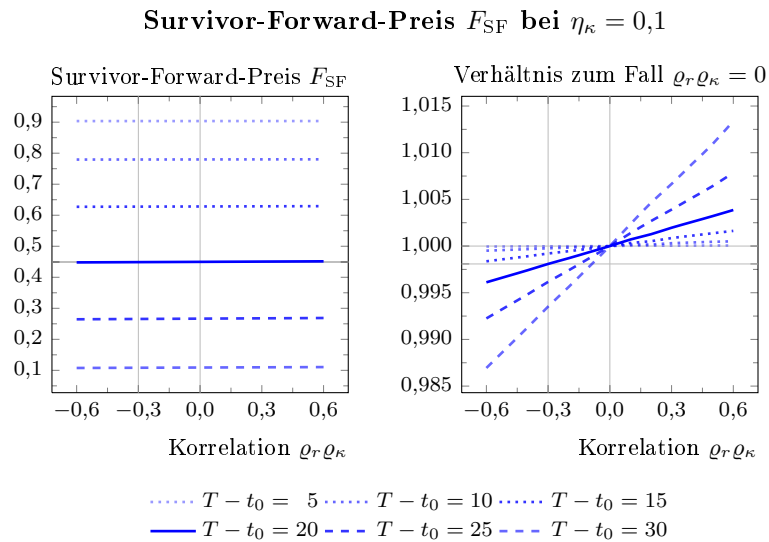


Abbildung 6.9: Survivor-Forward-Preis für verschiedene Laufzeiten in Abhängigkeit der Korrelation

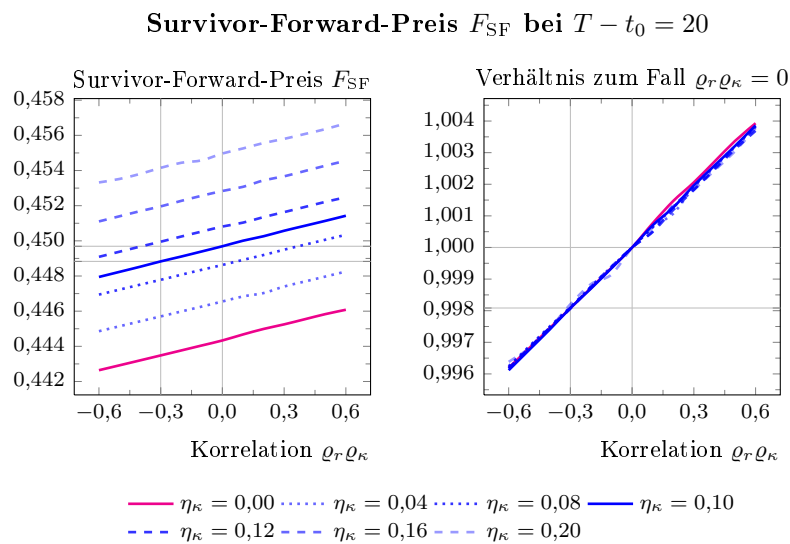


Abbildung 6.10: Survivor-Forward-Preis für verschiedene Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos in Abhängigkeit der Korrelation

Risikos steigt der relative Effekt der Korrelation mit der Laufzeit immer stärker an, während der absolute Effekt ab einem Zeithorizont von ca. 24 Jahren abnimmt (vgl. Abbildung 6.8). Letzteres ist wieder auf den natürlichen, sterblichkeitsbedingten Rückgang des Survivor Index zurückzuführen; ersteres lässt sich auch an der mit der Laufzeit steigenden Steigung in Abbildung 6.9 rechts erkennen.

Die beschriebene Abhängigkeit von der Korrelation gilt unabhängig vom Marktpreis des Risikos. Bei gegebener Laufzeit führt ein höherer Marktpreis des Risikos hauptsächlich zu einer Verschiebung der Forward-Preise nach oben; der absolute und relative Preiseffekt der Korrelation verändern sich kaum (vgl. Abbildung 6.10).

Insgesamt scheint der Einfluss der Korrelation auf den Forward-Preis gering: Verwendet man bei der Bewertung eine Korrelation von  $\varrho_r \varrho_\kappa = 0$  statt  $\varrho_r \varrho_\kappa = -0,3$ , ergibt sich bei Laufzeiten von zehn, 20, 25 und 30 Jahren ein Preisunterschied von 0,0001, 0,0009, 0,0010 bzw. 0,0007. Dies entspricht einer Überschätzung des Forward-Preises um 0,02%, 0,19%, 0,39% bzw. 0,65% im Vergleich zum Basismodell und ist daher erst bei langen Laufzeiten und hohen Nennwerten beachtenswert.

Anders sieht es für Einfluss der Korrelation auf den impliziten Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos aus. Hier führt die Annahme einer weniger negativen oder stärker positiven Korrelation bereits bei kurzen Laufzeiten zu einer deutlichen Unterschätzung des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos.

Zur Verdeutlichung sei unterstellt, dass das Basismodell mit  $\varrho_r \varrho_\kappa = -0,3$  und  $\eta_\kappa = 0,1$  korrekt spezifiziert sei. Schätzt man aus den resultierenden Forward-Preisen implizite Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos und vernachlässigt man dabei die Korrelation, erhält man für Laufzeiten von zehn, 20, 25 und 30 Jahren Risikopreise von 0,0881, 0,0839, 0,0829 bzw. 0,0822. Dies entspricht einer Unterschätzung des korrekten Marktpreises des Risikos um 11,91%, 16,14%, 17,12% bzw. 17,81%.<sup>74</sup> Ob die anhand eines Modells ohne Korrelation bestimmten Marktpreise des Risikos für Derivate mit anderer Laufzeit und insbesondere solche mit anderer Auszahlungsfunktion verwendet werden können, ist daher fraglich.

### 6.3.3 Survivor Caplet

Abbildung 6.11 zeigt die aus dem Basismodell mit  $\eta_\kappa = 0,1$  und  $\varrho_r \varrho_\kappa = -0,3$  resultierenden Survivor-Caplet-Preise unterschiedlicher Laufzeiten und Cap Rates. Für alternative Marktpreise des Risikos sind sie in Tabelle 6.10, für alternative Korrelationen in Tabelle 6.11

<sup>74</sup>Die impliziten Marktpreise des Risikos wurden durch lineare Interpolation aus den Forward-Rate-Preisen für  $\eta_\kappa \in \{0,080; 0,085; 0,090\}$  bestimmt.

dargestellt.

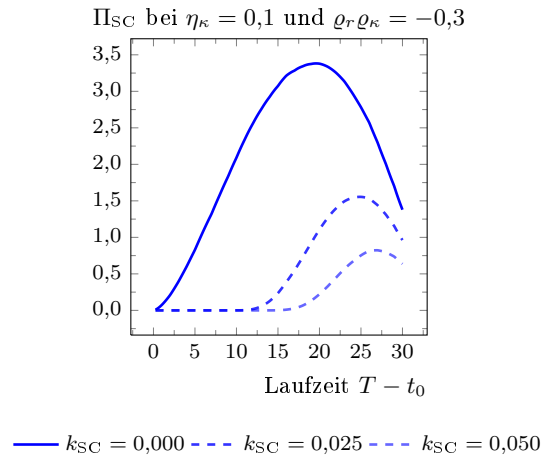


Abbildung 6.11: Survivor-Caplet-Preis in Abhängigkeit der Laufzeit

In allen Fällen zeigt sich eine negative *Abhängigkeit des Caplet-Preises vom Cap-Rate-Aufschlag*  $k_{SC}$ . Dies ist nicht überraschend, da eine höhere Cap Rate ceteris paribus zu selteneren und weniger hohen Auszahlungen führt.

Bei der *Abhängigkeit des Caplet-Preises von der Laufzeit*  $T - t_0$  kommen drei Effekte zum Tragen: Erstens nimmt die absolute Volatilität, wie in Kapitel 6.3.1 beschrieben, bis zu einer Laufzeit von ca. 24 Jahren zu. Dies allein sollte zunächst zu steigenden und danach zu fallenden Caplet-Preisen führen.

Zweitens muss die Auszahlung bei langen Laufzeiten stärker diskontiert werden. Im Vergleich zum ersten Effekt sollten die Caplet-Preise dadurch zunächst weniger schnell steigen und dann früher sowie stärker fallen. Der Scheitelpunkt verschiebt sich ceteris paribus nach links; die Kurve verläuft zunächst flacher und fällt dann steiler.

Drittens und letztens steigt der unter dem Martingalmaß erwarteten Survivor Index mit der Laufzeit relativ zur Cap Rate (vgl. Abbildung 6.12 rechts). Dies liegt daran, dass die Cap Rate an den unter dem realen Maß erwarteten Survivor Index gekoppelt ist und das Verhältnis von dem unter Martingalmaß erwarteten Survivor Index zu diesem mit der Laufzeit steigt (vgl. Abbildung 6.5 rechts).

Absolut betrachtet, vergrößert sich bei einem Aufschlag von  $k_{SC} = 0$  der Abstand des erwarteten Survivor Index zur Cap Rate bis zu einer Laufzeit von ca. 24 Jahren und nimmt dann ab (vgl. Abbildung 6.12 links). Letzteres liegt abermals an dem natürlichen Rückgang

Caplet-Preis $\Pi_{SC,t_0}$ bei $\varrho_r \varrho_\kappa = -0,3$ und $T - t_0 = \dots$						
$\eta_\kappa$	5	10	15	20	25	30
$k_{SC} = 0,000$						
0,00	0,6576	1,4913	2,0315	2,0899	1,6222	0,7633
0,04	0,7194	1,7201	2,4295	2,5741	2,0514	0,9880
0,08	0,7945	1,9740	2,8579	3,1040	2,5294	1,2431
0,10	0,8301	2,0920	3,0734	3,3785	2,7820	1,3788
0,12	0,8761	2,2372	3,3222	3,6918	3,0701	1,5385
0,16	0,9450	2,4902	3,7851	4,2920	3,6337	1,8478
0,20	1,0244	2,7884	4,3301	4,9947	4,2885	2,2081
$k_{SC} = 0,025$						
0,00	0,0000	0,0001	0,1065	0,5540	0,7936	0,4854
0,04	0,0000	0,0002	0,1463	0,7458	1,0624	0,6529
0,08	0,0000	0,0003	0,2101	0,9868	1,3817	0,8535
0,10	0,0000	0,0003	0,2362	1,1059	1,5543	0,9627
0,12	0,0000	0,0005	0,2761	1,2653	1,7640	1,0943
0,16	0,0000	0,0005	0,3508	1,5720	2,1776	1,3529
0,20	0,0000	0,0011	0,4746	1,9772	2,6867	1,6667
$k_{SC} = 0,050$						
0,00	0,0000	0,0000	0,0005	0,0875	0,3327	0,2907
0,04	0,0000	0,0000	0,0010	0,1257	0,4714	0,4075
0,08	0,0000	0,0000	0,0016	0,1919	0,6556	0,5550
0,10	0,0000	0,0000	0,0017	0,2221	0,7527	0,6365
0,12	0,0000	0,0000	0,0029	0,2676	0,8836	0,7385
0,16	0,0000	0,0000	0,0043	0,3625	1,1451	0,9438
0,20	0,0000	0,0000	0,0079	0,5107	1,4930	1,2028

Tabelle 6.10: Preis des Survivor Caplets in Abhängigkeit von Cap Rate, Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos und Laufzeit



Caplet-Preis $\Pi_{SC,t_0}$ bei $\eta_\kappa = 0,1$ und $T - t_0 = \dots$						
$\varrho_T \varrho_\kappa$	5	10	15	20	25	30
$k_{SC} = 0,000$						
-0,6	0,8186	2,0111	2,8917	3,1308	2,5465	1,2487
-0,5	0,8218	2,0370	2,9519	3,2136	2,6254	1,2921
-0,4	0,8250	2,0633	3,0109	3,2948	2,7025	1,3351
-0,3	0,8301	2,0920	3,0734	3,3785	2,7820	1,3788
-0,2	0,8318	2,1160	3,1271	3,4567	2,8587	1,4217
-0,1	0,8356	2,1423	3,1857	3,5379	2,9367	1,4650
0,0	0,8392	2,1675	3,2441	3,6209	3,0151	1,5084
0,1	0,8521	2,2192	3,3284	3,7186	3,1039	1,5596
0,2	0,8553	2,2264	3,3543	3,7763	3,1702	1,6003
0,3	0,8592	2,2697	3,4393	3,8780	3,2567	1,6455
0,4	0,8615	2,2929	3,4934	3,9557	3,3338	1,6894
0,5	0,8641	2,3165	3,5461	4,0329	3,4108	1,7336
0,6	0,8687	2,3343	3,5972	4,1097	3,4971	1,7834
$k_{SC} = 0,025$						
-0,6	0,0000	0,0003	0,2073	0,9871	1,3871	0,8562
-0,5	0,0000	0,0003	0,2179	1,0272	1,4431	0,8920
-0,4	0,0000	0,0003	0,2281	1,0658	1,4986	0,9268
-0,3	0,0000	0,0003	0,2362	1,1059	1,5543	0,9627
-0,2	0,0000	0,0002	0,2459	1,1429	1,6082	0,9970
-0,1	0,0000	0,0002	0,2540	1,1816	1,6632	1,0328
0,0	0,0000	0,0002	0,2600	1,2190	1,7174	1,0680
0,1	0,0000	0,0006	0,2794	1,2842	1,7885	1,1121
0,2	0,0000	0,0006	0,2736	1,2966	1,8304	1,1445
0,3	0,0000	0,0003	0,2990	1,3601	1,8982	1,1838
0,4	0,0000	0,0003	0,3063	1,3967	1,9517	1,2189
0,5	0,0000	0,0003	0,3129	1,4325	2,0046	1,2543
0,6	0,0000	0,0004	0,3162	1,4694	2,0667	1,2955
$k_{SC} = 0,050$						
-0,6	0,0000	0,0000	0,0018	0,1887	0,6527	0,5545
-0,5	0,0000	0,0000	0,0019	0,2009	0,6867	0,5817
-0,4	0,0000	0,0000	0,0018	0,2125	0,7194	0,6091
-0,3	0,0000	0,0000	0,0017	0,2221	0,7527	0,6365
-0,2	0,0000	0,0000	0,0016	0,2333	0,7848	0,6631
-0,1	0,0000	0,0000	0,0016	0,2433	0,8176	0,6901
0,0	0,0000	0,0000	0,0018	0,2522	0,8506	0,7177
0,1	0,0000	0,0000	0,0028	0,2753	0,9040	0,7537
0,2	0,0000	0,0000	0,0032	0,2727	0,9200	0,7764
0,3	0,0000	0,0000	0,0024	0,2994	0,9714	0,8097
0,4	0,0000	0,0000	0,0025	0,3096	1,0033	0,8369
0,5	0,0000	0,0000	0,0027	0,3195	1,0344	0,8640
0,6	0,0000	0,0000	0,0034	0,3260	1,0686	0,8956

Tabelle 6.11: Preis des Survivor Caplets in Abhängigkeit von Cap Rate, Korrelation und Laufzeit

des erwarteten Survivor Index. Da die Option dadurch zunächst stärker und dann weniger stark im Geld ist, verstärkt dies den ersten der drei beschriebenen Effekte und führt zu zunächst steigenden und dann fallenden Caplet-Preisen.

Bei Aufschlägen von  $k_{SC} = 0,025$  bzw.  $k_{SC} = 0,050$  hingegen steigt die Differenz des erwarteten Survivor Index zur Cap Rate bis zu einer Laufzeit von mindestens 30 Jahren weiter an (vgl. Abbildung 6.12 links). Ursache dieses monotonen Anstiegs ist, dass die Cap Rate hier sehr lange über dem erwarteten Survivor Index liegt. Infolge dessen sind hier nicht nur die Caplet-Preise bis zu einer Laufzeit von 8,50 bzw. 12,75 Jahren null; auch verschiebt sich in diesen Fällen der Scheitelpunkt der Caplet-Preiskurve in Abbildung 6.11 nach rechts.

Insgesamt ergibt sich so der in Abbildung 6.11 dargestellte Zusammenhang zwischen Caplet-Preis, Cap-Rate-Aufschlag und Laufzeit.

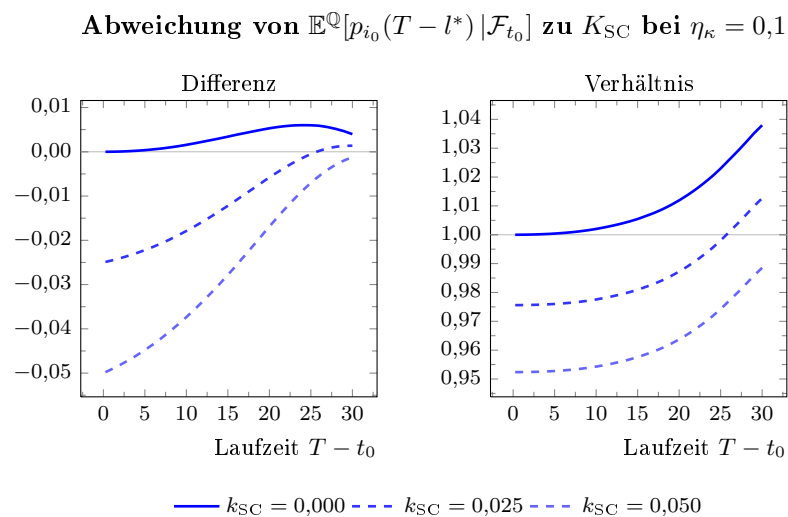


Abbildung 6.12: Abweichung des erwarteten Survivor Index von der Cap Rate für verschiedene Cap-Rate-Aufschläge in Abhängigkeit der Laufzeit

Die *Abhängigkeit des Caplet-Preises vom Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos  $\eta_{\kappa}$*  fällt wie beim Survivor-Forward-Preis positiv aus (vgl. Tabelle 6.10 und Abbildung 6.13). Dies liegt daran, dass ein höherer Marktpreis des Risikos einen höheren Überlebensindex impliziert, das Caplet also ceteris paribus häufiger und höher auszahlt. Der Preiseffekt ist dabei nicht linear, sondern umso stärker, je höher der Marktpreis des Risikos liegt.

Die Stärke des Preiseffekts ist auch von der Laufzeit des Caplets abhängig: Wie Abbildung 6.13 zeigt, wächst die relative Abweichung des Caplet-Preises zum Fall  $\eta_{\kappa} = 0$  im Basisfall

$k_{SC} = 0$  streng monoton mit der Laufzeit. Die absolute Abweichung nimmt bis zu einer Laufzeit von ca. 21 Jahren zu und geht dann zurück. Dies ist auf die beschriebene Laufzeitabhängigkeit des Caplet-Preises zurückzuführen.

**Abweichung von  $\Pi_{SC,t_0}$  zum Fall  $\eta_\kappa = 0$  bei  $k_{SC} = 0$  und  $\varrho_r \varrho_\kappa = -0,3$**

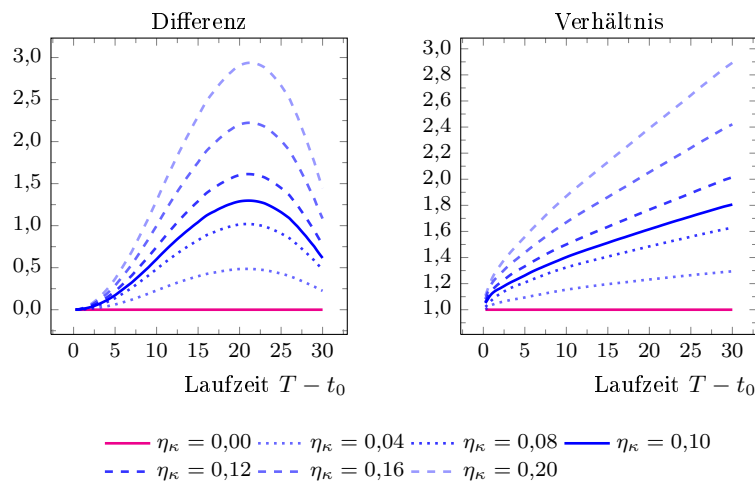


Abbildung 6.13: Abweichung des Survivor-Caplet-Preises für verschiedene Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos in Abhängigkeit der Laufzeit

Der Scheitelpunkt liegt dabei leicht rechts von demjenigen in Abbildung 6.11 und verschiebt sich bei höheren Marktpreisen des Risikos weiter nach rechts. Dies ist dem stärkeren erwarteten Anstieg des Survivor Index geschuldet, der bei gegebener Laufzeit zu einem größeren Abstand zur Cap Rate führt und daher den Scheitelpunkt der Caplet-Preis-Kurve für höhere Marktpreise des Risikos nach rechts verschiebt.

Die Ergebnisse für höhere Cap-Rate-Aufschläge  $k_{SC} \in \{0,025; 0,050\}$  sind hinsichtlich des absoluten Preiseffekts ähnlich. Zwar fällt der Preiseffekt angesichts der geringeren Caplet-Preise deutlich geringer aus und ist erst ab einer Laufzeit von ca. 12 bzw. 15 Jahren festzustellen; nichtdestotrotz ähnelt sein Verlauf der Kurve in Abbildung 6.13 links mit einem deutlich nach rechts verschobenen Scheitelpunkt. Im Gegensatz dazu verläuft der relative Preiseffekt für  $k_{SC} \in \{0,025; 0,050\}$  völlig anders. Bei Laufzeiten um 12 bzw. 15 Jahre fällt er um ein Vielfaches größer aus als bei längeren Laufzeiten, was auf die Caplet-Preise von oder nahe null zurückzuführen ist.

Insgesamt ist der absolute Preiseffekt des Marktpreises des Risikos beim Survivor Caplet noch geringer als beim Survivor Forward. So führt eine 20%-ige Überschätzung gegenüber dem

Basismodell bei  $k_{SC} = 0$ ,  $N_{SC} = 1000$  und Laufzeiten von zehn, 20, 25 bzw. 30 Jahren lediglich zu einer Überschätzung des Caplet-Preise von 0,1452, 0,3133, 0,2881 bzw. 0,1597. Relativ zum Caplet-Preis im Basismodell entspricht dies jedoch einer Überschätzung um 6,94%, 9,27%, 10,35% bzw. 11,58%. Bei höheren Cap-Rate-Aufschlägen fällt die relative Abweichung noch höher aus. Ein möglichst genauer Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos ist daher für die Bewertung von Survivor Caplets von großer Bedeutung.

Die *Abhängigkeit des Caplet-Preises von der Korrelation  $\varrho_r \varrho_\kappa$*  lässt sich für unterschiedliche Laufzeiten Tabelle 6.11 und für unterschiedliche Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos Tabelle 6.12 entnehmen. Für den Fall  $k_{SC} = 0$  ist sie außerdem in Abbildungen 6.14 und 6.15 bzw. Abbildung 6.16 dargestellt.

**Abweichung von  $\Pi_{SC,t_0}$  zum Fall  $\varrho_r \varrho_\kappa = 0$  bei  $k_{SC} = 0$  und  $\eta_\kappa = 0,1$**

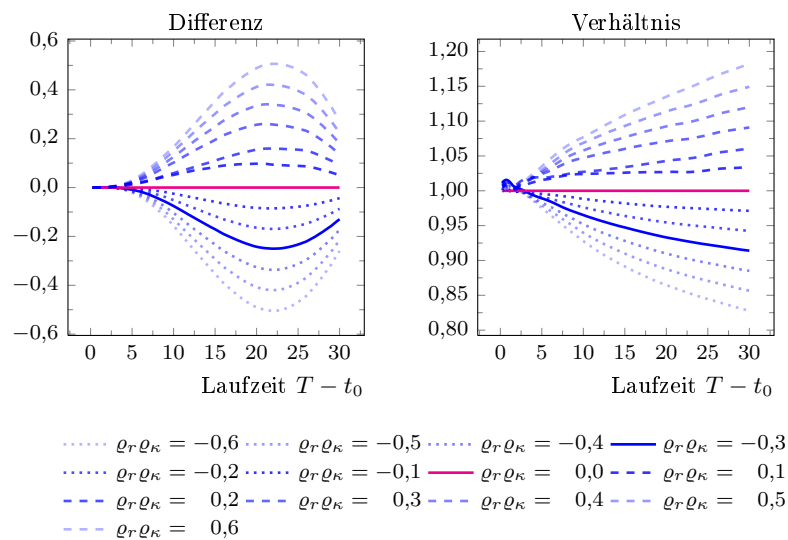


Abbildung 6.14: Abweichung des Survivor-Caplet-Preises für verschiedene Korrelationen in Abhängigkeit der Laufzeit

Stets zeigt sich, dass der Survivor-Caplet-Preis positiv von der Korrelation abhängt. Wie beim Survivor-Forward-Preis ist dies darauf zurückzuführen, dass bei einer positiven (negativen) Korrelation zwischen Momentanzins und Sterblichkeit ein hoher Survivor Index tendenziell mit einem niedrigem (hohem) Geldmarktkonto einhergeht. Bei einer Auszahlung bzw. einer besonders hohen Auszahlung des Survivor Caplets muss daher tendenziell weniger stark (stärker) diskontiert werden, als wenn es das Survivor Caplet nicht im Geld ist oder es nur zu einer niedrigen Auszahlung kommt. Dies erhöht (schmälert) den Wert des

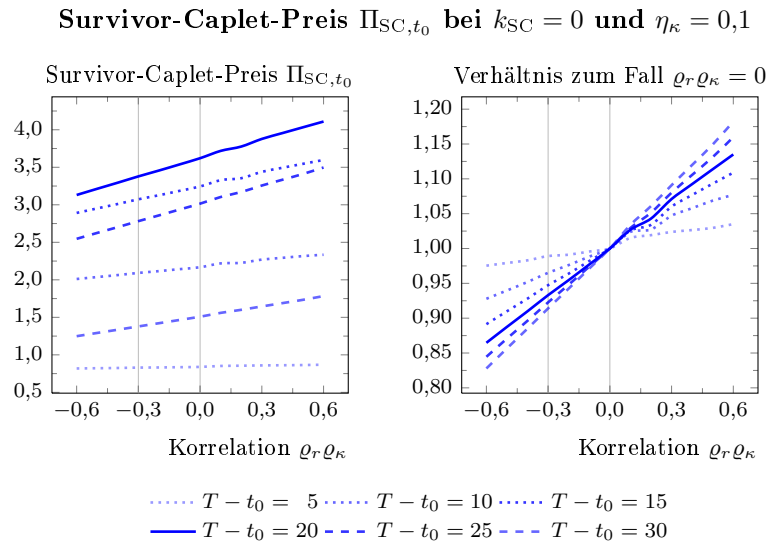


Abbildung 6.15: Sensitivität des Survivor-Caplet-Preises auf die Korrelation bei verschiedenen Laufzeiten

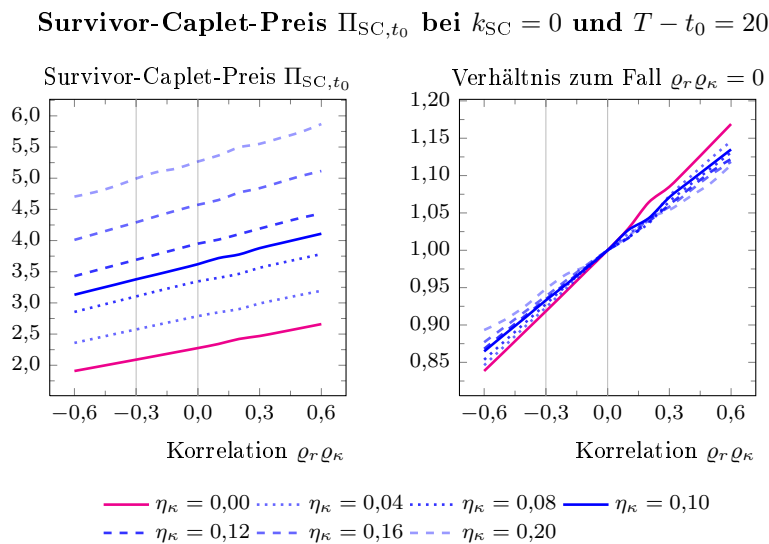


Abbildung 6.16: Sensitivität des Survivor-Caplet-Preises auf die Korrelation bei verschiedenen Marktpreisen des Sterblichkeitsrisikos

Caplet-Preis $\Pi_{SC,t_0}$ bei $T - t_0 = 20$ und $\eta_\kappa = \dots$							
$\varrho_r \varrho_\kappa$	0,00	0,04	0,08	0,10	0,12	0,16	0,20
$k_{SC} = 0,000$							
-0,6	1,9078	2,3583	2,8549	3,1308	3,4291	4,0107	4,7050
-0,5	1,9681	2,4307	2,9385	3,2136	3,5177	4,1046	4,7767
-0,4	2,0291	2,5034	3,0214	3,2948	3,6049	4,1995	4,8739
-0,3	2,0899	2,5741	3,1040	3,3785	3,6918	4,2920	4,9947
-0,2	2,1515	2,6464	3,1875	3,4567	3,7781	4,3910	5,0985
-0,1	2,2137	2,7168	3,2678	3,5379	3,8638	4,4853	5,1586
0,0	2,2755	2,7873	3,3450	3,6209	3,9504	4,5737	5,2672
0,1	2,3412	2,8484	3,4023	3,7186	4,0148	4,6500	5,3643
0,2	2,4217	2,9007	3,4659	3,7763	4,1021	4,7675	5,4945
0,3	2,4689	2,9904	3,5633	3,8780	4,1914	4,8399	5,5508
0,4	2,5309	3,0603	3,6382	3,9557	4,2783	4,9366	5,6449
0,5	2,5953	3,1291	3,7107	4,0329	4,3640	5,0345	5,7389
0,6	2,6600	3,1944	3,7832	4,1097	4,4333	5,1153	5,8687
$k_{SC} = 0,025$							
-0,6	0,4822	0,6502	0,8627	0,9871	1,1226	1,4121	1,7960
-0,5	0,5064	0,6836	0,9056	1,0272	1,1724	1,4657	1,8427
-0,4	0,5308	0,7160	0,9466	1,0658	1,2204	1,5196	1,9028
-0,3	0,5540	0,7458	0,9868	1,1059	1,2653	1,5720	1,9772
-0,2	0,5774	0,7795	1,0253	1,1429	1,3140	1,6272	2,0439
-0,1	0,6006	0,8100	1,0635	1,1816	1,3582	1,6814	2,0773
0,0	0,6232	0,8381	1,1017	1,2190	1,4013	1,7330	2,1528
0,1	0,6538	0,8658	1,1238	1,2842	1,4325	1,7815	2,2088
0,2	0,6821	0,8902	1,1512	1,2966	1,4750	1,8484	2,2878
0,3	0,7025	0,9308	1,1984	1,3601	1,5258	1,8891	2,3160
0,4	0,7274	0,9622	1,2350	1,3967	1,5700	1,9414	2,3700
0,5	0,7517	0,9941	1,2698	1,4325	1,6143	1,9948	2,4249
0,6	0,7870	1,0091	1,2940	1,4694	1,6422	2,0399	2,5110
$k_{SC} = 0,050$							
-0,6	0,0704	0,1050	0,1554	0,1887	0,2245	0,3094	0,4377
-0,5	0,0759	0,1124	0,1671	0,2009	0,2385	0,3270	0,4566
-0,4	0,0818	0,1196	0,1796	0,2125	0,2536	0,3444	0,4797
-0,3	0,0875	0,1257	0,1919	0,2221	0,2676	0,3625	0,5107
-0,2	0,0929	0,1341	0,2049	0,2333	0,2852	0,3811	0,5358
-0,1	0,0979	0,1413	0,2159	0,2433	0,3009	0,3999	0,5496
0,0	0,1026	0,1480	0,2256	0,2522	0,3131	0,4179	0,5681
0,1	0,1111	0,1627	0,2344	0,2753	0,3181	0,4370	0,5915
0,2	0,1130	0,1595	0,2347	0,2727	0,3379	0,4638	0,6286
0,3	0,1173	0,1804	0,2538	0,2994	0,3458	0,4687	0,6342
0,4	0,1219	0,1885	0,2623	0,3096	0,3609	0,4883	0,6552
0,5	0,1274	0,1963	0,2713	0,3195	0,3741	0,5075	0,6754
0,6	0,1380	0,1912	0,2746	0,3260	0,3822	0,5210	0,7175

Tabelle 6.12: Preis des Survivor Caplets in Abhängigkeit von Cap Rate, Korrelation und Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos

Caplets und gilt umso mehr, je stärker positiv (negativ) die Korrelation ist.

Ebenfalls analog zum Survivor Forward stellt sich auch beim Survivor Caplet die Abhängigkeit des Preises von der Korrelation als annähernd linear heraus (vgl. Abbildungen 6.15 und 6.16 für den Fall  $k_{SC} = 0$ ). Der Preiseffekt hängt auch hier von der Laufzeit ab: Wie beim Survivor Forward und beim Marktpreis des Risikos nimmt der absolute Effekt aufgrund der Laufzeitabhängigkeit des Caplet-Preises zunächst zu und dann ab. Im Fall  $k_{SC} = 0$  ist der Scheitelpunkt bei einer Laufzeit von ca. 22 Jahren erreicht (vgl. Abbildung 6.14 links). In den Fällen  $k_{SC} = 0,025$  und  $k_{SC} = 0,050$  ist ein Unterschied erst nach einer Laufzeit von ca. 8 bzw. 13 Jahren zu bemerken und der Scheitelpunkt verschiebt sich deutlich nach rechts. Angesichts des Verlaufs der Caplet-Preise in Abbildung 6.11 ist dies wenig überraschend.

Im Gegensatz zum absoluten Preiseffekt steigt der relative Preiseffekt im Fall  $k_{SC} = 0$  bereits nach wenigen Jahren streng monoton mit der Laufzeit (vgl. Abbildungen 6.14 und 6.15 rechts). Die Ausnahmen bei sehr kurzen Laufzeiten sind den dort äußerst geringen Caplet-Preise geschuldet. Aus demselben Grund ist der relative Preiseffekt bei den höheren Cap-Rate-Aufschlägen  $k_{SC} \in \{0,025; 0,050\}$  bei Laufzeiten um zehn bzw. 14 Jahren um ein Vielfaches höher als bei längeren Laufzeiten und fällt dann schnell ab.

Neben der Laufzeit beeinflusst auch der Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos den Preiseffekt der Korrelation. Der absolute Preiseffekt fällt dabei umso stärker aus, je höher der Marktpreis des Risikos ist (in Abbildung 6.16 links nur schwer zu erkennen). Dies ist nicht erstaunlich: Wie bereits diskutiert, führt ein höherer Marktpreis des Risikos ceteris paribus zu einem höheren Survivor Index unter dem Martingalmaß und damit zu häufigeren und höheren Auszahlungen des Caplets. Bei einem höherem Risikopreis betreffen die durch Korrelation verursachten Unterschiede im Diskontfaktor folglich mehr und höhere Zahlungen und führen so zu größeren Unterschieden im Caplet-Preis. Im Gegensatz dazu nimmt der relative Preiseffekt der Korrelation mit steigendem Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos ab (vgl. Abbildung 6.16 rechts). Offensichtlich steigert ein höherer Marktpreis des Risikos den Caplet-Preis stärker als den absoluten Preiseffekt der Korrelation.

Anders als beim Survivor Forward hat die Korrelation beim Survivor Caplet auch bei kurzen Laufzeiten einen entscheidenden Einfluss auf den Derivatepreis: Verwendet man bei der Bewertung eine Korrelation von  $\varrho_r \varrho_\kappa = 0$  statt  $\varrho_r \varrho_\kappa = -0,3$ , ergibt sich bei  $k_{SC} = 0$  und Laufzeiten  $T - t_0$  von zehn, 20, 25 und 30 Jahren eine relative Überschätzung des Caplet-Preises um 3,61%, 7,17%, 8,38% bzw. 9,40% im Vergleich zum Basismodell. Bei höheren Cap-Rate-Aufschlägen fällt die relative Überschätzung noch höher aus. Bei einem Preiseffekt dieser Größenordnung kann die empirisch beobachtete Korrelation zwischen Sterblichkeit und dem Momentanzins nicht vernachlässigt werden.

Auch auf den impliziten Marktpreis des Sterblichkeitsrisikos hat die Korrelation starken Einfluss. Hier führt die Annahme einer weniger negativen oder stärker positiven Korrelation bereits bei kurzen Laufzeiten zu einer deutlichen Unterschätzung des Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos.

Zur Verdeutlichung sei unterstellt, dass das Basismodell mit  $\varrho_r \varrho_\kappa = -0,3$  und  $\eta_\kappa = 0,1$  korrekt spezifiziert sei. Schätzt man aus den für  $k_{SC} = 0$  resultierenden Caplet-Preisen implizite Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos und vernachlässigt man dabei die Korrelation, erhält man für Laufzeiten von zehn, 20, 25 und 30 Jahren Risikopreise von 0,0875, 0,0839, 0,0829 bzw. 0,0817. Dies entspricht einer Unterschätzung des korrekten Marktpreises des Risikos um 12,54%, 16,12%, 17,11% bzw. 18,34%. Für  $k_{SC} = 0,025$  und Laufzeiten von 20, 25 und 30 Jahren ergeben sich Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos von 0,0817, 0,0825 bzw. 0,0814 und eine Überschätzung des korrekten Risikopreises um 18,35%, 17,51% bzw. 18,56%.<sup>75</sup>

Dabei fällt auf, dass sich die impliziten Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos für verschiedene Laufzeiten und Cap-Rate-Aufschläge unterscheiden und auch leicht von denen abweichen, die aus den Preisen von Survivor Forwards gleicher Laufzeit geschätzt wurden. Wenn man einen Survivor Forward oder ein Survivor Caplet unter Vernachlässigung der Korrelation bewertet und dazu einen beliebigen dieser fehlerhaft geschätzten Marktpreise des Risikos statt des korrekten Risikopreises verwendet, verringert sich zwar die Abweichung zum tatsächlichen Preis; ob sie deshalb einfach auf beliebige Laufzeiten, Cap Rates oder sogar Derivate mit anderer Auszahlungsfunktion angewandt werden können, ist jedoch fraglich. Vielmehr sollte die Korrelation im Bewertungsmodell berücksichtigt werden. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Marktpreise des Sterblichkeitsrisikos nicht aus den Preisen von vergleichbaren Sterblichkeitsderivaten, d. h. solchen mit ähnlicher Laufzeit, Auszahlungsfunktion, Referenzbevölkerung, geschätzt werden können oder wenn sogar auf Marktpreise des Risikos anderer Asset-Klassen zurückgegriffen wird (vgl. Kapitel 2.2.1).

---

<sup>75</sup>Die impliziten Marktpreise des Risikos wurde durch lineare Interpolation aus den Caplet-Preisen für  $\eta_\kappa \in \{0,080; 0,085\}$  bestimmt.





# Kapitel 7

## Resümee

Ziel des Forschungsvorhabens war, die Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und dem Finanzmarkt für eine Bewertung von Sterblichkeitsderivaten empirisch zu bestimmen und ihren Einfluss auf die Preise von Sterblichkeitsderivaten zu untersuchen. So sollte ein Beitrag zur Entwicklung des Markts für Sterblichkeitsderivate geleistet werden.

Die Analyse beschränkte sich bewusst auf die Existenz, die Richtung und den Grad einer eventuellen Abhängigkeit sowie deren Auswirkung auf die Bewertung; die Kausalität und Wirkungsweise des Zusammenhangs wurden nicht untersucht. Besondere Beachtung wurde der leichten Anwendbarkeit der empirischen Ergebnisse auf die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten geschenkt.

Das Vorgehen erfolgte in zwei Schritten. Nach der Diskussion verschiedener Hypothesen und Anhaltspunkte für eine Abhängigkeit und ihrer Relevanz für die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten wurde im ersten Schritt der historische Zusammenhang zwischen der Sterblichkeit und dem Finanzmarkt für Deutschland und die USA analysiert. Dazu wurden diskrete Modelle für die Sterblichkeit sowie für breite Aktienindizes und möglichst risikolose Kassazinsen unter dem realen Maß geschätzt und die Residuen dieser Modelle auf das Vorliegen einer multivariaten Normalverteilung und einer Korrelation untersucht.

Im zweiten Schritt wurde ein konkretes Arbitragemodell zur Bewertung von Sterblichkeitsderivaten vorgeschlagen. Es handelt sich um ein zeitstetiges, auf dem Zeitindexansatz von LEE & CARTER (1992) und dem Zinsmodellrahmen von CHAN ET AL. (1992) basierendes Short-Rate-Modell, das eine zeitverzögerte Abhängigkeit zwischen den Sterblichkeitsindizes und dem Momentanzins über ihre Diffusionsterme erlaubt.

Ein Spezialfall des Modells wurde zur Bewertung eines Survivor Forwards und eines Survivor Caplets angewandt. Es stellt eine zeitstetige Variante des LEE & CARTER (1992)-Modells in der Erweiterung von CARTER & LEE (1992) und BROUHNS ET AL. (2002) dar, die ohne die explizite Modellierung geschlechtsspezifischer Alterskoeffizienten, ohne die Berücksichtigung einer zeitverzögerten Publikation der Sterblichkeitsdaten und ohne die Modellierung einer Abhängigkeit zum Momentanzinsprozess bereits von BIFFIS ET AL. (2005a,b, 2010) und BIFFIS & DENUIT (2006) vorgeschlagen wurde. Es wurde an der Zinsstrukturkurve und mit Hilfe der empirischen Modellschätzungen an historischen Sterblichkeitsdaten der USA kalibriert.

Diese Modellanwendung stellt in mindestens zweierlei Hinsicht ein Novum dar. Zum einen wurden Abhängigkeiten zwischen dem Sterblichkeits- und Zinsprozess bisher nur in Forward-Rate-Modellen berücksichtigt. Zum anderen wurde selbst dort die Abhängigkeitsstruktur nie im Detail spezifiziert und bei eventuellen Modellimplementierungen stets vernachlässigt.

Die empirischen Analysen zeigten deutlich, dass die Sterblichkeit und der Finanzmarkt unter dem realen Maß nicht unabhängig sind. Die Abhängigkeiten traten dabei jeweils bei einem großen Teil der untersuchten Zeiträume, Sterblichkeitsindizes und Aktienindizes bzw. Zinssätze auf. Ein Teil von ihnen war zudem in beiden Ländern und in ähnlicher Weise sowohl bei Aktien als auch Zinsen zu finden.

Genauer wurde sowohl in den USA als auch in Deutschland eine signifikant negative Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktien und zwischen Sterblichkeit und Zinsen entdeckt. Im ersten Fall trat sie bei einer Zeitverzögerung von eineinhalb Jahren, im zweiten Fall bei einer Zeitverzögerung von zweieinhalb Jahren auf. Dies bedeutet, dass einer unerwartet niedrigen Sterblichkeit tendenziell hohe Aktienrenditen und – etwas später – hohe Zinsen folgen.

Die gefundene Abhängigkeit passt zu der Hypothese, dass eine Anpassung der Lebenserwartung nach Zeiten unerwartet niedriger Sterblichkeit die Gesamtersparnis steigere und die Risikoaversität verringere, und deckt sich insofern mit den Ergebnissen von LI ET AL. (2007). Die negative Korrelation zwischen Sterblichkeit und Zinsen kann dabei allerdings allein durch den Effekt der geringeren Risikoaversität erklärt werden.

Ob der vermutete Wirkungszusammenhang der Realität entspricht und wieso ein Unterschied zwischen Aktien und Zinsen besteht, muss für diese ebenso wie für die weiteren zwischen Sterblichkeit und Zinsen entdeckten Abhängigkeiten durch weitere Analysen überprüft werden. Dasselbe gilt für die bei diesen Abhängigkeiten auftretenden Unterschiede zwischen Deutschland und den USA.

Bei der Modellanwendung führte die Vernachlässigung der Korrelation zwischen der Sterblichkeit und dem Finanzmarkt zu einer prozentual großen Verzerrung des Survivor-Caplet-Preises und des aus Forward- oder Caplet-Preisen geschätzten Marktpreises des Sterblichkeitsrisikos. Die Auswirkung der Korrelation auf den Survivor-Forward-Preis war – sowohl absolut als auch relativ gesehen – eher gering.

Für die Bewertung von Sterblichkeitsderivaten bedeutet dies, dass sowohl beim Schätzen von Marktpreisen des Sterblichkeitsrisikos als auch bei der Bewertung von Sterblichkeitsderivaten mit Hebelwirkung die Korrelation zwischen Sterblichkeit und Zinsen nicht vernachlässigt werden darf. Für letzteres ist dies insofern besonders relevant, als dass eine Vernachlässigung der gefundenen negativen Korrelation zwischen Sterblichkeit und Zinsen zu einer Überschätzung des fairen Caplet-Preises führt und die Absicherung von Langlebighkeitsrisiken somit unnötig teuer macht. Für die Entwicklung des Markts für Langlebighkeitsderivate bedeutet dies, dass v. a. die Entwicklung von Derivaten mit Hebelwirkung, die von diesem Preiseffekt der Korrelation profitieren, forciert werden sollte.



# Anhang A

## Ergebnisse der Abhängigkeitsanalysen

### A.1 Sterblichkeit und Aktienrenditen

Bei fast allen untersuchten Aktienindizes, Sterblichkeitsindizes und Lags kann Mardias Test die Nullhypothese einer bivariaten Normalverteilung der Modellresiduen bei einem Konfidenzniveau von 5% und meist sogar von deutlich über 10% nicht ablehnen. Dies gilt sowohl für den jeweils längstmöglichen Zeitraum als auch – in etwas geringerem Maße – für Subzeiträume von mindestens 20 Jahren (vgl. Tabellen A.1 bzw. A.2).

Zur Untersuchung der Signifikanz werden daher die in Kapitel 5.3.1 beschriebenen und entsprechend der Hypothesen ausgewählten t-Tests durchgeführt. Die Ergebnisse sind für Konfidenzniveaus von 5% und 10% in Tabellen A.3 bzw. A.4 zusammengefasst.

Land, Geschlecht und Index	Indextyp	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert > 5% in Mardias Test bei einem Lag von ...										
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
DEUTSCHLAND												
Männer												
DAX	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9917	0,9833	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
CDAX	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9833	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,9917	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Frauen												
DAX	Performance	0,9913	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
CDAX	Performance	0,9524	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	0,9714	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Männer und Frauen												
DAX	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9048	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
CDAX	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9415	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,9825	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
USA												
Männer												
S&P 500	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,9437	0,7013	0,9351	0,9784	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
S&P 600 DS	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,9610	1,0000	1,0000	0,9394	0,8009	0,9481	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Composite	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9351	0,8485	0,9913	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Wilshire	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9848	1,0000	0,9011	0,9810	0,9917	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Frauen												
S&P 500	Kurs	0,9474	1,0000	1,0000	0,9784	1,0000	0,8333	0,9867	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
S&P 600 DS	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9818	1,0000	1,0000	0,8857	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,9818	1,0000	1,0000	0,8571	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,9476	1,0000	1,0000	0,9853	1,0000	0,9294	0,9644	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Composite	Performance	0,8889	1,0000	1,0000	0,9667	1,0000	0,9684	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,9722	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Wilshire	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9242	1,0000	0,9231	0,9905	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Männer und Frauen												
S&P 500	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,9870	1,0000	0,7138	0,9967	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
S&P 600 DS	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9429	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9048	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,9733	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,8067	0,9967	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Composite	Performance	0,9869	1,0000	1,0000	0,9952	1,0000	0,8696	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Wilshire	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9242	1,0000	0,9231	0,9905	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabelle A.1: Mardias Test für die Aktien- und Sterblichkeitsresiduen bei einem Konfidenzniveau von 5%

Land, Geschlecht und Index	Indextyp	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert >10% in Mardias Test bei einem Lag von ...										
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
DEUTSCHLAND												
Männer												
DAX	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9333	0,9250	1,0000	1,0000	0,8571	1,0000	0,9545	1,0000
CDAX	Performance	0,9810	1,0000	1,0000	0,9417	0,9750	1,0000	1,0000	0,8462	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,9417	0,9917	1,0000	1,0000	0,8901	1,0000	1,0000	1,0000
Frauen												
DAX	Performance	0,9654	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
CDAX	Performance	0,7810	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	0,8190	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Männer und Frauen												
DAX	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9697	0,8398	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
CDAX	Performance	0,9524	1,0000	1,0000	0,9412	0,9006	1,0000	1,0000	0,9474	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	0,9905	1,0000	1,0000	0,9477	0,9064	1,0000	1,0000	0,9789	1,0000	1,0000	1,0000
USA												
Männer												
S&P 500	Kurs	0,9883	1,0000	0,9810	0,9524	0,8874	0,4589	0,7792	0,9264	0,9286	0,8105	0,9006
S&P 600 DS	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9905	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9238	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,9134	0,9567	0,9654	0,9870	0,9091	0,6104	0,7792	1,0000	0,9952	0,9789	1,0000
DJ Composite	Performance	0,9804	0,9708	0,9842	1,0000	0,8831	0,6061	0,8701	1,0000	0,9905	0,7316	0,8947
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9636	1,0000	1,0000	1,0000	0,7436	1,0000
DJ Wilshire	Performance	1,0000	0,9778	0,9818	0,9242	0,9872	0,8242	0,9524	0,9750	0,9750	0,7083	0,9333
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,6377	0,8567	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
S&P 500	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,8909	1,0000	1,0000	0,9780	0,7333	1,0000	1,0000	1,0000
S&P 600 DS	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,8364	1,0000	1,0000	0,9670	0,7238	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,7177	1,0000	0,9964	0,9882	1,0000	0,7312	0,8578	1,0000	0,9919	1,0000	0,9970
DJ Composite	Kurs	0,6797	1,0000	1,0000	0,9238	1,0000	0,7510	0,9819	1,0000	1,0000	0,9900	0,9167
DJ Wilshire	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,8333	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9615	1,0000
	Kurs	1,0000	0,9778	0,9818	0,7727	1,0000	0,8352	0,9524	1,0000	1,0000	0,9583	1,0000
Männer und Frauen												
S&P 500	Kurs	0,9591	1,0000	1,0000	0,9481	0,9921	0,5036	0,8767	1,0000	0,9891	0,9486	0,9870
S&P 600 DS	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,9636	1,0000	1,0000	0,9890	0,7714	1,0000	1,0000	1,0000
	Kurs	1,0000	1,0000	1,0000	0,8909	1,0000	1,0000	0,9890	0,7333	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,8500	1,0000	1,0000	0,9867	0,9800	0,5967	0,8333	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DJ Composite	Kurs	0,8497	1,0000	1,0000	0,9429	0,9827	0,6206	0,9638	1,0000	1,0000	0,9209	0,9610
DJ Wilshire	Performance	1,0000	1,0000	1,0000	0,8611	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,8333	0,9872
	Kurs	1,0000	0,9778	0,9818	0,8485	0,9872	0,8462	0,9619	0,9833	0,9917	0,7417	0,9583

Tabelle A.2: Mardias Test für die Aktien- und Sterblichkeitsresiduen bei einem Konfidenzniveau von 10%



Land, Geschlecht und Index	Index- typ	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $\leq 5\%$ im t-Test bei einem Testtyp und Lag von ...										
		Linksseitig					Rechtssseitig					Linksseitig
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	1	2	3	4
Männer												
DAX	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2418	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2418	0,0000	0,0000
	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2527	0,0000	0,0000
Frauen												
DAX	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1053	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,0000	0,0000	0,0000
	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2947	0,0000	0,0000	0,0000
Männer und Frauen												
DAX	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4000	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4684	0,0000	0,0000	0,0000
	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4789	0,0000	0,0000	0,0000
USA												
Männer												
S&P 500	Kurs	0,0409	0,0000	0,0000	0,0000	0,0596	0,0494	0,0324	0,0000	0,5796	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2879	0,0000	0,0220	0,0000	0,2190	0,0000	0,0000
	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2879	0,0000	0,0220	0,0000	0,2286	0,0000	0,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,1171	0,0000	0,0000	0,0000	0,0461	0,0000	0,0000	0,0000	0,3420	0,0000	0,0000
DJ Composite	Kurs	0,0523	0,0000	0,0000	0,0000	0,2176	0,0000	0,0218	0,0000	0,5195	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3111	0,0000	0,0000	0,0000	0,2051	0,0000	0,0000
	Kurs	0,1944	0,0000	0,0000	0,0000	0,1667	0,0000	0,0000	0,0000	0,3361	0,0000	0,0000
Frauen												
S&P 500	Kurs	0,1111	0,0000	0,0000	0,0000	0,1897	0,3739	0,1858	0,0000	0,1938	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2727	0,0000	0,0769	0,0000	0,5269	0,0000	0,0000
	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2727	0,0000	0,1538	0,0000	0,3444	0,0000	0,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,1553	0,0000	0,0000	0,0000	0,0746	0,5396	0,0575	0,0147	0,0418	0,0000	0,0000
DJ Composite	Kurs	0,0588	0,0000	0,0000	0,0000	0,2381	0,0531	0,3080	0,0000	0,4000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5333	0,0000	0,0152	0,0000	0,1795	0,0000	0,0000
	Kurs	0,2500	0,0000	0,0000	0,0000	0,3462	0,0000	0,0577	0,0000	0,1750	0,0000	0,0000
Männer und Frauen												
S&P 500	Kurs	0,0760	0,0000	0,0000	0,0000	0,1542	0,1624	0,0234	0,0000	0,5467	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3182	0,0000	0,0440	0,0000	0,3636	0,0000	0,0000
	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3182	0,0000	0,0549	0,0000	0,3053	0,0000	0,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,1438	0,0000	0,0000	0,0000	0,1300	0,0909	0,0301	0,0000	0,3567	0,0000	0,0000
DJ Composite	Kurs	0,0530	0,0000	0,0000	0,0000	0,2208	0,0136	0,0652	0,0000	0,5733	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4667	0,0000	0,0000	0,0000	0,1795	0,0000	0,0000
	Kurs	0,1944	0,0000	0,0000	0,0000	0,3077	0,0000	0,0000	0,0000	0,2667	0,0000	0,0000

Tabelle A.3: Hypothesenbasierte t-Tests für Aktien und Sterblichkeit bei einem Konfidenzniveau von 5%

Land, Geschlecht und Index		Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $\leq 10\%$ im t-Test bei einem Testtyp und Lag von ...											
		Linksseitig					Rechtssseitig					Linksseitig	
Index- typ		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	1	2	3	4	5
<b>Männer</b>													
DAX	Perf.	0,0000	0,0000	0,0333	0,0000	0,0000	0,0000	0,0286	0,0000	0,3590	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0167	0,0000	0,0000	0,0000	0,0571	0,0000	0,3636	0,0000	0,0000	0,0000
CDAX	Kurs	0,0000	0,0000	0,0167	0,0000	0,0000	0,0000	0,0476	0,0000	0,3457	0,0000	0,0000	0,0000
<b>Frauen</b>													
DAX	Perf.	0,0000	0,0130	0,0000	0,0000	0,0000	0,0048	0,0000	0,2684	0,0000	0,0000	0,0074	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4789	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CDAX	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4789	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>Männer und Frauen</b>													
DAX	Perf.	0,0000	0,0130	0,0000	0,0000	0,0000	0,0190	0,0000	0,4947	0,0000	0,0000	0,0074	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0211	0,0000	0,5278	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CDAX	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0211	0,0000	0,5430	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>USA</b>													
<b>Männer</b>													
S&P 500	Kurs	0,2663	0,0000	0,0000	0,0000	0,2244	0,1792	0,2722	0,0000	0,7430	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4545	0,0000	0,1758	0,0000	0,4423	0,0000	0,0000	0,0095
S&P 600 DS	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4545	0,0000	0,1538	0,0000	0,4124	0,0000	0,0000	0,0095
	Kurs	0,4929	0,0000	0,0000	0,0000	0,1905	0,0567	0,1944	0,0000	0,5931	0,0000	0,0000	0,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,2533	0,0000	0,0000	0,0000	0,5441	0,0429	0,2736	0,0000	0,7229	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5111	0,0000	0,0000	0,0000	0,3846	0,0000	0,0000	0,0000
DJ Wilshire	Kurs	0,2222	0,0000	0,0000	0,0000	0,3896	0,0000	0,0500	0,0000	0,5726	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,4545	0,0000	0,0000	0,0000	0,3360	0,4545	0,5992	0,0000	0,6215	0,0000	0,0000	0,0000
S&P 600 DS	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4091	0,0000	0,3371	0,0000	0,6494	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4242	0,0000	0,3977	0,0000	0,6447	0,0000	0,0000	0,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,5646	0,0000	0,0000	0,0000	0,1921	0,7659	0,1774	0,0299	0,2308	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,5192	0,0000	0,0000	0,0000	0,4762	0,2579	0,7491	0,0000	0,6700	0,0000	0,0000	0,0000
DJ Composite	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,6000	0,0000	0,1515	0,0000	0,4615	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,4167	0,0000	0,0000	0,0000	0,4615	0,0000	0,2900	0,0000	0,5417	0,0000	0,0000	0,0000
<b>Männer und Frauen</b>													
S&P 500	Kurs	0,3110	0,0000	0,0000	0,0000	0,2311	0,3165	0,2966	0,0000	0,8000	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4545	0,0000	0,3000	0,0000	0,5309	0,0000	0,0000	0,0000
S&P 600 DS	Kurs	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4242	0,0000	0,3333	0,0000	0,5195	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,4745	0,0000	0,0000	0,0000	0,1803	0,3017	0,2880	0,0000	0,6000	0,0000	0,0000	0,0000
DJ Ind. Average	Kurs	0,3846	0,0000	0,0000	0,0000	0,5066	0,1083	0,4549	0,0000	0,7733	0,0000	0,0000	0,0000
	Perf.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5556	0,0000	0,0909	0,0000	0,4103	0,0000	0,0000	0,0000
DJ Wilshire	Kurs	0,2500	0,0000	0,0000	0,0000	0,4416	0,0000	0,1485	0,0000	0,6186	0,0000	0,0000	0,0000

Tabelle A.4: Hypothesenbasierte t-Tests für Aktien und Sterblichkeit bei einem Konfidenzniveau von 10%

### A.1.1 Deutschland

Die deutschen Daten spiegeln die auf Basis der Hypothesen vermuteten Zusammenhänge nur bei einem Lag von zwei wider. Nur dort wird die Nullhypothese des ausgewählten t-Tests bei einem Konfidenzniveau von 10% und häufig auch von 5% regelmäßig abgelehnt – allerdings mit Einschränkungen bei jüngeren Endjahren. Bei allen anderen Lags zeigt sich auf den ersten Blick, dass die Sterblichkeits- und Aktienmodellresiduen unabhängig sind (vgl. Tabellen A.3 und A.4). Ihre Ergebnisse werden daher nicht im Detail vorgestellt; die Darstellung beschränkt sich auf das Lag von zwei.

Den Hypothesen zufolge sollte der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktien bei einem Lag von zwei negativ sein. Dementsprechend wird ein linksseitiger t-Test durchgeführt. Seine Ergebnisse sind bei Betrachtung des jeweils längstmöglichen Zeitraums zweigeteilt: Im Fall des gemeinsamen Sterblichkeitsindex für Männer und Frauen sind die Korrelationen bei einem Konfidenzniveau von 10% bzw. 5% für alle bzw. fast alle Aktienindizes signifikant negativ (vgl. Tabelle A.7). Bei den geschlechtsspezifischen Sterblichkeitsindizes hingegen kann die Nullhypothese einer nicht negativen Korrelation selbst bei einem Konfidenzniveau von 10% für keinen Aktienindex abgelehnt werden (vgl. Tabellen A.5 und A.6).

Auch bei kürzeren Zeitreihen zeigt sich eine klare Zweiteilung: Bei Zeitreihen mit Endjahren bis 2002 sind die gemessenen Korrelationen bei allen drei Geschlechterspezifikationen regelmäßig signifikant negativ. Bei einem Konfidenzniveau von 10% trifft dies auf fast alle, bei einem Konfidenzniveau von 5% auf die meisten der analysierten Zeiträume zu. Bei Zeitreihen mit den Endjahren 2003 bis 2008 hingegen sind die Korrelationen deutlich seltener, bei den geschlechtsspezifischen Sterblichkeitsindizes sogar niemals signifikant negativ.

Abbildung 5.13 auf S. 134 zeigt dies am Beispiel des Kursindex des CDAX und des gemeinsamen Sterblichkeitsindex von Männern und Frauen. Im Diagramm rechts oben steigen die p-Werte ab dem Endjahr 2003 rasant an. Im Diagramm rechts unten kann man bei p-Werten von  $>5\%$  am Farbverlauf einen annähernd linearen, negativen Zusammenhang zwischen Startjahr und Zeitreihenlänge erkennen. Die nicht signifikant negativen Korrelationen treten offensichtlich bei Zeiträumen mit denselben Endjahren. Die Ergebnisse für andere deutsche Aktien- und Sterblichkeitsindizes sind ähnlich, wenngleich die p-Werte dort i. d. R. geringfügig höher ausfallen und die Korrelationen bei Zeitreihen mit einem Endjahr nach 2002 noch seltener signifikant negativ sind.

Insgesamt scheint die fehlende Signifikanz mancher Korrelationen, ausschließlich durch die Jahre 2003 bis 2008 getrieben zu sein. Es sprechen daher durchaus einige Punkte für eine negative Abhängigkeit der deutschen Sterblichkeits- und Aktienmodellresiduen.

Die gemessenen Korrelationen bewegen sich für den längstmöglichen Zeitraum zwischen  $-0,1569$  und  $-0,2860$  (vgl. Tabellen A.5 bis und A.7). Betrachtet man nur die signifikanten Korrelationen, d. h. die zwischen den Residuen der drei Aktienindizes und des gemeinsamen Sterblichkeitsindex von Männern und Frauen, liegen sie bei einem Konfidenzniveau von 10% zwischen  $-0,2584$  und  $-0,2860$  sowie bei einem Konfidenzniveau von 5% zwischen  $-0,2767$  und  $-0,2860$  (vgl. Tabelle A.7).

Bei kürzeren Zeiträumen von mindestens 20 Jahren sind sie stets negativ, weisen jedoch eine deutlich höhere Streuung auf. Die nach dem linksseitigen Test und bei einem Konfidenzniveau von 10% bzw. 5% signifikanten Korrelationen betragen zwischen  $-0,2265$  bzw.  $-0,2765$  und  $-0,5311$  und liegen betragsmäßig tendenziell höher als die des längstmöglichen Zeitraums.

### A.1.2 USA

Auch die amerikanischen Daten spiegeln die auf Basis der Hypothesen vermuteten Zusammenhänge nur bei einem Lag von zwei in einer für den Großteil der Indizes und Zeiträume konsistenten Weise wider. Denn nur dort wird die Nullhypothese des ausgewählten t-Tests bei einem Konfidenzniveau von 10% und häufig auch deutlich unter 5% für alle Sterblichkeitsindizes und die meisten Aktienindizes für einen großen Teil der analysierten Zeiträume abgelehnt.

Zwar wird auch bei Lags von minus fünf, minus eins, null und eins – letzteres beim rechtsseitigen Test – die Nullhypothese des jeweils gewählten t-Tests bei einzelnen oder mehreren Sterblichkeits- und Aktienindizes bei einem mit mindestens 10% durchaus beachtenswerten Teil der analysierten Zeiträume verworfen (vgl. Tabellen A.3 und A.4). Allerdings scheint der Zusammenhang bei diesen Lags entweder, durch bestimmte Start- oder Endjahre verursacht zu sein, oder er besteht für einen zu kleinen Teil der Indizes und Zeiträume, als dass man von einer konsistenten und dauerhaft signifikanten Abhängigkeit sprechen könnte. Bei den verbleibenden Lags zeigt sich auf den ersten Blick, dass die gemessenen Korrelationen nicht signifikant sind (ebd.).

Die folgende Darstellung beschränkt sich daher auf das Lag von zwei.

Den Hypothesen zufolge sollte der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Aktien bei einem Lag von zwei negativ sein. Zur Überprüfung der Signifikanz der gemessenen Korrelationen wird daher ein linksseitiger t-Test durchgeführt.

Nach diesem sind die für den längstmöglichen Zeitraum gemessenen Korrelationen für alle

Geschlechterspezifikationen sowie fast alle Aktienindizes bei einem Konfidenzniveau von 10% und häufig auch von deutlich unter 5% signifikant negativ (vgl. Tabellen A.5 bis A.7). Lediglich bei sechs bzw. zehn der 21 Zeitreihenpaare kann die Nullhypothese einer nicht negativen Korrelation nicht abgelehnt werden (ebd.). Betroffen sind bei einem Konfidenzniveau von 10% die Kursindizes des DJ Industrial Average und des DJ Wilshire beim Sterblichkeitsindex für Frauen sowie der Performance-Index des DJ Wilshire bei allen drei Geschlechterspezifikationen.

Nur im Fall des DJ Industrial Average und des Sterblichkeitsindex für Frauen kann der linksseitige Test seine Nullhypothese auch bei verkürzten Zeiträumen fast nie bzw. relativ selten ablehnen (vgl. Tabelle A.3 bzw. A.4). Bei allen anderen Zeitreihenpaaren sind die Korrelationen für einen guten Teil der Subzeiträume signifikant negativ: Bei einem Konfidenzniveau von 5% trifft dies auf bis zu 57,96% und i. d. R. deutlich über 30% der Zeiträume zu, bei einem Konfidenzniveau von 10% sogar auf bis zu 80,00% und i. d. R. deutlich über 50% (ebd.). Kürzere Zeiträume lassen Signifikanz dabei eher vermissen als längere Zeiträume.

Abbildung 5.12 auf S. 133 zeigt die beschriebenen Zusammenhänge am Beispiel des Kursindex des S&P 500 und des gemeinsamen Sterblichkeitindex von Männern und Frauen. Dort fällt auch auf, dass die Korrelationen von Zeitreihen mit frühen Startjahren unabhängig von der Länge der Zeitreihe signifikant negativ sind. Die Ergebnisse für andere Aktien- und Sterblichkeitsindizes der USA stimmen weitestgehend überein, wenngleich der Anteil der Zeiträume mit signifikant negativen Korrelationen dort i. d. R. geringer ausfällt (vgl. Tabellen A.3 und A.4). Insgesamt sprechen die Ergebnisse für eine negative Abhängigkeit zwischen Sterblichkeit und Aktien in den USA.

Für den längstmöglichen Zeitraum bewegen sich die gemessenen und bei einem Konfidenzniveau von 5% bzw. 10% signifikant negativen Korrelationen zwischen  $-0,2792$  bzw.  $-0,2146$  und  $-0,4035$  (vgl. Tabellen A.5 bis A.7). Für kürzere Zeiträume weisen sie eine größere Streuung auf und sind tendenziell stärker negativ. Im Fall des in Abbildung 5.12 auf S. 133 untersuchten Zusammenhangs zwischen dem Kursindex des S&P 500 und dem gemeinsamen Sterblichkeitsindex für Männer und Frauen reichen die bei einem Konfidenzniveau von 5% bzw. 10% signifikanten Korrelationen beispielsweise von  $-0,2766$  bis  $-0,5658$  mit einem Mittelwert von  $-0,3768$  bzw. von  $-0,2307$  bis  $-0,5658$  mit einem Mittelwert von  $-0,3545$ .

Land und Index	Indextyp	Zeitraum	Bivariate Normalverteilung				Korrelation			
			Schiefe		Kurtosis		p-Werte		Test auf ...	
			Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert	Wert	≥ 0	= 0	≤ 0
<b>Deutschland</b>										
DAX	Performance-Index	1977-2008	7,6548	0,1051	0,1912	0,8484	-0,2032	0,1323	0,2647	0,8677
	Performance-Index	1977-2002	1,9776	0,7399	-1,1390	0,2547	-0,3394	0,0449	0,0899	0,9551
CDAX	Performance-Index	1977-2008	8,0328	0,0904	0,1578	0,8746	-0,2129	0,1210	0,2420	0,8790
	Performance-Index	1977-2002	3,5990	0,4630	-0,5946	0,5521	-0,3384	0,0454	0,0909	0,9546
	Kursindex	1977-2008	7,6347	0,1059	0,1095	0,9128	-0,2208	0,1123	0,2245	0,8877
	Kursindex	1977-2002	3,4249	0,4894	-0,6313	0,5278	-0,3477	0,0409	0,0817	0,9591
<b>USA</b>										
S&P 500	Kursindex	1969-2008	7,7115	0,1027	-0,1294	0,8970	-0,3407	0,0157	0,0314	0,9843
	Performance-Index	1976-2008	3,3707	0,4978	-0,8718	0,3833	-0,2823	0,0557	0,1114	0,9443
S&P 600 DS	Performance-Index	1976-2007	3,5539	0,4697	-0,7306	0,4650	-0,3159	0,0391	0,0782	0,9609
	Kursindex	1976-2008	3,0651	0,5470	-0,8521	0,3942	-0,2797	0,0575	0,1150	0,9425
	Kursindex	1976-2007	3,3050	0,5081	-0,7197	0,4717	-0,3102	0,0420	0,0840	0,9580
DJ Ind. Average	Kursindex	1969-2008	5,4775	0,2417	-0,1644	0,8694	-0,3172	0,0231	0,0461	0,9769
	Kursindex	1969-2008	6,5138	0,1639	-0,2033	0,8389	-0,4035	0,0049	0,0098	0,9951
DJ Composite	Performance-Index	1978-2008	2,9961	0,5585	-1,2029	0,2290	-0,1590	0,1964	0,3929	0,8036
	Performance-Index	1978-2003	4,6843	0,3212	-1,1255	0,2604	-0,2801	0,0829	0,1657	0,9171
	Performance-Index	1978-2001	2,7675	0,5975	-1,1913	0,2335	-0,3939	0,0284	0,0568	0,9716
	Kursindex	1975-2008	5,4844	0,2411	-0,8408	0,4004	-0,2503	0,0767	0,1534	0,9233
DJ Wilshire	Kursindex	1975-2005	6,5628	0,1609	-0,7341	0,4629	-0,3156	0,0419	0,0837	0,9581

Tabelle A.5: Abhängigkeitsanalysen für Aktien und die Sterblichkeit von Männern bei einem Lag von 2

Land und Index	Indextyp	Zeitraum	Bivariate Normalverteilung				Korrelation			
			Schiefe		Kurtosis		p-Werte		p-Werte – Test auf ...	
			Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert	Wert	≥ 0	= 0	≤ 0
<b>Deutschland</b>										
DAX	Performance-Index	1971–2008	4,4857	0,3442	-0,1589	0,8738	-0,1569	0,1734	0,3468	0,8266
	Performance-Index	1971–2008	5,9207	0,2052	0,1612	0,8720	-0,2094	0,1035	0,2070	0,8965
	Performance-Index	1971–2002	2,4061	0,6615	0,0502	0,9600	-0,3202	0,0370	0,0740	0,9630
	Kursindex	1971–2008	5,4173	0,2471	0,0943	0,9248	-0,2113	0,1015	0,2029	0,8985
	Kursindex	1971–2002	2,2423	0,6913	0,0349	0,9721	-0,3211	0,0366	0,0732	0,9634
<b>USA</b>										
S&P 500	Kursindex	1965–2008	3,6730	0,4521	-1,0356	0,3004	-0,2146	0,0810	0,1619	0,9190
	Kursindex	1966–2005	3,1891	0,5267	-0,9162	0,3596	-0,2674	0,0476	0,0953	0,9524
S&P 600 DS	Performance-Index	1976–2008	4,3395	0,3620	-0,7185	0,4724	-0,3780	0,0150	0,0301	0,9850
	Kursindex	1976–2008	4,0233	0,4029	-0,7182	0,4726	-0,3596	0,0199	0,0398	0,9801
DJ Ind. Average	Kursindex	1952–2008	2,0782	0,7214	-1,0479	0,2947	-0,1047	0,2191	0,4383	0,7809
	Kursindex	1966–2008	3,0288	0,5530	-1,1326	0,2574	-0,2934	0,0281	0,0562	0,9719
DJ Composite	Performance-Index	1978–2008	3,2166	0,5223	-1,0778	0,2811	-0,1902	0,1527	0,3054	0,8473
	Performance-Index	1978–2005	3,2831	0,5116	-0,9362	0,3492	-0,2741	0,0790	0,1580	0,9210
DJ Wilshire	Performance-Index	1978–2001	2,9631	0,5640	-1,0788	0,2807	-0,3521	0,0458	0,0915	0,9542
	Kursindex	1975–2008	4,6540	0,3247	-0,6291	0,5293	-0,2241	0,1013	0,2026	0,8987
	Kursindex	1976–2008	1,9472	0,7455	-1,2724	0,2032	-0,2719	0,0629	0,1259	0,9371
	Kursindex	1976–2006	1,8413	0,7649	-1,2452	0,2131	-0,3018	0,0495	0,0989	0,9505

Tabelle A.6: Abhängigkeitsanalysen für Aktien und die Sterblichkeit von Frauen bei einem Lag von 2

Land und Index	Indextyp	Zeitraum	Bivariate Normalverteilung				Korrelation				
			Schiefe		Kurtosis		p-Werte		Test auf ...		
			Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert	Wert	≥ 0	= 0	≤ 0	
<b>Deutschland</b>											
<b>DAX</b>	Performance-Index	1971-2008	5,9633	0,2019	0,1486	0,8819	0,8819	-0,2584	0,0586	0,1172	0,9414
	Performance-Index	1971-2002	0,7304	0,9475	-0,6696	0,5031	0,5031	-0,3806	0,0158	0,0317	0,9842
	Performance-Index	1971-2008	7,8234	0,0983	0,3687	0,7123	0,7123	-0,2767	0,0463	0,0926	0,9537
<b>CDAX</b>	Performance-Index	1971-2002	2,4517	0,6533	-0,1487	0,8818	0,8818	-0,4002	0,0116	0,0232	0,9884
	Kursindex	1971-2008	7,2402	0,1237	0,3023	0,7624	0,7624	-0,2860	0,0409	0,0817	0,9591
<b>USA</b>											
<b>S&amp;P 500</b>	Kursindex	1966-2008	4,5004	0,3425	-0,8119	0,4168	0,4168	-0,2983	0,0260	0,0520	0,9740
	Performance-Index	1976-2008	3,9434	0,4137	-0,7673	0,4429	0,4429	-0,3325	0,0294	0,0587	0,9706
<b>S&amp;P 600 DS</b>	Kursindex	1976-2008	3,6126	0,4610	-0,7591	0,4478	0,4478	-0,3214	0,0341	0,0682	0,9659
	Kursindex	1966-2008	3,1394	0,5348	-0,8663	0,3863	0,3863	-0,2792	0,0349	0,0698	0,9651
<b>DJ Inc. Average</b>	Kursindex	1966-2008	3,9747	0,4094	-0,9085	0,3636	0,3636	-0,3748	0,0066	0,0133	0,9934
	Performance-Index	1978-2008	3,2086	0,5235	-1,0984	0,2720	0,2720	-0,1802	0,1660	0,3320	0,8340
<b>DJ Wilshire</b>	Performance-Index	1978-2005	4,4958	0,3430	-0,9489	0,3427	0,3427	-0,2696	0,0826	0,1653	0,9174
	Performance-Index	1978-2002	3,0898	0,5429	-1,2410	0,2146	0,2146	-0,3451	0,0456	0,0911	0,9544
	Kursindex	1975-2008	4,9095	0,2967	-0,7731	0,4395	0,4395	-0,2463	0,0802	0,1603	0,9198
Kursindex	1975-2005	5,4363	0,2454	-0,6400	0,5222	0,5222	-0,3080	0,0459	0,0919	0,9541	

Tabelle A.7: Abhängigkeitsanalysen für Aktien und die Sterblichkeit von Männern und Frauen bei einem Lag von 2



## A.2 Sterblichkeit und Zinsen

Beim Test auf bivariate Normalverteilung der Zins- und Sterblichkeitsresiduen muss zwischen den beiden Ländern und Stichtagen differenziert werden. Bei den deutschen Zins- und Sterblichkeitsmodellen kann Mardias Test die Nullhypothese einer bivariaten Normalverteilung der Modellresiduen bei einem Konfidenzniveau von 5% und meist sogar von deutlich über 10% fast nie ablehnen. Dies gilt sowohl für den jeweils längstmöglichen Zeitraum als auch für Subzeiträume von mindestens 20 Jahren (vgl. Tabellen A.8 bis A.11). Auf die einjährige Zinsstrukturrendite bei betragsmäßig höheren Lags trifft dies in etwas geringerem Maße zu als auf andere Zinssätze und andere Lags (ebd.).

Ähnliches gilt auch für die amerikanischen Zins- und Sterblichkeitsmodelle beim Zinsmodellstichtag des 1. Januar. Hier kann Mardias Test seine Nullhypothese bei einem Konfidenzniveau von 5% bzw. 10% beim jeweils längstmöglichen Zeitraum nie bzw. fast nie ablehnen. Auch bei verkürzten Zeiträumen gelingt es ihm nur bei einem kleinen Teil der Zeitreihenpaare und Zeiträume (vgl. Tabellen A.8 und A.9).

Im Gegensatz dazu wird bei den amerikanischen Zins- und Sterblichkeitsmodellen und dem Zinsmodellstichtag des 1. Juli die Nullhypothese einer bivariaten Normalverteilung sowohl beim jeweils längstmöglichen Zeitraum als auch bei den analysierten Subzeiträumen deutlich häufiger abgelehnt (vgl. Tabellen A.10 und A.11). Dies gilt vor allem für den dreimonatigen T-Bill-Satz und dort in besonderem Maße für negative Lags; der einjährige T-Bill-Satz hingegen ist in deutlich geringerem Maße und vor allem bei hohen Lags betroffen (ebd.). Es liegt nahe, dass dies an den Zinsmodellresiduen liegt – insbesondere beim dreimonatigen T-Bill-Satz lehnt der Jarque-Bera-Test die Normalverteilungshypothese nur bei einem vergleichsweise niedrigen Konfidenzniveau nicht ab (vgl. Tabelle 5.23).

Unter Beachtung der genannten Einschränkungen sind auch bei den Modellresiduen der Zins- und Sterblichkeitsmodelle der t-Test anwendbar und der Schluss von Unkorreliertheit auf Unabhängigkeit möglich. Zur Untersuchung der Signifikanz werden daher die in Kapitel 5.3.1 beschriebenen und entsprechend der Hypothesen ausgewählten t-Tests durchgeführt. Sie werden nur auf Zeiträume angewandt, für die die Modellresiduen des betrachteten Zeitreihenpaares als bivariat normalverteilt gelten können. Die Ergebnisse sind für Konfidenzniveaus von 5% und 10% in Tabellen A.12 bis A.15 zusammengefasst.

Land, Geschlecht und Zinssatz	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $> 5\%$ in Mardias Test bei einem Lag von ...										
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
DEUTSCHLAND											
Männer											
Einjährige Zinsstruktur	1,0000	0,9872	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,8718
Frauen											
Einjährige Zinsstruktur	1,0000	0,5769	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9708	1,0000	0,4678
Männer und Frauen											
Einjährige Zinsstruktur	1,0000	0,7051	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,4678
USA											
Männer											
Einjähriger T-Bill-Satz	1,0000	1,0000	0,9957	0,9957	0,8442	1,0000	1,0000	0,9913	1,0000	1,0000	0,8905
Frauen											
Einjähriger T-Bill-Satz	1,0000	0,9964	1,0000	1,0000	0,9202	1,0000	1,0000	0,9908	0,9677	1,0000	0,9294
Männer und Frauen											
Einjähriger T-Bill-Satz	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9067	1,0000	1,0000	0,9933	0,9933	0,9967	0,8804

Tabelle A.8: Mardias Test für die Zins- und Sterblichkeitsresiduen beim Stichtag 1. Januar und einem Konfidenzniveau von 5%

Land, Geschlecht und Zinssatz	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $> 10\%$ in Mardias Test bei einem Lag von ...										
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
DEUTSCHLAND											
Männer											
Einjährige Zinsstruktur	1,0000	0,7436	0,9890	0,9810	1,0000	0,8833	1,0000	0,6750	0,7905	0,9560	0,8590
Frauen											
Einjährige Zinsstruktur	0,9848	0,3462	0,8901	1,0000	0,9583	1,0000	0,9346	1,0000	0,8772	1,0000	0,4152
Männer und Frauen											
Einjährige Zinsstruktur	1,0000	0,4615	0,9780	1,0000	0,9917	0,9926	0,9477	0,9825	0,9649	1,0000	0,4444
USA											
Männer											
Einjähriger T-Bill-Satz	1,0000	1,0000	0,9091	0,9870	0,7100	1,0000	0,9740	0,9481	0,9264	0,9610	0,6667
Frauen											
Einjähriger T-Bill-Satz	1,0000	0,9819	1,0000	1,0000	0,6410	1,0000	1,0000	0,9632	0,9226	0,9899	0,8801
Männer und Frauen											
Einjähriger T-Bill-Satz	1,0000	0,9964	1,0000	0,9900	0,6800	1,0000	0,9867	0,9500	0,9267	0,9800	0,7355

Tabelle A.9: Mardias Test für die Zins- und Sterblichkeitsresiduen beim Stichtag 1. Januar und einem Konfidenzniveau von 10%

Land, Geschlecht und Zinssatz	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $> 5\%$ in Mardias Test bei einem Lag von ...										
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
DEUTSCHLAND											
Männer											
Sechsmonatige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9615
Einfährige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9744
Frauen											
Sechsmonatige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9942
Einfährige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,7135
Männer und Frauen											
Sechsmonatige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9485	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9766
Einfährige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9825
USA											
Männer											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,3030	0,5325	0,4502	0,3117	0,5628	0,6104	0,5498	0,4199	0,6667	0,6190	0,7190
Einfähriger T-Bill-Satz	0,9913	0,9524	1,0000	0,9394	0,9567	0,9870	0,9264	0,8961	0,9307	0,7403	0,8333
Frauen											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,5788	0,5977	0,4624	0,3246	0,6572	0,6524	0,3933	0,4810	0,5480	0,5220	0,5818
Einfähriger T-Bill-Satz	1,0000	0,9964	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,6281	0,9747	1,0000	0,7843	0,9577
Männer und Frauen											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,3533	0,4367	0,3467	0,2600	0,5300	0,6400	0,5833	0,4000	0,6833	0,6433	0,6848
Einfähriger T-Bill-Satz	1,0000	0,9964	1,0000	0,9967	1,0000	1,0000	0,8267	0,9200	1,0000	0,7167	0,8877

Tabelle A.10: Mardias Test für die Zins- und Sterblichkeitsresiduen beim Stichtag 1. Juli und einem Konfidenzniveau von 5%

Land, Geschlecht und Zinssatz	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert > 10% in Mardias Test bei einem Lag von ...										
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
<b>DEUTSCHLAND</b>											
<b>Männer</b>											
Sechsmonatige Zinsstruktur	0,9697	1,0000	1,0000	0,7714	1,0000	0,7667	0,9167	1,0000	1,0000	0,8352	0,9231
Einjährige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	0,7714	1,0000	0,9667	0,8917	1,0000	1,0000	0,8242	0,9103
<b>Frauen</b>											
Sechsmonatige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9006	0,9766
Einjährige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,5497	1,0000
<b>Männer und Frauen</b>											
Sechsmonatige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	0,9714	1,0000	0,8824	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9415
Einjährige Zinsstruktur	1,0000	1,0000	1,0000	0,9714	1,0000	0,9926	0,9935	1,0000	1,0000	0,5848	0,9532
<b>USA</b>											
<b>Männer</b>											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,0866	0,2381	0,1602	0,1429	0,2597	0,3377	0,2641	0,2338	0,4762	0,4156	0,5286
Einjähriger T-Bill-Satz	0,9048	0,8961	0,9264	0,7965	0,8658	0,8874	0,6450	0,7229	0,8918	0,5887	0,6381
<b>Frauen</b>											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,3473	0,3724	0,2258	0,1653	0,3845	0,3886	0,1899	0,2683	0,2823	0,3172	0,3599
Einjähriger T-Bill-Satz	1,0000	0,9855	1,0000	0,9785	1,0000	0,9947	0,4458	0,7609	0,9957	0,5968	0,9395
<b>Männer und Frauen</b>											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,1333	0,1900	0,1100	0,1200	0,2567	0,3433	0,2900	0,2200	0,4067	0,4267	0,5109
Einjähriger T-Bill-Satz	1,0000	0,9493	0,9900	0,9367	0,9867	0,9933	0,6467	0,6667	0,9467	0,5367	0,7572

Tabelle A.11: Mardias Test für die Zins- und Sterblichkeitsresiduen beim Stichtag 1. Juli und einem Konfidenzniveau von 10%

Land, Geschlecht und Zinssatz	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $\leq 5\%$ im t-Test bei einem Testtyp und Lag von ...										
	Linksseitig					Rechtsseitig					
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
DEUTSCHLAND											
Männer											
Einjährige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0000	0,0381	0,8417	0,0000	0,0000	0,0000	0,3524	0,0000	0,0441
Frauen	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7833	0,0000	0,0000	0,0000	0,8373	0,0000	0,0000
Männer und Frauen											
Einjährige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,8667	0,0000	0,0000	0,0000	0,7193	0,0000	0,0375
USA											
Männer											
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0786	0,1472	0,0000	0,0000
Frauen	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0742	0,6733	0,0081	0,0000
Männer und Frauen											
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1040	0,4329	0,0000	0,0000

Tabelle A.12: Hypothesenbasierte t-Tests für Zinsen und Sterblichkeit beim Stichtag 1. Januar und einem Konfidenzniveau von 5%

Land, Geschlecht und Zinssatz	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $\leq 10\%$ im t-Test bei einem Testtyp und Lag von ...										
	Linksseitig					Rechtsseitig					
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
DEUTSCHLAND											
Männer											
Einjährige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0000	0,1359	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5904	0,0000	0,1642
Frauen											
Einjährige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0000	0,0190	0,9565	0,0000	0,0000	0,0000	0,9133	0,0000	0,0141
Männer und Frauen											
Einjährige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0000	0,0762	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,8364	0,0000	0,0526
USA											
Männer											
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2100	0,3131	0,0000	0,0500
Frauen											
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1002	0,8974	0,0183	0,1020
Männer und Frauen											
Einjähriger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3123	0,7266	0,0000	0,0443

Tabelle A.13: Hypothesenbasierte t-Tests für Zinsen und Sterblichkeit beim Stichtag 1. Januar und einem Konfidenzniveau von 10%

Land, Geschlecht und Zinssatz		Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $\leq 5\%$ im t-Test bei einem Testtyp und Lag von ...										
		Linksseitig					Rechtsseitig					
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
DEUTSCHLAND												
Männer												
Sechsmonatige Zinsstruktur		0,0000	0,0000	0,0110	0,6381	0,8000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0330	0,0400
Einfährige Zinsstruktur		0,0000	0,0000	0,0000	0,4667	0,8167	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0330	0,0395
Frauen												
Sechsmonatige Zinsstruktur		0,0000	0,0000	0,0000	0,3048	0,3167	0,0000	0,0000	0,0000	0,0058	0,0412	0,0000
Einfährige Zinsstruktur		0,0000	0,0000	0,0000	0,3810	0,1917	0,0000	0,0000	0,4152	0,0000	0,0082	0,0000
Männer und Frauen												
Sechsmonatige Zinsstruktur		0,0000	0,0000	0,0000	0,5048	0,8083	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0292	0,0000
Einfährige Zinsstruktur		0,0000	0,0000	0,0000	0,4952	0,8000	0,0000	0,0000	0,0702	0,0000	0,0240	0,0000
USA												
Männer												
Dreimonatiger T-Bill-Satz		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0142	0,7244	0,0000	0,0000	0,0070	0,0000
Einfähriger T-Bill-Satz		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9860	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Frauen												
Dreimonatiger T-Bill-Satz		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0164	0,6752	0,0000	0,0000	0,0327	0,0000
Einfähriger T-Bill-Satz		0,0000	0,0000	0,0000	0,0031	0,0000	0,0000	0,9373	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Männer und Frauen												
Dreimonatiger T-Bill-Satz		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0260	0,8629	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Einfähriger T-Bill-Satz		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9960	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabelle A.14: Hypothesenbasierte t-Tests für Zinsen und Sterblichkeit beim Stichtag 1. Juli und einem Konfidenzniveau von 5%



Land, Geschlecht und Zinssatz	Anteil der Zeiträume mit einem p-Wert $\leq 10\%$ im t-Test bei einem Testtyp und Lag von ...										
	Linksseitig					Rechtsseitig					Zweiseitig
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
<b>DEUTSCHLAND</b>											
<b>Männer</b>											
Sechsmonatige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0549	0,9877	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0921	0,1111
Einfährige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0220	0,9012	0,9917	0,0000	0,0000	0,0583	0,0000	0,0933	0,0986
<b>Frauen</b>											
Sechsmonatige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0000	0,7810	0,8417	0,0000	0,0000	0,2398	0,3509	0,2143	0,0000
Einfährige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0220	0,8857	0,8500	0,0000	0,0000	0,5439	0,1579	0,1383	0,0000
<b>Männer und Frauen</b>											
Sechsmonatige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0659	0,8725	0,9833	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0994	0,0186
Einfährige Zinsstruktur	0,0000	0,0000	0,0330	0,8824	0,9833	0,0000	0,0000	0,3275	0,0000	0,0900	0,0184
<b>USA</b>											
<b>Männer</b>											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0641	0,5902	0,0000	0,0000	0,0312	0,0000
Einfähriger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0514	0,0000	0,0000	0,1073	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>Frauen</b>											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0183	0,7168	0,0000	0,0000	0,1076	0,0000
Einfähriger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0100	0,0031	0,0000	0,0000	0,9890	0,0000	0,0000	0,0034	0,0021
<b>Männer und Frauen</b>											
Dreimonatiger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0388	0,9310	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Einfähriger T-Bill-Satz	0,0000	0,0000	0,0303	0,0107	0,0000	0,0470	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabelle A.15: Hypothesenbasierte t-Tests für Zinsen und Sterblichkeit beim Stichtag 1. Juli und einem Konfidenzniveau von 10%

### A.2.1 Deutschland

Die deutschen Daten spiegeln die auf Basis der Hypothesen vermuteten Zusammenhänge bei leicht negativen Lags von minus zwei und minus eins und bei einem deutlich positiven Lag von drei wider. In den ersten beiden Fällen stellen sich die Korrelationen beim Zinsmodellstichtag des 1. Juli bzw. bei beiden Zinsmodellstichtagen als signifikant positiv heraus; im letzten Fall sind sie beim Zinsmodellstichtag des 1. Januar meist signifikant negativ.

Zwar verwirft der zweiseitige Test seine Nullhypothese auch beim Stichtag des 1. Juli und Lags zwei und drei bei einzelnen Zeitreihenpaaren, vor allem beim Sterblichkeitsindex für Frauen (vgl. Tabellen A.12 bis A.15). Allerdings scheint der Zusammenhang, durch bestimmte Startjahre verursacht zu sein, und besteht außerdem nur für einen vergleichsweise kleinen Teil der Indizes und Zinssätze, so dass man nur schwer von einer konsistenten und dauerhaft signifikanten Abhängigkeit sprechen kann. Bei den verbleibenden Lags zeigt sich auf den ersten Blick, dass die gemessenen Korrelationen nicht signifikant sind (ebd.).

Aus diesem Grund sind im Folgenden nur die Ergebnisse für Lags von minus zwei, minus eins und drei und die oben genannten Zinsmodellstichtage dargestellt.

#### A.2.1.1 Lag von minus zwei (Stichtag 1. Juli)

Bei einem Lag von minus zwei sollte der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Zinsen den Hypothesen zufolge positiv sein. Es wird daher ein rechtsseitiger t-Test durchgeführt.

Für den jeweils längstmöglichen Zeitraum lehnt dieser seine Nullhypothese bei allen Geschlechterspezifikationen bei einem Konfidenzniveau von 5%, meist auch von nur 1% ab (vgl. Tabelle A.16). Auch die Korrelationen von verkürzten Zeiträumen stellen sich bei einem Konfidenzniveau von 5% bzw. 10% zu über 30% bzw. 75% als signifikant positiv heraus (vgl. Tabellen A.14 bzw. A.15). Abbildung 5.14 auf S. 137 zeigt dies am Beispiel der sechsmonatigen Zinsstruktur und des Sterblichkeitsindex für Männer.

Zwischen den deutschen Zins- und Sterblichkeitsresiduen liegt daher bei einem Lag von minus zwei eine signifikant positive Abhängigkeit vor. Die gemessenen Korrelationen bewegen sich für den jeweils längstmöglichen Zeitraum zwischen 0,3867 und 0,4658; bei kürzeren Zeiträumen weisen sie eine größere Streuung auf.

#### A.2.1.2 Lag von minus eins

Auch bei einem Lag von minus eins sollte der Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Zinsen den Hypothesen zufolge positiv sein. Zur Überprüfung der Signifikanz der gemessenen

Korrelationen wird daher wieder ein rechtsseitiger t-Test durchgeführt.

Dieser lehnt beim *Zinsmodellstichtag des 1. Januar* seine Nullhypothese einer nicht positiven Korrelation sogar bei einem Konfidenzniveau von nur 1% bei allen Geschlechterspezifikationen für den jeweils längstmöglichen Zeitraum ab (vgl. Tabelle A.17). Auch die Korrelationen von verkürzten Zeiträumen stellen sich bei einem Konfidenzniveau von 5% bzw. 10% zu über 75% bzw. 95% als signifikant positiv heraus (vgl. Tabellen A.12 bzw. A.13). Abbildung 5.15 auf S. 138 zeigt dies am Beispiel der einjährigen Zinsstruktur und des Sterblichkeitsindex für Frauen.

Ähnliches gilt in nur leicht abgeschwächter Form auch für den *Zinsmodellstichtag des 1. Juli*. Hier sind die für den jeweils längstmöglichen Zeitraum gemessenen Korrelationen bei den Sterblichkeitsindizes von Männern sowie Männern und Frauen bei einem Konfidenzniveau von deutlich unter 5%, bei dem Sterblichkeitsindex von Frauen immerhin bei einem Konfidenzniveau von 10% signifikant positiv (vgl. Tabelle A.18). Bei den beiden erstgenannten Sterblichkeitsindizes gilt dies auch für mindestens 80% bzw. 95% der verkürzten Zeiträume (vgl. Tabellen A.14 und A.15). Stellvertretend für die anderen Zeitreihenpaare, zeigt dies auch Abbildung 5.16. Lediglich bei dem Sterblichkeitsindex für Frauen und einem Konfidenzniveau von 5% sind die Korrelationen bei einem deutlich geringeren Anteil an Zeiträumen signifikant positiv (vgl. Tabelle A.14).

Insgesamt sprechen die Ergebnisse deutlich für eine signifikant positive Korrelation zwischen den deutschen Sterblichkeits- und Zinsmodellresiduen bei einem Lag von minus eins. Die gemessenen Korrelationen bewegen sich für den längstmöglichen Zeitraum beim Stichtag des 1. Januar zwischen 0,4852 und 0,5289 und beim Stichtag des 1. Juli zwischen 0,2562 und 0,3642 (vgl. Tabellen A.17 bzw. A.18). Bei kürzeren Zeiträumen steigen im ersten Fall die Streuung und im zweiten Fall sowohl die Streuung als auch der Durchschnitt der gemessenen Werte. Dies zeigen auch die zuvor genannten Abbildungen.

#### **A.2.1.3 Lag von drei (Stichtag 1. Januar)**

Auch bei einem Lag von drei ist keine gerichtete Hypothese zum Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Zinsen möglich. Zur Überprüfung der Signifikanz der gemessenen Korrelationen wird daher ein zweiseitiger t-Test durchgeführt.

Sowohl für den längstmöglichen Zeitraum als auch für verkürzte Zeiträume von mindestens 20 Jahren werden ausschließlich negative Korrelationen gemessen. Sie sind zum größten Teil signifikant von null verschieden (vgl. Tabellen A.20 bzw. A.12 und A.13). Bei einem Konfidenzniveau von 5% bzw. 10% trifft dies beispielsweise auf zwischen 35,24% und 83,73%

bzw. auf zwischen 59,04% und 91,33% der Zeiträume zu (vgl. Tabellen A.12 bzw. A.13). Beim Sterblichkeitsindex von Männern sind die Korrelationen dabei seltener signifikant als für die anderen beiden Indizes und insbesondere den Sterblichkeitsindex für Frauen. Die Ergebnisse für letzteren sind in Abbildung 5.18 auf S. 143 dargestellt.

Insgesamt sollten die deutschen Zins- und Sterblichkeitsresiduen bei einem Lag von drei und dem Zinsmodellstichtag des 1. Januar daher als korreliert und abhängig gelten. Für den längstmöglichen Zeitraum bewegen sich die gemessenen Korrelationen dort zwischen  $-0,2685$  und  $-0,4108$ , die bei einem Konfidenzniveau von 10% signifikanten Korrelationen zwischen  $-0,3177$  und  $-0,4108$  (vgl. Tabelle A.20). Bei kürzeren Zeiträumen weisen sie eine größere Streuung auf und sind tendenziell stärker negativ.

## A.2.2 USA

Die amerikanischen Daten spiegeln die auf Basis der Hypothesen vermuteten Zusammenhänge nur bei einem Lag von eins und drei wider. Im ersten Fall stellen sich die Korrelationen beim Zinsmodellstichtag des 1. Juli i. d. R. als signifikant positiv, im zweiten Fall beim Zinsmodellstichtag des 1. Januar i. d. R. als signifikant negativ heraus.

Zwar lehnt der zweiseitige t-Test seine Nullhypothese auch bei einem Lag von zwei und dem Zinsmodellstichtag des 1. Januar bei einem Teil der analysierten Zeiträume ab (vgl. Tabellen A.12 bis A.15). Allerdings gelingt ihm dies – insbesondere bei den geschlechtsspezifischen Sterblichkeitsindizes – lediglich bei einem recht kleinen Teil der betrachteten Zeiträume und zudem nur bei solchen mit bestimmten Startjahren. Man kann daher nicht von einer dauerhaft signifikanten Korrelation sprechen. Bei den verbleibenden Lags zeigt sich auf den ersten Blick, dass die gemessenen Korrelationen nicht signifikant sind (ebd.).

Die folgende Darstellung beschränkt sich daher auf die Lags von eins und drei zum Stichtag des 1. Juli bzw. 1. Januar.

### A.2.2.1 Lag von eins (Stichtag 1. Juli)

Bei einem Lag von eins ist aufgrund gegenläufiger Effekte keine gerichtete Hypothese zum Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Zinsen möglich. Zur Überprüfung der Signifikanz der gemessenen Korrelationen wird daher ein zweiseitiger t-Test durchgeführt.

Die gemessenen Korrelationen sind fast ausschließlich positiv. Nach dem zweiseitigen t-Test sind sie sowohl beim jeweils längstmöglichen Zeitraum als auch bei dem größten Teil der verkürzten Zeiträume signifikant von null verschieden (vgl. Tabellen A.19 bzw. A.14 und A.15). Abbildung 5.17 auf S. 141 zeigt dies am Beispiel des einjährigen T-Bill-Satzes und

des Sterblichkeitsindex für Frauen.

Die Ergebnisse sprechen deutlich für eine positive Abhängigkeit der amerikanischen Sterblichkeits- und Zinsmodellresiduen bei einem Lag von eins und dem Zinsmodellstichtag des 1. Juli. Beim jeweils längstmöglichen Zeitraum bewegen sich die signifikanten Korrelationen zwischen 0,4493 und 0,5450. Bei kürzeren Zeiträumen weisen sie eine größere Streuung auf.

#### **A.2.2.2 Lag von drei (Stichtag 1. Januar)**

Auch bei einem Lag von drei ist keine gerichtete Hypothese zum Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Zinsen möglich. Zur Überprüfung der Signifikanz der gemessenen Korrelationen wird daher wieder ein zweiseitiger t-Test durchgeführt.

Ähnlich wie in Deutschland werden auch in den USA sowohl für den längstmöglichen Zeitraum als auch für verkürzte Zeiträume fast ausschließlich negative Korrelationen gemessen. Beim längstmöglichen Zeitraum sind sie bei einem Konfidenzniveau von 10% für den Sterblichkeitsindex von Frauen (vgl. Tabelle A.20), bei verkürzten Zeiträumen bei allen Sterblichkeitsindizes für einen beachtenswerten Teil der Zeiträume signifikant (vgl. Tabellen A.12 und A.13). Wie auch in Deutschland trifft letzteres bei dem Sterblichkeitsindex für Männer in geringerem Maße zu als bei den beiden anderen Indizes (ebd.). Das zeigen auch Abbildungen 5.19 und 5.20 auf S. 144 f.

Insgesamt sprechen die Ergebnisse für eine negative Abhängigkeit der amerikanischen Sterblichkeits- und Zinsmodellresiduen bei einem Lag von drei und dem Stichtag des 1. Januar. Die beim längstmöglichen Zeitraum signifikante Korrelation liegt bei  $-0,2670$ . Bei dem Sterblichkeitsindex von Frauen sowie dem gemeinsamen Sterblichkeitsindex von Männern und Frauen sind die Korrelation von kürzeren Zeiträumen tendenziell stärker negativ.

Land, Geschlecht und Zinssatz	Zeitraum	Bivariate Normalverteilung				Korrelation			
		Schiefe		Kurtosis		p-Werte		p-Werte - Test auf ...	
		Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert	Wert	≥ 0	= 0	≤ 0
DEUTSCHLAND									
Männer									
Sechsmonatige Zinsstruktur	1976-2008	2,3478	0,6721	-1,0651	0,2868	0,4554	0,9961	0,0077	0,0039
Einjährige Zinsstruktur	1976-2008	4,3268	0,3636	-1,3537	0,1758	0,3867	0,9869	0,0262	0,0131
Frauen									
Sechsmonatige Zinsstruktur	1976-2008	4,8440	0,3037	-0,4588	0,6464	0,4380	0,9946	0,0108	0,0054
Einjährige Zinsstruktur	1976-2008	5,2995	0,2579	-0,8221	0,4110	0,4222	0,9928	0,0144	0,0072
Männer und Frauen									
Sechsmonatige Zinsstruktur	1976-2008	3,4109	0,4916	-0,8168	0,4140	0,4658	0,9969	0,0063	0,0031
Einjährige Zinsstruktur	1976-2008	4,5385	0,3380	-1,2200	0,2225	0,4240	0,9930	0,0139	0,0070

Tabelle A.16: Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von -2 und dem Stichtag 1. Juli

Land, Geschlecht und Zinssatz	Zeitraum	Bivariate Normalverteilung				Korrelation			
		Schiefe		Kurtosis		Wert	p-Werte – Test auf ...		
		Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert				
DEUTSCHLAND									
Männer									
Einjährige Zinsstruktur	1975–2008	5,0606	0,2811	0,2904	0,7715	0,5289	0,9994	0,0013	0,0006
Frauen									
Einjährige Zinsstruktur	1975–2008	6,5589	0,1611	0,7825	0,4339	0,4852	0,9982	0,0036	0,0018
Männer und Frauen									
Einjährige Zinsstruktur	1975–2008	5,5269	0,2374	0,4730	0,6362	0,5425	0,9995	0,0009	0,0005

Tabelle A.17: Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von -1 und dem Stichtag 1. Januar

Land, Geschlecht und Zinssatz	Zeitraum	Bivariate Normalverteilung						Korrelation		
		Schiefe			Kurtosis			p-Werte – Test auf ...		
		Testwert	p-Wert	Testwert	Testwert	p-Wert	Wert	$\geq 0$	$= 0$	$\leq 0$
DEUTSCHLAND										
Männer										
Sechsmonatige Zinsstruktur	1975–2008	0,9659	0,9149	-0,2320	0,8166	0,3562	0,9807	0,0387	0,0193	
Einjährige Zinsstruktur	1975–2008	4,3303	0,3632	-0,5835	0,5596	0,3642	0,9829	0,0342	0,0171	
Frauen										
Sechsmonatige Zinsstruktur	1975–2008	0,6551	0,9567	-0,5508	0,5817	0,2562	0,9282	0,1436	0,0718	
1978–2008		4,4430	0,3494	-0,6441	0,5195	0,3175	0,9591	0,0818	0,0409	
Einjährige Zinsstruktur	1975–2008	3,9814	0,4085	-0,8194	0,4125	0,2565	0,9284	0,1432	0,0716	
1981–2008		3,7432	0,4419	-0,8408	0,4005	0,3410	0,9621	0,0757	0,0379	
Männer und Frauen										
Sechsmonatige Zinsstruktur	1975–2008	0,7172	0,9492	-0,3928	0,6945	0,3400	0,9754	0,0491	0,0246	
Einjährige Zinsstruktur	1975–2008	4,2846	0,3689	-0,7852	0,4323	0,3421	0,9762	0,0476	0,0238	

Tabelle A.18: Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von -1 und dem Stichtag 1. Juli



Land, Geschlecht und Zinssatz	Zeitraum	Bivariate Normalverteilung				Korrelation			
		Schiefe		Kurtosis		p-Werte – Test auf ...			
		Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert	Wert	$\geq 0$	$= 0$	$\leq 0$
<b>USA</b>									
<b>Männer</b>									
	1968–2007	10,7006	0,0301	1,6141	0,1065	0,3620	–	–	–
<b>Dreimonatiger T-Bill-Satz</b>	1973–2007	9,0371	0,0602	0,6820	0,4952	0,3579	0,9826	0,0348	0,0174
	1982–2007	6,4920	0,1653	–0,2399	0,8104	0,1235	0,7261	0,5477	0,2739
<b>Einjähriger T-Bill-Satz</b>	1968–2007	9,0823	0,0591	1,0855	0,2777	0,5356	0,9998	0,0004	0,0002
	1973–2006	7,4971	0,1118	0,1605	0,8725	0,5247	0,9993	0,0014	0,0007
<b>Frauen</b>									
	1955–2007	11,7576	0,0192	1,5406	0,1234	0,1558	–	–	–
<b>Dreimonatiger T-Bill-Satz</b>	1956–1995	9,3546	0,0528	1,3628	0,1729	0,2475	0,9382	0,1237	0,0618
	1986–2007	7,3888	0,1167	0,1843	0,8538	0,1162	0,6967	0,6067	0,3033
	1961–2007	11,7627	0,0192	1,0255	0,3051	0,4267	–	–	–
<b>Einjähriger T-Bill-Satz</b>	1961–2001	8,7301	0,0682	0,5469	0,5844	0,4493	0,9984	0,0032	0,0016
	1961–1997	7,7079	0,1029	0,4206	0,6740	0,4775	0,9986	0,0028	0,0014
<b>Männer und Frauen</b>									
	1965–2007	10,8431	0,0284	1,3206	0,1866	0,3221	–	–	–
<b>Dreimonatiger T-Bill-Satz</b>	1966–2003	9,2603	0,0549	0,7546	0,4505	0,4058	0,9943	0,0115	0,0057
	1984–2007	7,6152	0,1067	0,0731	0,9417	0,1240	0,7181	0,5638	0,2819
<b>Einjähriger T-Bill-Satz</b>	1965–2007	8,6831	0,0695	0,8027	0,4221	0,5104	0,9998	0,0005	0,0002
	1965–2004	7,3113	0,1203	0,9608	0,3366	0,5450	0,9999	0,0003	0,0001

Tabelle A.19: Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von 1 und dem Stichtag 1. Juli

Land, Geschlecht und Zinssatz	Zeitraum	Bivariate Normalverteilung				Korrelation			
		Schiefe		Kurtosis		Wert	p-Werte – Test auf ...		
		Testwert	p-Wert	Testwert	p-Wert		$\geq 0$	$= 0$	$\leq 0$
<b>DEUTSCHLAND</b>									
<b>Männer</b>									
Einjährige Zinsstruktur	1978–2010	5,8134	0,2135	0,5702	0,5686	-0,2685	0,0654	0,1309	0,9346
	1978–2008	4,5781	0,3334	0,1266	0,8993	-0,4348	0,0073	0,0145	0,9927
<b>Frauen</b>									
Einjährige Zinsstruktur	1974–2010	7,0407	0,1338	0,5765	0,5642	-0,4108	0,0058	0,0115	0,9942
<b>Männer und Frauen</b>									
Einjährige Zinsstruktur	1974–2010	5,7259	0,2206	0,6128	0,5400	-0,3177	0,0277	0,0553	0,9723
<b>USA</b>									
<b>Männer</b>									
Einjähriger T-Bill-Satz	1970–2009	8,7303	0,0682	0,9217	0,3567	-0,2517	0,0586	0,1172	0,9414
	1970–2003	8,1065	0,0878	-0,0805	0,9358	-0,3871	0,0119	0,0237	0,9881
	1972–2009	4,1182	0,3902	0,1094	0,9129	-0,1641	0,1624	0,3247	0,8376
<b>Frauen</b>									
Einjähriger T-Bill-Satz	1961–2009	6,0133	0,1982	1,0258	0,3050	-0,2670	0,0319	0,0637	0,9681
<b>Männer und Frauen</b>									
Einjähriger T-Bill-Satz	1967–2009	7,6347	0,1059	0,9380	0,3482	-0,2505	0,0526	0,1052	0,9474
	1967–2008	7,0009	0,1358	-0,0068	0,9946	-0,3681	0,0082	0,0165	0,9918

Tabelle A.20: Abhängigkeitsanalysen für Zinsen und Sterblichkeit bei einem Lag von 3 und dem Stichtag 1. Januar



# Literaturverzeichnis

- AHAMADA, I. (2004): A Complementary Test for the KPSS Test with an Application to the US Dollar/Euro Exchange Rate. *Economics Bulletin*, 3 (4), 1–5.
- AKAIKE, H. (1974): A New Look At the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 (6), 716–723.
- AMERIKS, J. & ZELDES, S. P. (K. A.): How Do Household Portfolio Shares Vary With Age? Arbeitspapier, The Vanguard Group, Inc., und Columbia Business School, New York, USA.
- ANDREWS, D. W. K. (1991): Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation. *Econometrica*, 59 (3), 817–858.
- ANG, A. & MADDALONI, A. (2005): Do Demographic Changes Affect Risk Premiums? Evidence From International Data. *Journal of Business*, 78 (1), 341–379.
- ARIAS, E. (2010): United States Life Tables, 2006. National Vital Statistics Reports Vol. 58, No. 21, U.S. Department of Health & Human Services, Centers for Disease Control and Prevention, Hyattsville, USA.
- BABEL, B., BOMSDORF, E. & SCHMIDT, R. (2007): Forecasting German Mortality Using Panel Data Proce. *Journal of Population Economics*, 21 (3), 541–555.
- BAKSHI, G. S., CAO, C. & CHEN, Z. (1997): Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *Journal of Finance*, 52 (5), 2003–2049.
- BAKSHI, G. S. & CHEN, Z. (1994): Baby Boom, Population Aging, and Capital Markets. *Journal of Business*, 67 (2), 165–202.
- BAQUET, C. R., HORM, J. W., GIBBS, T. & GREENWALD, P. (1991): Socioeconomic Factors and Cancer Incidence Among Blacks and Whites. *Journal of the National Cancer Institute*, 83 (8), 551–557.
- BARBARIN, J. (2008): Heath-Jarrow-Morton Modelling of Longevity Bonds and the Risk Minimization of Life Insurance Portfolios. *Insurance: Mathematics & Economics*, 43 (1), 41–55.

- BAUER, D. (2006): An Arbitrage-Free Family of Longevity Bonds. Arbeitspapier, Universität Ulm, Ulm, Deutschland.
- BAUER, D. (2008): Stochastic Mortality Modeling and Securitization of Mortality Risk. ifa-Schriftenreihe, Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften (ifa), Ulm, Deutschland.
- BAUER, D., BÖRGER, M. & RUSS, J. (2010): On the Pricing of Longevity-Linked Securities. *Insurance: Mathematics & Economics*, 46 (1), 139–149.
- BAUER, D., BÖRGER, M., RUSS, J. & ZWIESLER, H.-J. (2008): The Volatility of Mortality. Discussion Paper PI-0804, City University, Pensions Institute, London, Großbritannien.
- BAUER, D. & RUSS, J. (2006): Pricing Longevity Bonds Using Implied Survival Probabilities. Arbeitspapier, Universität Ulm und Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften (ifa), Ulm, Deutschland.
- BAYRAKTAR, E., MILEVSKY, M. A., PROMISLOW, S. D. & YOUNG, V. R. (2009): Valuation of Mortality Risk Via the Instantaneous Sharpe Ratio. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 33 (3), 676–691.
- BECKER, R. (1998): Die Verallgemeinerte Momentenmethode (Generalized Methods of Moments – GMM). Darstellung und Anwendung. Arbeitspapier Nr. 16, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Institut für Statistik und Ökonometrie, Mainz, Deutschland.
- BENGTSSON, T. (Hrsg.) (2007): Perspectives on Mortality Forecasting. V. Cohort Factors: How Conditions in Early Life Influence Mortality Later in Life, *Social Insurance Studies*, Bd. 5, Försäkringskassan, Stockholm, Schweden.
- BENGTSSON, T. & CHRISTENSEN, K. (Hrsg.) (2006): Perspectives on Mortality Forecasting. IV. Causes of Death, *Social Insurance Studies*, Bd. 4, Försäkringskassan, Stockholm, Schweden.
- VAN DEN BERG JETHS, A., HOOGENVEEN, R., DE HOLLANDER, G. & TABEAU, E. (2001): A Review of Epidemiological Approaches to Forecasting Mortality and Morbidity, Kap. 2, S. 33–56. In: TABEAU ET AL. (2001).
- BIFFIS, E. (2005): Affine Processes for Dynamic Mortality and Actuarial Valuations. *Insurance: Mathematics & Economics*, 37, 443–468.
- BIFFIS, E. & DENUIT, M. (2006): Lee-Carter Goes Risk-Neutral. *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, 69, 33–53.
- BIFFIS, E., DENUIT, M. & DEVOLDER, P. (2005a): Stochastic Mortality Under Measure Changes. Discussion Paper PI-0512, City University, Pensions Institute, London, Großbritannien.
- BIFFIS, E., DENUIT, M. & DEVOLDER, P. (2005b): Stochastic Mortality Under Measure Changes. Arbeitspapier, City University of London, London, Großbritannien, und Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgien.

- BIFFIS, E., DENUIT, M. & DEVOLDER, P. (2010): Stochastic Mortality Under Measure Changes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010 (4), 284–311.
- BIFFIS, E. & MILLOSOVICH, P. (2006): The Fair Value of Guaranteed Annuity Options. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 23–41.
- BLACK, F. (1976): The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, 3 (1–2), 167–179.
- BLACK, F. & KARASINKSI, P. (1991): Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. *Financial Analysts Journal*, July/August, 52–59.
- BLACK, F. & SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 (3), 637–654.
- BLAKE, D., CAIRNS, A. J. G. & DOWD, K. (2006a): Living with Mortality: Longevity Bonds and Other Mortality-Linked Securities. *British Actuarial Journal*, 12 (1), 153–228.
- BLAKE, D., CAIRNS, A. J. G., DOWD, K. & MACMINN, R. (2006b): Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation, and Hedging. *Journal of Risk and Insurance*, 73 (4), 647–672.
- BLAKE, D., DOWD, K. & CAIRNS, A. J. G. (2008): Longevity Risk and the Grim Reaper’s Toxic Tail: The Survivor Fan Charts. *Insurance: Mathematics & Economics*, 42, 1062–1066.
- BLOOMBERG (2008): Aktienkurse und Zinsen. Heruntergeladen am 11.12.2008.
- BODIE, Z., MERTON, R. C. & SAMUELSON, W. F. (1992): Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 16 (3–4), 427–449.
- BOOTH, H., MAINDONALD, J. & SMITH, L. (2002): Applying Lee-Carter Under Conditions of Variable Mortality Decline. *Population Studies*, 56, 325–336.
- BRACE, A., GĄTAREK, D. & MUSIELA, M. (1997): The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance*, 7 (2), 127–147.
- BRANGER, N. & MUCK, M. (2009): Keep on Smiling? Volatility Surfaces and the Price of Quanto Options When All Covariances are Stochastic. *Arbeitspapier*, Universität Münster, Münster, Deutschland, und Otto-Friedrich-Universität Bamberg, Bamberg, Deutschland.
- BRENNAN, M. J. & SCHWARTZ, E. S. (1980): Analyzing Convertible Bonds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15 (4), 907–929.
- BRENNER, M. H. (2005): Commentary: Economic Growth Is the Basis of Mortality Rate Decline in the 20th Century – Experience of the United States 1901–2000. *International Journal of Epidemiology*, 34 (6), 1214–1221.
- BRENNER, M. H. & MOONEY, A. (1983): Unemployment and Health in the Context of Economic Change. *Social Science & Medicine*, 17 (16), 1125–1138.

- BRIGO, D. & MERCURIO, F. (2006): *Interest Rate Models – Theory and Practice*. Springer, Berlin, Deutschland, 2. Auflage.
- BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A., MUSIOL, G. & MÜHLIG, H. (2008): *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Frankfurt am Main (Deutschland), 7. Auflage.
- BROUHNS, N., DENUIT, M. & VERMUNT, J. K. (2002): A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables. *Insurance: Mathematics & Economics*, 31, 373–393.
- BROWN, J. R., MITCHELL, O. S. & POTERBA, J. M. (2000): Mortality Risk, Inflation Risk, and Annuity Products. NBER Working Paper 7812, National Bureau of Economic Research, Cambridge, USA.
- BYRD, R. H., LU, P., NOCEDAL, J. & ZHU, C. (1995): A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 16 (5), 1190–1208.
- CAIRNS, A. J. G. (2006): *A Multifactor Generalisation of the Olivier-Smith Model for Stochastic Mortality*. Arbeitspapier, Maxwell Institute und Heriot-Watt University, Edinburgh, Großbritannien.
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D. & DOWD, K. (2006a): Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk. *Astin Bulletin*, 36 (1), 79–120.
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D. & DOWD, K. (2006b): A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73 (4), 687–718.
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D. & DOWD, K. (2008a): Modelling and Management of Mortality Risk: A Review. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2008 (2–3), 79–113.
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D., DOWD, K., COUGHLAN, G. D., EPSTEIN, D. & KHALAF-ALLAH, M. (2008b): Mortality Density Forecasts: An Analysis of Six Stochastic Mortality Models. Discussion Paper PI-0801, City University, Pensions Institute, London, Großbritannien.
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D., DOWD, K., COUGHLAN, G. D., EPSTEIN, D., ONG, A. & BALEVICH, I. (2009): A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data From England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13 (1), 1–35.
- CARNES, B. A. & OLSHANSKY, S. J. (2007): A Realist View of Aging, Mortality, and Future Longevity. *Population and Development Review*, 33 (2), 367–381.
- CARTER, L. R. & LEE, R. D. (1992): Modeling and Forecasting US Sex Differentials in Mortality. *International Journal of Forecasting*, 8, 393–411.

- CASELLI, G., VALLIN, J. & MARSILI, M. (2006): How Useful Are the Causes of Death When Extrapolating Mortality Trends. An Update. In: BENGTSSON & CHRISTENSEN (2006), S. 9–36.
- CATALANO, R. & BELLOWS, B. (2005): Commentary: If Economic Expansion Threatens Public Health, Should Epidemiologists Recommend Recession? *International Journal of Epidemiology*, 34 (6), 1212–1213.
- CATALANO, R., DOOLEY, D., WILSON, G. & HOUGH, R. (1993): Job Loss and Alcohol Abuse: A Test Using Data From The Epidemiologic Catchment Area Project. *Journal of Health & Social Behavior*, 34 (3), 215–225.
- CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A. & SANDERS, A. B. (1992): An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate. *Journal of Finance*, 47 (3), 1209–1227.
- CHEN, H. & COX, S. H. (2007): Modeling Mortality with Jumps: Transitory Effects and Pricing Implication to Mortality Securitization. Arbeitspapier, Georgia State University, Atlanta, USA, und University of Manitoba, Winnipeg, Kanada.
- CHHETRY, D., KIMELDORF, G. & ZAHEDI, H. (1986): Dependence Structures in Which Uncorrelatedness Implies Independence. *Statistics & Probability Letters*, 4, 197–201.
- COCHRANE, J. H. (2005): *Asset Pricing*. Princeton University Press, Princeton, USA, überarbeitete Auflage.
- CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION (2004): Projecting Future Mortality: A Discussion Paper. Working Paper 3, Institute and Faculty of Actuaries, London, Großbritannien.
- COOPER, R. S. (1993): Health and the Social Status of Blacks in the United States. *Annals of Epidemiology*, 3 (2), 137–44.
- COX, J. C. (1975): Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions. Arbeitspapier, Stanford University, Palo Alto, USA, Neudruck als COX (1996).
- COX, J. C. (1996): The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model. *Journal of Portfolio Management*, Sonderausgabe, 15–17.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. & ROSS, S. A. (1980): An Analysis of Variable Rate Loan Contracts. *Journal of Finance*, 35 (2), 389–403.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. & ROSS, S. A. (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53 (2), 385–408.
- COX, S. H. & LIN, Y. (2007): Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks. Arbeitspapier, Georgia State University, Atlanta, USA, und University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, USA.
- COX, S. H., LIN, Y. & WANG, S. S. (2006): Multivariate Exponential Tilting and Pricing Implications for Mortality Securitization. *Journal of Risk and Insurance*, 73 (4), 719–736.



- CURRIE, I. D. (2006): Smoothing and Forecasting Mortality Rates with P-Splines. Präsentation, Heriot Watt University.
- CURRIE, I. D., DURBÁN, M. & EILERS, P. H. C. (2004): Smoothing and Forecasting Mortality Rates. *Statistical Modelling*, 4, 279–298.
- CUTLER, D. M., DEATON, A. & LLERAS-MUNEY, A. (2006): The Determinants of Mortality. *Journal of Economic Perspectives*, 20 (3), 97–120.
- DAHL, M. (2004): Stochastic Mortality in Life Insurance: Market Reserves and Mortality-Linked Insurance Contracts. *Insurance: Mathematics & Economics*, 35, 113–136.
- DATASTREAM (2008): Aktienkurse und Zinsen. Heruntergeladen am 09.12.2008.
- DAWSON, P., BLAKE, D., CAIRNS, A. J. G. & DOWD, K. (2007): Completing the Survivor Derivatives Market. Discussion Paper PI-0712, City University, Pensions Institute, London, Großbritannien.
- DELBAEN, F. & SCHACHERMAYER, W. (1994): A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. *Mathematische Annalen*, 300, 463–520.
- DEUTSCHE BUNDESBANK (2010): Geldmarktsätze am Frankfurter Bankplatz und Zinsstrukturkurven für börsennotierte Bundeswertpapiere. Zeitreihendatenbank der Deutschen Bundesbank. Heruntergeladen am 03.08.2010.
- DICKEY, D. A. & FULLER, W. A. (1979): Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 74 (366), 427–431.
- DOBLHAMMER, G. (2007): The Month of Birth: Evidence for Declining but Persistent Cohort Effects in Lifespan. In: BENGTSSON (2007), S. 41–60.
- DOTHAN, L. U. (1978): On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, 6, 59–69.
- DOWD, K., BLAKE, D. & CAIRNS, A. J. G. (2008): The Facing Up to Uncertain Life Expectancy: The Longevity Fan Charts. Discussion Paper PI-0703, City University, Pensions Institute, London, Großbritannien.
- DOWD, K., BLAKE, D., CAIRNS, A. J. G. & DAWSON, P. (2006): Survivor Swaps. *Journal of Risk and Insurance*, 73 (1), 1–17.
- EGAMI, M. & YOUNG, V. R. (2007): Indifference Prices of Structured Catastrophe (CAT) Bonds. *Insurance: Mathematics & Economics*, 42 (2), 771–778.
- EHRlich, I. & LUI, F. T. (1991): Intergenerational Trade, Longevity, and Economic Growth. *Journal of Political Economy*, 99 (3), 1029–1059.
- EUROMONEY (2008): Insurance-linked Securities Offer Safety in Numbers. Zeitungsartikel vom 01.04.2008.

- FEHR, H. & JOKISCH, S. (2006): Demographischer Wandel und Internationale Finanzmärkte. *Perspektiven der Wirtschaftspolitik*, 7 (4), 501–517.
- FINKELSTEIN, A. & POTERBA, J. M. (2004): Adverse Selection in Insurance Markets: Policyholder Evidence From the U.K. Annuity Market. *Journal of Political Economy*, 112 (1), 183–208.
- FISCHER, T. (2004): An Axiomatic Approach to Valuation in Life Insurance. Arbeitspapier, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Deutschland.
- FISCHER, T. (2007): A Law of Large Numbers Approach to Valuation in Life Insurance. *Insurance: Mathematics & Economics*, 40, 35–57.
- FRIEDBERG, L. & WEBB, A. (2006): Life is Cheap: Using Mortality Bonds to Hedge Aggregate Mortality Risk. Discussion Paper PI-0613, City University, Pensions Institute, London, Großbritannien.
- GALLANT, A. R. (1987): *Nonlinear Statistical Models*. Wiley, New York, USA.
- GERDTHAM, U.-G. & JOHANNESSON, M. (2003): A Note on the Effect of Unemployment on Mortality. *Journal of Health Economics*, 22 (3), 505–518.
- GERDTHAM, U.-G. & RUHM, C. J. (2006): Deaths Rise in Good Economic Times: Evidence From the OECD. *Economics and Human Biology*, 4 (3), 298–316.
- GIRSANOV, I. V. (1960): On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures. *Theory of Probability and its Applications*, 5 (3), 285–301.
- GLASSERMAN, P. (2004): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, New York, USA.
- GOMPERTZ, B. (1825): On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513–583.
- GOODMAN, L. A. (1979): Simple Models for the Analysis of Association in Cross-Classifications Having Ordered Categories. *Journal of the American Statistical Association*, 74 (367), 537–552.
- GRANGER, C. W. J., HYUNG, N. & JEON, Y. (1998): Spurious Regressions With Stationary Series. Discussion Paper 98–25, University of California, San Diego.
- GRANGER, C. W. J. & NEWBOLD, P. (1974): Spurious Regressions in Econometrics. *Journal of Econometrics*, 2, 111–120.
- DE GREY, A. D. N. J. (2006): Extrapolaholics Anonymous: Why Demographers' Rejections of a Huge Rise in Cohort Life Expectancy in this Century are Overconfident. *Annals of the New York Academy of Science*, 1067, 83–93.

- HACKL, P. (2005): Einführung in die Ökonometrie. Pearson Studium, München (Deutschland).
- HALL, A. R. (2005): Generalized Method of Moments. Oxford University Press, New York, USA.
- HANSEN, L. P. (1982): Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, 50 (4), 1029–1054.
- HARRISON, J. M. & PLISKA, S. R. (1981): Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 215–260.
- HARTMANN, M. (1987): Past and Recent Attempts to Model Mortality at All Ages. *Journal of Official Statistics*, 3 (1), 19–36.
- HASSLER, U. (2003): Nonsense Regressions Due to Neglected Time-Varying Means. *Statistical Papers*, 44 (2), 169–182.
- HEATH, D., JARROW, R. & MORTON, A. (1992): Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60 (1), 77–105.
- HEATON, J. & LUCAS, D. J. (2000): Portfolio Choice and Asset Prices: The Importance of Entrepreneurial Risk. *Journal of Finance*, 55 (3), 1163–1198.
- HELFENSTEIN, R. & HOLZHEU, T. (2006): Securitization—New Opportunities for Insurers and Investors. *Sigma* 7/2006, Swiss Re.
- HELIGMAN, M. & POLLARD, J. H. (1980): The Age Pattern of Mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107, 49–80.
- HERSKIND, A. M., MCGUE, M., HOLM, N. V., SØRENSEN, T. I. A., HARVALD, B. & VAUPEL, J. W. (1996): The Heritability of Human Longevity: A Population-Based Study of 2872 Danish Twin Pairs Born 1870–1900. *Human Genetics*, 97 (3), 319–323.
- HESTON, S. L. (1993): A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6 (2), 327–343.
- HOBcraft, J., MENKEN, J. & PRESTON, S. (1982): Age, Period, and Cohort Effects in Demography: A Review. *Population Index*, 48 (1), 4–43.
- HULL, J. C. (2003): Options, Futures, and Other Derivatives. Prentice Hall, Upper Saddle River, USA, 5. Auflage.
- HULL, J. C. & WHITE, A. (1990): Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. *Review of Financial Studies*, 3 (4), 573–592.
- HUMAN MORTALITY DATABASE (2010): Sterblichkeitstabellen verschiedener Länder, 1751–2006. Human Mortality Database der University of California at Berkeley und des Max-Planck-Instituts für Demographische Forschung in Rostock. Heruntergeladen am 08.05.2010.

- IACHINE, I. A., HOLM, N. V., HARRIS, J. R., BEGUN, A. Z., IACHINA, M. K., LAITINEN, M., KAPRIO, J. & YASHIN, A. I. (1998): How Heritable Is Individual Susceptibility to Death? The Results of an Analysis of Survival Data on Danish, Swedish and Finnish Twins. *Twin Research*, 1 (4), 196–205.
- JAGANNATHAN, R. & KOCHERLAKOTA, N. R. (1996): Why Should Older People Invest Less In Stocks Than Younger People? *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 20 (3), 11–23.
- JAMSHIDIAN, F. (1997): LIBOR and Swap Market Models and Measures. *Finance and Stochastics*, 1, 293–330.
- JARQUE, C. M. & BERA, A. K. (1987): A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. *International Statistical Review*, 55 (2), 163–172.
- KEILMAN, N. (2003): Types of Models for Projecting Mortality. *Social Insurance Studies*, Bd. 1, S. 19–28, Riksförsäkringsverket, Stockholm, Schweden.
- KORN, R., NATCHEVA, K. & ZIPPERER, J. (2006): Langlebigkeitsbonds – Bewertung, Modellierung und Aspekte für deutsche Daten. *Blätter der DGVMF*, 27 (3), 397–418.
- KOTZ, S. & JOHNSON, N. L. (Hrsg.) (1985): *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Bd. 5. Wiley, New York, USA.
- KRIEGER, N. & FEE, E. (1994): Social Class: The Missing Link in U.S. Health Data. *International Journal of Health Services*, 24 (1), 25–44.
- KÜRSTEN, W. & NIETERT, B. (Hrsg.) (2006): *Kapitalmarkt, Unternehmensfinanzierung und rationale Entscheidungen – Festschrift für Jochen Wilhelm*. Springer, Berlin, Deutschland.
- KURIHARA, K. (Hrsg.) (1954): *Post-Keynesian Economics*. Rutgers University Press, New Brunswick, USA.
- LAWRENCE, J. H. & TOBIAS, C. A. (Hrsg.) (1956): *Advances in Biological and Medical Physics*, Bd. 4. Academic Press, New York, USA.
- LEE, R. (2000): The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications. *North American Actuarial Journal*, 4 (1), 80–93.
- LEE, R. & CARTER, L. R. (1992): Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87 (419), 659–671.
- LI, H., ZHANG, J. & ZHANG, J. (2007): Effects of Longevity and Dependency Rates on Saving and Growth: Evidence From a Panel of Cross Countries. *Journal of Development Economics*, 84 (1), 138–154.
- LIN, Y. & COX, S. H. (2005): Securitization of Mortality Risks in Life Annuities. *Journal of Risk and Insurance*, 72 (2), 227–252.

- LIN, Y. & COX, S. H. (2007): Longevity Risk, Rare Event Premia, and Securitization. Arbeitspapier, University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, USA, und University of Manitoba, Winnipeg, Kanada.
- LIN, Y. & COX, S. H. (2008): Securitization of Catastrophe Mortality Risks. *Insurance: Mathematics & Economics*, 42 (2), 628–637.
- LINDSTRÖM, M. & DAVEY SMITH, G. (2007): A Life Course Perspective to the Modern Secular Mortality Decline and Socio-Economic Differences in Morbidity and Mortality in Sweden. In: BENGTSSON (2007), S. 9–30.
- LIU, J. & PAN, J. (2003): Dynamic Derivative Strategies. *Journal of Financial Economics*, 69, 401–430.
- LJUNG, G. M. & BOX, G. E. P. (1978): On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, 65 (2), 297–303.
- LOLADZE, I. (2002): Rising Atmospheric CO<sub>2</sub> and Human Nutrition: Toward Globally Imbalanced Plant Stoichiometry? *Trends in Ecology & Evolution*, 17 (10), 457–461.
- LONGSTAFF, F. A. (1989): Temporal Aggregation and the Continuous-Time Capital Asset Pricing Model. *Journal of Finance*, 44 (4), 871–887.
- LORD, R., KOEKKOEK, R. & VAN DIJK, D. (2010): A Comparison of Biased Simulation Schemes for Stochastic Volatility Models. *Quantitative Finance*, 10 (2), 177–194.
- LÜTKEPOHL, H. (2004): Univariate Time Series Analysis, Kap. 2, S. 8–85. In: LÜTKEPOHL & KRÄTZIG (2004).
- LÜTKEPOHL, H. & KRÄTZIG, M. (Hrsg.) (2004): Applied Time Series Econometrics. Themes in Modern Econometrics, Cambridge University Press, Cambridge, Großbritannien.
- LUCIANO, E. & VIGNA, E. (2005): Non Mean Reverting Affine Processes For Stochastic Mortality. ICER Working Paper No. 4/2005, International Centre for Economic Research.
- LUDKOVSKI, M. & YOUNG, V. R. (2008): Indifference Pricing Of Pure Endowments and Life Annuities Under Stochastic Hazard and Interest Rates. *Insurance: Mathematics & Economics*, 42 (1), 14–30.
- MARDIA, K. V. (1985): 217–221, Kap. Mardia’s Test of Multinormality. Bd. 5 von KOTZ & JOHNSON (1985).
- MARTIN, L. G. & PRESTON, S. H. (Hrsg.) (1994): Demography of Aging. National Academy Press, Washington, D. C., USA.
- MCGINNIS, J. M. & FÖEGE, W. H. (1993): Actual Causes of Death in the United States. *Journal of the American Medical Association*, 270 (18), 2207–2212.

- MCGUE, M., VAUPEL, J. W., HOLM, N. V. & HARVALD, B. (1993): Longevity is Moderately Heritable in a Sample of Danish Twins Born 1870–1880. *Journal of Gerontology*, 48 (6), B237–B244.
- MERCURIO, F. & MORALEDA, J. M. (2000): An Analytically Tractable Interest Rate Model with Humped Volatility. *European Journal of Operational Research*, 120 (1), 205–214.
- MERTON, R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1), 141–183.
- MERTON, R. C. (1976): Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3 (1–2), 125–144.
- MILEVSKY, M. A. & PROMISLOW, S. D. (2001): Mortality Derivatives and the Option to Annuity. *Insurance: Mathematics & Economics*, 29, 299–318.
- MILEVSKY, M. A., PROMISLOW, S. D. & YOUNG, V. R. (2006): Killing the Law of Large Numbers: Mortality Risk Premiums and the Sharpe Ratio. *Journal of Risk and Insurance*, 73 (4), 673–686.
- MILTERSEN, K. R. & PERSSON, S.-A. (2006): Is Mortality Dead? Stochastic Forward Force of Mortality Rate Determined by No Arbitrage. *Arbeitspapier*, Norwegian School of Economics and Business Administration, Bergen, Norwegen.
- MILTERSEN, K. R., SANDMANN, K. & SONDERMANN, D. (1997): Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates. *Journal of Finance*, 52, 409–430.
- MIZUNO, T., SHU, I.-W., MAKIMURA, H. & MOBBS, C. (2004): Obesity Over the Life Course. *Science of Aging Knowledge Environment*, 24, re4.
- MODIGLIANI, F. (1986): Life Cycle, Individual Thrift, and the Wealth of Nations. *American Economic Review*, 76 (3), 297–313.
- MODIGLIANI, F. & BRUMBERG, R. (1954): Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data, S. 388–436. In: KURIHARA (1954).
- MUCK, M. (2007): Pricing Turbo Certificates in the Presence of Stochastic Jumps, Interest Rates, and Volatility. *Die Betriebswirtschaft*, 67 (2), 224–240.
- MUCK, M. (2010): Trading Strategies with Partial Access to the Derivatives Market. *Journal of Banking & Finance*, 34 (6), 1288–1298.
- MUCK, M. & RUDOLF, M. (2006): Derivatebewertung mit dem LIBOR-Marktmodell, S. 453–472. In: KÜRSTEN & NIETERT (2006).
- NELDER, J. A. & MEAD, R. (1965): A Simplex Algorithm for Function Minimization. *Computer Journal*, 7 (4), 308–313.

- NEUMAYER, E. (2004): Recessions Lower (Some) Mortality Rates: Evidence From Germany. *Social Science & Medicine*, 58 (6), 1037–1047.
- NEWKEY, W. K. & WEST, K. D. (1987): A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55 (3), 703–708.
- NIKODYM, O. (1930): Sur une Généralisation des Intégrales de M. J. Radon. *Fundamenta Mathematicae*, 15, 131–179.
- NYLÉN, L., VOSS, M. & FLODERUS, B. (2001): Mortality Among Women and Men Relative to Unemployment, Part Time Work, Overtime Work, and Extra Work: A Study Based on Data From the Swedish Twin Registry. *Occupational and Environmental Medicine*, 58 (1), 52–57.
- OECD (2005): Ageing and Pension System Reform. Implications for Financial Markets and Economic Policies. *Financial Market Trends Volume 2005, Supplement 1*, Organization for Economic Co-Operation and Development.
- OEHLER, A. & UNSER, M. (2002): *Finanzwirtschaftliches Risikomanagement*. Springer, Berlin (Deutschland), 2. Auflage.
- OEPPEL, J. & VAUPEL, J. W. (2002): Broken Limits to Life Expectancy. *Science*, 296, 1029–1031.
- OGURA, S., TACHIBANAKI, T. & WISE, D. (Hrsg.) (2001): *Aging Issues in the United States and Japan*. University of Chicago Press, Chicago, USA.
- OLIVIER, P. & JEFFERY, T. (2004): *Stochastic Mortality Models*. Präsentation bei der Society of Actuaries of Ireland am 20.10.2004.
- OLSHANSKY, S. J., CARNES, B. A. & CASSEL, C. (1990): In Search of Methuselah: Estimating the Upper Limits to Human Longevity. *Science*, 250 (4981), 634–640.
- OLSHANSKY, S. J., CARNES, B. A. & DÉSESQUELLES, A. (2001): Prospects for Human Longevity. *Science*, 291 (5508), 1491–1492.
- OLSHANSKY, S. J., PASSARO, D. J., HERSHOW, R. C., LAYDEN, J., CARNES, B. A., BRODY, J., HAYFLICK, L., BUTLER, R. N., ALLISON, D. B. & LUDWIG, D. S. (2005): A Potential Decline in Life Expectancy in the United States in the 21st Century. *New England Journal of Medicine*, 352 (11), 1138–1145.
- OTTEN, M. C., TEUTSCH, S. M., WILLIAMSON, D. F. & MARKS, J. S. (1990): The Effect of Known Risk Factors on the Excess Mortality of Black Adults in the United States. *Journal of the American Medical Association*, 263 (6), 845–50.
- PARKES, C. M., BENJAMIN, B. & FITZGERALD, R. G. (1969): Broken Heart: A Statistical Study of Increased Mortality Among Widowers. *British Medical Journal*, 1, 740–743.

- PELSSER, A. (2008): On the Applicability of the Wang Transform for Pricing Financial Risks. *Astin Bulletin*, 38 (1), 171–181.
- PERKS, W. (1932): On Some Experiments in the Graduation of Mortality Statistics. *Journal of the Institute of Actuaries*, 63, 12–57.
- POTERBA, J. M. (2004): Impact of Population Aging on Financial Markets in Developed Countries. *Economic Review* (Federal Reserve Bank of Kansas City), 2004 (Fourth Quarter), 43–53.
- POTERBA, J. M. & SAMWICK, A. (2001): Household Portfolio Allocation Over the Lifecycle, S. 65–103. In: OGURA ET AL. (2001).
- PRESTON, S. H. & TAUBMAN, P. (1994): Socioeconomic Differences in Adult Mortality and Health Status, Kap. 8, S. 279–318. In: MARTIN & PRESTON (1994).
- PROTTER, P. E. (2004): *Stochastic Integration and Differential Equations, Applications of Mathematics*, Bd. 21. Springer, Berlin, Deutschland, 2. Auflage.
- RENDLEMAN, R. J. & BARTTER, B. J. (1980): The Pricing of Options on Debt Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15 (1), 11–24.
- RENSHAW, A. E. & HABERMAN, S. (2003a): Lee-Carter Mortality Forecasting: A Parallel Generalized Linear Modelling Approach for England and Wales Mortality Projections. *Applied Statistics*, 52 (1), 119–137.
- RENSHAW, A. E. & HABERMAN, S. (2003b): Lee-Carter Mortality Forecasting with Age-Specific Enhancement. *Insurance: Mathematics & Economics*, 33, 255–272.
- RENSHAW, A. E. & HABERMAN, S. (2003c): On the Forecasting of Mortality Reduction Factors. *Insurance: Mathematics & Economics*, 32, 379–401.
- RENSHAW, A. E. & HABERMAN, S. (2006): A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors. *Insurance: Mathematics & Economics*, 38, 556–570.
- RITCHKEN, P. & SANAKARASUBRAMANIAN, L. (1995): The Pricing of Options on Debt Securities. *Mathematical Finance*, 5 (1), 55–72.
- ROGERS, R. G. (1992): Living and Dying in the U.S.A.: Sociodemographic Determinants of Death Among Blacks and Whites. *Demography*, 29 (2), 287–303.
- RUHM, C. J. (2000): Are Recessions Good For Your Health? *Quarterly Journal of Economics*, 115 (2), 617–650.
- RUHM, C. J. (2005): Healthy Living in Hard Times. *Journal of Health Economics*, 24 (2), 341–363.
- SAID, S. E. & DICKEY, D. A. (1984): Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika*, 71 (3), 599–607.



- SCHICH, S. (2008): Revisiting the Asset-Meltdown Hypothesis. *OECD Journal: Financial Market Trends*, 2008 (2), 209–222.
- SCHÖNBUCHER, P. J. (2003): *Credit Derivatives Pricing Models. Models, Pricing and Implementation*. Wiley, Chichester (Großbritannien).
- SCHRAGER, D. F. (2006): Affine Stochastic Mortality. *Insurance: Mathematics & Economics*, 38, 81–97.
- SCHWARZ, G. E. (1978): Estimating the Dimension of a Model. *Annals of Statistics*, 6 (2), 461–464.
- SCOTTI, V. & EFFENBERGER, D. (2007): Annuities: A Private Solution to Longevity Risk. *Sigma* 3/2007, Swiss Re.
- SHYU, D. & CHANG, C.-C. (K. A.): The Pricing of Securitization of Life Insurance Under Mortality Dependence. Arbeitspapier, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan.
- SMITH, A. (2005): Stochastic Mortality. Präsentation bei dem Workshop zum Interface between Quantitative Finance and Insurance des International Centre for the Mathematical Sciences, Edinburgh, Großbritannien, im April 2005.
- SORLIE, P. D., BACKLUND, E. & KELLER, J. B. (1995): US Mortality by Economic, Demographic, and Social Characteristics: The National Longitudinal Mortality Study. *American Journal of Public Health*, 85 (7), 949–956.
- TABEAU, E. (2001): A Review of Demographic Forecasting Models for Mortality, Kap. 1, S. 1–32. In: TABEAU ET AL. (2001).
- TABEAU, E., VAN DEN BERG JETHS, A. & HEATHCOTE, C. (Hrsg.) (2001): *Forecasting Mortality in Developed Countries. Insights From a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Niederlande.
- THE FEDERAL RESERVE SYSTEM (2010): Federal Funds Rate und Renditen einzelner Treasury Securities. Federal Reserve Statistical Release – H.15 Selected Interest Rates. Heruntergeladen am 03.08.2010.
- THE R DEVELOPMENT CORE TEAM (2010): *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Reference Index. R Foundation for Statistical Computing. Version 2.12.0.
- TULJAPURKAR, S. (2005): Future Mortality: A Bumpy Road to Shangri-La? *Science of Aging Knowledge Environment*, 14, pe9.
- TULJAPURKAR, S., LI, N. & BOE, C. (2000): A Universal Pattern of Mortality Decline in the G7 Countries. *Nature*, 405, 789–792.
- U.S. DEPARTMENT OF THE TREASURY (2011): Daily Treasury Yield Curve Rates. Resource Center – Data and Charts Center – Interest Rate Statistics. Heruntergeladen am 04.05.2011.

- VASIČEK, O. (1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 177–188.
- VAUPEL, J. W. (1997): Trajectories of Mortality at Advanced Ages, Kap. 2, S. 17–37. In: WACHTER & FINCH (1997).
- VAUPEL, J. W. (1998): Demographic Analysis of Aging and Longevity. *Demographic Trends and Economic Consequences*, 88 (2), 242–247.
- VAUPEL, J. W., CAREY, J. R., CHRISTENSEN, K., JOHNSON, T. E., YASHIN, A. I., HOLM, N. V., IACHINE, I. A., KANNISTO, V., KHAZAELI, A. A., LIEDO, P., LONGO, V. D., ZENG, Y., MANTON, K. G. & CURTSINGER, J. W. (1998): Biodemographic Trajectories of Longevity. *Science*, 280 (5365), 855–860.
- VOSS, M., NYLÉN, L., FLODERUS, B., DIDERICHSEN, F. & TERRY, P. D. (2004): Unemployment and Early Cause-Specific Mortality: A Study Based on the Swedish Twin Registry. *American Journal of Public Health*, 94 (12), 2155–2161.
- WACHTER, K. W. & FINCH, C. E. (Hrsg.) (1997): *Between Zeus and the Salmon. The Biodemography of Longevity*. National Academy Press, Washington, D. C., USA.
- WANG, S. S. (1996): Ordering Risk under PH-Transforms. *Insurance: Mathematics & Economics*, 18, 109–114.
- WANG, S. S. (2000): A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks. *Journal of Risk and Insurance*, 67 (1), 15–36.
- WANG, S. S. (2002): A Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks. *Astin Bulletin*, 32 (2), 213–234.
- WATKINS, S. (1985): Recession and Health – A Literature Review, S. 27–56. In: WESTCOTT ET AL. (1985).
- WESTCOTT, G., SVENSSON, P.-G. & ZÖLLNER, H. F. K. (Hrsg.) (1985): *Health Policy Implications of Unemployment*. World Health Organization, Kopenhagen, Dänemark.
- WILLETS, R. C. (2004): The Cohort Effect: Insights and Explanations. *British Actuarial Journal*, 10 (4), 833–877.
- WILLIAMS, D. R. & COLLINS, C. (1995): US Socioeconomic and Racial Differences in Health: Patterns and Explanations. *Annual Reviews in Sociology*, 21, 349–386.
- WILMOTH, J. R. (1993): *Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change*. Technischer Bericht, University of California, Berkeley, USA.
- WILMOTH, J. R. (1997): In Search of Limits, Kap. 3, S. 38–64. In: WACHTER & FINCH (1997).
- WILMOTH, J. R. (2000): Demography of Longevity: Past, Present, and Future Trends. *Experimental Gerontology*, 35, 1111–1129.

YOUNG, V. R. (2008): Pricing Life Insurance Under Stochastic Mortality Via the Instantaneous Sharpe Ratio. *Insurance: Mathematics & Economics*, 42, 691–703.

ZANETTI, A., SCHWARZ, S. & LINDEMUTH, A. (2007): Natural Catastrophes and Man-Made Disasters in 2006: Low Insured Losses. *Sigma* 2/2007, Swiss Re.